Arch. Math., Vol. 46, 125–135 (1986)

0003-889X/86/4602-0125 $ 3.70/0

Komplemente als direkte Summanden III

Von

Helmut Zöschinger

Einleitung. Eine kurze exakte Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ von R-Moduln heißt nach [5] *κ-exakt* (und $[E] \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ ein κ-Element), wenn $\mathrm{Bi}\,\alpha$ ein *Komplement* in B hat, d.h. ein minimales Element in der Menge $\{V \subset B \mid V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B\}$. Mit Hilfe der Tiefensequenz $t^G(x)$ eines Gruppenelementes $x \in G$ gaben wir in ([5] Theorem 5.2) für den Fall, daß $R = \mathbb{Z}$, C eine Torsionsgruppe und A torsionsfrei vom Rang 1 ist, eine Beschreibung der κ-Elemente in $G = \mathrm{Ext}(C, A)$. Ersetzt man darin die Tiefensequenz durch die übliche Höhensequenz $h^G(x)$, so ergibt sich – weil in jeder Gruppe $t^G(x) \leqq h^G(x)$ ist – ein „strengerer" Komplementbegriff, nämlich gerade der in Teil II eingeführte Begriff des H-Komplementes. Die Darstellung dieses überraschenden Zusammenhangs – daß die Unterscheidung zwischen Tiefe und Höhe gerade der zwischen Komplementen und H-Komplementen entspricht – und die Untersuchung von dadurch entstehenden Problemen ist Gegenstand dieses Teils III.

Dazu heiße E *δ-exakt* (und $[E] \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ ein δ-Element), wenn $\mathrm{Bi}\,\alpha$ ein *H-Komplement* V_0 in B hat, d.h. eine Zerlegung $V_0 \oplus W = B$ existiert, sodaß $\mathrm{Bi}\,\alpha$ und W dieselben Summanden in B haben (also genau dann $X + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$ ist, wenn $X + W = B$ ist). Mit der bei Höhensequenzen üblichen Klassenbildung $c\ell$ (siehe [2] S. 109) und dem Typ τ einer torsionsfreien Gruppe vom Rang 1 lautet das Hauptergebnis von Abschnitt 2:

(2.3) Ist C eine Torsionsgruppe und A torsionsfrei vom Rang 1, so sind für eine exakte Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ äquivalent:

(i) $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)$ ist ein δ-Element.

(ii) Falls $[E] \neq 0$, gilt $A/Ap \neq 0$ für alle p und $c\ell\; h^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqq \tau(A)$.

Ein Vergleich mit ([5] Satz 5.6) zeigt, daß (ii) weiter äquivalent ist mit

(iii) $\mathrm{Bi}\,\alpha$ hat in jeder reinen Zwischengruppe $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset X \subset B$ ein Komplement.

Beim Versuch, die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) auch ohne den Umweg über (ii) und [5] zu beweisen, zeigt sich, daß (iii $\to$ i) ohne Voraussetzungen an C und A ungültig wird, während (i $\to$ iii) für beliebige Gruppen gilt, ja sogar $R = \mathbb{Z}$ durch jeden Dedekindring ersetzt werden kann:

(2.5) Sei R ein Dedekindring, M ein R-Modul und V_0 ein H-Komplement von U in M. Dann gilt für jeden reinen Zwischenmodul $U \subset X \subset M$, daß $V_0 \cap X$ ein Komplement von U in X ist.

Es ist nicht klar, ob unter diesen Voraussetzungen $V_0 \cap X$ schon ein H-Komplement von U in X ist. Wir können das zeigen, falls U endlich erzeugt oder torsionsfrei vom Rang 1 ist (3.5) oder falls R semilokal ist (3.7).

Stets ist in dieser Arbeit R ein Dedekindring, kein Körper, und Ω die Menge aller maximalen Ideale. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ und einen Untermodul U von M ist $\mathfrak{a}_M^{-1}(U) = \{x \in M \mid xr \in U \text{ für alle } r \in \mathfrak{a}\}$, und statt $\mathfrak{a}_M^{-1}(0) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$ schreiben wir $M[\mathfrak{a}]$. Für $\mathfrak{p} \in \Omega$ ist $\mathfrak{p}\text{-dim}(M) = \dim_{R/\mathfrak{p}}(M[\mathfrak{p}])$ und $\mathfrak{p}\text{-Rang}(M) = \dim_{R/\mathfrak{p}}(M/M\mathfrak{p})$. Zwei Untermoduln U und W von M heißen *äquivalent* in M (in Zeichen $U \sim W$), wenn sie dieselben Summanden in M haben. Genau dann besitzt also U ein H-Komplement in M, wenn es einen direkten Summanden W in M gibt (in Zeichen $W \subset {}^{\oplus}M$) mit $U \sim W$.

1. *H*-Komplemente über nicht-lokalen Dedekindringen. Es sollen die in Teil II formulierten Eindeutigkeitsaussagen für H-Komplemente und der Zusammenhang mit beschränkten Untermoduln auch im nicht-lokalen Fall bewiesen werden. Vor allem das Ergebnis (1.3) wird im folgenden ständig benützt: Ist V ein H-Komplement von U in M und U rein in M, so folgt $V \oplus U = M$.

Hilfssatz 1.1. *Sei M ein koatomarer R-Modul, $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal und $H_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} M\mathfrak{a}^i$. Dann gilt $H_{\mathfrak{a}}(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}} T_{\mathfrak{p}}(M)$.*

Beweis. Ein Modul M heißt *koatomar*, wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul liegt, d.h. wenn jeder Faktormodul von M reduziert ist. Nach ([7] Lemma 1.1) gilt dann für jedes $x \in H_{\mathfrak{a}}(M)$, daß xR $\mathfrak{a}$-teilbar ist, also $x \in T(M)$ und $T_{\mathfrak{p}}(xR)$ für alle $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ sogar teilbar, also Null ist, d.h. $x \in \bigoplus_{\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}} T_{\mathfrak{p}}(M)$. Weil umgekehrt die betrachtete direkte Summe $\mathfrak{a}$-teilbar ist, liegt sie natürlich in $H_{\mathfrak{a}}(M)$.

Bemerkung. Für jeden R-Modul M sei $H(M) = \bigcap_{r \neq 0} Mr$, und dafür zeigt man $H(M) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega} H_{\mathfrak{p}}(M)$. Falls nun M koatomar ist, wird $H_{\mathfrak{p}}(M)$ torsionsvoll mit $\mathfrak{p}$-Komponente Null, und damit sogar $H(M) = 0$.

