LOGIK UND GRUNDLAGENFORSCHUNG

Festkolloquium
zum 100. Geburtstag von
HEINRICH SCHOLZ

ASCHENDORFF MÜNSTER

INHALT

SYMPOSION ZUM 100. GEBURTSTAG VON
PROF. DR. HEINRICH SCHOLZ
VERANSTALTET VOM INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE LOGIK
UND GRUNDLAGENFORSCHUNG DER
WESTFÄLISCHEN WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
AM 8. UND 9. FEBRUAR 1985

EINE NORMALFORM FÜR ENDLICHE APPROXIMATIONEN VON PARTIELLEN STETIGEN FUNKTIONALEN

PROF. DR. HELMUT SCHWICHTENBERG, MÜNCHEN

Funktionale höheren Typs, die durch ihre endlichen Approximationen bestimmt sind, wurden zuerst in [Kreisel 1959] betrachtet. D. Scott und später Yu. Ersov haben dann umfangreiche teils verbandstheoretische, teils topologische Theorien solcher approximierbaren (oder partiellen stetigen) Funktionale und der zugehörigen endlichen Approximationen aufgestellt; Scott zunächst hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt, Modelle des λ-Kalküls zu erhalten (für eine Übersicht über die einschlägigen Arbeiten s. [Ersov 1977], [Scott 1982]). Wir geben hier in § 1 eine kurze, direkte Definition der Menge C_0^ρ der endlichen Approximationen vom Typ ρ sowie in § 3 der Menge C^ρ der durch sie approximierbaren Funktionale vom Typ ρ, und beweisen einige ihrer Grundeigenschaften. Ferner definieren wir die Menge C^ρ_{ber} der berechenbaren Funktionale vom Typ ρ, und zwar so, daß jedes $f \in C^{\rho\to\sigma}_{\text{ber}}$ ganz C^ρ als Definitionsbereich besitzt. Alle diese Überlegungen sind zumindest implizit in den Arbeiten von Scott und Ersov enthalten. Von einer ähnlichen Darstellung in [Feferman 1977] unterscheidet sich der hier durchgeführte Aufbau außer durch die Zulassung beliebiger Typen dadurch, daß die Hinzunahme eines als „undefiniert" interpretierten Objekts * zum Grundtyp zu einer glatteren Theorie führt.

Im § 2 geben wir einen Algorithmus an, mit dessen Hilfe sich jede endliche Approximation unter Erhalt des durch sie dargestellten Funktionals in eine eindeutig bestimmte Normalform bringen läßt. Diese Normalform ist frei von überflüssigen Informationen über das dargestellte Funktional.

§ 1 Endliche Approximationen vom Typ ρ

Durch Induktion über den Typ definieren wir die Menge C_0^ρ der *endlichen Approximationen* vom Typ ρ, eine *Anwendungsoperation* Anw: $C_0^{\rho\to\sigma} \times C_0^\rho \to C_0^\sigma$ sowie eine *Erweiterungsrelation* $\leqq^\rho$ auf C_0^ρ, und beweisen gleichzeitig

1. $\leqq^\rho$ ist reflexiv und transitiv auf C_0^ρ.
2. $A \subset B \to A \leqq B$ für $A,B \in C_0^\rho$.

3. Ist $\{A_i \mid i \in I\}$, I endlich, *verträglich* in C_0^ρ (d. h. gibt es ein $A \in C_0^\rho$ mit $A_i \leqq^\rho A$ für alle $i \in I$), so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ kleinste obere Schranke der A_i in C_0^ρ.

Für den Grundtyp o der natürlichen Zahlen setzen wir

$$C_0^o: = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\},$$
$$A \leqq^o B : \leftrightarrow A \subset B.$$

Die Eigenschaften 1–3 sind dann offenbar erfüllt.

Für einen zusammengesetzten Typ $\rho \to \sigma$ setzen wir

$$C_0^{\rho\to\sigma} : = \{A \subset C_0^\rho \times C_0^\sigma \mid A \text{ endlich und konsistent}\};$$

dabei heißt $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\}$ *konsistent,* wenn gilt

$$\forall I_0 \subset I\ (\{a_i \mid i \in I_0\} \text{ verträglich} \to \{b_i \mid i \in I_0\} \text{ verträglich}).$$

Die Anwendungsoperationen erklären wir für

$$A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\} \in C_0^{\rho\to\sigma} \text{ und } a \in A \text{ durch}$$
$$A(a): = \bigcup\{b_i \mid a_i \leqq a\}.$$

