

Maria-Anna Bäuml:

## Die Bündelung und ihre Funktion für das Verständnis des Stellenwertsystems im 1. - 4. Schuljahr

### Moderner Mathematikunterricht — noch immer in der Diskussion

Eine nahezu unübersehbare Flut von Veröffentlichungen — sei es fachdidaktische Literatur, seien es Schulbücher, Zeitschriftenartikel oder Leserbriefe in der Presse — bewiesen und beweisen das permanente Interesse von Wissenschaftlern, Lehrern und Eltern an der Reform des mathematischen Unterrichts. Die Notwendigkeit der Reform bestreitet niemand, aber über die Ziele und Wege der Neugestaltung ist bis heute keine Einigung erreicht. *Heinz Griesel* (1) meint, daß viel Unruhe bzw. die mancherorts laut gewordene „totale“ Kritik an der Reform von einem *Mißverständnis* herrühre: der Gleichsetzung von „Mengenlehre“ und „Modernisierung des mathematischen Unterrichts in der Grundschule“.

Daß die Mengenlehre nur einen Aspekt des modernen Mathematikunterrichts darstellt, möge auch aus folgenden Ausführungen ersichtlich werden, in denen versucht wird, die Funktion der Bündelung für das Verständnis des Stellenwertsystems aufzuzeigen.

### Das Bündeln und die Zahldarstellung im Stellenwertsystem

Nach *Lukas* (2) bedeutet „bündeln“ die „Zusammenfassung überschaubarer kleiner Mengen zu einem Bündel und Aufstellung dieser Bündel in einer bestimmten Ordnung“. Es ist bemerkenswert, daß wir im Alltag bei Maßangaben oft Bündelungen und der Anschaulichkeit wegen sogar größtmögliche Bündelungen vollziehen (Beispiel: Ich bin etwa „90 km/Std.“ gefahren an Stelle von „mm/sec“-Angaben).

Für die Zahldarstellung in Stellenwertsystemen ist das Bündeln von Mengen als Grundlage zu sehen. Dabei sind folgende *Regeln* zu beachten (3):

1. Die Bündel bzw. Bündelbündel müssen *gleichmächtig* sein. Am Ende des Bündelungsprozesses ist ein System von Bündeln verschieden hoher Stufen entstanden.
2. Das größere Bündel ist jeweils *links* neben dem kleineren anzuordnen. Daraus resultieren in der Ziffernschreibweise die Stellenwerttafel („Zahlenhaus“).
3. Im Gegensatz zur linearen Zahldarstellung hat im Stellenwertsystem jede Zahl ihren unverrückbaren Platz. Der *Stellenwert* der Ziffer kennzeichnet die *Stufe der Bündelung*.
4. Durch den Standort der Ziffer in der Stellenwerttafel ist der *Wert* jeder Zahl festgelegt. Er wird durch die *Benennung* angegeben.
5. Die *Art der Bündelung* bestimmt die *Basis* des Ziffernsystems (2er-, 3er-, 4er-, . . . , 10er-, . . . Bündelung).
6. Je *kleiner* die *Gruppierungsmengen* sind, desto *weniger Zahlzeichen* braucht man und desto *längere Ziffernfolgen* entstehen.

# Aussagen zur Funktion der Bündelung im neuen Lehrplan für den Mathematikunterricht in der Grundschule (4)

Die Neufassung des Lehrplanes für den Mathematikunterricht in der Grundschule in Bayern tritt im Schuljahr 1974/75 in Kraft. Der Umgang mit Zahlen wird darin als Kernproblem gesehen, die Mengenlehre als eine sachlich und fachdidaktisch sinnvolle Methode betrachtet, die zur Gewinnung der Zahlbegriffe und Einübung in die Zahloperationen beiträgt, wenn sie sich auf „Erfahrungen im Umgang mit konkretem Material“ gründet. Für unseren Problembereich — das Bündeln und seine Funktion für das Verständnis des Stellenwertsystems — wurden Unterrichtsziele mit Erläuterungen in folgender Weise formuliert (5):

## 1. Jahrgangsstufe

*„4. Fähigkeit, Gegenstände bzw. grafische Elemente zu bündeln und die Anzahlen zu notieren*

Das Bündeln von Gegenständen und das Notieren der Bündelung geschieht zum Zweck des Gliederns von Mengen und zur Einführung in die Zahlnotation. In der 1. Jahrgangsstufe beschränkt sich das Bündeln auf niedere Bündelstufen (bis zur 2. Stufe).

