Ein Redehandlungskalkül: Folgern in *einer* Sprache[1]

Vortrag im Rahmen der Sektion Logik des XXII. Deutschen Kongresses für Philosophie

München September 2011

Moritz Cordes und Friedrich Reinmuth

1 Natürlich, ohne Kommentar

Lineare Kalküle des natürlichen Schließens haben nach gängiger Auffassung ein Problem: Wie wird der beim (erfolgreichen) gebrauchssprachlichen Ableiten unproblematische Zusammenhang zwischen Annahmen, Folgerungen, die im Ausgang von Annahmen gemacht werden, und Schlüssen, mit denen Annahmen getilgt werden, hergestellt? Dabei lassen sich zwei Lösungsstrategien unterscheiden: (i) Im Anschluss an GENTZEN, G: *Widerspruchsfreiheit* wird in jeder Zeile einer Ableitung vermerkt, von welchen Formeln man abhängt. Die Regeln in solchen Abhängigkeits-Kalkülen spezifizieren, wann man, gegeben die Gewinnung bestimmter Formeln in Abhängigkeit von bestimmten Formeln, welche (weiteren) Formeln in Abhängigkeit von welchen Formeln gewinnen darf, wobei eine Annahmeregel, die die Gewinnung jeder (geschlossenen) Formel in Abhängigkeit von dieser selbst erlaubt, die Basis bereitstellt. (ii) Im Anschluss an JAŚKOWSKI, S.: *Suppositions* werden bestimmte Formen von Unterbeweisen spezifiziert, deren Vorliegen Formeln und insbesondere Annahmen innerhalb der Gesamtableitung unverfügbar macht. Gewonnene Formeln hängen dann von allen Annahmen ab, die nicht durch Schließung eines Unterbeweises unverfügbar gemacht worden sind. Solche Unterbeweis-Kalküle arbeiten in der Regel mit graphischen oder kommentierenden Mitteln, um entsprechende Unterbeweise zu identifizieren.[2]

Aufbauend auf den Arbeiten von PETER HINST und GEO SIEGWART zur Pragmatisierung von Kalkülen des natürlichen Schließens[3] ist es jedoch möglich, unter Verfolgung der zweiten Lösungsstrategie einen Kalkül anzugeben, bei dem Ableitungen reine Folgen objektsprachlicher Sätze sind und ohne graphische oder andere Kommentarmittel auskommen.[4] Im Folgenden wird eine informelle Darstellung dieses Redehandlungskalküls gegeben.[5] Der Kalkül enthält in seiner Grundform neben einer Annahmeregel, die das Annehmen beliebiger Aussagen erlaubt, für jeden logischen Operator jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel. Abgesehen von der Regel der **I**dentitäts**e**inführung (IE), verlangen die Einführungs- und Beseitigungsregeln immer, dass bereits entsprechende Prämissen gewonnen wurden, d.h. verfügbar sind. So erlaubt etwa die Regel der **S**ubjunktor**b**eseitigung (SB), dass man Γ folgern darf, wenn Δ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ bereits verfügbar gemacht worden sind. Verfügbar gemacht werden Aussagen dabei, indem sie gefolgert oder angenommen werden.

Drei der Regeln, nämlich **S**ubjunktor**e**inführung (SE), **N**egator**e**inführung (NE) und **P**artikularquantor**b**eseitigung (PB), erlauben es ihrerseits, sich von gemachten Annahmen auch wieder zu befreien: Hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (SE); hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ Aussagen Γ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (NE); ist eine Partikularquantifikation $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ verfügbar und hat man im Ausgang von der repräsentativen Ersatzannahme $[\beta, \xi, \Delta]$ eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man Γ folgern und sich so von der gemachten Ersatzannahme befreien (PB). Die Befreiung von der jeweils gemachten Eingangsannahme wird dabei dadurch erreicht, dass mit der Anwendung von SE, NE und PB jeweils der gesamte Abschnitt von der entsprechenden Annahme an geschlossen, d.h. zu einem geschlossenen Abschnitt wird, womit dann sowohl die jeweiligen Eingangsannahmen als auch die unter dieser Annahme gewonnen Zwischenfolgerungen als Prämissen unverfügbar gemacht werden. Die SE-, NE- resp. PB-geschlossenen Abschnitte entsprechen dabei den in herkömmlichen Unterbeweis-Kalkülen mit SE, NE resp. PB assoziierten Unterbeweisen mit Zusatz der (an)schließenden Folgerung. Neben der Annahmeregel und den Regelpaaren für die logischen Operatoren enthält die hier präsentierte Fassung des Kalküls eine Wiederholungsregel, die den Schluss von einer bereits verfügbaren Aussage auf diese Aussage selbst erlaubt und bezogen auf die übrigen Regeln eine zulässige Regel darstellt.

Im Folgenden werden zunächst Präliminarien zur Grammatik, zu geschlossenen Abschnitten und zur Verfügbarkeit von Aussagen geklärt. Alsdann wird der Kalkül präsentiert. Nach einigen Bemerkungen zu Möglichkeiten, den hier verfolgten Ansatz zu erweitern, folgt abschließend ein Zusatz, in dem eine abschnittsfreie simultane Regulierung des Ableitungsbegriffs und der Verfügbarkeitsrede skizziert wird.

2 Satzfolgen, Abschnitte und Verfügbarkeit

Wir setzen eine pragmatisierte Sprache erster Stufe voraus, deren Inventar folgende Grundausdrücke umfasst: abzählbar unendlich viele Individuenkonstanten: c_0, c_1, c_2, …, abzählbar unendlich viele Parameter: x_0, x_1, x_2, …, abzählbar unendlich viele Variablen: x_0, x_1, x_2, …, für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl i abzählbar unendlich viele i-stellige Funktoren: $\mathrm{f}_{i.0}$, $\mathrm{f}_{i.1}$, $\mathrm{f}_{i.2}$, …, Prädikatoren: den 2-stelligen Identitätsprädikator (=) sowie für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl i abzählbar unendlich viele, von $\ulcorner = \urcorner$ verschiedene i-stellige Prädikatoren: $\mathrm{P}_{i.0}$, $\mathrm{P}_{i.1}$, $\mathrm{P}_{i.2}$, …, fünf Junktoren: Subjunktor ($\rightarrow$), Konjunktor ($\wedge$), Bisubjunktor ($\leftrightarrow$), Adjunktor ($\vee$) und Negator ($\neg$), zwei Quantifikatoren: Universalquantifikator ($\bigwedge$) und Partikularquantifikator ($\bigvee$), zwei Performatoren: Annahmeperformator (Sei) und Folgerungsperformator (Also), drei Hilfszeichen: $\ulcorner (\urcorner$, $\ulcorner , \urcorner$ und $\ulcorner) \urcorner$.

