

# Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Im Auftrag der  
Deutschen Mathematiker-Vereinigung  
herausgegeben von Winfried Scharlau

Band 1

Richard Dedekind

Vorlesung über Differential- und Integralrechnung

Band 2

Rudolf Lipschitz

Briefwechsel mit

Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstraß

Band 3

Erich Hecke

Analysis und Zahlentheorie

Band 4

Karl Weierstraß

Einleitung in die Theorie  
der analytischen Funktionen

Band 5

Mathematische Institute in Deutschland  
1800 – 1945

Band 6

Ein Jahrhundert Mathematik

1890 – 1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV

Dokumente zur Geschichte der Mathematik

Band 6

# Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990

Festschrift zum Jubiläum der DMV

herausgegeben von

Gerd Fischer, Friedrich Hirzebruch,  
Winfried Scharlau und Willi Törnig

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig / Wiesbaden

Prof. Dr. *Winfried Scharlau*  
Mathematisches Institut der Universität Münster

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann International.

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1990



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Satz: Zehnersche Buchdruckerei, Speyer

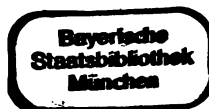
Reproarbeiten: Schütte & Behling, Berlin

Druck: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich

Buchbinderische Verarbeitung: Hunke und Schröder, Iserlohn

Printed in Germany

ISBN 3-528-06326-2



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> . . . . .	XI
--------------------------	----

## **Fachverband – Institut – Staat**

*Norbert Schappacher unter Mitwirkung von Martin Kneser*

Einführung . . . . .	1
1 Gründung der DMV . . . . .	4
2 FELIX KLEIN und die Anwendungen der Mathematik . . . . .	9
3 Folgen des Nationalsozialismus für die Mathematik an den Universitäten	17
4 „Nationalismus versus Internationalismus“ . . . . .	50
5 Ausblicke . . . . .	71
Quellen- und Literaturverzeichnis . . . . .	77

## **Diskrete Mathematik**

*Martin Aigner*

Einführung . . . . .	83
1 Ideen zur Abzählung . . . . .	85
2 Graphentheorie . . . . .	91
3 Ideen zur Existenz . . . . .	95
4 Ideen zur Optimierung . . . . .	102
5 Ausblick . . . . .	110
Anmerkungen . . . . .	111
Literaturverzeichnis . . . . .	111

## **Kurzer Abriss der Geschichte der Informatik 1890–1990**

*Friedrich L. Bauer*

1 Informatik und Mathematik . . . . .	113
2 Die Situation von 1890 . . . . .	115
3 Die ersten 45 Jahre: Im Banne mechanischer und elektromechanischer Geräte . . . . .	118

4 Der Umbruch zwischen 1935 und 1960: Universelle Maschinen, elektronische Realisierungen . . . . .	129
5 Die letzten 30 Jahre: Die Informatik formiert sich . . . . .	142
6 Ausblick: Die Informatik einerseits, die Mikroelektronik andererseits be- dingen sich gegenseitig . . . . .	145

## **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Josef Bemelmans, Stefan Hildebrandt, Wolf von Wahl*

I Die Quellen der Theorie . . . . .	149
II Die Grundlegung der modernen Theorie . . . . .	159
III Die Ausgestaltung der modernen Theorie . . . . .	187
IV Ein Beispiel für die modernen Methoden . . . . .	209
Literaturverzeichnis . . . . .	221

## **Grundlagen der Geometrie**

*Walter Benz*

Einführung . . . . .	231
1 Inzidenz . . . . .	237
2 Anordnung, Kongruenz . . . . .	253
3 Geometrische Strukturen . . . . .	261
Literaturverzeichnis . . . . .	265

## **Numerik**

*Lothar Collatz*

Einführung . . . . .	269
1 Zeit bis etwa 1920 . . . . .	270
2 Zeit von etwa 1920 bis zum Zweiten Weltkrieg . . . . .	275
3 Zeit von etwa 1935 bis etwa 1945 . . . . .	286
4 Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg . . . . .	292
5 Einige weitere, teils neue Gebiete der Numerischen Mathematik . . . . .	302
Literatur . . . . .	319

## **Differentialgeometrie**

*Peter Dombrowski*

Einführung . . . . .	323
1 Zur Entwicklung einiger Grundbegriffe und Probleme der Differentialgeometrie . . . . .	327
2 Kurven und Flächen in euklidischen Räumen . . . . .	338
Anmerkungen . . . . .	352
Literaturverzeichnis . . . . .	356

## Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1990

*Dieter Gaier*

Einführung	361
1 Zur Grundlegung der Funktionentheorie	365
2 Der Riemannsche Abbildungssatz	367
3 Normale Funktionenfamilien und Verwandtes	372
4 Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete	374
5 Die Methode der extremalen Länge	379
6 Quasikonforme Abbildungen	383
7 Im Einheitskreis schlichte Funktionen	387
8 Potenzreihen an der Konvergenzgrenze – Summierung	391
9 Werteverteilung in $\mathbb{D}$	397
10 Werteverteilung in $\mathbb{C}$	402
11 Darstellungssätze – Approximation im Komplexen	407
12 Konstruktive Gesichtspunkte	410
Zeittafel	416
Literaturverzeichnis	417
Biographische Hinweise auf die in der Zeittafel genannten deutschen Funktionentheoretiker	419

## Zur Geschichte der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen

*Peter Manfred Gruber*

Einführung	421
1 Das Altertum	422
2 Die Neuzeit bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts	425
3 Das 19. Jahrhundert bis vor die Jahrhundertwende	428
4 Die systematische Phase um die Wende zum 20. Jahrhundert	431
5 Die weitere Entwicklung im 20. Jahrhundert	441
6 Schlußbemerkungen	452
Literaturverzeichnis	452

## Wahrscheinlichkeitstheorie

*Ulrich Krengel*

Einführung	457
1 CZUBERS Bericht	458
2 Schritte auf dem Weg zur Axiomatik KOLMOGOROWS	459
3 Die Kontroverse um VON MISES' Axiomatik	461
4 Anstöße aus der Physik	466
5 Nichtaxiomatische Beiträge vor 1945	470

6 WOLFGANG DOEBLIN und HARRY REUTER . . . . .	477
7 Der Neubeginn . . . . .	479
8 Versicherungsmathematik . . . . .	484
9 Stochastik auf der Schule . . . . .	485
10 Lehren . . . . .	487
11 Ergänzende biographische Angaben . . . . .	488
Literaturverzeichnis . . . . .	488

**Zur Entwicklung der angewandten Analysis und mathematischen Physik in den letzten hundert Jahren**

*Rolf Leis*

Einführung . . . . .	491
1 Das Dirichletsche Prinzip . . . . .	497
2 Integralgleichungen . . . . .	500
3 Direkte Bestimmung des Minimums . . . . .	508
4 Darstellung linearer Operatoren . . . . .	514
5 Anfangsrandwertaufgaben und Streutheorie . . . . .	519
6 Nichtlineare Probleme . . . . .	526
Literaturverzeichnis . . . . .	531

**Vom Hilbertschen Basissatz bis zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen**

*Gerhard O. Michler*

Einführung . . . . .	537
1 Entstehung der abstrakten Algebra . . . . .	540
2 Berliner Schule . . . . .	547
3 Anwendungen der „Modernen Algebra“ in anderen Gebieten der Mathematik . . . . .	557
4 Darstellungstheorie endlicher Gruppen und endlich-dimensionaler Algebren . . . . .	561
5 Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen . . . . .	570
Literaturverzeichnis . . . . .	580

**Algebraische Zahlentheorie**

*Jürgen Neukirch*

Einleitung . . . . .	587
I Das Reziprozitätsgesetz . . . . .	588
II Klassenkörpertheorie . . . . .	594
III Die Langlands-Vermutung . . . . .	601
IV Etale Topologie der algebraischen Zahlkörper . . . . .	617
Literatur . . . . .	628

## **ERICH HECKE und die Rolle der $L$ -Reihen in der Zahlentheorie**

*Samuel J. Patterson*

1 Dirichletsche Reihen und Zahlentheorie . . . . .	629
2 Komplexe Multiplikation elliptischer Funktionen . . . . .	635
3 Linearität und Modulformen . . . . .	640
4 Automorphe Formen und abelsche Varietäten . . . . .	645
5 Neuere Entwicklungen . . . . .	649
Literaturverzeichnis . . . . .	652

## **Quadratische Formen**

*Albrecht Pfister*

Einführung . . . . .	657
1 1890–1920: MINKOWSKI und HILBERT . . . . .	658
2 1920–1945: HASSE, SIEGEL und WITT . . . . .	659
3 1945–1965: EICHLER und KNESER . . . . .	663
4 1965–1990: Der Aufschwung der algebraischen Theorie . . . . .	666
Literaturverzeichnis . . . . .	670

## **Algebraische Topologie**

*Hans-Werner Henn und Dieter Puppe*

1 Von den Anfängen bis zum Zweiten Weltkrieg . . . . .	674
2 Vom Zweiten Weltkrieg bis zur Gegenwart . . . . .	687
Anmerkungen . . . . .	709
Literaturverzeichnis . . . . .	710

## **Mathematische Logik**

*Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg*

Einführung . . . . .	717
1 Grundlegung der modernen mathematischen Logik . . . . .	718
2 Der Logizismus . . . . .	719
3 Die Grundlagenkrise der Mathematik . . . . .	721
4 Die Hilbertsche Beweistheorie . . . . .	722
5 Der Intuitionismus . . . . .	727
6 Die Mengenlehre . . . . .	728
7 Die Rekursionstheorie . . . . .	732
8 Die Modelltheorie . . . . .	738



**Geschichte der analytischen Zahlentheorie seit 1890***Wolfgang Schwarz*

Einführung . . . . .	741
1 Die Zeit vor 1890 . . . . .	742
2 Das letzte Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts . . . . .	745
3 Das Jahrzehnt 1900 bis 1910 . . . . .	747
4 Die Jahre 1910 bis 1930 . . . . .	751
5 Das Jahrzehnt 1930 bis 1940 . . . . .	760
6 Das Jahrzehnt 1940 bis 1950 . . . . .	763
7 Das Jahrzehnt 1950 bis 1960 . . . . .	767
8 Das Jahrzehnt 1960 bis 1970 . . . . .	771
9 Die Jahre ab 1971 . . . . .	775
Anmerkungen . . . . .	778
Literaturverzeichnis . . . . .	779

**Mathematische Statistik***Hermann Witting*

Vorbemerkung . . . . .	781
1 Anfänge der Mathematischen Statistik: F. GALTON und K. PEARSON . . . . .	781
2 Die kontinentale und die englische Schule . . . . .	784
3 Die Entwicklung im deutschsprachigen Raum von 1920 bis 1933 . . . . .	791
4 Grundlegung der Mathematischen Statistik: J. NEYMAN und A. WALD . . . . .	797
5 Die Mathematische Statistik im deutschsprachigen Raum von 1933 bis ca. 1955 . . . . .	802
6 Das Wiederaufleben der Mathematischen Statistik nach 1955 . . . . .	806
7 Schlußbemerkung . . . . .	810
Anmerkungen . . . . .	811
Literaturverzeichnis . . . . .	812

<b>Bildnachweis</b> . . . . .	816
-------------------------------	-----

<b>Personenregister</b> . . . . .	817
-----------------------------------	-----

---

# Mathematische Logik

*Kurt Schütte und Helmut Schwichtenberg*

---

## Einführung

Kurz vor der Gründung der DMV waren die „*Grundlagen der Arithmetik*“ (1884) von FREGE und „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ (1888) von DEDEKIND erschienen. Bald darauf folgten die „*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*“ (1895–97) von CANTOR. Hiermit begann eine systematische Grundlagenforschung der Mathematik und zugleich die Entwicklung der transfiniten Mengenlehre. Voraussetzung für die mathematischen Grundlagenuntersuchungen war die hauptsächlich von FREGE und von PEANO geschaffene Systematik einer exakten mathematischen Logik.

Wir skizzieren in diesem Artikel zunächst die Grundlegung der modernen mathematischen Logik und beschreiben dann die verschiedenen Richtungen (Logizismus, Beweistheorie und Intuitionismus), die in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts zur Begründung der Mathematik eingeschlagen wurden. Anschließend kehren wir zur Mengenlehre zurück, die zwar schon vor der Jahrhundertwende begründet, aber erst später in völlig formalisierter Weise mit den Methoden der mathematischen Logik behandelt wurde. Weiterhin berichten wir hauptsächlich über Ergebnisse, die von deutschen Logikern auf anderen Teilgebieten der mathematischen Logik erzielt wurden, insbesondere in der Rekursionstheorie, in der Modelltheorie, in Anwendungen auf die Algebra, in der Nichtstandard-Analysis und im Zusammenhang mit der Informatik. Dieser kurze Bericht kann natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Für ihre Hilfe bei der Abfassung dieses Berichts möchten wir H.-D. Donder, H. Osswald, A. Prestel und M. Ziegler herzlich danken.

# 1 Die Grundlegung der modernen mathematischen Logik

Die formale Logik, die bereits ARISTOTELES in exakter Weise begründet hatte, war zwar von der Scholastik in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt worden, wurde aber erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts in mathematischer Weise völlig neu geschaffen, und zwar zunächst in Analogie zur Algebra ohne jegliche Bezugnahme auf die vorhergegangenen Behandlungsweisen der Logik. Die mathematische Logik begann mit der Entwicklung einer Booleschen Algebra, die eine Formalisierung der Aussagenlogik und verwandter mathematischer Strukturen liefert, aber noch nicht die volle Ausdrucksfähigkeit der modernen mathematischen Logik besitzt.

Die weiterführenden Begriffsbildungen, die der heutigen mathematischen Logik zugrunde liegen, wurden in Deutschland hauptsächlich von GOTTLOB FREGE (1848–1925) eingeführt und in klarer Weise zur Anwendung gebracht. In seiner „*Begriffsschrift*“ (1879) hat FREGE erstmalig eine lange Reihe logischer Formeln in streng formaler Weise aus wenigen Axiomen abgeleitet. Hierbei tritt im Unterschied zu den Formalisierungen, die in Analogie zur Algebra durchgeführt wurden, die fundamentale Bedeutung der Implikation klar in Erscheinung. Die Fregeschen Axiomenschemata

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{und} \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

der Implikation liefern nämlich zusammen mit der Schlußregel des modus ponens ein fundamentales System der Logik, das sich durch Hinzunahme von sehr einfachen und naheliegenden Axiomen zur vollen klassischen Aussagenlogik erweitern läßt.



GOTTLOB FREGE  
geb.: 08. 11. 1848 in Wismar  
gest.: 26. 07. 1925 in Bad Kleinen

Die Werke von FREGE enthalten eine Fülle von damals völlig neuartigen Einsichten, insbesondere bezüglich des Unterschiedes von Variablen und Konstanten, des Begriffs der logischen Funktion und des Quantors sowie der Einfüh-

zung von Kennzeichnungstermen. Hierzu hatte FREGE eine ausdrucksvolle logische Systematik geschaffen, mit der er eine Grundlegung der gesamten Mathematik in Angriff nahm. Seine Grundlagenuntersuchungen der Mathematik gehören dem von ihm begründeten Logizismus an, den wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

Die von FREGE verwendete Begriffsschrift, die zwar in klarer Weise die logischen Beziehungen veranschaulicht, konnte sich jedoch nicht durchsetzen, weil sie im Unterschied zu allen üblichen Schreibweisen zweidimensional ist. Daher schloß sich die später in der mathematischen Logik verwendete Symbolik nicht an FREGE, sondern im wesentlichen an die von G. PEANO eingeführte Symbolik an.

Es ist erstaunlich, daß die bahnbrechenden Arbeiten von FREGE zunächst überhaupt nicht beachtet wurden. Der Hauptgrund war wohl, daß die von FREGE verwendete zweidimensionale Symbolik allgemein abgelehnt und häufig mißverstanden wurde. Es hat seit dem Erscheinen der Begriffsschrift zwanzig Jahre gedauert, bis man auf FREGE aufmerksam wurde, und es hat weitere zwanzig Jahre gedauert, bis die strenge Exaktheit der FREGESchen Arbeiten in der mathematischen Logik wieder erreicht wurde. Es war BERTRAND RUSSELL, der zuerst die Bedeutung FREGES erkannte und ausdrücklich erklärte, daß ihm die Ideen von FREGE sehr wertvoll seien.

Ein weiterer erfolgreicher Logiker dieser Zeit war in Deutschland LEOPOLD LÖWENHEIM (1878–1957). Er verfaßte mehrere Arbeiten über Eliminations- und Reduktionsverfahren im Rahmen der Algebra der Logik von ERNST SCHRÖDER. 1915 bewies LÖWENHEIM als erster den als *Satz von Löwenheim und Skolem* bekannten Fundamentalsatz der Logik, der besagt, daß jede Theorie in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die ein Modell hat, bereits ein abzählbares Modell hat. LÖWENHEIM bewies diesen Satz unter Bezugnahme auf eine höhere Prädikatenlogik, während TH. SKOLEM denselben Satz 1920 allein im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe bewies.

## 2 Der Logizismus

Die Fortschritte, die gegen Ende des vorigen Jahrhunderts in der mathematischen Logik erzielt waren, reizten dazu, nun eine Grundlegung der Mathematik mit den Methoden der mathematischen Logik zu unternehmen. Der von FREGE begründete Logizismus war der Ansicht, daß sich die gesamte Mathematik allein in der reinen Logik entwickeln läßt. Die Tatsache, daß das Unendlichkeitsaxiom in der Mathematik unentbehrlich ist, war für den Logizismus kein Einwand gegen seine These, weil der Übergang von der Denkbarkeit eines unbeschränkten Iterationsprozesses zur Denkbarkeit einer unendlichen Gesamtheit als rein logisch empfunden wurde, wie es ja auch in der Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ von DEDEKIND zum Ausdruck kommt.

FREGE hat in seinen Büchern „*Die Grundlagen der Arithmetik*“ (1884) und „*Grundgesetze der Arithmetik*“ (1893–1904) die Mathematik in voller Ausführlichkeit mit reiner Logik zu begründen versucht. Sein Aufbau der Mathematik ist jedoch, da er völlig typenfrei ist, den logischen Antinomien ausgesetzt, insbesondere der RUSSELLSchen Antinomie der Menge aller Mengen, die nicht sich selbst als Element enthalten. FREGE hat, nachdem dies bemerkt wurde, selbst eingesehen, daß sein Unternehmen gescheitert ist. Immerhin sind seine Untersuchungen in mancherlei Hinsicht sehr instruktiv gewesen.

Ein zweiter Versuch zur Begründung der Mathematik in der reinen Logik wurde in dem umfangreichen Werk „*Principia Mathematica*“ (1910–1913) von BERTRAND RUSSELL und ALFRED NORTH WHITEHEAD unternommen. Hier wurde, um die logischen Antinomien auszuschließen, eine verzweigte Typenlogik zugrunde gelegt. Das heißt, daß hier jedes Prädikat, in dem gewisse Quantoren auftreten, einem höheren Typ zugerechnet wird als die Typen der in ihm auftretenden Quantoren, so daß ein Objekt, das unter Bezugnahme auf eine gewisse Gesamtheit definiert ist, nicht selbst dieser Gesamtheit zugerechnet wird. Ein derartiges System ist völlig konstruktiv. Es vermeidet nicht nur die bekannten logischen Antinomien, sondern ist sogar nachweisbar widerspruchsfrei.