Lemma 1.2. *Sei V ein H-Komplement von U in M und $X \subset U$.*

(a) *Ist X $\mathfrak{p}$-rein in M, so ist $V \cap X$ torsionsvoll mit $\mathfrak{p}$-Komponente Null.*
(b) *Ist X rein in M, so ist $V \cap X = 0$.*

Beweis. Nur (a) ist zu zeigen, und dazu sei $V \oplus W = M$ mit $U \sim W$. Aus $(U + W)/W$ klein in M/W folgt $U \subset M\mathfrak{p} + W = V\mathfrak{p} \oplus W$, daraus $U\mathfrak{p}^i \subset V\mathfrak{p}^{i+1} \oplus W\mathfrak{p}^i$ und $V \cap U\mathfrak{p}^i \subset V\mathfrak{p}^{i+1}$ für alle $i \geqq 0$. Weil X $\mathfrak{p}$-rein in M ist, erhält man induktiv $V \cap X \subset X\mathfrak{p}^i$ für alle $i \geqq 0$, d.h. $V \cap X \subset H_{\mathfrak{p}}(X)$.

Dasselbe Argument gilt auch in $\tilde{M} = M/X \cap W$, denn wieder ist $\tilde{V}$ ein H-Komplement von $\tilde{U}$ und $\tilde{X}$ $\mathfrak{p}$-rein, also $\tilde{V} \cap \tilde{X} \subset H_{\mathfrak{p}}(\tilde{X})$. Aber zusätzlich ist jetzt $\tilde{X}$ koatomar (als Faktor des kleinen Untermoduls $(U + W)/W$), also nach (1.1) $\tilde{V} \cap \tilde{X}$ torsionsvoll mit $\mathfrak{p}$-Komponente Null. Wegen $\tilde{V} \cap \tilde{X} \cong V \cap X$ folgt die Behauptung. – Ein Spezialfall von (b) ist:

Folgerung 1.3. *Ist V ein H-Komplement von U in M und U rein in M, so folgt $V \oplus U = M$.*

Die Eindeutigkeitsaussagen des folgenden Satzes wurden im lokalen Fall in [8] mit Hilfe der Austauscheigenschaft von kleinen Untermoduln bewiesen. Die steht im nichtlokalen Fall nicht mehr zur Verfügung, aber mit (1.3) ergibt sich leicht:

Satz 1.4. *Sei V ein H-Komplement von U in M.*

(a) *Ist V_1 ein weiteres H-Komplement von U in M, so gilt $V_1 \cong V$ und $M/V_1 \cong M/V$.*
(b) *Besitzt U irgendein starkes Komplement in M, so ist bereits V eines.*

Beweis. (a) Aus $V \oplus W = M$ und $U \sim W$ folgt, daß V_1 auch ein H-Komplement von W in M ist, also nach (1.3) $V_1 \oplus W = M$. Damit sind beide Isomorphien klar.

(b) Ein Komplement L von U in M heißt *starkes Komplement*, wenn zusätzlich $L \cap U \subset {}^{\oplus}U$ ist. Mit $(L \cap U) \oplus U' = U$ folgt dann $U' \subset {}^{\oplus}M$ und U/U' klein in M/U'. Also ist V auch ein H-Komplement von U' in M, $V \oplus U' = M$, $V \cap U \subset {}^{\oplus}U$ wie behauptet.

Ist B ein beschränkter Untermodul von M, so hat B nach ([8] S. 329) ein H-Komplement in M. Daraus wollen wir jetzt in (1.6) für jeden Untermodul U von M ableiten: Genau dann hat U ein H-Komplement in M, wenn $B + U$ eines hat. Zum Beweis benötigen wir die folgende Verallgemeinerung von ([5] Lemma 4.1):

Lemma 1.5. *Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal und V ein Komplement von $M[\mathfrak{a}]$ in M, so ist V bereits ein starkes Komplement.*

Beweis. Wir müssen $V[\mathfrak{a}] \subset {}^{\oplus}M[\mathfrak{a}]$ zeigen und behaupten dazu allgemeiner, daß $X = V[\mathfrak{a}]$ als $R/\mathfrak{a}$-Modul injektiv ist. Mit einer injektiven Hülle Q von V ist bekanntlich $Y = Q[\mathfrak{a}]$ als $R/\mathfrak{a}$-Modul injektiv und natürlich X groß in Y. Bleibt $X = Y$, d.h. $\mathrm{So}(Y/X) = 0$ zu zeigen, und das folgt aus der Kleinheit von X in V: Für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ ist nämlich $X \subset V\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_Q^{-1}(X) \subset \mathfrak{p}_Q^{-1}(V\mathfrak{p}) = V + Q[\mathfrak{p}] = V$, also $\mathfrak{p}_Y^{-1}(X) \subset V \cap Y = X$, d.h. $(Y/X)[\mathfrak{p}] = 0$ wie verlangt.

Satz 1.6. *Ist B ein beschränkter Untermodul von M, so gilt für einen beliebigen Untermodul U von M: Genau dann hat U ein H-Komplement in M, wenn $B + U$ eines hat.*

Beweis. Besitzt U ein H-Komplement in M, so folgt mit $U \sim W \subset {}^{\oplus}M$, daß in $\bar{M} = M/W$ der beschränkte Untermodul $\bar{B}$ ein H-Komplement hat, also auch $B + W$ ein H-Komplement in M. Wegen $B + W \sim B + U$ ist das auch ein H-Komplement von $B + U$ in M.

Bei der Umkehrung sei im *1. Schritt* sogar $B + U = M$. Zu $r \neq 0$, $Br = 0$ gibt es dann ein Komplement M_0 von $M[r]$ in M mit $M_0 \subset U$, und nach (1.5) gilt $M_0 \subset {}^{\oplus}M$. Bleibt also ein H-Komplement von U/M_0 in M/M_0 anzugeben, und das ist klar, weil M/M_0 beschränkt ist. Sei nun im *2. Schritt* X ein H-Komplement von $B + U$ in M, d.h. $X \oplus Y = M$ und $B + U \sim Y$. Mit $Y_1 = Y \cap (X + B)$ und $Y_2 = Y \cap (X + U)$ ist dann $Y_1 + Y_2 = Y$ und $Y_1 \cong B/X \cap B$ beschränkt, also nach dem ersten Schritt $Y_2 \sim W \subset {}^{\oplus}Y$. Wir sind fertig, wenn wir $U \sim Y_2$ gezeigt haben: Weil $(B + U + Y)/Y$

klein in M/Y, d.h. $X \cap (B + U + Y)$ klein in X ist, folgt mit $X' = X \cap (U + Y)$, daß $(U + Y_2)/U = (U + X')/U$ klein in M/U ist, ebenso $(U + Y_2)/Y_2 = (X' + Y_2)/Y_2$ klein in M/Y_2, d.h. die Behauptung.