Terme, Formeln und die in einer Formel freien Variablen sind wie üblich definiert. Beispiele: $\ulcorner \mathrm{c}_0 \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{x}_3 \urcorner$, $\ulcorner x_2 \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{2.0}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2) \urcorner$ (Terme); $\ulcorner \mathrm{P}_{1.3}(x_5) \urcorner$, $\ulcorner (\bigvee x_5 \mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0)) \urcorner$ (Formeln). Geschlossene Terme sind Terme, die keine Variablen enthalten. Beispiele: $\ulcorner \mathrm{x}_0 \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{2.1}(\mathrm{x}_3, \mathrm{c}_0) \urcorner$. Geschlossene Formeln (bzw. Aussagen) sind Formeln, in denen keine Variable frei ist. Beispiele: $\ulcorner \bigwedge x_0 \mathrm{P}_{1.3}(x_0) \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{P}_{2.5}(\mathrm{x}_4, \mathrm{c}_5) \urcorner$. Σ ist genau dann ein Satz, wenn es einen Performator Ξ und eine Aussage Γ gibt, so dass $\Sigma = \ulcorner \Xi\ \Gamma \urcorner$; Γ ist dann die Satzaussage von $\ulcorner \Xi\ \Gamma \urcorner$. Beispiele: $\ulcorner$Sei $(\mathrm{P}_{1.6}(\mathrm{x}_4) \vee \mathrm{P}_{2.4}(\mathrm{c}_5, \mathrm{c}_7))\urcorner$, $\ulcorner$Also $\bigvee x_0 \bigvee x_3 \mathrm{P}_{2.4}(x_0, x_3)\urcorner$. Σ ist genau dann ein Annahmesatz für Γ, wenn Γ eine Aussage und $\Sigma = \ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ ist, und Σ ist genau dann ein Folgerungssatz für Γ, wenn Γ eine Aussage und $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ ist. Teilausdrücke, Teilterme und Teilformeln sind wie üblich definiert. Ist θ ein geschlossener Term, ξ eine Variable und μ ein Term oder eine Formel, dann sei das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in μ (kurz: $[\theta, \xi, \mu]$) identisch mit dem Ergebnis der Ersetzung von ξ durch θ an allen und nur den Stellen, an denen ξ in μ vorkommt, aber nicht in einer mit $\ulcorner \bigwedge \xi \urcorner$ oder $\ulcorner \bigvee \xi \urcorner$ beginnenden Teilformel von μ vorkommt. Beispiel: $[\ulcorner \mathrm{x}_1 \urcorner, \ulcorner x_0 \urcorner, \ulcorner (\mathrm{P}_{1.0}(x_0) \wedge \bigvee x_0 \mathrm{P}_{1.1}(x_0)) \urcorner] = \ulcorner (\mathrm{P}_{1.0}(\mathrm{x}_1) \wedge \bigvee x_0 \mathrm{P}_{1.1}(x_0)) \urcorner$. Im Folgenden werden äußere Klammern unterdrückt und für den Identitätsprädikator die Infixnotation verwendet.

$\mathfrak{H}$ ist eine Satzfolge genau dann, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_{k-1}$ ist. Dabei ist die leere Satzfolge von 0 Sätzen (also die leere Menge) ebenfalls eine Satzfolge. Ist $\mathfrak{H}$ eine nicht-leere Satzfolge, dann ist die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{A}$ ist genau dann ein Abschnitt von i bis j in einer Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen, wenn $i \leq j < k$ und $\mathfrak{A}$ den von i bis j reichenden Teil von $\mathfrak{H}$ bildet, d.h., wenn $\mathfrak{A}$ alle Zeilen ab einschließlich Zeile i bis einschließlich Zeile j von $\mathfrak{H}$ umfasst. Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und $l < k$, dann ist $\mathfrak{H}{\restriction}l$ (die Beschränkung von $\mathfrak{H}$ auf l) identisch mit der leeren Satzfolge, falls $l = 0$ oder identisch mit dem Abschnitt von 0 bis l-1 in $\mathfrak{H}$, falls $0 < l$. Ist $\mathfrak{H}$ eine Satzfolge, dann sei $\mathfrak{A}$ genau dann ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$, wenn es i, j gibt, so dass $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt von i bis j in $\mathfrak{H}$ ist. $\mathfrak{A}$ sei genau dann ein (echter) Teilabschnitt von $\mathfrak{B}$, wenn es ein $\mathfrak{H}$ und i, j und r, s gibt, so dass $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt von i bis j in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ ein Abschnitt von r bis s in $\mathfrak{H}$ ist und $i \leq r$ und $s \leq j$ (und $i < r$ oder $s < j$) ist. $\mathfrak{B}$ sei genau dann ein (echter) Anfangsabschnitt von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}$ ein (echter) Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$ ist, der mit derselben Zeile wie $\mathfrak{A}$ beginnt. Sodann gelte: Die Abschnitte $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n\text{-}1}$ folgen in $\mathfrak{H}$ aufeinander genau dann, wenn $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n\text{-}1}$ Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und für alle i, $j < n$ gilt: Wenn $i < j$, dann liegt das letzte Glied von $\mathfrak{A}_i$ vor dem ersten Glied von $\mathfrak{A}_j$. Man betrachte dazu die folgenden Satzfolgen, $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.3]}$, bei denen ausgewählte Abschnitte durch schwarze Klammern markiert wurden:

Beispiel [2.1]