In dieser verzweigten Typenlogik läßt sich jedoch nicht die klassische Mathematik entwickeln. Man erhält hier anstatt des klassischen Begriffs der reellen Zahl eine Hierarchie von reellen Zahlen verschiedener Ordnungen. Daher konnte in den *Principia Mathematica* die klassische Mathematik nur durch Hinzunahme eines Reduzibilitätsaxioms gewonnen werden. Dieses Axiom besagt im wesentlichen, daß jedes Prädikat, dessen Bedeutungsbereich eine Menge von Grundobjekten ist, extensional äquivalent einem entsprechenden Prädikat kleinsten Typs ist. Hierdurch wird jedoch der konstruktive Ansatz der verzweigten Typenlogik aufgehoben, so daß nach Hinzunahme des Reduzibilitätsaxioms keine Garantie mehr für die Widerspruchsfreiheit des Systems besteht.

Daraufhin haben verschiedene Logiker, insbesondere CHWISTEK und RAMSEY bemerkt, daß es einfacher und völlig ausreichend sei, anstatt der verzweigten Typenlogik eine einfache Typenlogik, die kein Reduzibilitätsaxiom benötigt, zugrunde zu legen. In der einfachen Typenlogik wird nur zwischen Grundobjekten, Mengen von Grundobjekten, Mengen von Mengen usw. unterschieden, aber keine Typenverzweigung zwischen verschiedenen Mengen von Grundobjekten vorgenommen. Man kann zwar bisher nicht beweisen, daß eine Formalisierung der klassischen Mathematik im Rahmen der einfachen Typenlogik widerspruchsfrei ist, vermeidet aber bereits in der einfachen Typenlogik die bekannten logischen Antinomien, so daß die Benutzung der einfachen Typenlogik nicht problematischer als der in den *Principia Mathematica* eingeschlagene Weg ist.

Die vom Logizismus unternommenen Versuche, die Mathematik in der reinen Logik zu begründen, konnten jedenfalls ihr Ziel nicht erreichen, haben aber die Weiterentwicklung der mathematischen Logik wesentlich gefördert. So sind die *Principia Mathematica* für mehrere Jahrzehnte das wichtigste Lehrbuch der

mathematischen Logik geworden. Es hatte ja sonst keine so vollständige und aufschlußreiche Systematik der mathematischen Logik gegeben, wie sie in den *Principia Mathematica* zur Darstellung gekommen ist.

### 3 Die Grundlagenkrise der Mathematik

Die Besinnung auf die Grundlagen der Mathematik, die vom Logizismus ausgegangen war, hatte darauf aufmerksam gemacht, daß die bisherige Mathematik durchaus nicht so unproblematisch ist, wie es bis dahin im allgemeinen angenommen wurde. Schon viel früher hatten bereits KRONECKER und POINCARÉ Einwände gegen die indirekten Beweisführungen in der Mathematik erhoben. Nun war es vor allem L. E. J. BROUWER, der das den indirekten Beweisen zugrunde liegende *tertium non datur* entschieden ablehnte.

Ein zweiter Einwand richtete sich gegen die imprädikative Verwendung des Begriffs der reellen Zahl. Man erhält ja die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen nur dadurch, daß man die obere Grenze einer beliebigen nach oben beschränkten Mengen reeller Zahlen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen, also in imprädikativer Weise definiert. Auf die Problematik dieses Verfahrens hat HERMANN WEYL in seinem Buch „*Das Kontinuum*“ (1918) hingewiesen mit der Erklärung, daß man die Theorie der reellen Zahlen unter Verlust der Vollständigkeitseigenschaft erheblich einschränken müsse, um ihre Exaktheit sicherzustellen.

Aufgrund dieser gegen die bisherige Mathematik erhobenen Einwände sprach man in den zwanziger und dreißiger Jahren von einer Grundlagenkrise der Mathematik, nachdem 1921 in der *Mathematischen Zeitschrift* ein Aufsatz von HERMANN WEYL erschienen war mit dem Titel „*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*“.

Es wurden nun zur Neubegründung der Mathematik zwei verschiedene Richtungen eingeschlagen, nämlich die des Intuitionismus von L. E. J. BROUWER und die der Beweistheorie von DAVID HILBERT, die damals als Formalismus bezeichnet wurde.

HILBERT hatte es jedoch stets abgelehnt, als Formalist bezeichnet zu werden, denn es kam ihm ja nicht darauf an, bedeutungslose Formalismen zu entwickeln, sondern die klassische Mathematik in streng formaler Weise als widerspruchsfrei und somit als mathematisch bedeutungsvoll sicherzustellen. Wir wollen uns, wie er sagte, nicht aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns CANTOR beschert hat.

## 4. Die Hilbertsche Beweistheorie

HILBERTS Auffassung von der Mathematik, die ihm schon lange vor der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik völlig klar war, kommt in einem Brief, den er 1899 an GOTTLÖB FREGE schrieb, deutlich zum Ausdruck. In diesem Brief heißt es:

Sie schreiben: Aus der Tatsache der Axiome folgt, daß sie einander nicht widersprechen. Es hat mich sehr interessiert, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht widersprechen, mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge.

Man könnte für diese Auffassung von HILBERT den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik anführen, der allerdings damals noch nicht vorlag. Nach diesem Satz hat ja jede Theorie im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe, wenn sie widerspruchsfrei ist, ein Modell, so daß die Objekte, die durch die Axiome der betreffenden Theorie definiert sind, tatsächlich existieren.

Es war nun das Ziel der Hilbertschen Beweistheorie, die einzelnen Teile der klassischen Mathematik in vollformalisierter Gestalt als widerspruchsfrei nachzuweisen. Hierzu hat man nicht nur die Objekte, sondern auch die Aussagemöglichkeiten, Axiome und Schlußregeln der mathematischen Theorie formal zu fixieren, um in einer metamathematischen Untersuchung ihre Widerspruchsfreiheit nachweisen zu können. Die Metamathematik oder Beweistheorie, deren Untersuchungsobjekt die als widerspruchsfrei nachzuweisende formalisierte mathematische Theorie ist, sollte sich nach dem ursprünglichen Plan von HILBERT auf eine sehr elementare Untersuchungsmethode beschränken, die HILBERT als *finis* bezeichnete, nämlich auf die kombinatorische Behandlung von zwar beliebig umfangreichen, aber stets als endlich anzusehenden Zeichenfiguren.

In der Hilbertschen Metamathematik wird nicht wie im Logizismus der Versuch unternommen, die natürlichen Zahlen in der reinen Logik zu entwickeln, weil dies viel zu aufwendig und durchaus nicht elementar wäre. Es wird vielmehr ein sehr elementarer Teil der Arithmetik bereits der Metamathematik zugrunde gelegt. Man kann ja die nichtnegativen ganzen Zahlen in einer sehr einfachen Weise durch sogenannte Ziffern repräsentieren, nämlich nach folgender induktiven Definition:

(z1) Das Symbol 0 ist eine Ziffer.

(z2) Ist  $z$  eine Ziffer, so ist auch  $z'$  (der Nachfolger von  $z$ ) eine Ziffer.

Bei derartigen induktiven Definitionen ist es vielfach üblich eine weitere Definitionsregel hinzuzufügen, die besagt, daß die Menge der Ziffern die kleinste Menge mit den Eigenschaften (z1) und (z2) ist. Die Hinzunahme einer solchen Regel wäre hier nicht nur überflüssig, sondern sogar irreführend, da sie auf den allge-

meinen Mengenbegriff Bezug nimmt, von dem in der Metamathematik überhaupt keine Rede ist. Ziffern sind nach ihrer induktiven Definition genau diejenigen Zeichen oder Zeichenreihen, die sich durch Anwendungen der Regeln (z1) und (z2) ergeben, wobei in jedem Fall natürlich nur endlich viele Anwendungen dieser Regeln in Betracht kommen. Für diese Ziffern gilt definitionsgemäß das Prinzip der vollständigen Induktion. Man braucht hierfür in der Metamathematik kein Axiom. Erst bei der Formalisierung eines weniger elementaren Teils der Mathematik wird ein Axiom oder Axiomenschema der vollständigen Induktion benötigt.

Die ersten Widerspruchsfreiheitsbeweise für Teile der Mathematik wurden nach einer Idee von HILBERT in den Jahren 1924–25 von WILHELM ACKERMANN durchgeführt, und zwar für quantorenfreie Formalisierungen von mathematischen Theorien, die anstelle der Axiome und Schlußregeln für Quantoren nur das Axiomenschema  $A(t) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$  für beliebige Terme  $t$  haben.

Hierbei bezeichnet  $\varepsilon_x A(x)$  ein Objekt mit der Eigenschaft  $A$ , falls es ein solches gibt, andernfalls ein beliebiges Objekt. Eine derartig formalisierte Theorie erweist sich als widerspruchsfrei, wenn sich in jeder formalen Herleitung einer numerischen Formel alle  $\varepsilon$ -Terme unter Erhaltung des Herleitungszusammenhanges eliminieren lassen, weil in einer Herleitung, die keine  $\varepsilon$ -Terme enthält, keine falschen numerischen Formeln auftreten können.

ACKERMANN gelang es, ein allgemeines Verfahren zur Elimination der  $\varepsilon$ -Terme zu entwickeln. Hiermit konnte man jedoch nicht einmal die reine Zahlentheorie als widerspruchsfrei nachweisen, da man hierfür nicht beweisen konnte, daß das Ackermansche Eliminationsverfahren stets nach endlich vielen Schritten abbricht. Ein solcher Beweis war, wie sich nach einigen Jahren herausstellte, allerdings in finiter Weise überhaupt nicht möglich.

Nachdem in Wien KURT GÖDEL 1930 in seiner Dissertation erstmalig den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik bewiesen hatte, bewies er 1931 in seiner Habilitationsschrift „*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*“ zwei Sätze von sensationeller Bedeutung. Der erste Satz besagt, daß jedes hinreichend starke formale System grundsätzlich unvollständig ist, das heißt, Sätze zu formulieren gestattet, die in dem System weder beweisbar noch widerlegbar sind, sofern das System nicht widerspruchsvoll ist. Der zweite Satz besagt, daß die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems, das die rekursive Zahlentheorie und gewisse natürliche Ableitungsregeln enthält, nicht mit den Mitteln dieses Systems beweisbar ist. Aus diesem zweiten Unvollständigkeitssatz folgt insbesondere, daß die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie nicht in finiter Weise beweisbar ist, weil die finiten Methoden in der reinen Zahlentheorie enthalten sind.

Weder GÖDEL noch HILBERT haben diese neuen Erkenntnisse als eine Widerlegung des HILBERTschen Programms aufgefaßt. Beide haben hieraus nur die Konsequenz gezogen, daß der von HILBERT ursprünglich eingenommene streng finite Standpunkt zu einem allgemeineren konstruktiven Standpunkt erweitert



werden müsse, um die Widerspruchsfreiheit von mathematisch bedeutungsvollen Theorien beweisen zu können.

So hat HILBERT bald nach dem Erscheinen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze in einem Göttinger Kolloquiumsvortrag vorgeschlagen, die formalisierte vollständige Induktion, deren beweistheoretische Behandlung besonders schwierig ist, durch die konstruktive Anwendung einer Schlußregel mit unendlich vielen Prämissen zu ersetzen. Diese von HILBERT als *unendliche Induktion* bezeichnete Schlußregel besagt, daß auf die Allformel  $(x)A(x)$  geschlossen werden darf, wenn in konstruktiver Weise  $A(z)$  für jede Ziffer  $z$  hergeleitet werden kann. Diese Idee von HILBERT wurde zunächst nicht beachtet, sondern erst nach fast zwanzig Jahren aufgegriffen und ist heute für beweistheoretische Untersuchungen unentbehrlich geworden.

In Göttingen hat dann GERHARD GENTZEN zunächst in seiner Dissertation „*Untersuchungen über das logische Schließen*“ (1934–35) mit seinem System des natürlichen Schließens und mit seinem Sequenzenkalkül eine sehr durchsichtige neue Systematik der Prädikatenlogik entwickelt, die sich als äußerst fruchtbar erwiesen hat und zum Allgemeingut aller Logiker geworden ist. Anschließend gelang es ihm 1936, die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zu beweisen, und zwar mittels transfiniten Induktion bis zur kleinsten  $\varepsilon$ -Zahl  $\varepsilon_0$ . Diese transfinite Induktion überschreitet zwar den finiten Standpunkt, wie es nach GÖDEL erforderlich ist, verläuft aber in einer völlig konstruktiven Weise, so daß der Beweis von GENTZEN als ein Evidenznachweis für die reine Zahlentheorie im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms anzusehen ist.



GERHARD GENTZEN

geb.: 24. 11. 1909 in Greifswald (Pommern)

gest.: 04. 08. 1945 in Prag

Durch transfinite Induktion bis  $\varepsilon_0$  konnte nun auch WILHELM ACKERMANN 1940 beweisen, daß sein Verfahren zur Elimination der  $\varepsilon$ -Terme im formalen System der reinen Zahlentheorie stets nach endlich vielen Schritten zum Abschluß kommt, womit sich ein weiterer Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie ergab.

Durch die Untersuchungen von GENTZEN wurde erstmals erkannt, daß sich die Beweisstärke eines formalen Systems durch eine Ordinalzahl kennzeichnen

läßt. Man bezeichnet heute als die beweistheoretische Ordinalzahl eines formalen Systems der Mathematik die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$  mit der Eigenschaft, daß sich keine rekursive Wohlordnung vom Ordnungstyp  $\alpha$  in dem betreffenden formalen System als wohlgeordnet beweisen läßt. Wie GENTZEN 1943 in seiner Habilitationsschrift bewies, ist  $\varepsilon_0$  die beweistheoretische Ordinalzahl der reinen Zahlentheorie.

GERHARD GENTZEN war zuletzt Dozent an der Universität Prag und ist am Ende des Krieges in tschechischer Gefangenschaft umgekommen, nachdem sich sowohl amerikanische als auch russische Mathematiker vergeblich um seine Freilassung bemüht hatten.

Nach dem Kriege wurden in Anknüpfung an die Methoden von GENTZEN auch gewisse Teilsysteme der klassischen Analysis als widerspruchsfrei nachgewiesen, und zwar im Rahmen einer Prädikatenlogik zweiter Stufe, in der sowohl über die Grundobjekte als auch über Mengen von Grundobjekten quantifiziert wird. Die reellen Zahlen werden hier durch Mengen von Grundobjekten (natürlichen oder rationalen Zahlen) repräsentiert. Zur Mengenbildung dient das *Komprehensionsaxiom*, das bezüglich einer Formel  $A(x)$  die Menge  $\{x: A(x)\}$  aller Grundobjekte mit der Eigenschaft  $A$  zu bilden gestattet. Bei uneingeschränkter Verwendung dieses Komprehensionsaxioms erhält man die volle klassische Theorie der reellen Zahlen, von der nicht zu erwarten ist, daß sie sich durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis auf grundsätzlich einfachere Beziehungen zurückführen läßt. Durch Einschränkungen des Komprehensionsaxioms lassen sich jedoch Teilsysteme der Analysis abgrenzen, für die konstruktive Widerspruchsfreiheitsbeweise erbracht werden konnten. Auf andere Weise hat auch PAUL LORENZEN gewisse Teile der klassischen Analysis konstruktiv begründet.

Unter Verwendung der von HILBERT vorgeschlagenen unendlichen Induktion konnte auch der GENTZENsche Widerspruchsfreiheitsbeweis etwas einfacher und durchsichtiger gestaltet werden, weil sich mit Hilfe dieser Schlußregel alle Quantoren in den Herleitungen numerischer Formeln eliminieren lassen, was in dem von GENTZEN behandelten formalen System nicht allgemein möglich ist.

Durch die beweistheoretischen Untersuchungen konnte auch eine Grenze für die Prädikativität ermittelt werden. Zu Beginn der sechziger Jahre wurde nämlich von S. FEFERMAN und K. SCHÜTTE gleichzeitig und unabhängig die kleinste Ordinalzahl  $\Gamma_0$  bestimmt, welche die Eigenschaft hat, daß keine Wohlordnung vom Ordnungstyp  $\Gamma_0$  in prädikativer Weise als wohlgeordnet beweisbar ist. Hiermit konnte FEFERMAN den prädikativ interpretierbaren Teil der klassischen Analysis genau charakterisieren, nämlich durch Einschränkung der Komprehension auf sogenannte  $\Delta_1^1$ -Formeln, in denen die Mengenquantoren nur in einer besonders schwachen Weise auftreten.

Mit der Grenze der Prädikativität ist bereits die Grenze für die Durchführbarkeit des erweiterten HILBERTschen Programms erreicht. Man hat für jedes prädikativ interpretierbare Teilsystem der Analysis einen Widerspruchsfreiheitsbeweis durch transfiniten Induktion bis zu einer Ordinalzahl  $< \Gamma_0$ , der den Anforder-

rungen des erweiterten HILBERTSchen Programms genügt. Ein Teilsystem der Analysis, das nicht prädikativ interpretierbar ist, läßt sich aber nicht in prädikativer Weise und somit nicht im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms als widerspruchsfrei nachweisen.

Immerhin hat sich gezeigt, daß der prädikativ interpretierbare Teil der klassischen Analysis wesentlich umfangreicher ist als der auf arithmetische Komprehension beschränkte Teil, auf den HERMANN WEYL in seinem Buch „*Das Kontinuum*“ die Analysis einzuschränken gedachte. Fast alle bisher bewiesenen fundamentalen Sätze der klassischen Analysis gehören dem prädikativ interpretierbaren Teil an.

Nachdem sich nun herausgestellt hatte, daß der klassischen Mathematik eine viel stärkere Abstraktion zugrunde liegt, als HILBERT erwartet hatte, wurden auch für wesentlich imprädikative Teile der Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise durchgeführt. Diese Beweise sind allerdings nicht als Evidenznachweise im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms anzusehen, geben aber Aufschluß über die Beweisstärken der betreffenden formalen Systeme.

Die Grundlagenkrise der Mathematik ist inzwischen überwunden. Schon 1930 hatte PAUL BERNAYS, der Mitarbeiter HILBERTS, in einer seiner philosophischen Abhandlungen erklärt:

Es erscheint als eine unberechtigte Zumutung von seiten der Philosophie an die Mathematik, daß sie ihre einfachere und leistungsfähigere Methode zugunsten einer beschwerlicheren und an Systematik zurückstehenden Methode aufgeben solle, ohne durch eine innere Nötigung dazu veranlaßt zu sein.

Diese Auffassung hat sich durchgesetzt. Es besteht mit vereinzelt Ausnahmen kein Zweifel mehr an der Exaktheit der klassischen Mathematik.

Den ersten Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein wesentlich imprädikatives Teilsystem der Analysis hat in Weiterentwicklung der GENTZENSchen Methoden 1967 G. TAKEUTI erbracht, und zwar für die sogenannte  $\Pi_1^1$ -Analysis, die äquivalent ist mit demjenigen Teilsystem der Analysis, in dem die Komprehension auf beliebige Formeln mit höchstens einem Mengenquantor eingeschränkt ist. Für dieses und einige bedeutend stärkere Teilsysteme der Analysis sowie für entsprechende Teilsysteme der Mengenlehre haben in München W. BUCHHOLZ, G. JÄGER und W. POHLERS durch Widerspruchsfreiheitsbeweise die beweistheoretischen Ordinalzahlen bestimmt.