Die Notierung muß auf die konkrete Handlung bezogen sein. Das Bündeln der Grundzahlen (3 oder 5) läßt das Prinzip deutlich werden. Zielpunkt ist das Bündeln im Zehnersystem.

Das Übertragen der Ergebnisse von einem System in ein anderes und ein Rechnen in anderen Systemen als dem Dezimalsystem sind nicht vorgesehen.

△ Der Grundgedanke der Bündelung kann auch in anderen Modellen (z. B. Stäbe) verwirklicht werden.

*7.1. Einblick in den dekadischen Aufbau des Zahlenraums bis 100*

Der Zahlenraum bis 100 wird eröffnet. Dies kann in Verbindung mit den Zielen 4. und 5.1 geschehen.

*7.2. Fähigkeit, zweistellige Zahlen richtig zu lesen und zu schreiben*

Darstellen dekadisch gegliederter Zahlen:  $\begin{array}{c|c} Z & E \\ \hline 3 & 9 \end{array}$  bzw. 39

Ein Zurückgehen auf anschauliche Modelle muß dem Kind jederzeit möglich sein. Addieren und Subtrahieren im Hunderterbereich ist Lernziel der 2. Jahrgangsstufe.“

## 2. Jahrgangsstufe

*„2.1. Fähigkeit, Gegenstände bzw. grafische Elemente zu bündeln und die Anzahlen zu notieren*

Das Bündeln von Gegenständen dient sowohl dem Gliedern von Mengen größerer Mächtigkeit als auch der Lösung von Problemen der Notierung und der Vorbereitung des Verständnisses des Stellenwertsystems. Im Mittelpunkt steht die Zehnerbündelung. Das Bündeln nach anderen Grundzahlen (3 oder 5) soll nicht dem Ausbau dieser Zahlssysteme als Selbstzweck dienen. Zum Charakterisieren der Positionen werden Namen für Objekte des jeweiligen Modells verwendet (Einzelne Schachteln — Kartons oder Würfel — Stange — Platte — Block). Das Entbündeln ist innerhalb des bekannten Zahlenraums zu berücksichtigen. Rechnen ist nur im Zehnersystem vorgesehen. Die Potenzschreibweise ist nicht anzustreben.

*2.2. Fähigkeit, Zahlen (bis 100) dekadisch zu gliedern*

Diese Fähigkeit erwächst aus dem Zusammenfassen von Gegenständen zu Zehnerbündeln, der Notierung der Anzahl solcher Bündel und der jeweils noch vorhandenen einzelnen

Gegenstände. (Beispiel: 37 Elemente ergeben 3 Zehnerbündel und 7 einzelne Elemente.)  
Notationen:

$$\frac{Z}{3} \mid \frac{E}{7}, 3 Z 7 E, 30 + 7$$

### 2.3. Fähigkeit, dekadisch dargestellte Zahlen zu schreiben und zu lesen

Da es auf konkrete Lernerfahrung wesentlich ankommt, darf auf das Bündeln von Gegenständen nicht verzichtet werden.

Den Einheiten der Währung (Pfennige, 10-Pfennig-Stücke, Markstücke) liegt das Prinzip des Bündelns zugrunde.

Übungen im Zählen und die Arbeit mit Geld können das Bündeln nicht ersetzen.“

## 3. Jahrgangsstufe

### „3.1. Fähigkeit, Zahlen verschieden darzustellen (dreistellige Ziffernfolgen)

Die Einsicht in den Aufbau des Stellenwertsystems wird durch den Wechsel der Grundzahl vertieft. Neben der Zahl 10 werden als Grundzahlen empfohlen: 3, 4, 5. Die Zahldarstellung muß dabei an konkrete Modelle gebunden bleiben (Bündeln, Tauschen usw.). Das dekadische Zahlssystem läßt sich auch mit Längen- und Währungseinheiten verdeutlichen.

### 3.2. Einsicht in den Aufbau des Stellenwertsystems

Zum Charakterisieren der Positionen werden anfangs noch Namen für Objekte des jeweiligen Modells verwendet (z. B. Einzelne — Schachteln — Kartons oder Würfel — Stange — Platte — Block). Später werden in den Spalteneingängen Zahlen verwendet. Im dekadischen System sind an Stelle der Zahlen 1 — 10 — 100 — 1000 bzw. 1 — 10 — 10 · 10 — 10 · 10 · 10 auch Buchstaben gebräuchlich E — Z — H — T.“

## 4. Jahrgangsstufe

### „1.1. Verstehen des Aufbaus des Stellenwertsystems

Zur Vertiefung des Verständnisses wird der Unterricht immer wieder an konkrete Modelle zur Zahldarstellung (Bündeln, Tauschen) anknüpfen. Mit vermehrter Stellenzahl gewinnen formale Darstellungshilfen an Bedeutung.