0	Sei	$P_{1.0}(c_1) \leftrightarrow P_{1.1}(c_2)$			$\mathfrak{A}_2$
1	Sei	$P_{1.1}(c_2)$	$\mathfrak{A}_0$		
2	Also	$P_{1.0}(c_1)$			
3	Also	$P_{1.1}(c_2) \rightarrow P_{1.0}(c_1)$			
4	Sei	$P_{1.0}(c_1)$		$\mathfrak{A}_1$	
5	Also	$P_{1.1}(c_2)$			
6	Also	$P_{1.0}(c_1) \rightarrow P_{1.1}(c_2)$			
7	Also	$P_{1.1}(c_2) \leftrightarrow P_{1.0}(c_1)$			
8	Also	$(P_{1.0}(c_1) \leftrightarrow P_{1.1}(c_2)) \rightarrow (P_{1.1}(c_2) \leftrightarrow P_{1.0}(c_1))$			

Beispiel [2.2]

0	Sei	$\neg(P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1))$		$\mathfrak{B}_1$
1	Sei	$P_{1.1}(c_1)$	$\mathfrak{B}_0$	
2	Also	$P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1)$		
3	Also	$\neg(P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1))$		
4	Also	$\neg P_{1.1}(c_1)$		
5	Also	$P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1)$		
6	Also	$\neg\neg(P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1))$		
7	Also	$P_{1.1}(c_1) \vee \neg P_{1.1}(c_1)$		

Beispiel [2.3]

0	Sei	$\bigwedge x_0(\mathrm{P}_{1.1}(x_0) \rightarrow \mathrm{P}_{1.2}(x_0))$	$\mathfrak{C}_4$
1	Sei	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.2}(x_0)$	$\mathfrak{C}_3$
2	Sei	$\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	$\mathfrak{C}_2$
3	Sei	$\mathrm{P}_{1.1}(\mathrm{x}_0)$	$\mathfrak{C}_1$
4	Sei	$\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	$\mathfrak{C}_0$
5	Also	$\mathrm{P}_{1.1}(\mathrm{x}_0) \rightarrow \mathrm{P}_{1.2}(\mathrm{x}_0)$	
6	Also	$\mathrm{P}_{1.2}(\mathrm{x}_0)$	
7	Also	$\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.2}(x_0)$	
8	Also	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.2}(x_0)$	
9	Also	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	
10	Also	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	
11	Also	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	
12	Also	$\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.2}(x_0) \rightarrow \neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0)$	
13	Also	$\bigwedge x_0(\mathrm{P}_{1.1}(x_0) \rightarrow \mathrm{P}_{1.2}(x_0)) \rightarrow (\neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.2}(x_0) \rightarrow \neg\bigvee x_0\mathrm{P}_{1.1}(x_0))$	

Erläuterung: $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ sind Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$. $\mathfrak{A}_0$ ist etwa ein Abschnitt von 1 bis 3 und $\mathfrak{A}_1$ ein Abschnitt von 4 bis 6 in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$. $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ folgen in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ aufeinander, denn beide sind Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und das letzte Glied von $\mathfrak{A}_0$ liegt vor dem ersten Glied von $\mathfrak{A}_1$. Dagegen folgen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ nicht aufeinander in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, da etwa das letzte Glied von $\mathfrak{A}_1$ nach, nicht vor dem ersten Glied von $\mathfrak{A}_2$ liegt. Dagegen sind $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ echte Teilabschnitte von $\mathfrak{A}_2$. $\mathfrak{A}_2$ ist wiederum ein Anfangsabschnitt und damit ein Teilabschnitt von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, aber kein echter Teil- bzw. Anfangsabschnitt, sondern mit $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ identisch.

$\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ sind Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$, wobei $\mathfrak{B}_0$ einen echten Teilabschnitt von $\mathfrak{B}_1$ bildet, der weder das erste noch das letzte Glied von $\mathfrak{B}_1$ umfasst. $\mathfrak{B}_1$ bildet wiederum einen echten Anfangsabschnitt von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$, genauer ist $\mathfrak{B}_1$ identisch mit $\mathfrak{H}^{[2.2]}\upharpoonright 7$. $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ sind Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. $\mathfrak{C}_4$ ist ein Abschnitt von 0 bis 13 in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ und somit identisch mit $\mathfrak{H}^{[2.3]}\upharpoonright 14 = \mathfrak{H}^{[2.3]}$. Sodann gilt für alle $i \leq 3$: $\mathfrak{C}_i$ ist ein echter Teilabschnitt von $\mathfrak{C}_{i+1}$, wobei $\mathfrak{C}_i$ weder das erste noch das letzte Glied von $\mathfrak{C}_{i+1}$ umfasst.

Ist $\mathfrak{H}$ eine Satzfolge, dann gelte: <u>SE-artige Abschnitte in</u> $\mathfrak{H}$ sind solche Abschnitte in $\mathfrak{H}$, die mit einem Annahmesatz für eine Aussage Δ beginnen, bei denen eine Aussage Γ die Satzaussage der vorletzten Zeile bildet und die mit einem Folgerungssatz für $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ enden. Beispiele: $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. <u>NE-artige Abschnitte in</u> $\mathfrak{H}$ sind solche Abschnitte in $\mathfrak{H}$, die mit einem Annahmesatz für eine Aussage Δ beginnen, bei denen es ein Glied ab einschließlich des ersten Gliedes und vor dem letzten Glied gibt, so dass die Satzaussage dieses Gliedes identisch zur Negation der Satzaussage des vorletzten Gliedes ist oder die

Satzaussage des vorletzten Gliedes identisch zur Negation der Satzaussage dieses Gliedes ist, und die mit einem Folgerungssatz für $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ enden. Beispiele: $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_2$ in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. EA-artige Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind solche Abschnitte in $\mathfrak{H}$, bei denen die Satzaussage des unmittelbar vorhergehenden Gliedes eine Partikularquantifikation $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ ist, das erste Glied ein Annahmesatz für $[\beta, \xi, \Delta]$ ist, wobei β ein neuer Parameter ist, der in keinem vorhergehenden Glied und insbesondere auch in Δ nicht auftritt, eine Aussage Γ, in der β kein Teilterm ist, die Satzaussage des vorletzten Gliedes bildet und die mit einem Folgerungssatz für Γ enden. Beispiel: $\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. Hinweis: 'EA' ist eine Abkürzung für 'Ersatzannahme'.