Nach 3 für σ ist $A(a)$ kleinste obere Schranke in C_0^σ der b_i mit $a_i \leqq a$. Schließlich definieren wir für $A,B \in C_0^{\rho\to\sigma}$ die Erweiterungsrelation durch

$$A \leqq B : \longleftrightarrow \forall a \in C_0^\rho\ (A(a) \leqq B(a)).$$

Zu zeigen sind jetzt die Eigenschaften 1–3 für den Typ $\rho \to \sigma$. *1 für $\rho \to \sigma$* folgt sofort aus 1 für σ. Zum Beweis von *2 für $\rho \to \sigma$* seien $A,B \in C_0^{\rho\to\sigma}$, etwa $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\}$, $B = \{(a_j,b_j) \mid j \in J\}$, ferner $A \subset B$ und $a \in C_0^\rho$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(a) &= \bigcup\{b_i \mid a_i \leqq a\} \\ &\subset \bigcup\{b_j \mid a_j \leqq a\} && \text{wegen } A \subset B \\ &= B(a) \end{aligned}$$

Aus 2 für σ folgt die Behauptung. Zu zeigen bleibt *3 für $\rho \to \sigma$.* Seien für $k \in K$ $A_k = \{(a_i,b_i \mid i \in I_k\}$ (alle I_k disjunkt) und $A_k \leqq B$ mit $B = \{(a_j,b_j) \mid j \in J\}$. Zu zeigen ist, daß $\bigcup_{k \in K} A_k =: A$ kleinste obere Schranke der A_k in $C_0^{\rho\to\sigma}$ ist. Wir zeigen zunächst, daß A konsistent ist (also $A \in C_0^{\rho\to\sigma}$). Sei also $I_0 \subset \bigcup_{k \in K} I_k$ und $\{a_i \mid i \in I_0\}$ verträglich, etwa $a_i \leqq a$ für $i \in I_0$. Zu zeigen ist, daß dann auch $\{b_i \mid i \in I_0\}$ verträglich ist. Sei also $i \in I_0$, etwa $i \in I_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_i &\subset A_k\,(a_i) \\ &\leqq B\,(a_i) && \text{wegen } A_k \leqq B \\ &\subset B\,(a) && \text{wegen 1 für } \rho. \end{aligned}$$

Mit 2 und 1 für σ folgt die Behauptung. Nach 2 für $\rho \to \sigma$ ist also A obere Schranke der A_k. Zu zeigen bleibt, daß A kleinste obere Schranke ist. Sei also $A_k \leqq C$ für alle $k \in K$. Wir zeigen $A \leqq C$. Sei etwa $C = \{(a_l,b_l) \mid l \in L\}$ und $a \in C_0^\rho$. Dann ist

$$A(a) = \bigcup\{b_i \mid a_i \leqq a\}$$

Sei also $a_i \leqq a$, etwa $i \in I_k$. Nach 3 für σ genügt es zu zeigen, daß $b_i \leqq C(a)$. Nun ist

$$\begin{array}{lll} b_i & \subset A_k\,(a_i) & \\ & \leqq C\,(a_i) & \text{wegen } A_k \leqq C \\ & \subset C\,(a) & \text{wegen 1 für } \rho. \end{array}$$

Mit 2 und 1 für σ folgt wieder die Behauptung. □

Wir notieren als einfache Folgerung

4. $a_1 \leqq a_2 \rightarrow A(a_1) \leqq A(a_2)$.

Wir behandeln jetzt die Frage nach Entscheidungsverfahren bzw. Berechnungsverfahren für die eingeführten Begriffe. Wegen 2 und 3 gilt für endliche Teilmengen $\{a_i \mid i \in I\} \subset C_0^\rho$

$$\{a_i \mid i \in I\} \text{ verträglich} \longleftrightarrow \bigcup_{i \in I} a_i \in C_0^\rho.$$

Damit erhält man induktiv über ρ ein Entscheidungsverfahren für C_0^ρ. Für ein Berechnungsverfahren für $A(a)$ benötigen wir offenbar ein Entscheidungsverfahren für $a_i \leqq a$; unsere Definition von $A \leqq B$ enthält jedoch einen Quantor über alle $a \in C_0^\rho$. Wir zeigen deshalb zunächst, daß für beliebige $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\}$, $B = \{(a_j,b_j) \mid j \in J\} \in C_0^{\rho\rightarrow\sigma}$ gilt

5. $A \leqq B \longleftrightarrow \forall i \in I(A(a_i) \leqq B(a_i))$.