Unter Bezugnahme auf diese beweistheoretischen Ordinalzahlen konnten H. FRIEDMAN und S. G. SIMPSON die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit gewisser kombinatorischer Sätze in verschiedenen Teilsystemen der Analysis nachweisen.

## 5 Der Intuitionismus

Der zur Zeit der Grundlagenkrise der Mathematik von L. E. J. BROUWER begründete Intuitionismus hatte nicht nur das *tertium non datur*, auf dem die indirekten Beweisführungen beruhen, sondern überhaupt das axiomatisch-formale Verfahren der klassischen Mathematik abgelehnt. Die BROUWERSche Mathematik weicht daher sehr stark von der klassischen Mathematik ab. An die Stelle des Mengenbegriffs tritt hier der Begriff der Wahlfolge, womit sich ein völlig anderes Kontinuum als in der klassischen Mathematik ergibt. Jede Funktion reeller Zahlen ist hier stetig, und jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen ist hier bereits eindeutig bestimmt durch die Werte dieses Funktionals in einem hinreichend großen Abschnitt.

Die intuitionistische Mathematik hat sich nicht durchgesetzt, aber in mancherlei Hinsicht zu neuen Erkenntnissen geführt. Wesentliche Teile der intuitionistischen Mathematik wurden von S. C. KLEENE, J. MYHILL, G. KREISEL und A. S. TROELSTRA und anderen in einer Weise interpretiert, die auch für die klassische Mathematik bedeutungsvoll ist.

Insbesondere hat die von A. HEYTING 1930 durchgeführte Formalisierung der intuitionistischen Prädikatenlogik eine fundamentale Bedeutung bekommen. Diese intuitionistische Prädikatenlogik, in der das *tertium non datur* nicht ableitbar ist, kann sowohl als ein Teilsystem als auch als eine Erweiterung der klassischen Prädikatenlogik aufgefaßt werden. Sie ist ein Teilsystem insofern, als die in ihr herleitbaren Formeln eine echte Teilmenge der in der klassischen Prädikatenlogik herleitbaren Formeln bilden. Andererseits kann die gesamte klassische Prädikatenlogik in einer Weise ausgedrückt werden, die auch in der intuitionistischen Prädikatenlogik gültig ist. Dazu hat man die Disjunktion und Existenzquantifizierung als definiert anzusehen (durch Negation und Konjunktion beziehungsweise durch Negation und den Allquantor), und man muß ferner für jedes Prädikaten-symbol  $P$  das Prinzip des indirekten Beweisens

$$\forall x_1 \dots x_n (\neg \neg P x_1 \dots x_n \rightarrow P x_1 \dots x_n)$$

(auch Stabilität von  $P$  genannt) annehmen. Auf diese Weise hat man dann die klassische Prädikatenlogik mit dem in ihr gültigen *tertium non datur* in der intuitionistischen Prädikatenlogik interpretiert, die außerdem noch eine in der klassischen Prädikatenlogik nicht definierbare Disjunktion, Implikation und Existenzquantifizierung enthält. Derartige Zurückführungen von formalen Systemen der klassischen Mathematik auf entsprechende Systeme der intuitionistischen Mathematik wurden vielfach vorgenommen, insbesondere von KURT GÖDEL bei der Einführung seiner Funktionale endlicher Typen (1958) und von CLIFFORD SPECTOR in einer Arbeit, die nach seinem frühen Tode von GEORG KREISEL 1962 herausgegeben wurde unter dem Titel: „*Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics.*“ In dieser Arbeit führt SPECTOR die Widerspruchsfreiheit

der klassischen Analysis zurück auf die Existenz von gewissen Funktionalen, die im Rahmen der intuitionistischen Mathematik durch Bar-Rekursion definiert sind. Es handelt sich hierbei um eine Rekursion, die es in der klassischen Mathematik nicht gibt, sondern nur in der intuitionistischen Mathematik aufgrund der Voraussetzung, daß jede Operation auf einem Funktional natürlicher Zahlen bereits durch die Werte dieses Funktional in einem hinreichend großen Abschnitt bestimmt ist.

Die Bar-Rekursion höherer Typen, die von SPECTOR gebraucht wird, bedarf jedoch einer besonderen Begründung. Eine solche Begründung wurde zuerst von B. SCARPELLINI 1970 durch ein topologisches Modell für die Bar-Rekursion höherer Typen gegeben. HORST LUCKHARDT hat dann 1973 in den *Springer Lecture Notes 306* in ausführlicher Systematik eine Begründung der GÖDELSchen Funktional-Interpretation und der Bar-Rekursion höherer Typen entwickelt, die im Zusammenhang mit der Arbeit von SPECTOR zwar keine Begründung der Analysis im Sinne des erweiterten HILBERTSchen Programms liefert, aber als eine Begründung der klassischen Analysis im Sinne der intuitionistischen Mathematik angesehen werden kann.

## 6 Die Mengenlehre

Nachdem RICHARD DEDEKIND (1831–1916) in seiner Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*“ 1888 die Theorie der reellen Zahlen schon in mengentheoretischer Weise begründet hatte, wurde die allgemeine Mengenlehre bereits vor der Jahrhundertwende von GEORG CANTOR (1845–1918) geschaffen. CANTOR setzte sowohl den Begriff der Kardinalzahl als auch den der Ordinalzahl ins Transfinite fort, wobei die Ordinalzahlen, die im Finiten den Kardinalzahlen entsprechen, eine viel feinere Zahlenstruktur als die Kardinalzahlen liefern. Hiermit wird die vollständige Induktion der Arithmetik zu dem viel stärkeren Beweisverfahren einer transfiniten Induktion erweitert. Die allgemeine Anwendbarkeit der transfiniten Induktion folgt aus dem Wohlordnungssatz, den ERNST ZERMELO 1904 bewies. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Auswahlaxiom*, dessen Annahme zwar recht naheliegend ist, das aber zu so starken völlig unkonstruktiven Ergebnissen führt, daß seine Gültigkeit nicht unproblematisch zu sein scheint. Nach dem Wohlordnungssatz läßt sich ja unter anderen auch die Menge der reellen Zahlen wohlordnen, während man sich überhaupt nicht vorzustellen vermag, wie eine solche Wohlordnung hergestellt werden kann. Das Auswahlaxiom hat daher gewisse Kritik hervorgerufen, wird aber im allgemeinen der mathematischen Forschung zugrunde gelegt. So ist zum Beispiel das *Zornsche Lemma*, das nur mit dem Auswahlaxiom beweisbar ist, ein fundamentales Beweismittel der Algebra geworden.

Es wurde sehr bald erkannt, daß der zunächst äußerst allgemein aufgefaßte Mengenbegriff einer gewissen Einschränkung bedarf, da zum Beispiel der Begriff der Menge aller Mengen, ja schon der Begriff der Menge aller Kardinalzahlen oder der Menge aller Ordinalzahlen zu Widersprüchen führt. Man ist deshalb dazu übergegangen, beliebige Gesamtheiten nicht als Mengen, sondern als Klassen zu bezeichnen, wobei die Mengen spezielle Klassen sind und nicht jede Klasse eine Menge ist.

Daraufhin wurden Axiomatisierungen der Mengenlehre hauptsächlich von E. ZERMELO 1908, A. FRAENKEL 1925–28 und J. v. NEUMANN 1925 entwickelt.

Um die Ordinalzahlen, die sich als Äquivalenzklassen wohlgeordneter Mengen ergeben, in einem axiomatischen System der Mengenlehre nicht als echte Klassen, sondern als Mengen zu erhalten, hat man jede Ordinalzahl durch ein spezielles Element ihrer Äquivalenzklasse zu repräsentieren. Dies geschieht nach J. v. NEUMANN am einfachsten dadurch, daß man die Ordinalzahlen durch diejenigen Mengen repräsentiert, die bezüglich der  $\in$ -Relation wohlgeordnet sind. Die Ordinalzahlen erscheinen dann als die Mengen ihrer Vorgänger, also die Ordinalzahl 0 als die leere Menge, die Ordinalzahl 1 als die Menge, deren einziges Element die leere Menge ist, usw. Diese Charakterisierung der Ordinalzahlen als die Mengen ihrer Vorgänger ist allerdings nur für den allgemeinen Ordinalzahlenbegriff im Rahmen eines axiomatischen Systems der Mengenlehre sinnvoll. Man kann ja gewisse Ordinalzahlenabschnitte auch durch rekursiv definierte Wohlordnungsrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen repräsentieren. Für die in dieser Weise bezeichneten Ordinalzahlen kann natürlich keine Rede davon sein, daß sie die Mengen ihrer Vorgänger sind.

Ausführliche systematische Untersuchungen einer im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe axiomatisierten Mengenlehre wurden zuerst hauptsächlich von PAUL BERNAYS durchgeführt und im *Journal of Symbolic Logic* (1937–38 publiziert, später auch in dem gemeinsam mit A. FRAENKEL herausgegebenen Buch „*Axiomatic Set Theory*“ (1958).

Einen bedeutenden Fortschritt in der axiomatischen Mengenlehre hat KURT GÖDEL mit einem relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis für das Auswahlaxiom



KURT GÖDEL

geb.: 28. 04. 1906 in Brünn

gest.: 14. 01. 1978 in Princeton, USA

und die *verallgemeinerte Kontinuumhypothese* erzielt. Diese Hypothese besagt, daß die Kardinalität der Potenzmenge einer jeden unendlichen Menge genau um 1 größer ist als die Kardinalität der betrachteten Ausgangsmenge. GÖDEL hat nach dem Erscheinen seiner berühmten Habilitationsschrift noch in Wien eine Vorlesung über seinen relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis gehalten, der dann 1938 in Princeton publiziert wurde.

GÖDEL bewies, daß aus der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems der Prädikatenlogik ersten Stufe, das die üblichen Axiome der Mengenlehre, aber weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumhypothese enthält, die Widerspruchsfreiheit eines entsprechenden formalen Systems mit Auswahlaxiom und verallgemeinerter Kontinuumhypothese folgt. Er hat seinen Beweis der Anschaulichkeit halber modelltheoretisch formuliert, indem er von einem Modell des gegebenen formalen Systems ausging und hieraus durch Einschränkung der Mengen auf sogenannte konstruktible Mengen ein Modell bildete, in dem außer den vorgegebenen mengentheoretischen Axiomen auch das Auswahlaxiom und die verallgemeinerte Kontinuumhypothese gilt. Der Beweis ist aber im Grunde von rein syntaktischer Natur, da hier allein aus der Widerspruchsfreiheit des gegebenen formalen Systems in konstruktiver Weise auf die Widerspruchsfreiheit des Systems der konstruktiblen Mengen geschlossen wird.

Die nächste Frage war nun, ob das Auswahlaxiom und die Kontinuumhypothese abhängig oder unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre sind. GÖDEL hat, wie aus seinen späteren Äußerungen hervorgeht, auch in dieser Hinsicht Untersuchungen unternommen und ist wahrscheinlich der Lösung dieser Frage bereits sehr nahe gekommen, hat aber hierüber nichts veröffentlicht.

Es war dann PAUL COHEN, der 1963 als erster die *Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumhypothese* bewies. Seine Beweise verwenden eine neue Erzwingungsmethode, mit der in einer gewissen syntaktischen Weise Modelle mit den erwünschten Eigenschaften konstruiert werden. Bald darauf wurde von D. SCOTT und R. SOLOVAY eine weitere Methode für Unabhängigkeitsbeweise eingeführt, bei der den Formeln anstelle von Wahrheitswerten Werte in einer Booleschen Algebra zugeordnet werden. Diese Methode ist rein modelltheoretischer Natur und setzt die Existenz eines sehr starken Universums voraus.

Hiermit setzte eine intensive mengentheoretische Forschung ein, die eine Fülle neuer Unabhängigkeitsbeweise erbrachte und auch die Konsequenzen von stärkeren mengentheoretischen Axiomen untersucht.

RONALD JENSEN, der in Bonn bei HASENJAEGER studiert hatte, hat sehr viel zur frühen Verbreitung der Erzwingungsmethode in Deutschland beigetragen. Der Höhepunkt seiner frühen Arbeit auf diesem Gebiet war die Konstruktion eines Modells der Mengenlehre, in dem die Souslinhypothese und die allgemeine Kontinuumshypothese gelten. Die *Souslinhypothese* besagt, daß jede nichtleere vollständig und dicht geordnete Menge ohne erstes und letztes Element, in der jede disjunkte Menge von offenen Intervallen höchstens abzählbar ist, isomorph zu den reellen Zahlen ist.

Diese Hypothese war auch ein Ausgangspunkt für die erste Hauptrichtung der Forschung von JENSEN, nämlich der Untersuchung des konstruktiblen Universums  $L$ . JENSEN zeigte 1968, daß in  $L$  die Souslinhypothese falsch ist. Die Beweisanalyse führte zu dem kombinatorischen Prinzip  $\diamond$ , einer Verstärkung der Kontinuumshypothese, das inzwischen mannigfaltige Anwendungen in der allgemeinen Topologie, Algebra und kombinatorischen Mengenlehre gefunden hat. In gewisser Weise benötigt der Beweis von  $\diamond$  in  $L$  nur „grobe“ Eigenschaften dieses Universums, die im wesentlichen schon GÖDEL bekannt waren.

Schon in seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1967 begann JENSEN jedoch eine neue detaillierte Untersuchung des konstruktiblen Universums. Hier wird genau die „kleinste“ Stelle in dem hierarchischen Aufbau von  $L$  untersucht, wo sich bestimmte Dinge ereignen. Dies wird heute als Feinstrukturtheorie von  $L$  bezeichnet. Mit ihrer Hilfe hat JENSEN eine fast vollständige Analyse der kombinatorischen Struktur von  $L$  durchgeführt. Die dabei destillierten Prinzipien, z. B.  $\square$  und Moräste, fanden wie  $\diamond$  vielfältige Anwendungen.

Im Jahre 1974 kehrte JENSEN nach längerer Abwesenheit aus Deutschland für einige Jahre nach Bonn zurück. Gleich am Anfang dieser Periode bewies er zwei tiefe und überraschende Stuktursätze. Aus seiner Beschäftigung mit dem singulären Kardinalzahlproblem entwickelte er den *Überdeckungssatz für  $L$* . Grob gesprochen besagt dieser Satz, daß jedes innere Modell nahe bei  $L$  liegt oder sehr viel größer als  $L$  ist. Sein *Kodierungssatz* besagt, daß jedes abzählbare transitive Modell der Mengenlehre eine klassengenerische Erweiterung besitzt, in der alle Mengen aus einer festen reellen Zahl konstruktibel sind.

Der Überdeckungssatz für  $L$  führte zu einer neuen Entwicklung in der Theorie der inneren Modelle. Zusammen mit TONY DODD führte JENSEN das *Kernmodell  $K$*  ein, welches die Lücke zwischen  $L$  und den von KUNEN untersuchten natürlichen inneren Modellen für meßbare Kardinalzahlen füllte. Dies führte zu weiteren wichtigen Überdeckungssätzen. Außerdem zeigte sich, daß die Feinstrukturtheorie grundlegend für die Untersuchung des „vollen“ Universums  $V$  ist.

In gewisser Weise ist das Kernmodell  $K$  eine natürliche Erweiterung von  $L$ , das heißt die Elemente von  $K$  sind fast konstruktibel. In den letzten Jahren hat sich JENSEN neben anderen sehr bemüht, noch bessere „konstruktible“ Approximationen an das Universum  $V$  zu entwickeln. Dieser grundlegende Zweig der mengentheoretischen Forschung ist noch nicht am Ziel angelangt und überschneidet sich mit der Suche nach natürlichen inneren Modellen für große Kardinalzahlen. Schon jetzt ist aber deutlich, daß eine verallgemeinerte Feinstrukturtheorie grundlegend für diese Untersuchungen ist.

In Deutschland haben außerdem noch H.-D. DONDER und B. KOPPELBERG wertvolle Beiträge zur Mengenlehre geliefert.



## 7 Die Rekursionstheorie

Das wohl einfachste Rekursionsschema ist das der primitiven Rekursion: es definiert eine zahlentheoretische Funktion  $f$  aus gegebenen Funktionen  $g$  und  $h$  durch die Gleichungen

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n),$$

$$f(k + 1, x_2, \dots, x_n) = h(k, f(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Dieses zunächst recht speziell aussehende Definitionsschema ist erstaunlich stark. Besonders SKOLEM hat gezeigt, daß die darauf aufgebaute sogenannte primitiv rekursive Zahlentheorie zur Formalisierung der elementaren Zahlentheorie völlig ausreicht. HILBERT hat dann die Frage gestellt, ob es überhaupt berechenbare zahlentheoretische Funktionen gibt, die nicht mehr primitiv rekursiv sind. Dieses Problem wurde 1928 von ACKERMANN gelöst: Definiert man

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = xy, \quad f_3(x, y) = x^y$$

und allgemein  $f_n(x, y)$  durch die entsprechende Fortsetzung, so ist die durch  $g(n, x, y) := f_n(x, y)$  definierte Funktion offenbar berechenbar, aber aus Wachstumsgründen nicht mehr primitiv rekursiv.

Die Ausgangsfrage der Rekursionstheorie im eigentlichen Sinne ist die nach dem allgemeinen Begriff eines Algorithmus, also eines Berechnungsverfahrens, bei dem die Argumente (Eingabedaten) und die Werte (Ausgabedaten) konkrete Objekte (etwa Zeichenreihen) sind. Schon immer hat man sich in der Mathematik darum bemüht, Algorithmen zur Lösung von Problemen anzugeben. Ein frühes Beispiel ist etwa der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen.

Es hat jedoch in der Mathematik auch immer Fragestellungen gegeben, die sich einer algorithmischen Lösung widersetzt haben. Ein Beispiel ist das zehnte Problem aus der berühmten Liste, die HILBERT in seinem 1900 gehaltenen Vortrag vor dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris angegeben hat.

*Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei vorgelegt. Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

Hier haben viele erfolglose Lösungsversuche schließlich zu der Vermutung geführt, daß es überhaupt keinen Algorithmus gibt, der über die Lösbarkeit einer vorgelegten diophantischen Gleichung entscheidet; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Damit wird jedoch die Fragestellung auf eine andere Ebene gehoben. Es geht jetzt nicht mehr darum, einen konkreten Algorithmus anzugeben, sondern man muß sich über die allgemeine Natur von Algorithmen soweit

klar werden, daß man einen Beweis für die Nichtexistenz eines Algorithmus der verlangten Art führen kann.

Ein erster Schritt in diese Richtung wurde von HERBRAND getan. In einem Brief vom 7. April 1931 an GÖDEL möchte HERBRAND eine Axiomatisierung der Arithmetik genau angeben. Er schreibt

... Außerdem haben wir in der Arithmetik andere Funktionen, zum Beispiel durch Rekursion definierte Funktionen, die ich mit folgenden Axiomen definieren werde. Nehmen wir an, daß wir alle die Funktionen  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_{p_n})$  einer gewissen endlichen oder unendlichen Menge  $F$  definieren wollen. Jedes  $f_n(x_1, \dots)$  wird gewisse Definitionsaxiome haben. ... Diese Axiome werden folgenden Bedingungen genügen.