### 1.2. Fähigkeit, gleiche Zahlen in verschiedenen Systemen darzustellen

Nicht-dekadische Zahldarstellungen werden stets über die Grundzahl Zehn miteinander verglichen.

Rechnen in nicht-dekadischen Systemen ohne Bezug zu konkreten Modellen unterbleibt.“

Diese Formulierung der Unterrichtsziele zeichnet für die *methodische Verwirklichung* den Weg von der „*wirklichen Anschauung zur Abstraktion*“ und erst in einem späten Schritt von der „*Abstraktion zur Struktur*“. Das Bündeln von konkreten Gegenständen bzw. grafischen Elementen (Symbolen) ist in jeder Jahrgangsstufe der Grundschule die Grundlage für die Einsicht in die Zahlverhältnisse. Ob die Durchführung der Operationen auf der Handlungsebene mit Objekten aus der Umwelt des Kindes, mit selbstgefertigten Arbeitsmitteln oder mit strukturiertem Material (z. B. den Mehrsystem-Blöcken von Z. P. Dienes/Block — Platte — Stab — Würfel) geschieht, ist nur im Hinblick auf die Reifelage der Schüler bzw. die Klassensituation oder bezüglich der Möglichkeit zu kooperativem, differenzierendem Unterricht erwägenswert. Von der Sachstruktur her bieten sich viele Materialien an.

Das Bündeln mit verschiedenen Grundzahlen wird insgesamt als förderlich für die Einsicht in die Funktion der Stellenwerte betrachtet; aber auch noch in der 4. Jahrgangsstufe dominiert der Bezug zum Zehnersystem. Bündeln in

verschiedenen Systemen ist nicht Selbstzweck, sondern dient der Einsicht in das dekadische System und schafft damit eine wesentliche Voraussetzung für die Beherrschung der vier Grundrechnungsarten (z. B. sukzessives Bündeln und Entbündeln/Basis-(Zehner)überschreitung: Addition/Subtraktion—Stellenwert: Multiplikation/Division).

Als Beispiel für die unterrichtliche Durchführung sei hier das *Protokoll einer Unterrichtsstunde* zu Beginn des 4. Schuljahres angeführt (6).

Aus dem Verlauf wird ersichtlich, daß einzelne Phasen gemäß dem unterschiedlichen Abstraktionsniveau im ersten, zweiten oder dritten Schuljahr eingesetzt werden könnten. Voraussetzung ist nur die Kenntnis der Zahlbegriffe 1—10. Lt. Lehrplan sind unabdingbare unterrichtliche Schritte *das Konkretisieren, das Verbalisieren und das Symbolisieren*. Diese Phasen sind nicht in strenger Aufeinanderfolge, vielmehr in stetem Wechselverhältnis zu verstehen. Sie werden aber in bezug auf ihre Schwerpunktsetzung und wegen der Klarheit der Darstellung nacheinander dargestellt.

## Protokoll

### Unterrichtsverlauf

### Didaktischer Kommentar (LZ)

*Sachsituation:* Schulbeginn

Filzstifte werden hergestellt, verpackt, verschickt, verkauft — wie?

SS verpacken eine Menge von Stiften in verschiedene Plastiktäschchen (6er-Packungen, 10er-Packungen, 12er-Packungen ...)

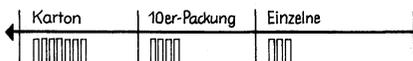
10er-Packungen werden zum Verschicken verpackt: jeweils 10 in einem Karton



Im Schreibwarengeschäft: Verkäuferin sieht den Vorrat,

schreibt auf: in Worten — grafisch

einzelne Stifte, Kartons, Packungen,



Chef kommt, kennt sich nicht aus (Deutung der Striche/Farben).

Bei größeren Anzahlen: Striche/Farben bieten keine Übersicht mehr — Verwendung

### I. Konkretisieren

Die SS sollen

1. *Elemente* einer Menge nach einer Grundeinheit *bündeln* (Grundeinheit je nach Sachsituation bzw. Form, Farbe, Größe, Platz als Unterscheidungskriterium);

2. die *gebündelten Mengen* in eine sinnvolle *Reihenfolge* bringen und erkennen, daß links das je größere Bündel angeordnet ist;

3. *dinglich* gebündelte Mengen und ihre Anordnung *grafisch* in eine *Tabelle* einordnen.