Folgerung 1.7. *Ist M/U endlich erzeugt und $T(M) + U = M$, so hat U ein H-Komplement in M.*

Folgerung 1.8. *Ist R nicht-lokal, so sind für einen R-Modul M äquivalent:*

(a) *Jeder maximale Untermodul von M hat ein Komplement in M.*
(b) *Jeder Untermodul U, mit M/U endlich erzeugt, hat ein H-Komplement in M.*
(c) *$M/T(M)$ ist teilbar.*

Beweis. Bei der ersten Folgerung hat man einen endlich erzeugten Untermodul B von $T(M)$ mit $B + U = M$, sodaß (1.6) das H-Komplement liefert. Bei der zweiten Folgerung ist nun ($c \to b \to a$) über beliebigem R klar, und hätte man im nicht-lokalen Fall bei ($a \to c$) einen maximalen Untermodul U von M mit $T(M) \subset U$, so folgte für ein Komplement V von U in M, daß V zyklisch und unzerlegbar, also torsionsvoll wäre, d.h. $V \subset T(M)$, und das ist unmöglich.

Bemerkung. Im lokalen Fall, d.h. über einem diskreten Bewertungsring, gelten die Äquivalenzen der zweiten Folgerung nicht mehr: (a) ist stets erfüllt, während (b) nach ([8] Folgerung 2.8) genau dann gilt, wenn M koseparabel ist.

2. Die δ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$. Über $R = \mathbb{Z}$ lautete die Beschreibung der κ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ nach ([5] Theorem 5.2) so: Ist C eine Torsionsgruppe und A torsionsfrei vom Rang 1, so sind für eine exakte Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ äquivalent:

(i) $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)$ ist ein κ-Element.
(ii) Falls $[E] \neq 0$, gilt $T_p(C) \neq 0$ für alle p und $\mathcal{cl}\, t^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqq \tau(A)$.

Eine entsprechende Beschreibung der δ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ durch die Höhensequenz geben wir in (2.3). Sie wird durch zwei Lemmata über $h_p^{\mathrm{Ext}}([E])$ vorbereitet. In (2.1) bis (2.3) ist stets $R = \mathbb{Z}$.

Lemma 2.1. *Sei die Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ exakt, A torsionsfrei vom Rang 1, p eine Primzahl und $n \geqq 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) $h_p^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqq n$.
(ii) *Es ist $A/Ap \neq 0$ und* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset Bp + B[p^n]$.

Beweis. (i → ii) Wäre A p-teilbar, so auch $\mathrm{Ext}(C, A)$, d.h. $h_p(x) = \infty$ für alle $x \in \mathrm{Ext}(C, A)$ entgegen der Voraussetzung. Wäre $\mathrm{Bi}\,\alpha \not\subset Bp + B[p^n]$, so folgte mit $\bar{B} = B/B[p^n]$, daß $\overline{\mathrm{Bi}\,\alpha}$ vom p-Rang 1 und p-neat in $\bar{B}$ wäre. Andererseits ist $h_p([E]) \not\geqq n + 1$, d.h. $\mathrm{Bi}\,\alpha \cap Bp^i \neq \mathrm{Bi}\,\alpha \cdot p^i$ für ein $i \leqq n + 1$. Ist i_0 das kleinste i mit dieser Eigenschaft und $\alpha(a) = bp^{i_0} \notin \mathrm{Bi}\,\alpha \cdot p^{i_0}$, so folgt $\alpha(a) = \alpha(a_1)\, p^{i_0 - 1}$, $\alpha(a_1) - bp \in B[p^{i_0 - 1}] \subset B[p^n]$, $\overline{\alpha(a_1)} = \bar{b}p = \overline{\alpha(a_2)}\, p$ wegen p-neat, $\alpha(a_1 - a_2 p) \in \mathrm{Bi}\,\alpha \cap B[p^n] = 0$, $\alpha(a) = \alpha(a_2)\, p^{i_0}$ entgegen der Wahl von a.

(ii $\to$ i) Für eine beliebige Gruppe M mit einer Untergruppe U gilt: Ist $U \cap Mp^{n+1} = Up^{n+1}$ und $U \subset Mp + M[p^n]$, so folgt $Up^n = Up^{n+1}$ und daraus die p-Teilbarkeit von $U/T(U)$. Wäre bei uns $h_p([E]) \geqq n+1$, folgte insbesondere $\mathrm{Bi}\,\alpha \cap Bp^{n+1} = \mathrm{Bi}\,\alpha \cdot p^{n+1}$, also nach der Vorbemerkung die p-Teilbarkeit von $\mathrm{Bi}\,\alpha \cong A$, entgegen der Voraussetzung.

Lemma 2.2. *Sei die Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ exakt, A torsionsfrei vom Rang* 1 *und $h_p^{\mathrm{Ext}}([E]) < \infty$ für alle p.*

Dann ist Bi α *äquivalent zu einer torsionsvollen, reinen Untergruppe W von B, in der jede p-Komponente zyklisch von der Länge $h_p^{\mathrm{Ext}}([E])$ ist.*

Beweis. Mit den natürlichen Zahlen $n_p = h_p([E])$ gilt $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset Bp + B[p^{n_p}]$ für alle p nach (2.1), mit $\mathrm{Bi}\,\alpha = \sum_\lambda u_\lambda \mathbb{Z}$ also $u_\lambda = x_{p,\lambda} + y_{p,\lambda}$ mit $x_{p,\lambda} \in Bp$, $y_{p,\lambda} \in B[p^{n_p}]$. Damit ist $Y = \sum_{p,\lambda} y_{p,\lambda}\mathbb{Z}$ eine Torsionsgruppe mit $T_p(Y) \subset B[p^{n_p}]$ für alle p, außerdem $\mathrm{Bi}\,\alpha + Bp = Y + Bp$, denn „$\subset$" ist klar, und bei „$\supset$" ist nur $y_{q,\lambda}$ für $q \neq p$ zu betrachten, und da hat man $y_{q,\lambda} \in T_q(B) \subset Bp$. Klar ist Y koatomar, aber nach (2.1) auch Bi α (wegen $A/Ap \neq 0$ für alle p), sodaß jetzt $(\mathrm{Bi}\,\alpha + Y)/Y$ klein in B/Y ist, ebenso $(\mathrm{Bi}\,\alpha + Y)/\mathrm{Bi}\,\alpha$ klein in $B/\mathrm{Bi}\,\alpha$, d.h. $\mathrm{Bi}\,\alpha \sim Y$.