1. Die Definitionsaxiome von  $f_n$  enthalten, außer dem  $f_n$ , nur Funktionen von kleinerem Index.
2. Diese Axiome enthalten nur freie Variable und Konstanten.
3. Man muß mit intuitionistischen Beweisen zeigen können, daß es möglich ist, den Wert der Funktionen für jedes bestimmte Wertsystem ihrer Argumente mit diesen Axiomen eindeutig zu berechnen.

Zum Beispiel haben wir folgende Beispiele:

- a) Die Funktionen  $x + y$  und  $x \cdot y$ , die die Menge  $E_1$  machen, die mit folgenden Axiomen definiert sind:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x & x + (y + 1) &= (x + y) + 1 \\ x \cdot 0 &= 0 & x(y + 1) &= xy + x \end{aligned}$$

HERBRAND gibt dann unter b) die Axiome der primitiven Rekursion an und erklärt unter c), daß nach seinem allgemeinen Schema noch viele andere Funktionen definiert sein können, wobei er als Beispiel die Ackermansche Funktion erwähnt.

Es handelt sich hier um den ersten schriftlich vorliegenden Versuch, den Begriff der rekursiven, also durch einen Algorithmus gegebenen Funktion zu definieren.

GÖDEL hat 1934 in einer Vorlesung in Princeton als „suggested by Herbrand“ die folgende Definition einer rekursiven Funktion angegeben:

If  $\phi$  denotes an unknown function, and  $\psi_1, \dots, \psi_k$  are known functions, and if the  $\psi$ 's and  $\phi$  are substituted in one another in the most general fashions and certain pairs of the resulting equations are equated, then, if the resulting set of functional equations has one and only one solution for  $\phi$ ,  $\phi$  is a recursive function.

GÖDEL hat diesen Definitionsversuch HERBRAND irrtümlich zugeschrieben. Denn aus dem oben auszugsweise zitierten Brief HERBRANDS an GÖDEL und aus GÖDELS Antwort vom 25. Juli 1931 (die HERBRAND, der am 27. Juli 1931 in den

Alpen tödlich verunglückt ist, nicht mehr erreicht hat) geht hervor, daß dieser Briefwechsel die einzige Kontaktaufnahme zwischen beiden war. Ferner ergibt sich aus einem Briefwechsel von GÖDEL mit J. VAN HEIJENOORT, daß GÖDEL 1934 bei der Vorbereitung der Vorlesungen in Princeton der Brief HERBRANDS nicht mehr vorlag und er sich auf sein Gedächtnis verlassen mußte.

KALMAR hat 1956 gezeigt, daß diese Definition nicht den intendierten Begriff trifft: Er hat eine algorithmisch nicht berechenbare Funktion angegeben, die sich als eindeutige Lösung eines Gleichungssystems darstellen läßt. Später haben GRZEGORCZYK, MOSTOWSKI und RYLL-NARDZEWSKI diejenigen Funktionen charakterisiert, die als eindeutige Lösungen von Gleichungssystemen auftreten. Es sind dies genau die hyperarithmetischen Funktionen, von denen weiter unten noch die Rede sein wird.

GÖDEL selbst hat schon in der Vorlesung von 1934 eine wichtige Modifikation an diesem Definitionsversuch vorgenommen. Er verlangt, daß für jedes Argumententupel der Funktionswert durch gewisse einfache formale Regeln (im wesentlichen eine Einsetzungs- und eine Ersetzungsregel) ausrechenbar sein muß. Diese Definition ist 1936 (in leicht veränderter Form) von KLEENE zur Grundlage einer ersten Ausarbeitung der Theorie der rekursiven (und der partiell-rekursiven) Funktionen gemacht worden. KLEENE bewies dort unter wesentlicher Verwendung der 1931 von GÖDEL eingeführten Technik der Numerierung von Formeln einige inzwischen klassischen Resultate: den *Substitutionssatz* (auch S-m-n-Theorem genannt), den *Rekursionssatz*, ferner – mittels des Kleeneschen Normalformensatzes – die Übereinstimmung der rekursiven Funktionen mit den sogenannten  $\mu$ -rekursiven Funktionen, die aus einfachen Ausgangsfunktionen durch Anwendung der Definitionsschemata der Einsetzung, der primitiven Rekursion und des folgenden  $\mu$ -Schemas erzeugt werden: Ist eine Funktion  $g$  bereits erzeugt, und hat  $g$  die Eigenschaft, daß es zu jedem  $x_1, \dots, x_n$  ein  $y$  gibt mit  $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ , so darf man übergehen zu der durch  $f(x_1, \dots, x_n) := \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) :=$  das kleinste  $y$  mit  $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  definierten Funktion.

Daraufhin hat A. CHURCH 1936 die heute nach ihm benannte These aufgestellt, daß der oben diskutierte Begriff der allgemeinen rekursiven Funktion und der von ihm eingeführte äquivalente Begriff der  $\lambda$ -definierbaren Funktion mit dem der „effektiv berechenbaren“ Funktion (in einem etwas vagen intuitiven Sinn) zusammenfällt. Diese These ist heute allgemein akzeptiert. Eine wesentliche Stützung hat sie erfahren durch die von A. TURING 1937 durchgeführte Analyse der Operationen, die ein menschlicher Rechner ausführt. (Eine ähnliche Überlegung wurde gleichzeitig und unabhängig von E. POST angestellt.) Diese Analyse führte TURING auf ein abstraktes Maschinenmodell, das heute nach ihm benannt wird. Es zeigte sich, daß auch die durch solche Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen mit den allgemein rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Als äquivalent mit dem Begriff der allgemeinen rekursiven Funktionen erwies sich dann auch der Begriff der kombinatorisch definierbaren Funktion, der

sich im Rahmen der von H. B. CURRY 1930 in seiner Göttinger Dissertation (bei HILBERT) begründeten kombinatorischen Logik ergibt. Der  $\lambda$ -Kalkül von CHURCH ist äquivalent mit der viel früher von CURRY entwickelten kombinatorischen Logik. Die Formeln des  $\lambda$ -Kalküls sind übersichtlicher als die der kombinatorischen Logik, während die kombinatorische Logik den Vorteil hat, im Unterschied zum  $\lambda$ -Kalkül völlig ohne gebundene Variablen auszukommen. Besonders der  $\lambda$ -Kalkül, aber teilweise auch die kombinatorische Logik haben Anwendungen in der Informatik gefunden.

Auch von den 1954 eingeführten Markov-Algorithmen hat sich gezeigt, daß die hiermit definierbaren Funktionen mit den allgemeinen rekursiven Funktionen zusammenfallen.

Bereits 1931 hat schon GÖDEL mit dem Begriff der in einem formalen System  $S$  entscheidungsdefiniten Relation eine Definition formuliert, von der sich herausgestellt hat, daß sie mit dem Begriff der rekursiven Relation (d. h. einer Relation, deren charakteristische Funktion rekursiv ist) zusammenfällt. Dies hat GÖDEL selbst 1946 gemerkt, nachdem er schon vorher eine gewisse Absolutheit (d. h. Unabhängigkeit von dem zugrunde liegenden System) dieses Begriffs festgestellt hatte.

Nachdem so der Begriff des Algorithmus eine befriedigende und mathematisch präzise Klärung gefunden hatte, war erstmals die Möglichkeit eröffnet, von gewissen mathematischen Problemen zu zeigen, daß sie algorithmisch *nicht* lösbar sind. Innerhalb der Theorie der rekursiven Funktionen lassen sich solche Probleme leicht angeben: KLEENE konstruierte 1936 ein Beispiel einer primitiv rekursiven Relation  $R$  derart, daß  $\{n: \forall x R(x, n)\}$  nicht rekursiv ist. Nun hatte GÖDEL bereits 1931 ein Verfahren angegeben, das zu jedem primitiv rekursiven  $R$  eine prädikatenlogische Formel erster Stufe liefert, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von  $\forall x R(x, n)$  äquivalent ist. Es folgt also, daß die Menge der erfüllbaren prädikatenlogischen Formeln erster Stufe nicht rekursiv ist, das heißt nicht algorithmisch charakterisiert werden kann. Dieses Resultat wurde explizit zuerst von CHURCH formuliert.

Später sind dann vielfältige Verschärfungen hiervon gefunden worden: für viele syntaktisch abgegrenzte Klassen  $\mathcal{F}$  von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe konnte man zeigen, daß die Frage nach der Erfüllbarkeit von Formeln  $F \in \mathcal{F}$  unentscheidbar bzw. entscheidbar ist. An diesen Untersuchungen waren besonders HERBRAND, GÖDEL, HAO WANG, BÖRGER und GOLDFARB beteiligt. Als besonders nützlich für Unentscheidbarkeitsbeweise hat es sich herausgestellt, den Begriff der Rekursivität durch sogenannte Registermaschinen (anstelle von Turingmaschinen) zu charakterisieren. Eine Übersicht über den heutigen Stand der Kenntnisse auf diesem Gebiet findet man in dem 1985 erschienenen Buch „*Berechenbarkeit, Komplexität, Logik*“ von E. BÖRGER.

Auch für viele in der Mathematik aufgetretenen Fragestellungen konnte die algorithmische Unlösbarkeit nachgewiesen werden: Aufbauend im wesentlichen auf Vorarbeiten von JULIA ROBINSON, die sich auf Lösungen der Pellschen Glei-

chung beziehen, zeigte MATIJASEVITCH 1970 die Unentscheidbarkeit des zehnten Hilbertschen Problems. BOONE und NOVIKOV bewiesen in den fünfziger Jahren die Unentscheidbarkeit des Wortproblems der Gruppentheorie.

Der Begriff der Rekursivität läßt sich offenbar relativieren: Eine Menge  $A$  natürlicher Zahlen heißt rekursiv in einer Menge  $B$  (Schreibweise:  $A \leq_T B$ ), wenn es eine Turingmaschine  $M$  gibt, die die Zugehörigkeit einer vorgelegten Zahl zu der Menge  $A$  entscheidet, wobei  $M$  im Verlauf der Rechnung  $B$  als „Orakel“ benutzen kann, das heißt beliebig oft Anfragen stellen kann, ob ein Zwischenergebnis zur Menge  $B$  gehört oder nicht. Die Äquivalenzklassen bezüglich der von  $\leq_T$  erzeugten Äquivalenzrelation nennt man *rekursive Grade*; Untersuchungen über ihre Struktur sind sehr schwierig und machen ein Hauptgebiet der heutigen Rekursionstheorie aus. Von besonderem Interesse sind rekursiv aufzählbare Grade, das heißt die Grade mit rekursiv aufzählbaren Repräsentanten. Eine Menge heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn sie sich in der Form  $\{n: \exists x R(x, n)\}$  mit rekursiven  $R$  definieren läßt. POST hat 1944 das Problem formuliert, ob es überhaupt rekursiv aufzählbare Grade gibt, die von  $\mathbf{0}$  (dem Grad der rekursiven Mengen) und dem maximalen rekursiv aufzählbaren Grad  $\mathbf{0}'$  (dessen Existenz man sich leicht überlegen kann) verschieden sind. Diese Frage wurde 1956 unabhängig voneinander von FRIEDBERG und MUCKNIK positiv beantwortet. Beide Autoren verwendeten zum Beweis eine neuartige Methode, die sogenannte *Prioritätsmethode*, die seitdem in vielerlei Hinsicht erweitert worden ist und die heute noch diesen Teil der Rekursionstheorie charakterisiert. In Deutschland hat hierzu besonders AMBOS-SPIESS wichtige Beiträge geliefert.

Bisher war von Rekursionstheorie nur über den natürlichen Zahlen die Rede gewesen. Schon früh hat man jedoch versucht, den Begriff der Rekursivität auch über anderen Bereichen zu studieren. Hier stellt sich sofort die Frage, welche Bereiche denn angemessen sind. Eine Antwort darauf haben KRIPKE und PLATEK gegeben: Sie konnten zeigen, daß die sogenannten zulässigen Ordinalzahlen oder etwas allgemeiner die Abschnitte  $L_\alpha$  von GÖDELS Hierarchie der konstruktiblen Mengen mit einer zulässigen Ordinalzahl  $\alpha$  geeignete Bereiche für Rekursionstheorien sind. Die kleinste zulässige Ordinalzahl oberhalb von  $\omega$  ist  $\omega_1^{CK}$  ( $CK$  steht für CHURCH und KLEENE), das heißt die kleinste Ordinalzahl, die nicht mehr durch eine rekursive Wohlordnung dargestellt werden kann. In der Rekursionstheorie über zulässigen Ordinalzahlen, der sogenannten  *$\alpha$ -Rekursionstheorie*, ist es von großer Wichtigkeit, den Begriff der Endlichkeit geeignet zu verallgemeinern; darauf hat zuerst KREISEL hingewiesen. Im Fall der Rekursionstheorie über  $\omega_1^{CK}$  haben KREISEL und SACKS den Endlichkeitsbegriff zum Begriff einer hyperarithmetischen, also  $\Delta_1^1$ -Teilmenge der natürlichen Zahlen verallgemeinert. Im allgemeinen Fall der  $\alpha$ -Rekursionstheorie für zulässiges  $\alpha$  ist der passende Endlichkeitsbegriff der eines  $\alpha$ -rekursiven Bildes einer Ordinalzahl  $< \alpha$ .

Später haben insbesondere S. FRIEDMAN und SACKS versucht, Rekursionstheorie auch auf  $L_\beta$  mit beliebigen Limeszahlen  $\beta$  zu verallgemeinern. In dieser sogenannten  *$\beta$ -Rekursionstheorie* lassen sich die Begriffe der  $\beta$ -rekursiv aufzähl-

baren Menge und der  $\beta$ -rekursiven Funktion in natürlicher Weise definieren. Weniger naheliegend war die folgende Definition eines angemessenen Endlichkeitsbegriffs, die von W. MAASS gefunden wurde: eine Teilmenge von  $L_\beta$  heißt invariant endlich, wenn sie ein Element der kleinsten rekursiv invarianten Klasse von  $\beta$ -rekursiven beschränkten Teilmengen von  $L_\beta$  ist.

Schließlich ist noch über eine Verallgemeinerung der Rekursionstheorie zu berichten, in der die betrachteten Objekte nicht mehr nur Funktionen über den natürlichen Zahlen sind, sondern Funktionale oder von noch höherem Typ. In einer viel beachteten Arbeit „Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts“ von 1958 hat GÖDEL die eingangs betrachteten primitiv rekursiven Funktionen auf höhere Typen erweitert. Die zugehörige Theorie  $T$  hat dann die volle Stärke der Arithmetik.

Die volle Rekursionstheorie hat KLEENE auf höhere Typen erweitert. Er hat dabei grundlegende Zusammenhänge mit der Theorie der hyperarithmetischen Mengen aufgedeckt: eine Menge natürlicher Zahlen ist hyperarithmetisch genau dann, wenn sie rekursiv ist in dem Typ-2-Objekt  $E$ , das 0 oder 1 ist je nachdem ob sein Funktionsargument eine Nullstelle besitzt oder nicht. KLEENES Rekursionstheorie höherer Typen hat als Grundannahme, daß alle betrachteten Objekte total, das heißt überall definiert sein müssen. Das führt dazu, daß man unendliche Rechnungen zulassen muß. Denn wenn ein Typ-2-Objekt wie etwa das obige  $E$  als Argument in einer Rechnung auftritt, dann kann dieses Argument ja nur so benutzt werden, daß man es anwendet auf eine (nach KLEENES Grundannahme totale) Funktion, das heißt auf ein unendliches Objekt, das vorher durch die Rechnung bereitgestellt werden muß. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß die weitere Entwicklung dieser Art von Rekursionstheorie auf Fragestellungen führt, bei denen die Antwort von den zugrunde gelegten mengentheoretischen Axiomen (wie etwa  $V = L$ ) abhängt. Genaueres hierüber findet man etwa in dem 1978 erschienenen Buch „*Recursion-Theoretic Hierarchies*“ von P. HINMAN.

Eine Rekursionstheorie höherer Typen, in der alle Rechnungen endlich sind und die deshalb von vornherein partiell definierte und stetige Objekte zugrunde legt, ist (nach Vorarbeiten von PLATEK) von D. SCOTT und YU. ERSOV entwickelt worden. Die Grundidee ist hier, die unendlichen Objekte als Limiten (genauer: Ideale) endlicher Approximationen darzustellen. Ein Funktional heißt dann rekursiv, wenn das Ideal seiner endlichen Approximationen rekursiv aufzählbar ist. Diese sogenannte *Bereichstheorie* (domain theory) ist in der Informatik von grundlegender Bedeutung, insbesondere für die Semantik von Programm Sprachen.

## 8 Die Modelltheorie

Neben der Beweistheorie entwickelte sich seit Beginn der zwanziger Jahre die *Modelltheorie*. In ihr steht nicht die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines (formalen) Axiomensystems für die Mathematik oder Teilgebiete davon im Vordergrund – diese wird, im Gegenteil, als gegeben angenommen – sondern die Untersuchung der Modelle eines solchen Axiomensystems. Ihre Wurzeln hat die Modelltheorie einerseits in der schon in Abschnitt 1 erwähnten Arbeit von LÖWENHEIM (1915) und in einer Arbeit von SKOLEM aus dem Jahr 1934, andererseits in GÖDELS Dissertation (1930). In der Arbeit von SKOLEM wird mit einer Konstruktion, die im wesentlichen die Ultraproduktkonstruktion darstellt, unter anderem gezeigt, daß es kein (formales) Axiomensystem geben kann, das die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert. Diese Methode der Konstruktion von sogenannten Nichtstandard-Modellen eines Axiomensystems stand Pate bei der Entwicklung der Nichtstandard-Analysis durch ABRAHAM ROBINSON in den sechziger Jahren. In seiner Arbeit von 1930 zeigte GÖDEL, daß die auf FREGE, WHITEHEAD, RUSSELL und HILBERT zurückgehende Formalisierung der Mathematik alle mathematischen Schlußweisen vollständig erfaßt, daß also eine Unbeweisbarkeit notwendig in einem „Gegenbeispiel“ begründet sein muß. Die Konstruktion dieses Gegenbeispiels stellt eine andere grundlegende Methode der heutigen Modelltheorie dar.

Die beiden eben angesprochenen Methoden wurden in den dreißiger Jahren von A. TARSKI durch weitere ergänzt und systematisiert. TARSKI begann auch das Studium konkreter algebraischer Theorie unter modelltheoretischen Gesichtspunkten. Seine Untersuchungen erbrachten die Entscheidbarkeit einiger wesentlicher Teiltheorien der Mathematik, so zum Beispiel der Theorie der komplexen Zahlen, der Theorie der reellen Zahlen und der Theorie der euklidischen Ebene. TARSKIS geometrische Untersuchungen wurden in den sechziger Jahren in Deutschland von W. SCHWABHÄUSER fortgeführt. Er zeigte unter anderem die Entscheidbarkeit der ebenen hyperbolischen Geometrie.

In den sechziger Jahren erhielt die Modelltheorie wesentliche Impulse einerseits durch den tiefliegenden Satz von MORLEY, andererseits durch die aufsehenerregende Anwendung modelltheoretischer Methoden durch J. AX und S. KOCHEN in dem Problemkreis diophantischer Gleichungen.

Mit den Arbeiten von AX und KOCHEN eröffnete sich der Modelltheorie ein weites Feld der Anwendung – Fragen der Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit in der Algebra, speziell der Körpertheorie, bis hin zur Behandlung rein algebraischer Fragestellungen. In Deutschland lieferten insbesondere A. PRESTEL, V. WEISSPFENNING und M. ZIEGLER hierzu zahlreiche Beiträge.