Ist $\mathfrak{H}$ eine Satzfolge, so gelte weiter: Minimale geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind solche Abschnitte in $\mathfrak{H}$, die SE-, NE- oder EA-artige Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind, bei denen der eröffnende Annahmesatz den einzigen Annahmesatz bildet und für die kein echter Anfangsabschnitt ebenfalls ein SE-, NE- oder EA-artiger Abschnitt ist. Beispiele: $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{B}_0$ in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{C}_0$ in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. Für Satzfolgen $\mathfrak{H}$ lassen sich die geschlossenen Abschnitte in $\mathfrak{H}$ nun wie folgt induktiv definieren:

(i) Minimale geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$;

(ii) Sind $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ aufeinanderfolgende geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und existiert ein Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, für den gilt:
  a) $\mathfrak{A}$ ist ein SE-, NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$,
  b) $\mathfrak{B}_0$ ist ein echter Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$, der weder das erste noch das letzte Glied von $\mathfrak{A}$ umfasst,
  c) Alle Annahmesätze von $\mathfrak{A}$ mit Ausnahme des ersten liegen in einem $\mathfrak{B}_i$, das ein echter Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$ ist, der weder das erste noch das letzte Glied von $\mathfrak{A}$ umfasst, und
  d) Ist $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$, dann liegt ein Glied von $\mathfrak{A}$ ab einschließlich des ersten Gliedes und vor dem letzten Glied in keinem $\mathfrak{B}_i$ und die Satzaussage dieses Gliedes ist identisch zur Negation des vorletzten Gliedes oder die Satzaussage des vorletzten Gliedes ist identisch zur Negation der Satzaussage dieses Gliedes,
  e) kein Anfangsabschnitt von $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$,

  dann ist der kürzeste derartige Abschnitt ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$;

(iii) Sonst ist nichts ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Geschlossene (minimale) SE- resp. NE- resp. EA-artige Abschnitte werden als (minimale) SE- resp. NE- resp. PB-geschlossene Abschnitte angesprochen. Alle in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ markierten Abschnitte sind in diesen Satzfolgen geschlossene Abschnitte. $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ sind minimale SE-geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{B}_0$ ist ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{C}_0$ ist ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. $\mathfrak{A}_2$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, denn $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ sind aufeinanderfolgende geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und $\mathfrak{A}_2$ ist der einzige (und damit auch der kürzeste) Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, der für $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ die Bedingungen a) bis e) unter (ii) erfüllt, und $\mathfrak{A}_2$ ist ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$. $\mathfrak{B}_1$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$, denn $\mathfrak{B}_0$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{B}_1$ ist der einzige (und damit wiederum der kürzeste) Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$, der für $\mathfrak{B}_0$ die Bedingungen a) bis e) unter (ii) erfüllt, und $\mathfrak{B}_1$ ist ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.2]}$. $\mathfrak{C}_1$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$, denn $\mathfrak{C}_0$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ und $\mathfrak{C}_1$ ist der einzige Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$, der für $\mathfrak{C}_0$ die Bedingungen a) bis e) unter (ii) erfüllt – bei $\mathfrak{C}_2$ liegt etwa der $\mathfrak{C}_1$ eröffnende Annahmesatz nicht in $\mathfrak{C}_0$. Außerdem ist $\mathfrak{C}_1$ ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$. Analog ergibt sich, dass $\mathfrak{C}_2$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ ist und dass $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}_4$ SE-geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ sind.

Gleichzeitig gilt, dass nur die jeweils markierten Abschnitte geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ resp. $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ resp. $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ sind. Aus der Definition der geschlossenen Abschnitte ergibt sich nämlich, dass einerseits jeder geschlossene Abschnitt mit einem Annahmesatz beginnt, während andererseits ein Annahmesatz, der das erste Glied eines geschlossenen Abschnittes bildet, nicht das erste Glied eines weiteren, vom ersteren verschiedenen geschlossenen Abschnittes bildet. Da nun alle Annahmesätze in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ das erste Glied eines der bereits identifizierten geschlossenen Abschnitte bilden, gibt es damit keine weiteren geschlossenen Abschnitte in diesen Satzfolgen.

Ist $\mathfrak{H}$ eine Satzfolge von k Sätzen, dann gelte: Γ ist genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>bei</u> i <u>verfügbar</u>, wenn $i < k$, Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ bildet und die Zeile i von $\mathfrak{H}$ in keinem echten Anfangsabschnitt eines in $\mathfrak{H}$ geschlossenen Abschnittes liegt. D.h., Γ ist in $\mathfrak{H}$ genau dann bei einem $i < k$ verfügbar, wenn Γ die Aussage des Satzes in Zeile i ist und diese Zeile in allen geschlossenen Abschnitten in $\mathfrak{H}$ höchstens die letzte Zeile bildet. Γ sei sodann genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>verfügbar</u>, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei einem i verfügbar ist. Sodann sei Γ genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>bei</u> i <u>als Annahme</u> verfügbar, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist und der dortige Satz ein Annahmesatz für Γ ist. Γ sei genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>als Annahme verfügbar</u> (kurz: <u>eine in</u> $\mathfrak{H}$ <u>verfügbare Annahme</u>), wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei einem i als Annahme verfügbar ist. Sodann sei Γ genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>bei</u> i <u>als letzte Annahme verfügbar</u>, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei i als Annahme verfügbar ist und kein Δ in $\mathfrak{H}$ bei einem $l > i$ als Annahme verfügbar ist. Zuletzt sei Γ genau dann <u>in</u> $\mathfrak{H}$ <u>als letzte Annahme verfügbar</u>, wenn es ein i gibt, so dass Γ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist. Nach den hier gemachten Festlegungen ist die Konklusion einer Satzfolge $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ immer verfügbar, da die letzte Zeile von $\mathfrak{H}$ in keinem echten Anfangsabschnitt eines (geschlossenen) Abschnitts in $\mathfrak{H}$ liegen kann.