Offenbar genügt es, $\leftarrow$ zu beweisen. Sei also $a \in C_0^\rho$. Dann gilt

$$\begin{array}{rl} A(a) & = \bigcup\{b_i \mid a_i \leqq a\} \\ & \subset \bigcup\{A(a_i) \mid a_i \leqq a\} \\ & \leqq B(a), \text{ da } A(a_i) \leqq B(a_i) \leqq B(a). \ \square \end{array}$$

Damit hat man ein Entscheidungsverfahren für $A \leqq B$ und ein Berechnungsverfahren für $A(a)$.

Man beachte, daß das angegebene Entscheidungsverfahren für C_0^ρ die Überprüfung eines Sachverhalts für alle Teilmengen $I_0 \subset I$ verlangt. Es erscheint deshalb nur für kleine Indexmengen I praktikabel.

§ 2 Eine Normalform für endliche Approximationen

Aus $A \leqq B$ und $B \leqq A$ folgt i. a. nicht $A = B$. Ein Gegenbeispiel bilden etwa die folgenden $A,B \in C_0^{(o\rightarrow o)\rightarrow o}$:

$$A = \{(\{(0,0)\},0)\}$$
$$B = \{(\{(0,0)\},0),(\{(0,0),(0,1)\},0)\};$$

hier haben wir die Elemente $\{0\}$, $\{1\}$ von C_0^o kurz durch 0,1 mitgeteilt. Wir geben jetzt einen Algorithmus an, mit dessen Hilfe sich solche überflüssigen Informationen aus Approximationen entfernen lassen.

Wir schreiben $A \sim B$ für $A \leqq B \wedge B \leqq A$. Durch Induktion über den Typ definieren wir, wann ein $A \in C_0^\rho$ in *Normalform* ist, und beweisen gleichzeitig

6. $\forall A \in C_0^\rho\ \exists B \in C_0^\rho$ in Normalform: $A \sim B$

7. $\forall A, B \in C_0^\rho$ in Normalform: $(A \sim B \rightarrow A = B)$.

Für den Grundtyp 0 ist jedes Objekt in Normalform, und $\sim$ fällt mit $=$ zusammen.

Eine Approximation $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\} \in C_0^{\rho\rightarrow\sigma}$ heißt in *Normalform,* wenn alle a_i,b_i in Normalform sind und wenn gilt

$$i \neq k \rightarrow a_i \neq a_k$$
$$\sup\{b_k \mid a_k < a_i\} < b_i;$$

$a < b$ steht dabei für $a \leqq b \wedge a \neq b$. Man beachte, daß aus der zweiten Bedingung $b_i \neq *$ ($:= \emptyset \in C_0^\sigma$) folgt, und ebenso

$$a_k < a_i \rightarrow b_k < b_i.$$

Zu zeigen sind jetzt die Eigenschaften 6 und 7 für den Typ $\rho \rightarrow \sigma$. Zum Beweis von 6 für $\rho \rightarrow \sigma$ sei $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\} \in C_0^{\rho\rightarrow\sigma}$. In einem *ersten Schritt* zeigen wir, daß man oBdA $a_k \leqq a_i \rightarrow b_k \leqq b_i$ annehmen kann. Dazu setzen wir

$$A' := \{(a_i,A(a_i)) \mid i \in I\};$$

$A' \in C_0^{\rho\rightarrow\sigma}$ folgt aus 4, also der Monotonie der Anwendungsoperation. Zu zeigen ist $A \sim A'$, d. h. $A \leqq A'$ und $A' \leqq A$, d. h. nach 5 $A(a_i) \leqq A'(a_i)$ und $A'(a_i) \leqq A(a_i)$. Die erste dieser Ungleichungen ergibt sich aus $b_i \leqq A(a_i)$, was wiederum aus der Definition der Anwendung folgt. Für die zweite Ungleichung hat man zu zeigen $\sup\{A(a_k) \mid a_k \leqq a_i\} \leqq A(a_i)$; dies folgt wieder aus 4. – Man beachte, daß wir damit auch $i \neq k \rightarrow a_i \neq a_k$ annehmen können. In einem *zweiten Schritt* zeigen wir schließlich, daß man oBdA auch $\sup\{b_k \mid a_k < a_i\} < b_i$ annehmen kann. Nach dem ersten Schritt hat man stets $\leqq$. Wir zeigen durch Induktion über $|I|$, daß man die obige Eigenschaft stets erreichen kann. Sei $\sup\{b_k \mid a_k < a_i\} = b_i$ für ein festes $i \in I$. Setze $A' := A \setminus \{(a_i,b_i)\}$. Zu eigen ist $A \sim A'$. Wegen $A' \subset A$ ist nach 2 $A' \leqq A$. Zum Beweis von $A \leqq A'$ genügt es nach 5, $A(a_k) \leqq A'(a_k)$ für alle $k \in I$ zu zeigen. Nun ist

$$A(a_k) = \sup\{b_l \mid a_l \leqq a_k\} = b_k \text{ nach Schritt 1}$$
$$A'(a_k) = \sup\{b_l \mid l \neq i,\ a_l \leqq a_k\} = b_k \text{ für } k \neq i.$$

Es genügt also, $A(a_i) \leqq A'(a_i)$ zu zeigen. Wegen $A(a_i) = b_i = \sup\{b_k \mid a_k < a_i\}$ sei also $a_k < a_i$; zu zeigen ist $b_k \leqq A'(a_i)$. Es ist aber $b_k \leqq A'(a_k) \leqq A'(a_i)$.