Der Satz von Morley besagt, daß für eine Theorie je zwei Modelle gleicher, aber beliebiger überabzählbarer Mächtigkeit isomorph sind, falls dies schon für mindestens eine überabzählbare Mächtigkeit richtig ist. Der Beweis dieses Satzes brachte für die Modelltheorie wiederum neue Konstruktionsmethoden, die sich

für die weitere Entwicklung als grundlegend erwiesen haben. Insbesondere wurde hierdurch die sogenannte Stabilitätstheorie und damit letztlich S. SHELAHS Klassifikationsprogramm für Teiltheorien der Mathematik inspiriert. Theorien, deren Modellklasse eine Strukturtheorie ähnlich der Theorie algebraisch abgeschlossener Körper erlaubt, gelten dabei als besonders einfach (sie sind insbesondere stabil), während Theorien von Strukturen mit einer linearen Ordnung, wie zum Beispiel der reellen Zahlen, als besonders kompliziert gelten (sie sind insbesondere instabil). Beiträge hierzu lieferten in Deutschland unter anderen U. FELGNER und J. REINEKE zur Theorie der Gruppen und Ringe und M. ZIEGLER zur Theorie der Moduln.

Wie schon oben erwähnt, entwickelte in den sechziger Jahren A. ROBINSON seine Nichtstandard-Analysis, die eine späte Rechtfertigung des Rechnens mit infinitesimalen Zahlen von LEIBNIZ brachte. In gewisser Weise stellt eine Arbeit von SCHMIEDEN und LAUGWITZ von 1958 einen Vorläufer davon dar. Mit modelltheoretischen Überlegungen (Saturiertheitsprinzip) wurde gezeigt, daß man, ohne auf Widersprüche zu stoßen, die Existenz von unendlich großen und unendlich kleinen „reellen“ Zahlen annehmen kann. Dieser neue Zahlenbereich bildet wieder einen angeordneten Körper, der dieselben formalen Eigenschaften wie die üblichen reellen Zahlen hat (Transferprinzip). Das Vollständigkeitsaxiom gilt nur für die internen Mengen (Prinzip der definitorischen Abgeschlossenheit der internen Mengen). Diese drei Prinzipien der Nichtstandard-Analysis wurden auf die vielen Arten topologischer Strukturen und auf die natürlichen Zahlen angewandt. So entwickelte sich die Nichtstandard-Analysis, obwohl logischen Ursprungs, zu einem eigenständigen Teilgebiet der Mathematik. Einen besonderen Aufschwung erlebte die Nichtstandard-Analysis durch Arbeiten von LOEB, ANDERSON und KEISLER in den siebziger Jahren, in denen gezeigt wurde, daß man alle straffen Wahrscheinlichkeitsmaße als Zählmaße auffassen und deshalb stochastische Integrale (bis auf unendlich kleine Fehler) pfadweise definieren kann. In dem Buch mit dem Titel „*Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*“ (Academic Press, 1986), das S. ALBEVERIO (Bochum) zusammen mit drei Norwegern geschrieben hat, findet man einen Überblick auch über Teile der in Deutschland entstandenen Anwendungen der Nichtstandard-Analysis auf den Gebieten Mathematische Logik (Wahrscheinlichkeitslogik), Funktionalanalysis, Stochastik und Mathematische Physik.

Der topologische Übertragungsprozeß, der der Nichtstandard-Analysis zugrunde liegt, initiierte die Entwicklung der sogenannten topologischen Modelltheorie, deren Entwicklung und Anwendung in Deutschland besonders FLUM, PRESTEL und ZIEGLER vorantrieben. ROBINSON hatte 1972 die Frage gestellt, welche Logik für topologische Strukturen dieselbe Rollen spielen könnte wie die Logik erster Stufe für algebraische Strukturen. Die zu betrachtenden Strukturen haben offenbar die Form  $(\mathcal{M}, \tau)$ , wobei  $\tau$  eine Topologie auf der Trägermenge der erststufigen Struktur  $\mathcal{M}$  ist. Beispiele sind etwa topologische Räume ( $\mathcal{M}$  ist hier nur eine Menge), topologische Gruppen und topologische Vektorräume. Es



hat mehrere Versuche gegeben, die Frage von ROBINSON angemessen zu beantworten, und zwar durch folgende formale Systeme:

1.  $\mathcal{L}^{mon}$ , eine Version der monadischen Logik zweiter Stufe, in der die Mengenquantoren über offene Mengen laufen.
2.  $\mathcal{L}'$ ; dies ist eine Einschränkung von  $\mathcal{L}^{mon}$ , in der Mengenquantoren (die also wieder über offene Mengen laufen) nur erlaubt sind im Kontext

$$\exists X(t \in X \wedge \phi)$$

wobei  $X$  nur negativ in  $\phi$  vorkommt, beziehungsweise im dualen Kontext

$$\forall X(t \in X \rightarrow \phi)$$

mit  $X$  nur positiv in  $\phi$ .

3.  $\mathcal{L}^{I''}$ . Hier hat man die übliche Logik erster Stufe um einen  $n$ -stelligen Operator zur Bildung des Inneren erweitert.

Man kann zeigen, daß die Ausdrucksfähigkeit dieser Sprachen echt abnimmt, also  $\mathcal{L}^{mon} > \mathcal{L}' > \mathcal{L}^{I''}$ .

Es stellt sich die Frage, welche dieser Sprachen sich für eine topologische Modelltheorie eignet. Eine überzeugende Antwort ist im wesentlichen durch Untersuchungen von ZIEGLER gegeben worden:  $\mathcal{L}'$  (im Gegensatz zu  $\mathcal{L}^{mon}$ ) erfüllt den Kompaktheitssatz (das heißt: Eine Menge von  $\mathcal{L}'$ -Sätzen hat ein topologisches Modell genau dann wenn jede endliche Teilmenge eines besitzt) und den Satz von Löwenheim-Skolem. Es gilt sogar eine Form des Lindström-Satzes für  $\mathcal{L}'$ , daß nämlich  $\mathcal{L}'$  eine maximale Logik mit diesen beiden Eigenschaften ist. Es scheint also, daß mit  $\mathcal{L}'$  eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage von ROBINSON gefunden ist.

Für weitere wichtige Eigenschaften von  $\mathcal{L}'$  (etwa rekursive Axiomatisierbarkeit, Interpolationssatz) müssen wir auf die Literatur verweisen, etwa auf das Buch „*Topological Model Theory*“ von J. FLUM und M. ZIEGLER (*Springer Lecture Notes* 769). Dort werden auch Anwendungen behandelt, etwa die (erbliche) Unentscheidbarkeit der Theorie der  $T_2$ -Räume und eine vollständige Axiomatisierung der Theorie des topologischen Körpers der komplexen Zahlen.

## Bildnachweis

Wir danken den nachfolgenden Verlagen und Institutionen für die freundliche Genehmigung zur Reproduktion der im folgenden genannten fotografischen Abbildungen.

### Seite

<p>15 MPI für Strömungs- forschung</p> <p>24 Birkhäuser</p> <p>25 Birkhäuser</p> <p>31 Marcel Dekker</p> <p>37 Teubner</p> <p>86 Birkhäuser</p> <p>94 MIT Press</p> <p>100 Academic Press</p> <p>101 Wiley</p> <p>103 North-Holland</p> <p>233 3. Bild v.o., Teubner</p> <p>271 Springer</p> <p>325 1. Bild v.o., Gauthiers-Villars</p> <p>325 2. u. 3. Bild v.o., Springer</p> <p>362 Becksche Verlags- buchhandlung</p> <p>363 oben, Teubner</p> <p>363 unten, London Mathematical Society</p> <p>433 Springer</p>	<p>440 de Gruyter</p> <p>479 The Applied Probability Trust</p> <p>492 1. u. 2. Bild v.o., Springer</p> <p>493 Springer</p> <p>555 1. u. 2. Bild v.o., Springer</p> <p>555 4. Bild, Addison-Wesley</p> <p>556 2. Bild v.o., MIT Press</p> <p>556 3. Bild v.o., de Gruyter</p> <p>707 1. Bild v.o., Springer</p> <p>707 3. Bild v.o., North-Holland</p> <p>708 2. Bild v.o., Springer</p> <p>708 3. Bild v.o., Pergamon Press</p> <p>724 North-Holland</p> <p>783 Harvard UP</p> <p>784 Springer</p> <p>785 Harvard UP</p> <p>786 Harvard UP</p> <p>788 Teubner</p> <p>790 Springer</p> <p>798 Springer</p> <p>799 Springer</p>
--	---

Des weiteren gilt unser Dank dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Prof. Dr. G. Fischer, Prof. Dr. K. Jacobs und weiteren zahlreichen Privatpersonen für die Beschaffung und Bereitstellung umfangreichen Bildmaterials.

## Personenregister

- A  
 Abbe, E. 786  
 Abel, N. H. 478, 637  
 Achenwall, G. 781  
 Ackermann, W. 723, 724, 732  
 Adams, J. F. 684, 691, 702, 704, 707  
 Adams, R. A. 512, 513  
 Adem, J. 693  
 Adleman, L. M. 770, 777  
 Agmon, S. 158, 190, 190  
 Aharoni 100  
 Ahlfors, L. V. 364, 371, 379, 384, 386, 401  
 Ahrens, H. 804  
 Aiken, H. H. 131, 133  
 Albert, A. A. 123  
 Alberti 122  
 Alexander, J. W. 334, 675, 676, 681, 682  
 Alexander, S. N. 141  
 Alexandroff, P. S. 279, 334, 353, 426, 678, 680, 707  
 Alexandrov, A. D. 448, 451  
 Alexandrow, A. D. 349–351  
 Almgren, F. J. 205  
 Alt, H. W. 195, 203  
 Althoff, F. 9, 11–14  
 Amdahl, G. M. 144  
 Amick, C. J. 206  
 Amira, B. 71  
 Ammeter 485  
 Anderson, O. 783, 805, 809, 811  
 Anderson, T. W. 801  
 Anderson 739  
 André 98  
 Andrews, G. E. 90, 758  
 Apéry, R. 776  
 Appel, K. 92  
 Arason 667, 668, 669  
 Archimedes 422, 423, 424  
 Archipov, G. I. 773  
 Aristoteles 718  
 Aronhold 6  
 Arthur, J. 615, 651, 652  
 Artin, E. 24, 48, 49, 538, 539, 543, 544, 5572–559, 561–564, 624, 639, 643–646, 651, 760, 661, 668, 765, 772, 773,  
 Artin, M. 624  
 Artzy, R. 243  
 Arzel, C. 508  
 Ascoli, G. 508  
 Ashby, W. R. 139  
 Atanasoff, J. V. 131  
 Atiyah, M. 690–692, 698  
 Atkin, A. O. 758  
 Aumann, G. 43  
 Averbukh, S. 689  
 Averbuch, H. T. 120  
 Ax, J. 738, 772  
 Axer, A. 755  
  
 B  
 Babbage, C. 116, 127  
 Bachelier, L. 469  
 Bachmann, F. 259  
 Backlund, R. 769  
 Backus, J. W. 136, 144  
 Baclawski 88  
 Bacon, F. 133  
 Baer, R. 24, 41, 539, 560, 561, 572  
 Baernstein, A. 391  
 Baeza, R. 668, 669  
 Baker, A. 751, 761, 768, 771, 772  
 Balasubramanian 757  
 Baldus 52  
 Baldwin, F. S. 120  
 Bambah, R. P. 444  
 Banach, S. 295, 450  
 Bar-Hillel, Y. 139  
 Barbilian, D. 249  
 Bargmann, V. 643, 650  
 Barlotti, A. 245  
 Barneck 24, 26  
 Barner, M. 342  
 Barnette, D. 442  
 Barone K. 460, 461, 471, 472  
 Barrat, M. 695  
 Barton, R. S. 141  
 Baruch 24  
 Barwise, J. 147  
 Bateman 470  
 Baudot, E.;116,123,133  
 Bauer, F. L. 133, 135  
 Bauer, H. 450, 480, 481  
 Baum, M. 119  
 Bayes, Th. 793  
 Beauclair, W. de 26  
 Becker, R. 796  
 Beckert, H. 188, 206, 669  
 Beer, A. 501  
 Behnke, H. 408  
 Behrens, W. U. 796, 811  
 Belinskii 386  
 Bell, C. G. 87, 141  
 Belopolskii, A. L. 523  
 Beltrami 152  
 Bergman 409  
 Bergmann, S. 24, 26, 37, 70, 144  
 Bernays, P. 24, 26, 70, 276, 726, 729

- Berndt, B. 758  
 Bernoulli, J. 84, 338, 426, 459, 471  
 Bernstein, A. 138  
 Bernstein, F. 24, 26–30, 32, 33, 39, 472, 482, 484, 791, 792, 795, 811, 812  
 Bernstein, S. N. 154, 155, 180, 185, 187, 197, 217, 305, 461, 793  
 Bernstein 802  
 Berry, C. E. 131  
 Bers, L. 176, 187, 197, 371  
 Bessel, F. W. 782  
 Betke, U. 446  
 Betti, E. 329, 352, 679  
 Beukers, F. 776  
 Beurling 379  
 Bianchi, L. 336, 341  
 Bieberbach, L. 19, 34–36, 42, 50–52, 55, 57–65, 67–69, 73, 361–363, 370, 372, 387, 395, 403, 411, 451  
 Bilharz, L. 773  
 Billera, L. 442  
 Billing, H. 141  
 Birch, B. J. 445  
 Birkhoff, G. 87, 246  
 Birman, M. S. 523  
 Birnbaum, Z. W. 800  
 Björner 88  
 Blackwell, D. 801  
 Blaschke, W. 49, 62–64, 67, 68, 247, 346–348, 373, 429, 431, 438, 439, 448, 449, 451, 475  
 Blichfeldt, H. P. 444, 445  
 Blichfeldt, H.-F. 746  
 Bloch, S. 401, 402  
 Blumenthal, O. 24, 26, 36, 37, 51, 52, 55, 56, 60, 70, 234, 640  
 Boardman, J. 703  
 Bochner, S. 24, 38, 334, 354, 409, 473  
 Boda, M. 124  
 Bödighheimer, C. F. 696  
 Boerner 153, 396  
 Bohlmann, G. 459, 460, 488  
 Bohmann, J. 769  
 Böhme 207, 208  
 Böhmer, P. E. 463  
 Bohr, H. 53, 55, 57, 60, 63, 65, 366  
 Bokowski, J. 446  
 Bol, G. 449  
 Bolle, L. 120  
 Boltzmann, L. 466, 468  
 Bolyai, J. 436  
 Bolyai, W. 436  
 Bolza, O. 152  
 Bolzano, B. 117  
 Boltzmann, L. 467  
 Bombieri, E. 199, 759, 764–766, 771, 772, 775  
 Bonnesen, T. 449, 451  
 Bonnet, O. 343, 348  
 Boole, G. 87, 115  
 Boone 736  
 Booth, A. D. 139  
 Borel, E. 128, 393, 402, 460, 461, 471, 472, 746, 778  
 Börger 735  
 Borgwardt 105  
 Born, M. 469  
 Börner 90  
 Borsuk, K. 343  
 Bortkiewicz, L. von 470, 471, 783, 787, 789, 792, 802  
 Bose, R. C. 97, 98  
 Bott, R. 691  
 Böttinger, H. T. 13  
 Bourbaki 75  
 Bousfield 699, 701  
 Branges, L. de 390  
 Brauer, R. 24, 539, 540, 545, 552–554, 558, 561, 564–567, 570, 573, 644, 651  
 Brauer, A. 24, 70  
 Braun, H. 44  
 Brent, R. P. 769, 770  
 Breuer 24  
 Breusch 764  
 Bricard, R. 429, 436  
 Brieskorn, E. 690  
 Brill 6, 7  
 Brillhart, J. 770  
 Brillouin, L. 524  
 Bröcker, L. 669  
 Broggi, U. 460, 488  
 Brooks, F. P. 141  
 Brouwer, L. E. J. 55, 57, 60, 450, 678, 679, 682–685, 707, 721, 727  
 Browder, F. E. 158, 190, 329, 333, 334  
 Brown, E. H. 704, 705  
 Brown, E. M. 678  
 Brown, R. 468  
 Brownwell, D. 772, 773, 775  
 Brualdí 99  
 Bruck 98  
 Brückner, H. 594  
 Brückner, M. 442  
 Brückner 484  
 Bruggesser, M. 442  
 Bruin, de 86  
 Brun, V. 758  
 Brunn, H. 154, 431, 432  
 Bruns, E. H. 488  
 Bruns, H. 119, 471, 787  
 Buchholz, W. 726  
 Buffon, G. L. de 449  
 Bühlmann, H. 485, 805  
 Bunschuh, P. 761  
 Bunke, O. 804  
 Bunt, L. N. H. 486  
 Burack, B. 124  
 Burali-Forti 150, 353  
 Burgess, D. A. 758  
 Burkhardt, A. 119  
 Burkhardt, F. 789  
 Burks, A. W. 131, 132  
 Burroughs, W. S. 119, 120  
 Busemann 26  
 Bush, V. E. 125  
 C  
 Caccioppoli 203  
 Caffarelli 155, 199, 203, 215, 216  
 Cairns, S. S. 334  
 Calabi 334  
 Caldern, A. 508  
 Campos, F. P. 127  
 Cannon, J. W. 678  
 Cantelli 471  
 Cantor, G. 6–8, 117, 333, 353, 717, 721, 728, 744, 791  
 Carathodory, C. 38, 55, 56, 152, 153, 285, 341, 361, 362, 368–370, 373, 374, 398, 401, 403, 410, 414, 443, 439, 450, 461, 474, 482  
 Cardano 459