Weil Y in jeder Primärkomponente beschränkt ist, hat es nach (1.6) ein H-Komplement in $T(B)$, d.h. es gilt $Y \sim W \subset {}^{\oplus}T(B)$. Dieses W leistet das Gewünschte, denn mit $L \oplus W = T(B)$ folgt $L + Y = T(B)$, sodaß W epimorphes Bild von Y ist und daher $T_p(W) \subset B[p^{n_p}]$ für alle p. Wegen der Reinheit von W ist $W/Wp \sim (W + Bp)/Bp$ $= (\mathrm{Bi}\,\alpha + Bp)/Bp$ zyklisch, also auch $T_p(W)$ zyklisch, und wäre die Länge von $T_p(W)$ kleiner als n_p, folgte aus $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset Bp + W \subset Bp + B[p^{n_p - 1}]$ nach (2.1) der Widerspruch $h_p([E]) < n_p$.

Satz 2.3. *Ist C eine Torsionsgruppe und A torsionsfrei vom Rang 1, so sind für eine exakte Folge $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ äquivalent:*

(i) $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)$ *ist ein δ-Element.*

(ii) *Falls $[E] \neq 0$, gilt $A/Ap \neq 0$ für alle p und $\mathcal{cl}\, h^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqq \tau(A)$.*

Beweis. (i $\to$ ii) Sei $[E] \neq 0$ und $\mathrm{Bi}\,\alpha \sim W \subset {}^{\oplus}B$. Mit $V \oplus W = B$ ist dann $V + \mathrm{Bi}\,\alpha =$ B, $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha \neq 0$, $W \cong \mathrm{Bi}\,\alpha / V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ torsionsvoll, $\mathrm{Bi}\,\alpha \cap W = 0$, also A und W koatomar und damit $A/Ap \neq 0$, $T_p(W) \cong \mathbb{Z}/(p^{m_p})$ für alle p. Aus $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset Bp + W \subset Bp + B[p^{m_p}]$ folgt $h_p([E]) \leqq m_p$ nach (2.1), sodaß ein $0 \neq a_0 \in A$ anzugeben bleibt mit $m_p \leqq h_p^A(a_0)$ für alle p. Beim Isomorphismus $A \to \mathrm{Bi}\,\alpha$ entspricht der Untergruppe $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ eine Untergruppe $A_0 \subset A$, und wählt man $0 \neq a_0 \in A$, folgt $m_p = \text{Länge}(T_p(W)) =$ Länge $(T_p(A/A_0)) \leqq \text{Länge}(T_p(A/a_0\mathbb{Z})) = h_p^A(a_0)$ wie gewünscht.

(ii $\to$ i) Wir stellen im *1. Schritt* das folgende, auf Megibben [3] zurückgehende Splitting-Kriterium bereit: Ist $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ exakt, C torsionsvoll, A torsionsfrei vom Rang 1 und gibt es ein $0 \neq a_0 \in A$, sodaß für jedes p die p-Komponente von B zyklisch von der Länge $\leqq h_p^A(a_0)$ ist, so folgt $T(B) \subset {}^{\oplus}B$. Zum Beweis wollen wir

$\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Q}$ annehmen und das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$(\square) \qquad \begin{tikzcd} E = 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

bilden, sodaß unter dem verbindenden Isomorphismus $\vartheta\colon \operatorname{Hom}(C, \mathbb{Q}/A) \to \operatorname{Ext}(C, A)$ gerade $\vartheta(f) = [E]$ ist. Nach ([5] Satz 5.7) ist nun $T(B) \subset {}^{\oplus}B$ äquivalent damit, daß es ein Komplement L von $\operatorname{Ke} f$ in C gibt mit Länge$(T_p(L \cap \operatorname{Ke} f)) \leqq h_p^A(1)$ für fast alle p. Weil aber bei uns alle $T_p(\operatorname{Ke} f) \cong T_p(B)$ zyklisch sind, existiert ein Komplement von $\operatorname{Ke} f$ in C, und jedes solche Komplement erfüllt die verlangten Ungleichungen.

Seien im *2. Schritt* die Voraussetzungen von (ii) gegeben und gleich $[E] \neq 0$. Dann gibt es ein $0 \neq a_0 \in A$ mit $h_p^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqq h_p^A(a_0) < \infty$ für alle p, sodaß $\operatorname{Bi} \alpha$ nach (2.2) äquivalent ist zu einer torsionsvollen, reinen Untergruppe W von B mit $T_p(W)$ zyklisch von der Länge $n_p = h_p([E])$. Mit $B_0 \oplus W = T(B)$ läßt sich auf $\bar{B} = B/B_0$ das Splitting-Kriterium des ersten Schrittes anwenden, denn in $T(\bar{B}) \cong W$ ist jede p-Komponente zyklisch von der Länge $\leqq h_p^A(a_0)$. Aus $\bar{V} \oplus T(\bar{B}) = \bar{B}$, mit $B_0 \subset V \subset B$, folgt aber $V + T(B) = B$ und $V \cap T(B) = B_0$, also $V \oplus W = B$ wie gewünscht.

Bemerkung. Übersetzt man in der Situation $(\square)$ die Eigenschaften von $[E] \in \operatorname{Ext}(C, A)$ durch den verbindenden Isomorphismus ϑ in solche von $f \in \operatorname{Hom}(C, \mathbb{Q}/A)$, so ergibt sich sofort, daß (ii) äquivalent ist mit

(ii′) Falls $f \neq 0$, gilt (a) $f_p \neq 0$ für alle p,
(b) für fast alle p ist $h_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqq h_p^A(1)$.

Aber diese Bedingung ist nach ([5] Satz 5.6) äquivalent mit

(iii) $\operatorname{Bi} \alpha$ hat in jeder reinen Zwischengruppe $\operatorname{Bi} \alpha \subset X \subset B$ ein Komplement.