### II. Verbalisieren

1. Die *Spalten der Tabelle* mit sinnvollen *Bezeichnungen* versehen (Karton, 10er-Packung, Einzelne)

2. Die zeichnerische Darstellung durch *zeichen- und farbsymbolische Darstellung* ersetzen.

3. Den *Farbzeichen* ihren *Wert gemäß der Stelle* in der Tabelle zuordnen.

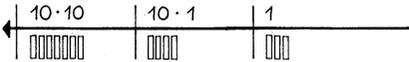
4. Den *Begriff Stellenwert* ableiten können.

### III. Symbolisieren

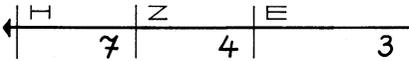
Die SS sollen

1. die *Bezeichnungen* der Tabellenspalten *durch Zahlwerte ersetzen* (bzw. Buchstaben beim Zehnersystem);

von Ziffern bzw. Buchstaben (E = Einzelne, Z = Zehner, H = Hunderter ...).



Kodieren und Dekodieren von Zahlen — Verkauf von Filzstiften: Einordnung der Anzahl in die Stellenwerttafel ... Notizen für die Nachbestellung ...



2. die *Farbzeichen* im Anschluß an die konkrete Darstellung *in Ziffern transponieren* und so die Zahleigenschaft gebündelter Mengen als Ziffernfolge darstellen;
3. den *Zahlenwert der Ziffern* von ihrer Stellung innerhalb der tabellarischen Anordnung her *deuten*;
4. *Zahlen* gemäß dem Aufbau des Stellenwertsystems *zerlegen* sowie mehrstellige Zahlen in das Zahlenhaus einordnen;
5. *mehrstellige Zahlen* im Zehnersystem *lesen* und *schreiben* können (besondere Beachtung der Zehnerstelle).

Zum Schluß soll nochmals *K. Lukas* zu Wort kommen, der ausgedehnte Schulversuche zur Bündelung durchgeführt hat. Er zieht folgendes Resümee: „Nach den erzielten praktischen Ergebnissen scheint der Weg über die Bündelung zu schnelleren und umfassenderen Rechenergebnissen zu führen. Da er außerdem vielseitigere Aufgabenstellungen ermöglicht, frühzeitig Begabungen erkennen läßt und so eine Differenzierung begünstigt, sollte eine systematische, umfassende Erprobung in größerem Ausmaß geraten erscheinen.“ (7)

In diesem Zusammenhang muß man auch die Aussage *Martin Wagenscheins* bedenken, daß der Mathematikunterricht ein beständiges Richtziel habe, den „*Vorrang des Verstehens vor der Bewältigung: die Entmystifizierung der Mathematik.*“ (8)

**Anmerkungen:**

1. *Griesel, Heinz:* Gegenwärtiger Stand und Tendenzen im Mathematikunterricht der Grundschule, in: Regionale Grundschulkongresse 73/74 — Lernbereich Mathematik, Prinzipien und Beispiele —. Frankfurt 1974
2. *Lukas, K.:* Rechnen in Bündelungen, in: Lebendige Schule 1972/11, S. 416
3. zum Folgenden vgl.:
  - Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule — Schulversuch in Nordrhein-Westfalen. Henn, Ratingen 1969, S. 140 ff.
  - Lukas, K.: a. a. O. S. 416 ff.
  - Maier, Hermann: Didaktik der Mathematik 1—9. Auer, Donauwörth 1972
  - Regionale Grundschulkongresse 73/74 — Lernbereich Mathematik, Prinzipien und Beispiele —. Frankfurt 1974
4. Lehrplan für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Bekanntmachung des Bayer. Staatsministeriums für Unterricht und Kultus vom 18. Juni 1974 Nr. III A 2—4/79700, in: Amtsblatt des Bayer. Staatsministeriums für Unterricht und Kultus B 1234A München 1974
5. Lehrplan a. a. O. S. 893 ff.
6. Ort: Regensburg, Grundschule Von-der-Tann, 4. Schuljahr; Zeit: Oktober 1972; Lehrkraft: M.-A. Bäuml
7. *Lukas, K.:* a. a. O. S. 425
8. *Wagenschein, Martin:* Der Vorrang des Verstehens — Zum Mathematisierenden Unterricht, in: Neue Sammlung 1974/2, S. 159