3 Regeln zum Redehandeln: Der Kalkül

Mit dem Redehandlungskalkül werden nun Regeln für das Annehmen und das Folgern etabliert, die letztendlich das Ableiten von Aussagen aus Aussagenmengen anleiten. Dazu ist vorbereitend zu bemerken: Ein Autor nimmt eine Aussage Γ an, indem er den Satz $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ äußert, und ein Autor folgert eine Aussage Γ, indem er den Satz $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ äußert. Ein Autor äußert die leere Satzfolge, indem er nichts äußert. Ein Autor äußert eine nicht-leere Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen, indem er nacheinander für jedes $i < k$ den Satz in Zeile i von $\mathfrak{H}$ äußert. Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und Σ ein Satz, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um Σ genau dann mit $\mathfrak{H}^*$ identisch, wenn $\mathfrak{H}^*$ eine Folge von k+1 Sätzen ist und $\mathfrak{H}^*\restriction k$ identisch mit $\mathfrak{H}$ und Σ der Satz in Zeile k von $\mathfrak{H}^*$ ist. Hat ein Autor eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen geäußert und ist Γ eine Aussage, dann setzt er $\mathfrak{H}$ durch die Annahme von Γ zu einer Folge von k+1 Sätzen fort, deren letztes Glied $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ ist, und er setzt $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ zu einer Folge von k+1 Sätzen fort, deren letztes Glied $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ ist.

Wie für pragmatisierte Kalküle des natürlichen Schließens üblich, gibt es eine Annahmeregel und für jeden der acht logischen Operatoren jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel. Zusätzlich zu diesen 17 Regeln gibt es eine Wiederholungsregel, die die Wiederholung bereits gewonnener Aussagen erlaubt und bezüglich der 17 anderen Regeln den Status einer zulässigen Regel hat. Die Anwendung aller Regeln macht die angenommene resp. gefolgerte Aussage verfügbar, und zwar als Konklusion der aus der Anwendung resultierenden Satzfolge. Drei der Regeln, SE, NE und PB, machen zusätzlich auch Aussagen unverfügbar. Die Anwendung dieser Regeln erzeugt SE- resp. NE- resp. PB-geschlossene Abschnitte, wodurch alle Aussagen ab einschließlich der Eingangsannahme des entsprechenden Abschnittes bis einschließlich der Konklusion der Ausgangsfolge unverfügbar gemacht werden. Umgekehrt macht die Anwendung der Annahmeregel die angenommene Aussage als Annahme verfügbar, von der man sich durch und nur durch Schließung eines entsprechenden SE-, NE- oder PB-geschlossenen Abschnittes wieder befreit. Es folgen nun die Regeln des um eine Wiederholungsregel erweiterten Redehandlungskalküls:

Annahmeregel (AR)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ eine Aussage ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Annahme von Γ fortsetzen.

Beispiele für die Anwendung von AR: Die Annahmen in den Zeilen 0, 1 und 4 von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, den Zeilen 0 und 1 von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und den Zeilen 0 bis 4 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Subjunktoreinführungsregel (SE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ in $\mathfrak{H}$ als letzte Annahme verfügbar ist und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ fortsetzen.

Beispiele für Folgerungen nach SE: Die Folgerungen in den Zeilen 3, 6 und 8 von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und den Zeilen 12 und 13 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Subjunktorbeseitigungsregel (SB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach SB: Die Folgerung in Zeile 6 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Konjunktoreinführungsregel (KE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ fortsetzen.

Konjunktorbeseitigungsregel (KB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ oder $\ulcorner\Gamma \wedge \Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Bisubjunktoreinführungsregel (BE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ und $\ulcorner\Gamma \rightarrow \Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach BE: Die Folgerung in Zeile 7 von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$.

Bisubjunktorbeseitigungsregel (BB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und dazu $\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$ oder $\ulcorner\Gamma \leftrightarrow \Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Beispiele für Folgerungen nach BB: Die Folgerungen in den Zeilen 2 und 5 von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$.

Adjunktoreinführungsregel (AE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, Δ, Γ Aussagen sind und Δ oder Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ fortsetzen.

Beispiele für Folgerungen nach AE: Die Folgerungen in den Zeilen 2 und 5 von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$.

Adjunktorbeseitigungsregel (AB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner$, $\ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \Gamma\urcorner$, $\ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Negatoreinführungsregel (NE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist und es ein j mit $i \leq j$ und eine Aussage Γ gibt, so dass Γ in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist oder aber $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ fortsetzen.

Beispiele für Folgerungen nach NE: Die Folgerungen in den Zeilen 4 und 6 von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und in den Zeilen 9 und 11 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Negatorbeseitigungsregel (NB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner\neg\neg\Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach NB: Die Folgerung in Zeile 7 von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$.

Universalquantoreinführungsregel (UE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, Δ eine Formel und ξ eine Variable ist und β ein Parameter ist, der weder in Δ noch in einer in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahme vorkommt, und $[\beta, \xi, \Delta]$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ fortsetzen.

Universalquantorbeseitigungsregel (UB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ ein geschlossener Term ist und $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $[\theta, \xi, \Delta]$ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach UB: Die Folgerung in Zeile 5 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Partikularquantoreinführungsregel (PE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ ein geschlossener Term, ξ eine Variable und Δ eine Formel ist und $[\theta, \xi, \Delta]$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach PE: Die Folgerung in Zeile 7 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Partikularquantorbeseitigungsregel (PB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, β ein Parameter ist, $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist, $[\beta, \xi, \Delta]$ in $\mathfrak{H}$ bei i+1 als letzte Annahme verfügbar ist, Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und β weder in einer Zeile m mit $m \leq i$, also insbesondere auch nicht in Δ, noch in Γ vorkommt, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Beispiel für eine Folgerung nach PB: Die Folgerung in Zeile 10 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

Identitätseinführungsregel (IE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\theta = \theta\urcorner$ fortsetzen.