Wir werden in (2.5) zeigen, daß die Implikation (i $\to$ iii) auch ohne Voraussetzungen an C oder A gilt, ja sogar über beliebigen Dedekindringen. Nicht so bei (iii $\to$ i): Ist A eine abelsche p-Gruppe mit $D(A) \subsetneqq H(A)$ und repräsentiert $E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}(p^\infty) \to 0$ ein von Null verschiedenes Torsionselement in $\operatorname{Pext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A)$, so ist $\operatorname{Bi} \alpha$ rein, aber nicht direkter Summand in B, also $[E] \in \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A)$ nach (1.3) kein δ-Element; aber nach ([5] S. 302) hat $\operatorname{Bi} \alpha$ in jeder Zwischengruppe X ein Komplement.

Hilfssatz 2.4. *Ist R lokal und U ein koatomarer Untermodul von M, so ist U äquivalent zu einem reinen Untermodul von M.*

Beweis. Es genügt, daß U rein-zerfallend, d.h. $U/D(U)$ koatomar ist. Mit einem maximalen Element X_0 in der Menge $\{X \subset U \mid X \text{ rein in } M\}$ gilt in $\bar{M} = M/X_0$, daß $\bar{U}$ keinen reinen Untermodul von $\bar{M}$ umfaßt, also koatomar ist und enthalten in $\operatorname{Ra}(\bar{M}) + T(\bar{M})$. Nach dem Beweis von ([8] Satz 2.5) hat daher $\bar{U}$ ein H-Komplement in $\bar{M}$, und aus $\bar{U} \sim \bar{W} \subset {}^{\oplus}\bar{M}$, mit $X_0 \subset W \subset M$, folgt $U \sim W$ und W rein in M.

Bemerkung. Sei R lokal, $V + U = M$ und U koatomar. Falls V ein H-Komplement von U in M ist, zeigte der erste Beweisschritt in (1.2), daß $V \cap Up^i \subset Vp^{i+1}$ ist für alle $i \geqq 0$. Mit Hilfe von (2.4) sieht man jetzt, daß diese Durchschnittsbedingung auch hinreichend ist: Wählt man einen reinen Untermodul W von M mit $U \sim W$, so folgt $V \cap Wp^i \subset Vp^{i+1}$, also induktiv $V \cap W \subset Wp^i$ für alle $i \geqq 0$, und weil W wieder koatomar, also $H(W) = 0$ ist, $V \oplus W = M$.

Satz 2.5. *Sei V ein H-Komplement von U in M und $U \subset X \subset M$ ein reiner Zwischenmodul. Dann ist $V \cap X$ ein Komplement von U in X.*

Beweis. Sei im 1. *Schritt* zusätzlich R lokal. Dann ist $V \cap X$ sogar ein H-Komplement von U in X, denn mit $V \oplus W = M$, $U \sim W$ und $\bar{M} = M/U \cap W$ ist $\bar{U}$ koatomar, also nach (2.4) $\bar{U} \sim \bar{W}_1$ mit $U \cap W \subset W_1 \subset X$ und $\bar{W}_1$ rein in $\bar{X}$. Weil $\bar{V}$ ein H-Komplement von $\bar{U}$, also auch von $\bar{W}_1$ ist, folgt $\bar{V} \oplus \bar{W}_1 = \bar{M}$ nach (1.3), daraus $V \oplus W_1 = M$ und $U \sim W_1$, also auch $(V \cap X) \oplus W_1 = X$ und U äquivalent zu W_1 in X wie gewünscht.

Ist im 2. *Schritt* R beliebig, hat man natürlich $(V \cap X) + U = X$ und $(V \cap X) \cap U$ klein in X. Weil aber beim Lokalisieren nach maximalen Idealen Kleinheit erhalten bleibt ([7] Lemma 4.1), ist für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ auch $V_\mathfrak{p}$ ein H-Komplement von $U_\mathfrak{p}$ in $M_\mathfrak{p}$, also nach dem ersten Schritt $V_\mathfrak{p} \cap X_\mathfrak{p}$ ein H-Komplement von $U_\mathfrak{p}$ in $X_\mathfrak{p}$. Aus $(V \cap X)_\mathfrak{p} \subset {}^\oplus X_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$ folgt $V \cap X$ rein in X, also $(V \cap X) \cap U$ klein in $V \cap X$ wie behauptet.

Bemerkung. Der Beweis des Satzes zeigte, daß im lokalen Fall $V \cap X$ schon ein H-Komplement von U in X ist. Wir werden das im nächsten Abschnitt auf den semilokalen Fall verallgemeinern (3.7), ebenso für spezielle U (3.5). Aber im allgemeinen können wir nur zeigen: Falls U überhaupt ein H-Komplement in X hat, ist auch $V \cap X$ eines (denn wieder mit (1.3) folgt aus $U \sim W_1 \subset {}^\oplus X$, daß V ein H-Komplement von W_1 in M ist und W_1 rein in M, also $V \oplus W_1 = M$, $(V \cap X) \oplus W_1 = X$).

3. Über die Äquivalenz zu reinen Untermoduln. Um zu einem Untermodul U ein H-Komplement in M anzugeben, kann man zuerst – siehe die Beweise von (2.3) und (2.5) – einen *reinen* Untermodul W von M suchen mit $U \sim W$. Falls dann U überhaupt ein H-Komplement in M hat, muß nach (1.3) schon $W \subset {}^\oplus M$ sein, und dann leistet jedes direkte Komplement von W das Gewünschte. Auf diesem Wege werden wir auch die beiden Sätze (3.5) und (3.7) dieses Abschnittes beweisen, die jeweils durch ein Lemma über die Äquivalenz von koatomaren zu reinen Untermoduln vorbereitet werden.

Lemma 3.1. *Für einen koatomaren Untermodul U von M sind äquivalent:*

(i) *U ist zu einem torsionsvollen, reinen Untermodul U_1 von M äquivalent.*
(ii) *U ist zu einem torsionsvollen Untermodul U_2 von M äquivalent.*
(iii) *$U \subset M\mathfrak{p} + T(M)$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.*
(iv) *Zu jedem $\mathfrak{p} \in \Omega$ gibt es eine natürliche Zahl $n_\mathfrak{p} \geqq 0$ mit $U \subset M\mathfrak{p} + M[\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}]$.*

In diesem Fall ist U_1 in (i) *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Klar ist (i $\to$ ii), und bei (ii $\to$ iii) ist $(U + U_2)/U_2$ klein in M/U_2, also $U \subset M\mathfrak{p} + U_2 \subset M\mathfrak{p} + T(M)$ für alle $\mathfrak{p}$.