Zum Beweis von *7 für* $\rho \rightarrow \sigma$ seien $A,B \in C_0^{\rho\rightarrow\sigma}$ in Normalform, etwa $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\}$ und $B = \{(a_j,b_j) \mid j \in J\}$ mit $I \cap J = \emptyset$. Es gelte $A \sim B$; zu zeigen ist $A = B$. Offenbar genügt $A \subset B$. Sei also $i \in I$; wir zeigen $(a_i,b_i) \in B$.

$$A(a_i) = b_i$$
$$B(a_i) = \sup\{b_j \mid j \in J, a_j \leqq a_i\}.$$

Sei $J_i := \{j \in J \mid a_j \leqq a_i\}$. $J_i \neq \emptyset$, da $b_i \neq *$. Betrachte $j \in J_i$.

$$B(a_j) = b_j$$
$$A(a_j) = \sup\{b_k \mid k \in I,\ a_k \leqq a_j\}.$$

Sei $I_j := \{k \in I \mid a_k \leqq a_j\}$. $I_j \neq \emptyset$, da $b_j \neq *$. Fall 1: $i \in I_j$ für ein $j \in J_i$. Dann ist $a_i \sim a_j$ und ebenso $b_i \sim b_j$. Da a_i, a_j, b_i, b_j in Normalform sind, hat man nach 7 für ρ und σ $a_i = a_j$ und $b_i = b_j$, also $(a_i, b_i) \in B$. Fall 2: $i \notin I_j$ für alle $j \in J_i$. Dann gilt für alle $k \in \bigcup_{j \in J_i} I_j : a_k < a_i$. Man erhält

$$\begin{aligned} b_i &= \sup\{b_j \mid j \in J_i\} \\ &= \sup\{b_k \mid k \in \bigcup_{j \in J_i} I_j\} \\ &\leqq \sup\{b_k \mid k \in I,\ a_k < a_i\} \\ &< b_i; \end{aligned}$$

der Fall 2 kann also nicht eintreten.□

Für reine Typen (also Typen der Form 0, $1 := 0 \to 0$, $2 := 1 \to 0, \ldots$) haben die Approximationen in Normalform eine besonders einfache Gestalt: $A \in C_0^{n+1}$ ist also in Normalform genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

1. $A = *\ (:= \emptyset)$.
2. $A = \{(*,b)\}$ für ein $b \in C_0^0$, $b \neq *$.
3. $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I\}$, wobei die $a_i \in C_0^n$ unvergleichbar (und in Normalform) und die $b_i \in C_0^0$, $b_i \neq *$ sind.

§ 3 Approximierbare Funktionale

Wir definieren die Menge C^ρ der *approximierbaren Funktionale* vom Typ ρ sowie eine *Erweiterungsrelation* $\leqq^\rho$ auf C^ρ durch

$$C^\rho := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset C_0^\rho \text{ Ideal}\}$$
$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} :\longleftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}.$$

Dabei heißt $\mathfrak{a} \subset C_\rho^0$ *Ideal,* wenn $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ und

$$a_1, a_2 \in \mathfrak{a} \to \exists a \in \mathfrak{a}\ (a_1,a_2 \leqq a)$$
$$a_1 \leqq a \in \mathfrak{a} \to a_1 \in \mathfrak{a}.$$

Man beachte, daß sich C_0^ρ in natürlicher Weise in C^ρ einbetten läßt, indem man jedem $a \in C_0^\rho$ das von a erzeugte Hauptideal $\langle a\rangle := \{a_1 \in C_0^\rho \mid a_1 \leqq a\}$ zuordnet. Offenbar gilt $a_1 \leqq a_2 \longleftrightarrow \langle a_1\rangle \subset \langle a_2\rangle$.