Identitätsbeseitigungsregel (IB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ_0, θ_1 geschlossene Terme sind, ξ eine Variable und Δ eine Formel ist und $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und [θ_0, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von [θ_1, ξ, Δ] fortsetzen.

Wiederholungsregel (W)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Beispiele für eine Folgerungen nach W: Die Folgerungen in Zeile 3 von $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und in Zeile 8 von $\mathfrak{H}^{[2.3]}$.

$\mathfrak{H}$ <u>ist eine Ableitung von</u> Γ <u>aus</u> X genau dann, wenn es ein $k \neq 0$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen ist, X die Menge der in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahmen ist und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und wenn für alle $i < k$ gilt: Man darf $\mathfrak{H}\restriction i$ nach einer der aufgeführten Regeln zu $\mathfrak{H}\restriction i+1$ fortsetzen. $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann <u>ein Beweis für</u> Γ, wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus ∅ ist. Γ <u>ist eine deduktive Konsequenz von</u> X (kurz: $X \vdash \Gamma$) genau dann, wenn X eine Aussagenmenge ist und es ein $\mathfrak{H}$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus einem $Y \subseteq X$ ist. Beispiele: $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ sind Ableitungen der jeweiligen Konklusionen aus der leeren Menge und damit Beweise dieser Aussagen. $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 8$ ist eine Ableitung von $\ulcorner P_{1.1}(c_2) \leftrightarrow P_{1.0}(c_1)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.0}(c_1) \leftrightarrow P_{1.1}(c_2)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.3]}\restriction 12$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg\bigvee x_0 P_{1.1}(x_0)\urcorner$ aus $\{\ulcorner\bigwedge x_0(P_{1.1}(x_0) \rightarrow P_{1.2}(x_0))\urcorner, \ulcorner\neg\bigvee x_0 P_{1.2}(x_0)\urcorner\}$. Allgemein gilt: Ist $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X, dann ist jede nicht-leere Beschränkung von $\mathfrak{H}$ eine Ableitung der jeweiligen Konklusion aus einem $Y \supseteq X$, wobei Y die Menge der in der jeweiligen Beschränkung verfügbaren Annahmen ist.

Man beachte, dass die graphische Markierung nur zur Hervorhebung geschlossener Abschnitte in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, $\mathfrak{H}^{[2.2]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.3]}$ verwendet wurde und weder in der Definition der geschlossenen Abschnitte noch in einer der vorgelagerten oder nachfolgenden Definitionen noch in den Regeln eine Rolle spielt: Es handelt sich lediglich um eine Markierung zur einfacheren Bezugnahme. Ableitungen im hier präsentierten Kalkül sind Folgen von objektsprachlichen Sätzen. Die Sätze bestehen jeweils aus einem Performator und einer Aussage, wobei der Performator bestimmt, welche Redehandlung mit der Äußerung des betreffenden Satzes in der Objektsprache vollzogen wird. Im Gegensatz dazu bestehen Ableitungen in herkömmlichen Unterbeweis-Kalkülen aus objektsprachlichen Formelfolgen und einem – unter Umständen graphisch verfassten – Kommentar, der allererst die einzelnen Unterbeweise identifiziert.

4 Erweiterungen und Beschränkungen

Der hier gewählte Ansatz lässt sich in verschiedenen Hinsichten ausbauen. Zunächst kann der Kalkül ohne jegliche Veränderung in den Abschnitts- und Verfügbarkeitsdefinitionen um zulässige Regeln erweitert werden. Genauer: Gilt $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \vdash B$, dann kann der Redehandlungskalkül um eine zulässige Regel erweitert werden, die es erlaubt, bereits geäußerte Satzfolgen, in denen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ verfügbar sind, durch die Folgerung von B fortzusetzen. Des Weiteren lassen sich die von HINST und SIEGWART entwickelten Regularien für weitere Redehandlungen, wie etwa das Behaupten, das definitorische und axiomatische Setzen oder das Anziehen von Gründen, auch für diesen Ansatz ausnutzen.[6] Beispielhaft für die Einführung eines Anziehungsperformators, etwa ⌜Da⌝: Zunächst ist dazu die Performatorkategorie um ⌜Da⌝ zu erweitern. Die Definitionen, insbesondere auch der geschlossenen Abschnitte können beibehalten werden, die Verfügbarkeitsdefinition kann aber auch so angepasst werden, dass einmal angezogene Aussagen immer verfügbar bleiben. Sodann ist die Verwendung dieses Performators durch eine Erweiterung des Kalküls um Anziehungsregeln, die die Anziehung bestimmter, wie etwa axiomatisch oder definitorisch gesetzter Aussagen erlauben, zu regulieren. Die Annahme- und die Folgerungsregeln können unverändert benutzt werden. Ableitungs-, Beweis- und Konsequenzbegriffe können um zusätzliche Begrifflichkeiten ergänzt werden, die eine Unterscheidung zwischen rein logischen Ableitungen, Beweisen und Konsequenzverhältnissen und solchen, die nur unter den jeweils anziehbaren Aussagen bestehen, gestatten.

Zusätzliche Erweiterungsmöglichkeiten bestehen in der Einführung weiterer logischer Operatoren. Führt man etwa ⌜□⌝ als Junktor ein und passt die Formeldefinition entsprechend an, dann lässt sich beispielsweise PRAWITZ' S_4-Regulierungen dieses Redeteils[7] umsetzen, indem man (i) erlaubt, eine Satzfolge, in der Γ verfügbar ist und in der alle verfügbaren Annahmen die Gestalt ⌜□Δ⌝ haben, durch die Folgerung von ⌜□Γ⌝ fortzusetzen (Boxeinführung), und (ii) erlaubt, eine Satzfolge in der ⌜□Γ⌝ verfügbar ist, durch die Folgerung von Γ fortzusetzen (Boxbeseitigung).

Sodann lässt sich der hier gewählte Ansatz problemlos auf Sprachen zweiter Stufe übertragen. Umgekehrt lässt sich der vorgestellte klassische Kalkül aber nicht nur erweitern, sondern natürlich auch einschränken. Ersetzt man etwa NB durch eine Ex-Contradictione-Quodlibet-Regel, dann erhält man einen intuitionistischen Kalkül. Streicht man NB ersatzlos, so resultiert ein minimaler Kalkül.