(iii → iv) Weil U koatomar ist, hat man einen endlich erzeugten Untermodul F von U, sodaß U/F torsionsvoll und in jeder Primärkomponente beschränkt ist. Für $\mathfrak{p} \in \Omega$ wird also $G/F = T_\mathfrak{p}(U/F)$ durch ein $\mathfrak{p}^e$ annulliert, sodaß $G\mathfrak{p}^e$ endlich erzeugt und U/G $\mathfrak{p}$-teilbar ist. Das erste bedeutet $U' + G[\mathfrak{p}^e] = G$ mit endlich erzeugtem U', das zweite $U = U\mathfrak{p} + G$, also zusammen $U = U\mathfrak{p} + U' + U[\mathfrak{p}^e]$. Nach Voraussetzung ist aber $U' \subset M\mathfrak{p} + T(M)$, also sogar $U' \subset M\mathfrak{p} + M[\mathfrak{p}^n]$ für ein $n \geqq e$, also $U \subset M\mathfrak{p} + M[\mathfrak{p}^n]$ wie gewünscht.

(iv → i) Wie im Beweis von (2.2) schreibe man $U = \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda R$, $u_\lambda = x_{\mathfrak{p},\lambda} + y_{\mathfrak{p},\lambda}$ mit $\mathfrak{p} \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda$, $x_{\mathfrak{p},\lambda} \in M\mathfrak{p}$ und $y_{\mathfrak{p},\lambda} \in M[\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}]$. Dann ist $Y = \sum_{\mathfrak{p},\lambda} y_{\mathfrak{p},\lambda} R$ ein Torsionsmodul mit $T_\mathfrak{q}(Y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} y_{\mathfrak{q},\lambda} R \subset M[\mathfrak{q}^{n_\mathfrak{q}}]$ und $U + M\mathfrak{q} = Y + M\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \Omega$, also Y koatomar und $U \sim Y$. Durch Betrachten jeder Primärkomponente von Y erhält man $Y \sim U_1 \subset {}^{\oplus}T(M)$, also $U \sim U_1$ und U_1 rein in M.

Für die Eindeutigkeit von U_1 sei jetzt auch U_3 ein torsionsvoller, reiner Untermodul von M mit $U \sim U_3$. Dann sind U_1 und U_3 beide koatomar, also sogar direkte Summanden in $T(M)$, und aus $V_1 \oplus U_1 = T(M)$ folgt nach (1.3) $V_1 \oplus U_3 = T(M)$, also $U_1 \cong U_3$.

Folgerung 3.2. *Für einen koatomaren Untermodul U von M sind äquivalent:*

(i) *U ist zu einem beschränkten, direkten Summanden B_1 von M äquivalent.*
(ii) *U ist zu einem beschränkten Untermodul B_2 von M äquivalent.*
(iii) *$U \subset M\mathfrak{p} + T(M)$ für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ und $U \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Omega$.*

Falls U endlich erzeugt ist, ist das weiter äquivalent mit

(iv) $U \subset \mathrm{Ra}(M) + T(M)$.

Beweis. Klar ist (i → ii), und bei (ii → iii) folgt aus $U \subset M\mathfrak{p} + B_2$ für alle $\mathfrak{p}$ und der Beschränktheit von B_2 die Behauptung.

(iii → i) Aus der ersten Bedingung folgt nach (3.1) $U \sim B_1$ mit B_1 torsionsvoll und rein in M, aus der zweiten $B_1 \subset M\mathfrak{p}$, d.h. B_1 $\mathfrak{p}$-teilbar für fast alle $\mathfrak{p}$. Weil B_1 koatomar ist, heißt das schon $T_\mathfrak{p}(B_1) = 0$ für fast alle $\mathfrak{p}$, d.h. B_1 beschränkt und daher auch direkter Summand in M.

(iii → iv) Für jedes $x \in U$ gilt nach eben $xR \sim B \subset {}^{\oplus}M$ mit B beschränkt, wegen $(xR + B)/B \subset \mathrm{Ra}(M/B) = (\mathrm{Ra}(M) + B)/B$ also $x \in \mathrm{Ra}(M) + B \subset \mathrm{Ra}(M) + T(M)$.

(iv → iii) Natürlich liegt U in allen $M\mathfrak{p} + T(M)$, aber mit $U = \sum_{i=1}^{m} u_i R$, $u_i = x_i + y_i$ $(1 \leqq i \leqq m,\ x_i \in \mathrm{Ra}(M),\ y_i \in T(M))$ ist zusätzlich $Y = \sum_{i=1}^{m} y_i R$ endlich erzeugt und torsionsvoll, also $U + \mathrm{Ra}(M) = Y + \mathrm{Ra}(M) \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$.

Folgerung 3.3. *Sei $U \subset M$, U isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, U nicht direkter Summand in M. Genau dann hat U ein H-Komplement in M, wenn $U \subset \mathrm{Ra}(M) + T(M)$ ist.*

Folgerung 3.4. *Ist R nicht-lokal, so sind für einen R-Modul M äquivalent:*

(a) *Jeder zyklische Untermodul von M hat ein H-Komplement in M.*
(b) *Jeder endlich erzeugte Untermodul von M hat ein H-Komplement in M.*
(c) $M = \mathrm{Ra}(M) + T(M)$.

Beweis. Bei (3.3) folgt aus $U \sim W \subset {}^{\oplus}M$, daß W endlich erzeugt und torsionsvoll, also $U \subset \mathrm{Ra}(M) + T(M)$ ist, und die Umkehrung folgt mit (3.2). Ebenso ist ($c \to b \to a$) in (3.4) klar, und weil bei ($a \to c$) auch in $M/\mathrm{Ra}(M)$ bzw. $M/T(M)$ jeder zyklische Untermodul ein H-Komplement, d.h. schon ein starkes Komplement hat, ist $M/\mathrm{Ra}(M)$ halbeinfach und $M/T(M)$ im nicht-lokalen Fall teilbar, also $M/(\mathrm{Ra}(M) + T(M)) = 0$. (Im lokalen Fall ist nach ([8] Folgerung 2.8) sowohl (a) als auch (b) äquivalent damit, daß M quasi-separabel ist.)