- Carleman, T. 409, 507, 508  
 Carleson 392, 398  
 Carlsson, G. 699, 700  
 Carnap, R. 128  
 Carpenter 123  
 Cartan, E. 117, 150, 156,  
     325, 335, 336, 339, 340,  
     348, 349, 353, 354, 693  
 Cartier 771  
 Cassel, J. W. S. 446, 666, 667  
 Cassels 746  
 Catalan, E. C. 118, 345  
 Cauchy, A. L. 150, 348, 361,  
     365, 428, 429  
 Cayley, A. C. 118, 517  
 Cech 684  
 Cesro 393  
 Chaitin 465  
 Chalk, J. 446  
 Champernowne, D. G. 138  
 Chandrasekhar 156  
 Chappe, C. 116  
 Charzynski 389  
 Chern, S. 151, 247, 325, 335,  
     336, 349, 350  
 Chernoff, H. 801  
 Chevalley, C. 335, 336, 353,  
     354, 598, 632, 747  
 Chomsky, N. 135  
 Choquet 450  
 Christodoulou, D. 531  
 Christoffel 6, 354  
 Chu, J. C. 141  
 Chudnovsky, V. G. 775  
 Chudy, J. 116  
 Chung 474  
 Church, A. 129, 134, 734,  
     736  
 Chwistek 720  
 Cigler, H. 752  
 Civita 206  
 Clairaut 338, 343, 355  
 Clark, W. A. 144  
 Claus 396  
 Clebsch 5, 354, 361  
 Clippinger, R. F. 135  
 Clunie 391  
 Cohen, F. 696  
 Cohen, H. 770  
 Cohen, P. 730  
 Cohn-Vossen, S. 24, 37, 325,  
     347, 348, 448  
 Collatz, L. 36  
 Collins, E. 128  
 Comerauer, A. 144  
 Comrie, L. J. 127, 769  
 Concus 164  
 Connelly, R. 429  
 Conrey, H. 755  
 Conway, J. H. 98, 445  
 Cook, S. A. 109, 136  
 Cooley 108, 110  
 Coombs, A. W. M. 140  
 Corbato, F. J. 141  
 Corput, J. G. van der 445  
 Couffignal, L. 131  
 Courant, R. 24, 26–30, 32,  
     33, 55, 56, 65, 69, 158,  
     170, 175, 178, 188, 207,  
     208, 217, 271, 277, 278,  
     286, 312, 362, 363,  
     368–370, 375, 379, 410,  
     508, 509, 514, 529  
 Cournat 461  
 Couturat, L. 121  
 Cramr, H. 475, 484, 754,  
     794, 801, 808  
 Crawford, P. O. 133  
 Cray, S. R. 140, 144, 366  
 Crofton, M. W. 449  
 Cues, N. von 742  
 Curry, H. B. 129, 735  
 Czuber, E. 449, 458, 459,  
     788, 789  
 D  
 D'Alembert 470, 471  
 Daboussi, H. 774  
 Dafermos 158  
 Dahl, O. J. 144  
 Damm, A. G. 121  
 Dantzig, G. H. 85, 102–105,  
     109, 303, 451, 800  
 Danzer, L. 444  
 Darboux, G. 336  
 Darwin 156  
 Davenport, H. 63, 447, 746,  
     761, 765, 779  
 Davis, M. 774, 775  
 De'Toschi, Marchese 636  
 Debreu, G. 451  
 Dedekind, R. 87, 117, 118,  
     328, 591, 632, 650, 717,  
     719, 728, 744  
 Dehn, M. 24, 42, 70, 423,  
     436, 442, 679, 683, 747  
 Deimling 207  
 Delange, H. 763, 774  
 Delaunay 341  
 Deligne, P. 612, 642, 648,  
     652, 766, 778  
 Delone, B. N. 435, 446, 447,  
     451  
 Dembowski 98  
 Demokrit 423  
 Deninger, C. 627  
 Denjoy 379  
 Desargues, G. 238  
 Descartes, R. 338, 426, 427,  
     674  
 Deshouillers, J. M. 757, 773  
 Deuber 96  
 Deuchler, G. 788  
 Deuring, M. 645, 646, 647,  
     761  
 Devinatz, E. 689, 706  
 Diamond, H. 764  
 Dickson 742  
 Dieudonn, J. 666, 673, 683,  
     742  
 Dijkstra, E. W. 94, 135, 141  
 Dilworth 94  
 Dinghas, A. 363, 403, 432,  
     449, 451  
 Diophant 742  
 DiPerna 158  
 Dirichlet, P. G. L. 5, 95, 155,  
     167, 168, 171, 173, 430,  
     435, 630–632, 661, 743,  
     744, 749  
 Disney 366  
 Divis, B. 779  
 Dixon, J. B. 770  
 Dodd, T. 731  
 Dodgson, C. L. 116  
 Doebelin, W. 477, 78  
 Dold, A. 682, 685, 689, 697,  
     700, 703  
 Donder, de 153  
 Donder, H.-D. 731  
 Donsker 794  
 Doob 465, 481, 794  
 Dörge, K. 463  
 Douglas, J. 177, 208, 218  
 Douglass 190, 190  
 Drasin 386, 405  
 Dress, A. 669, 757  
 Dupin, C. 344, 345  
 Dvoretzky, A. 450

- Dwork, B. 747  
Dwyer 699, 700, 702  
Dyck, W. von, 7, 55, 117, 125, 332, 675  
Dyson, F. J. 761, 768  
Dziuk 195
- E  
Eberhard, V. 675  
Eckert, J. P. 131, 134  
Eckert, W. J. 127  
Edgeworth, F. Y. 783, 790, 811  
Edler, F. 430  
Edler, R. A. W. 124  
Edmonds 93, 99, 105, 110  
Edwards, D. J. 139  
Edwards, R. D. 678  
Eells 194  
Efimow, N. W. 347  
Egervary 99  
Egli, H. W. 120  
Ehrenfest, P. 124, 467  
Ehrenfest, T. 467  
Ehrenpreis 190  
Ehresmann, C. 335, 336  
Ehrhart, E. 89, 446  
Eichler, M. 33, 648, 652, 659, 661, 663–665  
Eidus, D. M. 523  
Eilenberg, S. 680, 687, 688, 693  
Einstein, A. 55, 154, 470  
Eisenstein, F. G. M. 5, 7, 630, 631, 636, 661  
Elgot, C. C. 136  
Elliott, P. D. T. A. 749, 763, 769, 774  
Ellis 461  
Ellison, F. 742  
Ellison, W. J. 742  
Elman 669, 669  
Encke 355  
Engel, A. 486  
Enneper 176  
Ennola, V. 446  
Epstein, P. 24, 43, 693  
Eratosthenes 742  
Erdős, P. 93 - 96, 100, 102, 749, 750, 752, 758, 763, 764, 767, 773–775  
Ershov, A. P. 135, 136, 138  
Ersov, Yu. 737
- Erzberger, M. 29  
Escherich 443  
Estermann, T. 759, 760  
Eudoxus 423  
Euklid 232, 348, 422, 423  
Euler, L. 84, 150, 270, 332, 338, 340, 343–345, 361, 393, 426, 427, 442, 588, 630, 636, 674, 742, 756, 776  
Everett, R. R. 133
- F  
Faber, G. 362, 389, 396, 408, 431  
Fabry 396  
Faddeeva, W. N. 114  
Fagnano, C. G. di 636  
Falkhoff, A. 144  
Faltings, G. 759, 777  
Fano, R. M. 133  
Farkas, J. 102, 103, 450  
Fary, I. 343  
Fatou 393, 399  
Fechner, G. Th. 782, 786–788  
Federer 199, 205  
Federico 674  
Fedorov, E. S. 435, 451  
Feferman, S. 725  
Feigl, G. 283  
Fejr 368, 392, 410, 414  
Feld, D. E. 119  
Feldman, N. I. 771  
Felgner, U. 739  
Feller, W. 24, 465, 473, 475, 488  
Fenchel, W. 26, 343, 451  
Fermat, P. 459, 742, 777  
Fiedler 6  
Finn 164, 197  
Fischer, E. 24, 503  
Fischer, G. 345, 355  
Fischer, J. 47  
Fisher, R. A. 783, 785, 786, 789, 790, 792, 797, 798, 801, 802, 804  
Fleming 205  
Flicker, Y. Z. 652  
Flohr, F. 342  
Flowers, T. H. 140  
Flum 739  
Focke 49
- Folkman 88, 96  
Foradori, E. 35  
Ford 101  
Forrester, J. W. 133  
Forsythe, G. 114  
Foucher de Careil, Com-  
te 674  
Fourier, J.-B.-J. 450  
Fouvry, E. 772, 777  
Fraenkel, A. 24, 729  
Frank 407  
Frchet 461  
Fredholm, I. 153, 166, 502  
Freedman, M. H. 677  
Frege, G. 115, 717–720, 722, 738  
Frehse 194, 202, 203  
Frenet 340, 354  
Freudenthal, H. 334, 486, 522  
Friedberg 736  
Friedman, A. 192, 203  
Friedman, H. 726  
Friedman, S. 736  
Friedman, W. F. 123  
Friedrichs, K. O. 24, 48, 62, 158, 175, 176, 188–190, 217, 278, 286, 492, 510, 529  
Frobenius, F. G. 11, 150, 336, 353, 354, 393, 472, 538, 539, 544, 547–549, 554, 562, 644, 760  
Fromme, T. 140  
Fuchs, W. H. J. 6, 361, 474, 750  
Fueter, R. 640  
Fujita 212, 213  
Fulkerson 99, 101, 105  
Furch, R. 235  
Fürstenberg, H. 96, 775  
Furtmüller 40, 41  
Furtwängler, Ph. 639, 646, 660
- G  
Gacs 465  
Gaier, D. 370, 375  
Gale 93, 103  
Galilei, G. 426  
Galois 478  
Galton, F. 458, 783, 784, 788  
Gani 800

- Garding, L. 158, 190, 525  
Gardner, M. 123  
Garnier 177  
Garregno-Ostrowski 369  
Garrick 412  
Gauss, C. F. 154, 155, 232,  
270, 327, 336, 339, 340,  
345, 347, 350, 351, 353,  
361, 430, 436, 444, 459,  
498, 588, 629, 630, 632,  
635, 636, 638, 647, 742,  
743, 749, 760, 761, 782,  
790, 792  
Gebelein, H. 803  
Geiringer, H. 24, 26, 280,  
282, 286, 792, 793  
Gelfand, I. M. 643  
Gelfond, A. O. 762, 771  
Gentzen, G. 724, 725  
Geppert, H. 811  
Geppert, M.-P. 802, 803, 811  
Gerber 485  
Gerhardt 164  
Geri, P. 752  
Gericke, H. 338  
Gerling 436  
Germain, S. 345, 777  
Gershgorin, S. A. 125  
Gerwin, P. 436  
Giaquinta 193, 194  
Gibbs, J. W. 467  
Gilbarg 192  
Gill, S. 134  
Giorgi, de 191, 193, 199,  
201–204  
Girshick 801  
Giusti 193, 194, 199  
Givens, W. 114  
Glimm, J. 529  
Gluck, H. 342  
Gnedenko, B. V. 457, 478,  
483  
Gödel, K. 109, 128, 135, 723,  
724, 727, 729, 730,  
733–738  
Gokhberg, I. C. 508  
Goldbach, C. 674  
Goldfang 735  
Goldfeld 761  
Goldstine, H. H. 131, 132,  
134  
Goldston, D. A. 779  
Golusin 370, 375, 388  
Gomory 105  
Goodman 391  
Göpel, A. 637  
Gordan, P. 156, 450  
Gordon, I. 682  
Gosset, W. S. 783, 789, 797,  
805  
Goßler 13  
Goursat 365  
Graf, U. 804  
Graham 96  
Gram, J. P. 769  
Granville, A. 777  
Grassmann, H. 6, 117, 150,  
336, 352  
Grauert, H. 337, 759  
Graunt, J. 782  
Graustein, W. C. 342  
Gray 696  
Green, J. 137  
Greene, R. E. 349  
Grell, H. 24, 41  
Groemer, H. 446  
Gronwall 387  
Gross, W. 449, 761  
Grotmeyer, K. P. 347  
Grothendieck, A. 617, 620,  
690, 766  
Grötzsch, H. 24, 40, 41, 362,  
363, 375–381, 384, 413  
Grünbaum, B. 442, 451  
Grunsky 36, 363, 375, 377,  
378, 388, 389  
Grzegorzczak 734  
Gulliver 195  
Gumbel, E. J. 24, 26, 36, 45,  
55, 787, 795, 802  
Günther, P. 188  
Güntsch, F. R. 140  
Gupta, R. 773  
Guthrie 119  
Gutknecht 415  
Gutzmer 6  
Guy, K. 742  
H  
Haack, W. 188  
Haar, A. 182, 307, 450  
Haas, K. 121  
Hadamard, J. 152, 158, 349,  
351, 396, 399, 402, 428,  
431, 500, 511, 631, 741,  
745  
Hadwiger, H. 429, 436, 437,  
442, 446, 451  
Haefliger, A. 337  
Hagelin, B. 122  
Hahn, H. 115, 450  
Hjek 800  
Hajs, G. 434, 746  
Haken 92  
Halász, G. 774  
Halberstam, H. 761, 764, 769  
Hales 96  
Hall, M. 243  
Hall, P. 84, 88, 98, 99  
Halley, E. 782  
Halmos 801  
Hamann, C. 120  
Hamburger 24, 70  
Hamel, G. 52, 64, 67, 69, 283  
Hamilton, W. R. 152, 194,  
524  
Hammerstein, A. 283  
Hamming, R. W. 107, 133  
Hanani 97  
Haneke 761  
Hans-Gill, R. J. 447  
Hanzawa, M. 124  
Harary 86  
Harder 668  
Hardt 204  
Hardy, G. H. 69, 392, 642,  
750, 751, 755–758, 762,  
762, 763, 768, 775, 779  
Harish-Chandra 650  
Harriott, T. 133  
Hart, T. P. 139  
Hartley, H. O. 105, 794, 811  
Hartman, P. 349  
Hartmanis 109  
Hartmann 67  
Hartogs, F. 24, 38, 372  
Hartree, D. R. 125  
Hasenjaeger 730  
Hasse, H. 32, 33, 37, 39, 43,  
46, 50–52, 59, 65, 67, 70,  
538, 539, 544, 545, 564,  
639, 645, 646, 658–661,  
766  
Haupt 65  
Hausdorff, F. 24, 33, 39, 40,  
84, 396, 439, 462, 471,  
472, 788  
Hayes, P. J. 144  
Hayman 401

- Heath-Brown, D. R. 754,  
 755, 773, 776, 777, 779  
 Heawood, P. J. 91  
 Hebern, E. H. 121  
 Hecke, E. 49, 56, 60, 63, 64,  
 607, 608, 629, 633, 634,  
 640–645, 647, 661, 749  
 Hecke, H. 761  
 Heegaard, P. 679, 680, 683  
 Heegner 761  
 Heesch, H. 92  
 Heffter 91, 365  
 Heijenoort, J. van 734  
 Heil, E. 439  
 Heilbronn, H. 26, 761  
 Heine 6  
 Heinhold, J. 810, 811  
 Heins 371, 399  
 Heinz, E. 188, 199, 200, 202  
 Heisenberg 469  
 Hellingner, E. 24, 43, 70  
 Hellwig, G. 158, 188, 512  
 Helly, E. 443, 450  
 Helm 461  
 Helmberg, G. 752  
 Helmert, F. R. 786, 790, 792,  
 811  
 Helmholtz 11, 237  
 Hempel 401, 403  
 Henn, H. W. 696, 702  
 Henniart, G. 650  
 Henrici, P. 313, 318  
 Hensel, K. 24, 63, 659, 747  
 Hensley, D. 779  
 Heppner, E. 774  
 Herbrand, J. 128, 135, 138,  
 733–735  
 Herglotz, G. 27, 32, 33, 158,  
 175, 179, 190, 217, 271,  
 347, 349, 400, 448, 472,  
 473, 488  
 Hering 98  
 Hermes, H. 134  
 Hermite 744  
 Hertz, P. 24, 26, 128  
 Herzog, J. 779  
 Hesse 6  
 Hessenberg, G. W. 233, 240  
 Heubeck 484  
 Heyting, A. 727  
 Heyting 334  
 Hilbert, D. 8, 10, 27–29,  
 36, 55–58, 109, 152, 153,  
 156, 166, 168, 169, 175,  
 179, 180, 182, 188,  
 232–236, 240, 253, 257,  
 276, 341, 348, 350, 351,  
 361, 368, 370, 375, 423,  
 431, 434, 436–438, 448,  
 449, 451, 459, 460, 496,  
 502, 503, 507–509, 512,  
 514, 587, 593, 637, 639,  
 658–660, 721–726, 732,  
 738, 741, 744, 747, 756,  
 774, 775  
 Hildebrand, A. 194, 749, 774  
 Hill, L. S. 123  
 Hille, E. 519  
 Hindman 96  
 Hirschfeld, H. O. 794, 811  
 Hirzebruch, F. 76, 77, 689,  
 690  
 Hitchcock 102  
 Hjelmslev, J. 249  
 Hlawka, E. 434, 445, 746,  
 752, 753  
 Hock, A. 761  
 Hodge, W. V. D. 151, 336  
 Hoefding, W. 802, 803, 805,  
 811  
 Hoffman, F. 105, 121  
 Hofreiter, N. 434  
 Hoheisel, G. 754  
 Hölder, E. 153, 174, 175,  
 187, 188  
 Hölder, O. 185, 217, 440  
 Hölder 55, 393  
 Hollerith, H. 116, 117, 121,  
 124  
 Hooley, C. 768, 769, 773,  
 773  
 Hopf, E. 38, 155, 175, 180,  
 181, 183, 206, 209–211,  
 213–215, 218, 475–477,  
 508, 526  
 Hopf, H. 325, 334, 342, 350,  
 426, 475, 679, 682,  
 684–686  
 Hopf, L. 24, 37  
 Hopfenberg, A. W. H.  
 von 137  
 Höpfner 14  
 Hopkins, H. 119  
 Hopkins, M. 689, 706  
 Hopkins, W. W. 119  
 Hopper, G. M. 136  
 Hörmander, L. 158, 190, 508,  
 525  
 Householder, A. S. 114  
 Hove, van 153  
 Howe, R. 651  
 Hu 107  
 Huber, P. 808  
 Huffman, D. A. 107, 141  
 Humbert, P. 33  
 Hündorf, W. 131  
 Hurd, C. C. 141  
 Hurewicz 684  
 Hurwitz, A. 11, 13, 139, 362,  
 396, 415, 641, 667, 691,  
 744, 747, 778  
 Huskey, H. D. 133  
 Hutchinson, J. I. 769  
 Huxley, D. 754  
 Huygens, C. 338, 520
- I
- Ihara 648, 652  
 Ikebe, T. 522  
 Ikehara, S. 763  
 Illieff 395  
 Indlekofer, K. H. 774  
 Ingham, A. E. 754, 763, 776,  
 779  
 Iverson, K. E. 144  
 Ivic, A. 756  
 Iwaniec, H. 750, 754, 772,  
 773  
 Iwasawa 747
- J
- Jackowski 700  
 Jacob 669  
 Jacobi, C. G. J. 5, 150, 171,  
 342, 343, 354, 361, 630,  
 637, 661  
 Jacobs, K. 482, 488  
 Jacquet, H. 615, 643  
 Jaensch 57, 58  
 Jäger, G. 726  
 Jäger 194  
 Jahnz, E. 120  
 Janko 98  
 Janov, Y. J. 136  
 Jarnik, V. 779  
 Jeans 156  
 Jellet 347  
 Jellinek-Mercedes, E. 121