5 Zusatz: Ohne Abschnitte

Die Verfügbarkeitsrede lässt sich alternativ auch ohne Rückgriff auf die Abschnittsbegrifflichkeiten und unter direkter Anbindung an die regelgemäße Fortsetzung von Satzfolgen (bzw. zusammen mit dieser) etablieren. Dazu kann man etwa, wie folgt, induktiv definieren, wann $\mathfrak{H}$ <u>eine Ableitung von</u> k <u>Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge</u> X <u>und der verfügbaren Annahmezeilenmenge</u> Y <u>ist</u>:

(i) Die leere Satzfolge ist eine Ableitung von 0 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $\emptyset$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $\emptyset$; und

(ii) Wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y ist, dann:

- (ii-i) Wenn Γ eine Aussage ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \cup \{k\}$; und
- (ii-ii) Wenn $Y \neq \emptyset$ und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $(X\backslash\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y\backslash\{\max(Y)\}$; und
- (ii-iii) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei $\max(Y) \leq i$, und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist und Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $(X\backslash\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y\backslash\{\max(Y)\}$; und
- (ii-iv) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei $\max(Y) = i$+1, Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und β ein Parameter ist, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in Γ vorkommt, und $\ulcorner\forall\xi\Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $[\beta, \xi, \Delta]$ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $(X\backslash\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y\backslash\{\max(Y)\}$; und
- (ii-v) Wenn $Y = \emptyset$ oder [B ist verschieden von der Subjunktion aus der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und der Konklusion von $\mathfrak{H}$ und [es gibt kein $i \in X$, so dass $\max(Y) \leq i$ und ein Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, oder B ist verschieden von der Negation der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$] und [es gibt kein $i \in X$, wobei $\max(Y) = i$+1, so dass es eine Formel Δ und einen Parameter β, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in der Konklusion von $\mathfrak{H}$ vorkommt, gibt, für die $\ulcorner\forall\xi\Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $[\beta, \xi, \Delta]$ die Satzaussage in Zeile max(Y) ist, oder B ist verschieden von der Konklusion von $\mathfrak{H}$]], und:

a) Wenn $i, j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Δ → B⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$; oder

b) Wenn $i, j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜Δ ∧ Γ⌝ ist; oder

c) Wenn $i \in X$ und die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ mit ⌜Δ ∧ B⌝ oder mit ⌜B ∧ Δ⌝ identisch ist; oder

d) Wenn $i, j \in X$ und ⌜Δ → Γ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Γ → Δ⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜Δ ↔ Γ⌝ ist; oder

e) Wenn $i \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$, Γ eine Aussage und B identisch mit ⌜Δ ∨ Γ⌝ oder ⌜Γ ∨ Δ⌝ ist; oder

f) Wenn $i, j, l \in X$ und ⌜Δ ∨ Γ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Δ → B⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und ⌜Γ → B⌝ die Satzaussage in Zeile l von $\mathfrak{H}$ ist; oder

g) Wenn $i \in X$ und ⌜¬¬B⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist; oder

h) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable und β ein Parameter ist, der weder in einer Zeile l von $\mathfrak{H}$ mit $l \in Y$ noch in Δ vorkommt, und [β, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜⋀ξΔ⌝ ist; oder

i) Wenn $i \in X$, θ ein geschlossener Term und ⌜⋀ξΔ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit [θ, ξ, Δ] ist; oder

j) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable, θ ein geschlossener Term, [θ, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜⋁ξΔ⌝ ist; oder

k) Wenn θ ein geschlossener Term und B identisch mit ⌜θ = θ⌝ ist; oder

l) Wenn $i, j \in X$ und Δ eine Formel und ξ eine Variable ist, θ_0, θ_1 geschlossene Terme sind und ⌜$\theta_0 = \theta_1$⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und [θ_0, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit [θ_1, ξ, Δ] ist; oder

m) Wenn $i \in X$ und B die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist;

dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Also B⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y; und

(iii) Sonst ist kein $\mathfrak{H}$ für irgendwelche k, X, Y eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y.

Erläuterung: Klausel (i) legt die Induktionsbasis fest. Klausel (iii) ist die Abschlussklausel. In Klausel (ii) werden zunächst in (ii-i) bis (ii-iv) die Fälle abgehandelt, in denen sich die verfügbaren Annahmezeilenmengen ändern: (ii-i) entspricht der Annahmeregel; (ii-ii) bis (ii-iv) entsprechen Subjunktoreinführung, Negatoreinführung und Partikularquantorbeseitigung. Der erste Teil von (ii-v) stellt eine Ausschlussklausel dar. Es wird ausgeschlossen, dass ein SE-, NE- oder PB-Szenario vorliegt. In den einzelnen Unterklauseln a) bis m) werden die verfügbaren Zeilenmengen und verfügbaren Annahmezeilenmengen der anderen regelgemäßen Fortsetzungsmöglichkeiten festgelegt. Diese Fortsetzungen sind auch dann regelgemäß (vgl. Kap. 3), wenn die Ausschlussklausel jeweils nicht erfüllt ist – nur ist dann eine entsprechende Fortsetzung gleichzeitig eine Fortsetzung nach (i-ii), (i-iii) oder (i-iv) und die Verfügbarkeiten ändern sich, ebenso wie auch bei der Charakterisierung der Verfügbarkeit durch geschlossene Abschnitte, dementsprechend.