Satz 3.5. *Besitze U ein H-Komplement in M und sei $U \subset X \subset M$ ein reiner Zwischenmodul. Falls U endlich erzeugt oder torsionsfrei vom Rang* 1 *ist, besitzt U auch ein H-Komplement in X.*

Beweis. Sei $V \oplus W = M$ und $U \sim W$. 1. *Fall* U ist torsionsfrei vom Rang 1. Nehmen wir gleich $V \cap U \neq 0$ an, so ist $W \cong U/V \cap U$ torsionsvoll, $U \cap W = 0$, U koatomar und enthalten in $\mathrm{Ra}(M) + T(M)$. Weil X rein in M ist, folgt $U \subset \mathrm{Ra}(X) + T(X)$, also nach (3.1) $U \sim W_1$ für einen reinen Untermodul W_1 von X, damit nach (1.3) $V \oplus W_1 = M$, $W_1 \subset {}^{\oplus}X$ wie gewünscht.

2. *Fall* U ist endlich erzeugt. Dann hat man eine Zerlegung $U/V \cap U = A/V \cap U \oplus B/V \cap U$, in der der erste Summand endlich erzeugt und torsionsfrei ist und der zweite torsionsvoll, also auch noch $(V \cap U) \oplus A' = A$. Es folgt $B \oplus A' = U$, $(V + B) \oplus A' = M$, und in $\bar{M} = M/A'$ ist $\bar{V}$ wieder ein H-Komplement von $\bar{U}$, denn mit $W' = W \cap (V + B)$ ist wie im zweiten Beweisschritt von (1.6) $B \sim W'$, also $\bar{U} \sim \bar{W}'$, und natürlich $\bar{V} \oplus \bar{W}' = \bar{M}$. Außerdem ist jetzt $\bar{W}' \cong B/V \cap U$ torsionsvoll, also $\bar{U} \subset \mathrm{Ra}(\bar{M}) + T(\bar{M})$, wegen der Reinheit von $\bar{X}$ sogar $\bar{U} \subset \mathrm{Ra}(\bar{X}) + T(\bar{X})$, sodaß nach (3.2) $\bar{U}$ ein H-Komplement in $\bar{X}$ hat, also auch U in X.

Im lokalen Fall war nach (2.4) jeder koatomare Untermodul U zu einem reinen Untermodul W von M äquivalent. Welche Zusatzbedingungen an U muß man im nicht-lokalen Fall für die Existenz eines solchen W stellen? Zunächst weiß man nach ([6] Lemma 1.2), daß in $\bar{M} = \widehat{M/T(M)}$ für den koatomaren Untermodul $\bar{U}$ gilt $\text{p-Rang}(\bar{U}) = \mathrm{Rang}(\bar{U}) < \infty$ für alle p. Falls also $U \sim W$ und W rein in M ist, folgt aus $\bar{U} + \bar{M}\mathfrak{p} = \bar{W} + \bar{M}\mathfrak{p}$ und der Reinheit von $\bar{W}$ die Gleichung $\dim(\bar{U}/\bar{U} \cap \bar{M}\mathfrak{p}) = \dim(\bar{W}/\bar{W} \cap \bar{M}\mathfrak{p}) = \text{p-Rang}(\bar{W}) = \mathrm{Rang}(\bar{W})$, d.h. mit $n = \text{tors.fr.Rang}(W)$ die Bedingung $\dim(U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM)) = n$ für alle p. Das nächste Lemma zeigt, daß diese Bedingung im semilokalen Fall sogar hinreichend ist. Obwohl für den letzten Satz (3.7) nicht nötig, fügen wir zwei weitere äquivalente Beschreibungen hinzu, die uns von selbständigem Interesse erscheinen.

Lemma 3.6. *Ist R semilokal, so sind für einen koatomaren Untermodul U von M äquivalent:*

(i) *U ist zu einem reinen Untermodul W von M äquivalent.*

(ii) $\dim(U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM))$ *ist konstant* $(\mathfrak{p} \in \Omega)$.
(iii) $\mathfrak{p}\text{-}\dim(M/(U + TM))$ *ist konstant* $(\mathfrak{p} \in \Omega)$.
(iv) $M/(U + TM)$ *hat eine torsionsfreie Hülle.*

In diesem Fall ist W in (i) *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. (i → ii) Für alle $\mathfrak{p} \in \Omega$ ist nach der Vorbemerkung $\dim(U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM)) =$ tors.fr.Rang(W). (ii → i) Wir zeigen durch Induktion über $n \geqq 0$: Ist M ein R-Modul und U ein koatomarer Untermodul von M mit $\dim(U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM)) = n$ für alle $\mathfrak{p}$, so ist U zu einem reinen Untermodul von M äquivalent. Bei $n = 0$ folgt das aus (3.1), sodaß jetzt $n > 0$ sei: Für alle $\mathfrak{p}$ ist dann $U \not\subset M\mathfrak{p} + T(M)$, d.h. $x_\mathfrak{p} \in U$ mit $x_\mathfrak{p} \notin M\mathfrak{p} + T(M)$, und weil die kanonische Abb. $U \to \Pi(U/U\mathfrak{p})$ surjektiv ist, gibt es ein $x_0 \in U$ mit $x_0 - x_\mathfrak{p} \in U\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. Auf $\tilde{M} = M/x_0 R$ wollen wir jetzt die Induktionsvoraussetzung anwenden: Es ist $x_0 \notin M\mathfrak{p} + T(M)$ für alle $\mathfrak{p}$, also $X_0 = x_0 R$ isomorph zu R und $\bar{X}_0$ neat in $\bar{M} = M/T(M)$, d.h. X_0 rein in M und $T(\tilde{M}) = \widetilde{T(M)}$. In der exakten Folge

$$0 \to \bar{X}_0/\bar{X}_0 \cap \bar{M}\mathfrak{p} \to U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM) \to \tilde{U}/\tilde{U} \cap (\tilde{M}\mathfrak{p} + T\tilde{M}) \to 0$$

ist das erste Glied isomorph zu $R/\mathfrak{p}$, also die Dimension des dritten $n - 1$ für alle $\mathfrak{p}$, so daß nach Induktion $\tilde{U}$ äquivalent ist zu einem reinen Untermodul $\tilde{W}$, mit $X_0 \subset W \subset M$. Offenbar ist dann $U \sim W$ und W rein in M.