- Jenkins 375, 377, 381, 401  
 Jensen, J. L. W. V. 441  
 Jensen, R. 730, 731  
 Jentzsch 396  
 Jessen, B. 436, 437  
 Jevons, W. S. 116, 124  
 Jewett 96  
 Joachimsthal 24, 26  
 John, F. 26, 158, 190, 492, 497, 529, 531  
 Johnson, R. B. 105, 141  
 Jones, B. W. 666  
 Jordan, C. 117, 333, 341, 353, 469, 675, 682, 683  
 Jörgens, K. 158, 198, 492, 508, 529  
 Jost 195, 209  
 Julia 398  
 Jürgens 333  
 Jurkat 395, 776  
 Jutila, M. 771
- K
- Kabat'Janski, G. A. 445  
 Kac, M. 471, 497  
 Kaczorowski, J. 754  
 Kähler, E. 150, 174, 354  
 Kahrimanian, H. G. 138  
 Kakutani, S. 450  
 Kalf, H. 158, 516  
 Kalmar 734  
 Kaluza, T. 33  
 Kamae 465  
 Kamke, E. 24, 48–50, 52, 54, 72–74, 286, 289, 463, 747  
 Kampen, E. R. van 683, 684  
 Kan 699  
 Kantorovic, L. V. 102, 451  
 Kaphengst, H. 136  
 Kaplansky 669  
 Kappos, D. A. 482, 488  
 Karacuba, A. A. 773, 776  
 Karamata, J. 395, 763  
 Kärber, G. 796  
 Karhunen 108  
 Karlin 482  
 Kármán, Th. von 37, 55, 70  
 Karmarkar, N. 104, 146  
 Karzel, H. 243  
 Kaschine, S. 121  
 Kasiski, F. W. 115  
 Kasuga, T. 510
- Ktai, I. 767  
 Kato, T. 185, 212, 213, 523, 529  
 Kaul 194  
 Kay, A. 144  
 Kazhdan, D. A. 652  
 Keisler 739  
 Keller, O.-H. 434  
 Kellerer, H. 805, 809  
 Kellogg 185  
 Kelvin, W. 125, 443, 498  
 Kemeny, J. G. 144  
 Kempe, A. 91, 92  
 Kempermann, J. H. B. 753  
 Kendall, D. 479  
 Kepler, J. 338, 355, 425–427  
 Kerber 90  
 Kerckhoff, A. 121  
 Kershner, R. B. 437  
 Kersten, J. 483  
 Kervaire 691  
 Kesten 482  
 Keynes 95  
 Khachian 104  
 Khinchine 468, 472, 748  
 Kiefer, J. 801, 807  
 Kiepert 6  
 Kilburn, T. 141  
 Kilby, J. St. C. 145  
 Killing, W. 117  
 Kirchberger, P. 443  
 Kirchgässner 206  
 Kirchhoff, G. 524  
 Kirkman 84  
 Klainerman, S. 158, 529, 531  
 Kle, V. 451  
 Klee 105  
 Kleene, S. 128, 129, 135, 727, 734–737  
 Kleiber, J. 125  
 Klein, F. 2, 5–7, 9–16, 27, 57, 58, 156, 235, 271, 276, 330, 353, 361, 486, 641, 676, 744  
 Kleitman 94  
 Klose, A. 34, 802  
 Klötzler 153  
 Knapowski, S. 754  
 Knebusch, M. 667, 668  
 Kneser, A. 151, 152  
 Kneser, H. 27, 67, 72, 335, 478, 479, 666, 677, 806, 809
- Kneser, M. 445, 446, 659, 661, 663–665, 761  
 Knopp, K. 16, 50, 52, 57, 59, 60, 62, 63, 65, 67–69, 356, 362, 393, 394  
 Knuth, D. E. 107, 136, 770  
 Koch, H. A. 121  
 Koch, H. von 502  
 Kochen, S. 738, 773  
 Kochmann, S. D. 696, 704  
 Kodaira, K. 189, 507  
 Koebe, P. 38, 362, 368, 369, 371, 372, 375, 377, 378, 387, 411, 413  
 Kohn 215, 216  
 Koksma 768  
 Kolesnik, G. 750  
 Koller, S. 802–805, 811  
 Kolmogorow 460, 461, 465, 483, 682, 801  
 Komls 483  
 Kondrachov, V. I. 513  
 König, D. 91, 99, 100, 105  
 Koopmans 102  
 Koppelberg, B. 731  
 Korin, A. N. 430, 435, 444  
 Korn, A. 175, 176, 218, 501  
 Korn, W. 24, 26, 122  
 Körner, O. 757, 762  
 Korobov, N. M. 755  
 Koszul, J. L. 336  
 Kotelnikov 108  
 Kottwitz, R. 652  
 Kowalewskaja, S. 150  
 Kowalski, R. 144  
 Kracke 484  
 Kraft 62  
 Krahn, E. 431  
 Král, J. 502  
 Kramers, H. A. 524  
 Krauss 13  
 Krein, M. G. 508, 450  
 Kreisel, G. 727, 736  
 Kreyszig, E. 347  
 Krickeberg, K. 480–482  
 Kries, J. von 458, 488  
 Kripke 736  
 Kronecker, L. 5 - 7, 11, 16, 156, 333, 630, 631, 639, 641, 650, 721, 744  
 Krull, W. 40, 62, 538, 539, 546, 547, 558  
 Krupp, F. A. 13

- Kruskal 94, 105  
 Kryha, A. von 121, 122  
 Krylov 199  
 Kubilius, J. 749, 763  
 Kubota, T. 429, 747  
 Kuga 648, 652  
 Kuhn 103, 764  
 Kullback, S. 123  
 Kummer, E. E. 5, 6, 155,  
     355, 591, 592, 630–632,  
     744, 776  
 Kunen 731  
 Künneth, H. 680  
 Kunze, W. 122  
 Kupradze, V. D. 522  
 Kuratowski 84, 91, 95  
 Kütting, H. 485  
 Kutzko 650  
 Kuzmin 760  
 Kuznetsov, N. V. 649
- L
- Ladyschenskaja 158, 191,  
     196, 215  
 Lagarias, J. C. 769  
 Lagrange, J. L. 150, 427,  
     444, 742  
 Laguerre 262  
 Lam, T. Y. 669  
 Lancret 338  
 Landau, E. 24, 26–28,  
     31–33, 55, 58, 277, 362,  
     363, 373, 391, 392, 398,  
     399, 401–403, 631, 633,  
     642, 659, 744, 746,  
     748–750, 761, 763, 779  
 Landin, P. J. 136  
 Lang, S. 766, 771  
 Langlands, R. P. 601, 609,  
     612, 615, 643, 649, 651,  
     652  
 Lannes, J. 699–702  
 Laplace 84, 459, 784, 793  
 Lashof, R. 349, 697  
 Laventieff 369  
 Lavrik, A. F. 756, 764  
 Lax, P. 158, 190, 270, 523,  
     525, 526, 529  
 Le Cam, L. 793, 800, 801,  
     811  
 Le Veque, W. J. 742, 752, 768  
 Lebesgue, H. 153, 169, 170,  
     218, 502
- Ledermann 478  
 Lee, C. 442  
 Leeb 96  
 Leech, J. 98, 445  
 Lefschetz, S. 680, 685, 686  
 Legendre, A.-M. 426, 428,  
     588, 630, 631, 660, 674,  
     742, 744, 778  
 Lehman 93  
 Lehmann, E. L. 801, 808  
 Lehmann, N. J. 141, 482  
 Lehmann, R. S. 753, 769  
 Lehmer, D. H. 123, 769  
 Lehto 374  
 Leibnitz, G. W. 84, 115, 118,  
     119, 126, 133, 236, 270,  
     338, 426, 674, 739  
 Leicht 667  
 Leichtweiss 439  
 Leis, R. 158  
 Leissner 251  
 Lemaire 194  
 Lenards, Ph. 47  
 Lenstra, H. W. 110, 770  
 Lenz, H. 245, 667  
 Leontief 102  
 Leopoldt, H. W. 747  
 Lepage 153  
 Leray 176, 186, 187, 197,  
     211, 214  
 Lesley 195  
 Levenstein, V. I. 445  
 Levi 206  
 Levinson, N. 755  
 Lévy, P. 465, 477, 760  
 Lewi, F. W. 24, 70  
 Lewis, D. 773  
 Lewy, H. 24, 26, 158, 175,  
     179, 180, 200, 219, 278,  
     448, 351, 511, 529  
 Lexis, W. 782, 784 - 786,  
     788, 790, 791  
 Lhuillier, S. 332, 674  
 Lichtenstein, L. 24, 38,  
     155–157, 170, 173–176,  
     180, 181, 185, 186, 190,  
     206, 219, 362, 365, 411,  
     501  
 Lie, S. 150, 151, 219, 262  
 Liebermann, P. 345  
 Liebmann, H. 24, 46, 348,  
     350, 423, 448  
 Liesche 237
- Lietzmann, W. 69, 486  
 Linde, C. 12, 13  
 Lindelöf 369, 374, 771  
 Lindemann 741, 744, 775  
 Linder, A. 804  
 Lingenberg, R. 243  
 Linnik, Y. V. 762, 765, 769,  
     771  
 Lionnet 748  
 Lions 190, 211  
 Liouville 367, 744, 750  
 Lippisch 47  
 Lipps, G. F. 788  
 Lipschitz, R. 6, 336, 353,  
     354, 501  
 Lischke, N. 124  
 Littlewood, J. E. 391, 394,  
     395, 750, 751, 753–757,  
     762, 763, 768–779  
 Ljapunov, A. A. 136, 153,  
     172, 173, 175  
 Loeb 739  
 Love 108, 457, 478  
 Loewy 24  
 Lomnicki 461  
 Looman 365, 366  
 Lorenz 667  
 Lösch 392, 396  
 Loschmidt 467  
 Lovsz 93, 105, 110  
 Löwenheim, L. 719, 738  
 Löwner 388, 390  
 Ludgate, P. E. 127  
 Ludwig, G. 469  
 Ludwig, D. 526  
 Luhn, H. P. 137  
 Lukacs 482  
 Lukasiewicz, J. 128  
 Lukoff, H. 141  
 Lullus, R. 118  
 Lullusberg, F. 484  
 Lune, J. van der 769  
 Lüneburg 98  
 Lüroth 333  
 Lusin 392, 399, 400  
 Lüst, R. 76
- M
- Maass, H. 642, 643, 649  
 Maass, W. 737  
 Macbeath, A. M. 446  
 Macdonald, I. G. 446  
 MacFarlane, A. 116

- MacLane, S. 687, 693  
MacLaurin 171  
Macmahon 90  
Magenes 190  
Mahler, K. 26, 445, 446, 746,  
747, 762, 768  
Mahowald 696  
Maier, H. 754  
Major 483  
Malgrange 190  
Malmquist 406  
Malyshev, A. V. 447  
Manegold 11, 12  
Mangoldt, H. von 746, 755,  
778  
Mani, P. 442  
Manin, J. 759  
Mann, H. B. 761, 800  
Mannheim, V. M. A. 115  
Mapes, D. C. 769  
Marbe, K. 470, 471  
Margulis 102  
Markov, A. 136, 458, 472,  
473, 783, 788  
Marquand, A. 124  
Martin-Löf, P. 465  
Maruhn 174  
Masser 772  
Masuda 215  
Mathias, M. 131  
Matijasevic, Y. 736, 775  
Matthes, K. 483  
Mattuck, A. 766  
Mauborgne, J. O. 122  
Mauchly, J. W. 131, 134  
Mauclaure, J. 774  
Max 108  
Maxwell, J. C. 466, 467  
Mayer, A. 6, 7, 150  
Mayer, W. 680  
Mazur, S. 450  
McCarthy, J. 134, 136, 137  
McClure 700  
McEliece 107  
McGibbon 695  
McMullen, P. 438, 442, 446  
Mecke, J. 483  
Mehrtens, H. 50, 56, 69  
Meissel 744, 769  
Menchoff 366, 474  
Menger, K. 84, 91, 99, 101,  
105, 246  
Mensel 37  
Mergelyan 410  
Merkurjev 668, 669  
Meschkowski, H. 413  
Metropolis, N. C. 134  
Meusnier 343–345  
Meyer, C. O. 171  
Meyer, P. A. 482  
Meyers, N. G. 510  
Michael, E. 439  
Middleton 108  
Mikhlin, S. G. 508  
Miller, H. 698–700, 705  
Miller, V. S. 769, 770  
Milman, D. 450  
Milnor, J. 343, 678, 689, 690,  
691, 697  
Minding, F. 340, 346–348,  
355, 448  
Minkowski, H. 10, 102, 103,  
154, 176, 178, 179, 262,  
352, 431–434, 438,  
443–445, 451, 658, 660,  
661, 664, 744, 746  
Minty, G. 93, 105, 451  
Miranda 193  
Mirsky 99  
Mises, R. von 16, 24, 26, 53,  
55, 156, 275, 280–282,  
286, 461–464, 487, 787,  
792–794, 797, 799, 802  
Mitchell, S. 705  
Mitsui, T. 762  
Mittag-Leffler 393  
Möbius, A. F. 84, 262,  
330–332, 352, 353, 675  
Modica, G. 193  
Moivre, de 84  
Molsen, K. 36  
Monge, G. 150, 338, 344,  
345  
Monna, A. F. 747  
Monro 807  
Montel 372–374  
Montgomery, H. L. 755, 757,  
765, 773, 776, 779  
Moore, G. E. 145, 696  
Morava, J. 691, 692  
Morawetz, C. S. 526  
Mordell, L. J. 447, 642, 746,  
759, 779  
Moreno, C. 649  
Morgenstern, O. 102, 103,  
138, 451, 801  
Mori 385  
Morley 738  
Morrey, C. B. 158, 181,  
190–193, 219  
Morris 366  
Morrison, M. A. 770  
Mosco 203  
Moser, L. 111  
Moser, J. 191, 192, 776  
Mostowski 734  
Motohashi, Y. 755  
Motzkin, Th. 105, 442, 450  
Moufang, R. 42–44, 233,  
242  
Mozzochi, C. J. 750, 754  
Mucknik 736  
Mueller, J. 776  
Mues 407  
Mukhopadhyaya, S. 342  
Müller, C. 52, 188, 506, 522  
Müller, D. W. 465  
Müller, J. O. 24, 48  
Müller, P. H. 483  
Müntz 175  
Münzner, H. 803, 809, 812  
Murty, R. 773  
Muskhelishvili, N. I. 508  
Myhill, J. 727  
N  
Nagell, T. 773  
Nakasima, M. 124  
Nash 99, 100, 191  
Nehari 413  
Neisendorfer 695, 698  
Nesetril 96  
Nesterenko 772  
Netto 83  
Netuka, I. 502  
Neugebauer, O. 24, 26, 40,  
41, 53  
Neumann, C. 153, 166, 492,  
499, 502  
Neumann, J. von 62, 65, 102,  
103, 131, 132, 134, 138,  
246, 247, 293, 450, 451,  
468, 496, 516, 517, 729,  
799  
Nevalinna, R. 33, 363, 371,  
386, 398, 402–404  
Neveu 482  
Newell, A. 135, 137–139

- Newman, D. J. 756  
 Newman, M. H. A. 140, 677  
 Newton, I. 170, 171, 270, 338, 520  
 Neyman, J. 783, 797, 798, 801, 808  
 Neymann, J. 480, 482  
 Niederreiter, H. 752  
 Nieman, C. W. 125  
 Nirenberg, L. 155, 158, 176, 179, 190, 192, 199, 215, 216, 349, 351, 512  
 Nishida 698  
 Nitsche, J. C. C. 164, 176, 195, 198, 203  
 Nobs 650  
 Noether, E. 24, 26–28, 30, 32, 63, 84, 151, 538, 539, 542, 544–546, 552, 557, 558, 646, 679, 803  
 Noether, F. 24, 26, 37, 507  
 Noether, G. E. 803  
 Noether, M. 6  
 Noll 144  
 Nomizu, K. 336  
 Nomura, Y. 695  
 Notbohm 700  
 Novak, B. 779  
 Novikoff 460, 461, 471, 472  
 Novikov, S. P. 689, 703, 736  
 Novoselov, E. V. 774  
 Nowak, J. 125  
 Noyce, R. N. 145  
 Nygaard, K. 144  
 Nyquist 105
- O
- O'Meara, T. 666  
 Odhner, W. T. 120  
 Odlyzko, A. M. 769, 776  
 Ohtsuka 369  
 Oikawa 381  
 Oleinik, O. 526  
 Oliver 700  
 Oresme, N. 338  
 Osenberg, W. 72  
 Osgood 362, 368, 369, 372  
 Osserman 195  
 Ostmann, H. 756  
 Ostrowski 373, 396, 403, 411, 747
- P
- Page 772  
 Painlevé 55  
 Paley, R. E. A. C. 461, 757  
 Palm, C. 132  
 Palmer 86  
 Pappos von Alexandria 240  
 Pappus 424  
 Parker 97  
 Parmalee, D. D. 115  
 Pascal, B. 84, 115, 119  
 Pasch, M. 231–233, 236, 253  
 Patterson, S. J. 776  
 Peano, G. 117, 333, 717, 719  
 Pearson, D. B. 523  
 Pearson, E. S. 783, 797, 798  
 Pearson, K. 782–784, 793, 796  
 Peaucellier, C. 124  
 Peirce, C. S. 115, 124  
 Perlis, A. J. 135, 137  
 Perrin, J. 469  
 Perron, O. 38, 52, 53, 59, 60, 62–64, 165, 167, 220, 285, 393, 434, 472  
 Peschl, E. 39  
 Péter, R. 136  
 Petersen 108  
 Peterson, F. P. 705  
 Petersson, H. 641, 779  
 Petri, C. A. 141  
 Petrovski 192  
 Petty, W. 782  
 Petzval, J. 117  
 Peyerimhoff, A. 776  
 Pfaff, J. F. 150, 353  
 Pfanzagl, J. 481, 805, 807, 808  
 Pflüger 371, 384  
 Philippon 775  
 Phillips, E. W. 131  
 Phillips, R. S. 158, 523  
 Piatetski-Shapiro, I. I. 643, 651, 652  
 Picard 364, 374, 402  
 Pick 398  
 Pickert, G. 243  
 Piesch, J. 124  
 Piloty, H. 132  
 Piloty, R. 141  
 Pinkall, U. 345  
 Pinl, M. 3, 24, 40, 41  
 Pinski 102
- Pintz, J. 753, 754  
 Plancherel, M. 468  
 Planck, M. 154, 467  
 Platek 736, 737  
 Platon 425  
 Plaut 796  
 Plemelj 153  
 Plessner, A. I. 399, 400  
 Plunkett 367  
 Plutarch 338  
 Poel, W. L. van der 141  
 Pogorelov, A. V. 179, 349, 351, 448  
 Pohlers, W. 726  
 Poincaré, J. H. 150, 153, 156, 333, 352, 371, 431, 442, 449, 499, 641, 673, 675, 676, 678, 679, 681, 707, 721  
 Poisson 459  
 Pollaczek, F. 24, 26, 280, 282, 286, 474, 475, 792, 793  
 Plya, G. 85, 86, 396, 431, 473, 474, 757, 762  
 Pomeranch 770  
 Pomerene, J. H. 141  
 Pommerenke 369, 370, 391  
 Pompeiu 439  
 Ponce, G. 529  
 Pontrjagin, L. S. 336, 688  
 Popken 746, 762  
 Port 474  
 Pösch, H. 126  
 Pöschl, T. 24, 48, 405  
 Possel, R. de 354, 375  
 Post, E. L. 128, 734, 736  
 Pöttker 484  
 Poulsen 450  
 Powers, J. 121  
 Prachar, K. 764  
 Prager 24, 26  
 Prandtl, L. 14–16, 70, 72, 271, 272, 275  
 Pratt 790  
 Prawitz, D. 138  
 Prestel, A. 669, 738, 739  
 Priddy, S. 697, 698  
 Prim 94  
 Pringsheim, A. 21, 362, 365, 392  
 Prinz, D. G. 139  
 Priwalow 399, 400