Mit dieser Definition gilt dann für alle $\mathfrak{H}$, k: Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und $k \neq 0$, dann ist $\mathfrak{H}$ genau dann eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y, wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung der Konklusion von $\mathfrak{H}$ aus {Δ | Es gibt ein $i \in Y$ und Δ ist die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$} ist und für alle $i \in Y$ gilt: die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist in $\mathfrak{H}$ bei i als Annahme verfügbar und für alle $j \in X$ gilt: die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ ist in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar. Eine derartige Charakterisierung der Verfügbarkeitsrede ohne Rückgriff auf Abschnitte, aber mit direkter Anbindung an die regelgemäße Fortsetzung von Satzfolgen bietet sich insbesondere auch als Ausgangsbasis für propädeutische Fassungen des Kalküls an, da sie es erlaubt, die Regulierung der Verfügbarkeitsrede simultan mit der Einführung der Kalkül-Regeln vorzunehmen. Darüber hinaus trägt diese Fassung der Intuition Rechnung, dass nur regelgemäße Redehandlungen Aussagen verfügbar machen. Zu beachten ist allerdings, dass eine derartige Regulierung es erfordert, die Verfügbarkeitsdefinition zu verändern, wenn der Kalkül um weitere Regeln erweitert werden soll.

---

1 Wir danken PETER HINST, SEBASTIAN PAASCH und BARTOSZ WIĘCKOWSKI für wertvolle Hinweise zu früheren Fassungen dieses Textes.

2 Siehe dazu etwa PRAWITZ, D.: *Natural Deduction*, S. 101–102, und INDRZEJCZAK, A.: *Natural Deduction*:, S. 40–45. Einen Überblick über verschiedene Varianten geben PELLETIER, F.J.: *A Brief History of Natural Deduction* und *A History of Natural Deduction*. Bekannte Beispiele von Abhängigkeits-Kalkülen finden sich in SUPPES, P.: *Introduction to Logic* und LEMMON, E.J.: *Beginning Logic*. Typische Vertreter der Unterbeweis-Kalküle sind die auf FITCH, F.B.: *Symbolic Logic* zurückgehenden FITCH-Kalküle und der KALISH-MONTAGUE-Kalkül (*Logic*).

3 Siehe HINST, P.: *Pragmatische Regeln*, *Logischer Grundkurs*, *Logik* und SIEGWART, G.: *Vorfragen*, Kap. 4-6, *Denkwerkzeuge* und *Alethic Acts*.

4 Wir sehen darin eine Lösung des Problems, wie sich das natürliche Schließen durch Regeln regulieren lässt, welche sich nur auf "the external appearance of expressions" (JAŚKOWSKI, S.: *Suppositions*, S. 5) beziehen.

5 Für eine präzisere Darstellung, einen Adäquatheitsbeweis und weitere Literaturangaben siehe unsere umfangreichere Arbeit *Redehandlungskalkül*.

6 Siehe dazu neben der in Endnote 3 angegebenen Literatur auch Siegwart, G.: *Begriffsbildung*.

7 Siehe PRAWITZ, D.: *Natural Deduction*, S. 74.

Literaturverzeichnis

CORDES, M.; REINMUTH, F.: *Redehandlungskalkül* (2011): Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/.

FITCH, F.B.: *Symbolic Logic* (1952): Symbolic logic: an introduction. New York: Ronald Press.

GENTZEN, G.: *Schließen I* (1934): Untersuchungen über das logische Schließen I. In: Mathematische Zeitschrift, 39 (2), S. 176–210.

GENTZEN, G.: *Schließen II* (1935): Untersuchungen über das logische Schließen II. In: Mathematische Zeitschrift, 39 (3), S. 405–431.

GENTZEN, G.: *Widerspruchsfreiheit* (1936): Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. In: Mathematische Annalen, 112, S. 493–565.

HINST, P.: *Pragmatische Regeln* (1982): Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens. In: GETHMANN, C.F. (Hg.): Logik und Pragmatik. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 199–215.

HINST, P.: *Logischer Grundkurs* (1997/1998): Logischer Grundkurs I. Logische Propädeutik und Mengenlehre. WS 1997/1998. Ludwig-Maximiliams-Universität München.

HINST, P.: *Logik* (2009): Grundbegriffe der Logik. Typoskript München.

INDRZEJCZAK, A.: *Natural Deduction* (2010): Natural deduction, hybrid systems and modal logics. Dordrecht; London: Springer.

JAŚKOWSKI, S.: *Suppositions* (1934): On the Rules of Suppositions in Formal Logic. In: Studia Logica, 1, S. 5–32.

KALISH, D.; MONTAGUE, R.; MAR, G.: *Logic* (1980): Logic. Techniques of formal reasoning. 2. Aufl. San Diego, Ca: Harcourt Brace Jovanovich.

LEMMON, E.J.: *Beginning Logic* (1998): Beginning logic. 1st CRC Press reprint. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

PELLETIER, F.J.: *A Brief History of Natural Deduction* (1999): A Brief History of Natural Deduction. In: History and Philosophy of Logic, 20.1, S. 1–31.

PELLETIER, F.J.: *A History of Natural Deduction* (2001): A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks. 1999. In: WOODS, J.; BROWN, B. (Hgg.): Logical Consequence: Rival Approaches. Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy. Oxford: Hermes Science Publishing, S. 105–138.

PRAWITZ, D.: *Natural Deduction* (2006): Natural deduction: a proof-theoretical study. Unabridged republ. of the ed. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965. Mineola, NY: Dover Publ.

SIEGWART, G.: *Vorfragen* (1997): Vorfragen zur Wahrheit. München: Oldenbourg.

SIEGWART, G.: *Begriffsbildung* (1999): Begriffsbildung. In: Sandkühler, H. J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie. 2 Bände. Hamburg: Meiner, Bd. 1, S. 130–144.

SIEGWART, G.: *Denkwerkzeuge* (2002ff): Denkwerkzeuge. Eine Vorschule der Philosophie. http://www.phil.uni-greifswald.de/bereich2/philosophie/personal-1/professoren/prof-dr-geo-siegwart/skripte.html.

SIEGWART, G.: *Alethic Acts* (2007): Alethic Acts and Alethiological Reflection. An Outline of a Constructive Philosophy of Truth. In: SIEGWART, G.; GREIMANN, D. (Hgg.): Truth and speech acts. Studies in the philosophy of language. New York: Routledge, S. 41–58.

SUPPES, P.: *Introduction to Logic* (1999): Introduction to logic. Originally publ.: New York, Van Nostrand Reinhold, 1957. Mineola, NY: Dover Publ.