(ii ↔ iii) Mit $\bar{M} = M/T(M)$ und $m = \text{Rang}(\bar{U})$ ist in der exakten Folge

$$0 \to \bar{U} \cap \bar{M}\mathfrak{p}/\bar{U}\mathfrak{p} \to \bar{U}/\bar{U}\mathfrak{p} \to \bar{U}/\bar{U} \cap \bar{M}\mathfrak{p} \to 0$$

das erste Glied nach ([4] Theorem 3.1 und [6] S. 194) isomorph zu $\text{So}_\mathfrak{p}(\bar{M}/\bar{U}) = (\bar{M}/\bar{U})[\mathfrak{p}]$ und das zweite isomorph zu $(R/\mathfrak{p})^m$, sodaß aus der exakten Folge

$$0 \to \text{So}_\mathfrak{p}(M/(U + TM)) \to (R/\mathfrak{p})^m \to U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM)) \to 0$$

alles folgt.

(iii ↔ iv) Wie im Fall der abelschen Gruppen (siehe [5] S. 309) gilt für einen beliebigen R-Modul C: Genau dann hat C eine torsionsfreie Hülle (d.h. eine wesentliche Überdeckung $H \overset{h}{\twoheadrightarrow} C$ mit torsionsfreiem H), wenn es ein $k \geqq 0$ gibt mit $\mathfrak{p}\text{-}\dim(C) = k$ für alle $\mathfrak{p}$. Aus der Existenz von h folgt nämlich nach ([6] Satz 1.3) sofort $\mathfrak{p}\text{-}\dim(C) = \text{Rang}(\text{Ke}\, h)$ für alle $\mathfrak{p}$; ist aber umgekehrt $\text{So}_\mathfrak{p}(C) \cong (R/\mathfrak{p})^k$ für ein $k \geqq 0$ und alle $\mathfrak{p}$, so ist mit $S/R = \text{So}(K/R)$ der kanonische Epimorphismus $f\colon S \to \text{So}(K/R)$ wesentlich, also auch $g\colon S^k \to \text{So}(C)$ wesentlich, und im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S^k & \longrightarrow & H & \longrightarrow & C/\text{So}(C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \text{So}(C) & \subset & C & \longrightarrow & C/\text{So}(C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

wird dann h eine torsionsfreie Hülle von C. – Speziell für $C = M/(U + TM)$ ist das unsere Behauptung.

Zur Eindeutigkeit von W in (i) seien jetzt A und B zwei koatomare, reine Untermoduln von M mit $A \sim B$. Aus $A + M\mathfrak{p} = B + M\mathfrak{p}$ und der Reinheit folgt $T(A) + T(M)\mathfrak{p} = T(B) + T(M)\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$, d.h. auch $T(A) \sim T(B)$, also nach der Eindeutigkeitsaussage von (3.1) $T(A) \cong T(B)$. Wegen $T(A) \subset {}^{\oplus}A$ und $T(B) \subset {}^{\oplus}B$ bleibt nur noch $A/T(A) \cong B/T(B)$ zu zeigen: In $\bar{M} = M/T(M)$ sind $\bar{A}$ und $\bar{B}$ endlich erzeugte freie und reine Untermoduln mit $\bar{A} \sim \bar{B}$, sind also vom selben $\mathfrak{p}$-Rang für alle $\mathfrak{p}$ und deshalb isomorph.

Bemerkungen. Sei R semilokal und L ein Untermodul von M, sodaß L keinen reinen Untermodul von M umfaßt. Dann zeigte der Beweis von (ii $\to$ i), daß es ein maximales Ideal $\mathfrak{q}$ gibt mit $L \subset M\mathfrak{q} + T(M)$. Bei unendlichem Ω gilt das nicht mehr: In $M = \coprod_{\mathfrak{p} \in \Omega} R_{\mathfrak{p}}$ ist dann nämlich jeder projektive, reine Untermodul Null, sodaß $L = \coprod_{\mathfrak{p} \in \Omega} R$ keinen reinen Untermodul von M umfaßt; andererseits ist M/L teilbar und $\mathfrak{p}$-Rang$(M) = 1$, also $L \not\subset M\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. – Bei unendlichem Ω ist uns auch kein Kriterium für (i) bekannt, d.h. wann ein koatomarer Untermodul zu einem reinen Untermodul äquivalent ist.

Satz 3.7. *Sei R semilokal und besitze U ein H-Komplement in M. Dann gilt für jeden reinen Zwischenmodul $U \subset X \subset M$, daß U auch ein H-Komplement in X hat.*

Beweis. Sei $V \oplus W = M$ und $U \sim W$. Wie im ersten Beweisschritt von (2.5) kann man durch Übergang zu $\bar{M} = M/U \cap W$ gleich annehmen, daß $U \cap W = 0$ ist, insbesondere U koatomar. Aus $X \cap (M\mathfrak{p} + TM) = X\mathfrak{p} + TX$ folgt $\dim(U/U \cap (X\mathfrak{p} + TX)) = \dim(U/U \cap (M\mathfrak{p} + TM)) = $ tors.fr.Rang(W) für alle $\mathfrak{p}$, also nach (3.6) $U \sim W_1$ für einen reinen Untermodul W_1 von X. Wieder mit (1.3) folgt $V \oplus W_1 = M$, $W_1 \subset {}^{\oplus}X$ wie gewünscht.

Literaturverzeichnis

[1] L. FUCHS, Infinite abelian groups, Vol. I. New York-London 1970.
[2] L. FUCHS, Infinite abelian groups, Vol. II. New York-London 1973.
[3] CH. K. MEGIBBEN, On mixed groups of torsion-free rank one. Illinois J. Math. **11**, 134–144 (1967).
[4] R. J. NUNKE, Modules of extensions over Dedekind rings. Illinois J. Math. **3**, 222–241 (1959).
[5] H. ZÖSCHINGER, Über Torsions- und κ-Elemente von Ext(C, A). J. Algebra **50**, 299–336 (1978).
[6] H. ZÖSCHINGER, Invarianten wesentlicher Überdeckungen. Math. Ann. **237**, 193–202 (1978).
[7] H. ZÖSCHINGER, Koatomare Moduln. Math. Z. **170**, 221–232 (1980).
[8] H. ZÖSCHINGER, Komplemente als direkte Summanden II. Arch. Math. **38**, 324–334 (1982).

Eingegangen am 13. 2. 1985

Anschrift des Autors:

Helmut Zöschinger
Mathematisches Institut
der Universität München
Theresienstr. 39
D-8000 München 2