- Prüfer 334  
 Prym, F. 368, 500, 511  
 Puppe, D. 700  
 Putnam, H. 774
- Q  
 Quetelet, A. 782  
 Quevedo, L. T. 127, 132, 139  
 Quillen 689, 702
- R  
 Rabin 109, 110  
 Rademacher, H. 24, 26, 37,  
 366, 439, 474, 756, 757,  
 759  
 Radó, F. 252  
 Rado, R. 95, 100  
 Radó, T. 220, 347  
 Radó 177, 182, 334, 335,  
 368, 370  
 Radon, J. 342, 443, 450, 506,  
 691  
 Ralston, W. 526  
 Ramanujan, S. 641, 642, 751,  
 756, 758, 763, 767, 779  
 Ramsey, F. P. 84, 95, 720  
 Rankin, R. A. 446, 754  
 Ravenel 705  
 Rayleigh, Lord 431  
 Read 367  
 Rechnitzer, A. 120, 127  
 Reckziegel, H. 355  
 Redfield 87  
 Reed 158  
 Reeve, J. A. 446  
 Reichel 484  
 Reichenbach, H. 488  
 Reidemeister, K. 24, 38, 235  
 Reifenberg 205  
 Reincke, J. 739  
 Reissner, H. J. 16  
 Rellich, F. 32, 158, 175, 188,  
 405, 493, 513, 522  
 Remak, R. 24, 26, 366, 746,  
 747  
 Rembs, E. 347  
 Remmert 408  
 Remus, H. 139  
 Rényi, A. 101, 102, 482, 488,  
 763, 765  
 Reuter, G. E. H. 477 - 479  
 Reye 6
- Rham, G. de 150, 336, 337  
 Riccati, J. 426  
 Ricci 354  
 Richards, I. 779  
 Richelot 6  
 Richert, H. E. 749, 750, 764,  
 806, 808, 809, 812  
 Richter, W. 480, 481, 483  
 Ridout, D. 768  
 Riebesell, P. 484, 486  
 Riecke, E. 10  
 Rieger, G. J. 748  
 Riele, H. J. te 776  
 Riemann, G. F. B. 11, 155,  
 162, 165, 167, 171, 172,  
 176, 237, 327-329, 336,  
 337, 342, 345, 352, 354,  
 361, 364, 368, 498, 499,  
 631-633, 637, 675, 678,  
 743, 744, 746  
 Rienhardt, K. 437  
 Riesel, H. 139  
 Riesz, F. 154, 368, 393, 503,  
 515  
 Ringel, G. 91, 92  
 Rinow 36  
 Ritz, W. 274  
 Robbins, H. 801, 807  
 Roberts, L. G. 141  
 Robinson, A. 738, 760  
 Robinson, J. A. 136, 138,  
 144, 735, 774, 775  
 Robinson, R. M. 139  
 Robinson, von 90  
 Robinson 399, 739, 740  
 Rochester, N. 141  
 Rödl 96  
 Rogers, C. A. 444, 446  
 Rogosinski 24  
 Roquette, P. 760, 766  
 Rosenbloom, P. C. 135  
 Rosenlicht 334  
 Rosenthal, A. 24, 45, 46, 70,  
 372, 468  
 Ross, D. T. 137  
 Rosseland, S. 125  
 Rosser, J. B. 762, 769  
 Rota 88, 98, 111  
 Roth, K. F. 753, 757, 761,  
 764, 767, 768, 775  
 Roth-Ridout 747  
 Rothe 24  
 Rothschild 96
- Routh 415  
 Royden 195  
 Rudio, F. 270  
 Rumely 770  
 Run, C. J. 764, 775  
 Runge, C. 10, 15, 16, 29,  
 270, 271, 274, 407  
 Runge, I. 524, 796  
 Rush 445  
 Russell, B. 95, 719, 720, 738  
 Rutishauser, H. 135, 136  
 Ryll-Mardzewski 734  
 Ryser 98  
 Ryskov, S. S. 446
- S  
 Sachs, H. 483  
 Sacks 736  
 Sacksteder 349  
 Saint-Venant, A. J. C. B. de  
 431  
 Sali 779  
 Sampson 194  
 Samuel, A. L. 139  
 Santal, L. A. 446, 449  
 Sard, A. 337  
 Sathe 749  
 Sauer, R. 126, 132  
 Savage 801  
 Saxer, W. 805  
 Scarpellini, B. 728  
 Schäffler, O. 116, 117, 133  
 Schanuel 775  
 Scharlau, W. 667, 668  
 Schaufler, R. 122  
 Schecher, H. 137  
 Schensted 90  
 Scherbius, A. 121  
 Schering 10  
 Scherk 761  
 Scheutz, P. G. 116  
 Schickard, W. 119  
 Schiffer 376, 389  
 Schilling, E. 127  
 Schinzel 761  
 Schlaefeli 6  
 Schläfli, L. 330, 442, 675  
 Schlesinger, L. 24  
 Schmetterer, L. 480, 481, 805,  
 809  
 Schmid, H. L. 33  
 Schmidt, A. 259  
 Schmidt, E. 16, 36, 55, 69,

- 153, 173, 174, 205, 283,  
 334, 341, 363, 403, 449,  
 503, 753  
 Schmidt, F. K. 62, 64, 765  
 Schmidt, R. 356  
 Schmidt, W. M. 446, 747,  
 753, 766, 768, 776, 777  
 Schmincke, U. W. 158, 516  
 Schneider, R. 429  
 Schneider, Th. 762, 763, 771  
 Schnirelmann, L. 761  
 Schnorr, C. P. 110, 465, 770  
 Schöbe, W. 747  
 Schoen 194  
 Schoenfeld, L. 762, 769  
 Schoenflies 333, 341  
 Schönfinkel, M. 129  
 Schönhage, A. 108, 110, 770  
 Schottky 401, 413  
 Schreier 661  
 Schreyer, H. T. 140  
 Schröder, E. M. 87, 117, 243,  
 257, 258, 719  
 Schrödinger, E. 53, 469, 514  
 Schubert, F. T. 138  
 Schulte, E. 444  
 Schultze 55  
 Schulz, G. 803  
 Schur, A. 341  
 Schur, F. 235  
 Schur, I. 24, 33, 35, 52, 70,  
 95, 398, 415, 538–540,  
 544, 549–552, 554, 757  
 Schuster 115  
 Schütter, K. 725  
 Schützenberger, M. P. 135  
 Schwabhäuser, W. 738  
 Schwartz, L. 695, 702  
 Schwarz, H. A. 6, 10, 11,  
 153, 165, 203, 290, 341,  
 361, 368, 397, 430, 431,  
 449, 499  
 Schwarz, W. 764, 774  
 Scott, C. A. 9  
 Scott, D. S. 136, 730, 737  
 Seeber, L. A. 430  
 Seeber, R. E. 134  
 Seely, R. 514  
 Segal, G. 690, 698  
 Seifert, H. 46, 47, 677, 683,  
 684, 686, 708  
 Selberg, A. 643, 652, 749,  
 763, 764  
 Selfridge, J. L. 139  
 Selick, P. 696  
 Selling, E. 120  
 Serre, J.-P. 612, 619, 693,  
 695, 699, 704, 779  
 Serrin, J. 187, 197, 213, 214,  
 510  
 Shahidi, F. 649  
 Shannon, C. E. 102,  
 105–108, 124, 133, 139,  
 139  
 Shaw, J. C. 135, 137, 138  
 Shelah, S. 96, 100, 739  
 Sheldon, J. W. 133  
 Shepherdson, J. C. 136  
 Shestakov, V. J. 124  
 Shewhart 796  
 Shibata, Y. 531  
 Shidlovski, A. B. 759  
 Shiffman 187, 208  
 Shimura, G. 640, 646–648  
 Shrikhande 97  
 Sidelnikov, V. M. 445  
 Siebenmann, L. C. 678  
 Siegel, C. L. 24, 33, 35, 39,  
 42–44, 60, 445, 446, 651,  
 659, 660, 661, 743, 746,  
 752, 755, 757, 759–762,  
 768, 772  
 Sierpinski, W. 749, 750  
 Simon, H. A. 137, 138, 139,  
 158, 204  
 Simon, M. 486  
 Simons 199  
 Simpson, S. G. 726  
 Simpson, T. 426  
 Singer, I. M. 336, 690, 692  
 Sittler, F. J. 122  
 Skewes, S. 753  
 Skolem, T. 719, 732, 738,  
 751  
 Skubenko, B. F. 447  
 Slagle, J. R. 138  
 Slepian 105  
 Sloane, N. J. A. 98, 445  
 Smale, S. 451, 677  
 Smirnow 139, 399  
 Smith, J. 689, 706  
 Smoller, J. 526  
 Smoluchowski, M. 469  
 Sobirov, A. S. 764  
 Sobolev, S. L. 313, 446, 510  
 Sobolevskij 213  
 Solomon 88, 89  
 Solonnikov 191, 212, 214,  
 215  
 Solovay, R. 730  
 Sommerfeld, A. 55, 271, 524  
 Sommerville, D. M. Y. 442  
 Sörensen, K. 243  
 Spanier, E. 682, 703  
 Spearman, C. 788, 796, 812  
 Spector, C. 727, 728  
 Sperner, E. 68, 93, 254, 255  
 Spilker, J. 774  
 Spitzer 476, 482  
 Sprindjuk, V. 768  
 Springer, F. 57  
 Springer, T. A. 666  
 Spruck 199  
 Srinivasan, S. 773  
 Stallings, J. R. 677  
 Stampacchia 191  
 Stange, K. 804, 810, 812  
 Stanley, R. 88–90, 442  
 Stark, H. 761  
 Stasheff, J. D. 697  
 Staudt, C. von 675  
 Stearns 109  
 Steenrod, N. 335, 687, 688,  
 693, 696, 708  
 Steffen, K. 202, 204, 205  
 Steiger, O. 120, 126  
 Stein, C. 408, 801  
 Steinbuch, K. 138  
 Steiner, J. 84, 355, 429, 430  
 Steinhaus 26, 461  
 Steinig, J. 764  
 Steinitz, E. 103, 426, 428,  
 431, 439, 440, 442, 709  
 Steinmetz 407  
 Stepanov, A. 766  
 Sternberg 24  
 Stibitz, G. R. 131, 133  
 Stiefel, E. 114, 304, 686  
 Stiemke, E. 450  
 Stigler 790  
 Stirling 84  
 Stolz, O. 44  
 Stone, M. H. 474, 516  
 Störmer, C. 272  
 Strachey, C. S. 136, 139  
 Strassen, V. 108, 110, 482,  
 483, 770, 808  
 Strauss, W. 526  
 Strebel 371

Strecker, H. 805  
 Stridsberg 747  
 Struwe 195, 209, 216  
 Student 789, 790  
 Studt, H. 121  
 Stumpf, K. 458  
 Sturgis, H. E. 136  
 Sturmfels, B. 442  
 Suck, R. 767  
 Sullivan 699  
 Sundstrand, O. 119  
 Süß, W. 69 - 75, 235  
 Süßmilch, J. P. 782  
 Sydler, J. P. 436, 449, 59  
 Szabo, S. 437  
 Szs, O. 24, 42, 392  
 Szegő, G. 24, 396, 409, 431  
 Szekeres 95  
 Szele 101  
 Szemerédi, E. 96, 775  
 Szusz, P. 760

## T

Takagi, T. 639, 646, 598  
 Takeuti, P. 726  
 Taniyama, Y. 640, 646, 647, 649  
 Tarry 111  
 Tarski, A. 136, 738  
 Tate, J. 643, 747, 766  
 Taton, R. 344  
 Tatum, L. 133  
 Tatzuzawa, T. 756, 757, 762  
 Tauber, A. 24, 394, 791, 812  
 Tauschek, G. 121, 127  
 Taussky-Tod, O. 313  
 Taylor 369  
 Tchebycheff 744, 773  
 Tchudakov, N. G. 762  
 Te Riele, H. J. J. 753, 769  
 Teichmüller, O. 32, 33, 35, 363, 377, 378, 385, 386, 399, 403-405  
 Temple, G. 291  
 Tenenbaum, G. 749  
 Thanigasalam 757  
 Theaitetos 424  
 Themas, C.-X. 115  
 Theodorsen 412  
 Theon 424  
 Thom, R. 688, 689  
 Thompson, A. J. 127  
 Thomson, W. 125  
 Thorup 437  
 Threlfall, W. 43, 46  
 Thue, A. 750, 751, 766  
 Tichonow, A. N. 313  
 Tietze, H. 677  
 Tieze 38  
 Tintner, G. 800, 805  
 Tippet 792  
 Titchmarsh, E. C. 755, 765, 769, 779  
 Toda, H. 696, 704, 705  
 Todd, J. 127, 313, 478  
 Toeplitz, O. 24, 40, 70  
 Tom Dieck, T. 697  
 Tomi 203, 207, 208  
 Tonelli, L. 169, 170, 220  
 Tornier, E. 32, 33, 35, 39, 60-62, 64  
 Tornier, W. H. E. 463, 464, 488  
 Tóth, F. 443, 444, 451  
 Trefethen 415  
 Trefftz, E. 62, 284, 286  
 Trinks, F. 127  
 Troelstra, A. S. 727  
 Trohimcuk 366, 367  
 Tromba 207, 208  
 Troncut 119  
 Trudinger 192  
 Tschebyscheff 84, 473  
 Tschudakov 755  
 Tschuprov, A. 783, 788, 811, 812  
 Tsutsumi, Y. 531  
 Tucker 103, 107  
 Tukey 108, 110  
 Turn, P. 96, 752, 754, 763, 770, 775  
 Turing, A. M. 109, 129, 134, 134, 138, 140, 734, 769  
 Turkstra 747  
 Tusnady 483  
 Tutte, W. T. 87, 91, 93, 99

## U

Uhlenbeck 194  
 Uhlmann, W. 480  
 Ullrich 386, 403, 405  
 Ulrich 62, 63  
 Uralzewa 191, 196

## V

Vahlen, K. T. 778  
 Vahlen, Th. 34, 35, 42, 61, 62, 68, 69  
 Valiron 398, 399, 402  
 Vallée Poussin, C. J. G. N. de la 306, 307, 339, 631, 741, 745  
 Valtat, R. 120, 130, 131  
 Van Aardenne 753  
 Van der Corput 764  
 Vaughan, R. C. 755, 757, 772, 775  
 Veblen, O. 335, 675, 681  
 Vekua, I. N. 508, 522  
 Veldkamp 252  
 Velte 153, 207  
 Venkov, B. A. 437  
 Venn, J. 116  
 Vernam, G. S. 122  
 Viaris, G. de 122  
 Vietoris, L. 353, 439  
 Vigenre 122  
 Ville, J. 464, 465  
 Vinogradov, A. I. 764, 772  
 Vinogradov, I. 752, 755, 757, 762  
 Virtanen 374  
 Vitali 373  
 Volkmann, B. 768  
 Volterra, V. 153, 502  
 Voronoi, G. F. 431, 435, 444, 749, 750  
 Voss, K. 349

## W

Waerden, B. L. van der 38, 46, 62, 63, 84, 95, 96, 479, 646, 803, 805, 806, 812  
 Wagner 91  
 Wagstaff, S. 777  
 Wald, A. 464, 465, 471, 798-801, 803  
 Waldschmidt, M. 772, 775  
 Walfisz, A. 772, 779  
 Wall 689  
 Wallis 84, 111  
 Walsh 368, 410  
 Walter, E. 804  
 Walter, J. 516  
 Walter, W. G. 139  
 Walter 158

- Walther, A. 20, 126, 284, 286  
 Wang, H. 735  
 Warings 748  
 Warschawski 26  
 Washington, L. 777  
 Watson, G. L. 342, 459, 666, 758  
 Weaver, W. 139  
 Weber, C. 275  
 Weber, E. 744, 803  
 Weber, H. 6, 10, 11, 117, 598  
 Weber, W. 32, 34–36, 42, 46, 59  
 Weber 361, 639, 650  
 Wegner, U. 32, 46, 47, 73  
 Weichold, G. 676  
 Weichselberger, K. 805  
 Weierstrass, K. 5, 6, 11, 16, 117, 151, 152, 156, 168, 176, 305, 341, 361, 364, 368, 372, 396, 430, 499, 745, 746, 775  
 Weil, A. 446, 612, 646, 649, 666, 747, 758, 759, 766  
 Weingarten, J. 350, 355  
 Weinstein 24, 26  
 Weisspfenning, V. 738  
 Weizenbaum, J. 137  
 Weizsäcker, C. F. von 469  
 Welchman, W. G. 140  
 Weldon, W. 783  
 Weniger 62  
 Wente, H. C. 202, 51  
 Wentzel, G. 524  
 Werner, H. 202, 309, 313  
 Werner, P. 506  
 Wesch, L. 47  
 Weyl, 24, 26, 30, 32, 48, 53, 56, 63, 65, 55, 69, 103, 150, 151, 153, 175, 176, 178, 179, 188, 189, 211, 329, 334–337, 348, 353, 355, 362–364, 371, 448, 496, 506, 507, 511, 514, 522, 643, 644, 721, 726, 747, 752  
 Wheatstone, C. 116  
 Wheeler, D. J. 134  
 Whitehead, A. N. 720, 738  
 Whitehead, G. W. 684  
 Whitehead, J. H. C. 94, 95, 335, 694, 703, 708  
 Whitney, H. 91, 92, 335, 337, 342, 686, 696  
 Whittaker 108  
 Whyburn 367  
 Widman 194  
 Wiegner 194  
 Wieland 36  
 Wielandt 395  
 Wiener, H. 234  
 Wiener, N. 139, 461, 469, 476, 508, 512, 763  
 Wijngaarden, A. van 144  
 Wilcox, C. H. 513, 523  
 Wilcoxon, F. 788  
 Wilkerson 700  
 Wilkes, M. V. 133  
 Wilkinson, J. H. 114  
 Willers, F. 24, 38, 73  
 Williams 99, 100  
 Wills, J. M. 446  
 Wilson 97, 705  
 Wilton, J. 642  
 Wiman 460  
 Winkler, W. 804, 809  
 Winograd, S. 136  
 Winter, D. T. 769  
 Wintner, A. 349  
 Wirsing, E. 760, 764, 767, 768, 774  
 Wirth, N. E. 144  
 Wirtinger 443  
 Witt, E. 33, 49, 98, 659, 661–663, 667  
 Witten, E. 690  
 Wittgenstein 95  
 Wittich 363, 386, 403–406, 412  
 Wittstein, Th. 784  
 Wolfart 650  
 Wolfowitz, J. 471, 482, 801, 803, 807, 808  
 Wolkerson 702  
 Wood, B. D. 127  
 Woods, A. C. 447  
 Wu, H. 349  
 Wulff, G. 451  
 Wundt, W. 788  
 Wüst, R. 158, 516  
 Wüstholtz, G. 775  
 Wynn-Williams, C. E. 131  
 Y  
 Yates 97  
 Yngve, V. H. 144  
 Yohe, J. M. 769  
 Yosida, K. 519  
 Young, A. 90, 91  
 Z  
 Zabrodsky 699, 702  
 Zagier 761  
 Zarati 700  
 Zarembo, S. 511  
 Zassenhaus, H. 447  
 Zeeman, E. C. 677  
 Zeidler, E. 206, 207  
 Zemanek, H. 141, 146  
 Zenodorus 424  
 Zermelo, E. 24, 40, 41, 728, 729  
 Zeuner, G. 784  
 Ziegenbein, P. 33  
 Ziegler, M. 738, 739  
 Zitomirskii, O. 435  
 Zolotarev, E. I. 430, 435, 444  
 Zorn, M. 49  
 Zuse, K. 118, 120, 124, 130–134, 136, 139, 140  
 Zygmund, A. 461, 508