Um die Elemente aus $C^{\rho\to\sigma}$ als Funktionen mit Definitionsbereich C^ρ und Wertebereich C^σ auffassen zu können, definieren wir eine Anwendungsoperation. Anw: $C^{\rho\to\sigma} \times C^\rho \to C^\sigma$ wie folgt. Für $\mathfrak{f} \in C^{\rho\to\sigma}$ und $\mathfrak{a} \in C^\rho$ sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ das von allen $A(a)$ mit $A \in \mathfrak{f}$, $a \in \mathfrak{a}$ erzeugte Ideal in C^σ, also

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) := \{b \in C_0^\sigma \mid \exists A \in \mathfrak{f}\ \exists a \in \mathfrak{a}\ (b \leqq A(a))\}.$$

Faßt man $C_0^{\rho\to\sigma}$ und C_0^ρ vermöge der obigen Einbettung als Teilmengen von $C^{\rho\to\sigma}$ bzw. C^ρ auf, so stimmt die in § 1 definierte Anwendungsoperation mit der obigen überein.

Nachdem wir jetzt also $C^{\rho\to\sigma}$ als Menge von Funktionen von C^ρ nach C^σ auffassen können, stellen wir uns nun die Frage, welche Funktionen dies sind. Wir zeigen: $f : C^\rho \to C^\sigma$ ist (darstellbar durch ein Element) in $C^{\rho\to\sigma}$ genau dann, wenn f monoton ist und folgende Approximationseigenschaft erfüllt:

$$\forall \mathfrak{a} \in C^\rho \forall b \in f(\mathfrak{a})\ \exists a \in \mathfrak{a}\ (b \leqq f(a)).$$

Hier haben wir C_0^σ, C_0^ρ als Teilmengen von C^ρ, C^σ aufgefaßt; genauer müßte man statt $b \leqq f(a)$ schreiben $b \in f(<a>)$.

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, daß $f : C^\rho \to C^\sigma$ in $C^{\rho\to\sigma}$ ist, also durch ein Ideal $\mathfrak{f} \in C^{\rho\to\sigma}$ dargestellt wird. Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in C^\rho$ folgt aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ offenbar $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{f}(\mathfrak{b})$, d. h. f ist monoton. Zum Beweis der Approximationseigenschaft wählen wir $\mathfrak{a} \in C^\rho$ und $b \in \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. Nach Definiton von $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ gibt es dann $A \in \mathfrak{f}$ und $a \in \mathfrak{a}$ mit $b \leqq A(a)$. Also ist $b \in \mathfrak{f}(<a>)$.

Für die umgekehrte Richtung sei also $f : C^\rho \to C^\sigma$ monoton und erfülle die Approximationseigenschaft. Wir betrachten alle endlichen Mengen A aus Paaren (a,b), mit $a \in C_0^\rho$ und $b \in f(<a>)$. Alle diese A sind konsistent, denn aus $a_i \leqq a$ für alle $i \in I_0$ folgt $b_i \in f(<a_i>) \subset f(<a>)$ wegen der Monotonie von f. Sie erzeugen offenbar ein Ideal $\mathfrak{f} \in C^{\rho\to\sigma}$. Zu zeigen ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a} \in C^\rho$. Zum Beweis von $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \subset f(\mathfrak{a})$ sei $b \in f(\mathfrak{a})$, also $b \leqq A(a)$ für gewisse $A \in \mathfrak{f}$, $a \in \mathfrak{a}$. ObdA ist A erzeugendes Element von $\mathfrak{f}$, etwa $A = \{(a_i,b_i) \mid i \in I)\}$. Nun ist A(a) kleinste obere Schranke der b_i mit $a_i \leqq a$, und für jedes solche b_i gilt $b_i \in f(<a_i>) \subset f(<a>) \subset f(\mathfrak{a})$. Daher ist $A(a) \in f(\mathfrak{a})$, also auch $b \in f(\mathfrak{a})$. Zum Beweis von $f(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ sei $b \in f(\mathfrak{a})$. Da f die Approximationseigenschaft erfüllt, gibt es ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $b \in f(<a>)$. Daher ist $A := \{(a,b)\} \in \mathfrak{f}$, also $b = A(a) \in \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. □

Abschließend bemerken wir noch, daß sich jetzt die Menge C_{ber}^ρ der berechenbaren Funktionale vom Typ ρ in natürlicher Weise definieren läßt als

$$C_{ber}^\rho := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset C_0^\rho \text{ rekursiv aufzählbares Ideal}\}.$$

Offenbar sind die berechenbaren Funktionale abgeschlossen gegen Anwendungen. Ferner hat jedes berechenbare Funktional vom Typ $\rho \to \sigma$ ganz C^ρ als Definitonsbereich.

Literatur

Ersov, Yu.: The model $\mathbb{C}$ of partial continuous functionals. In: Logic Colloquium 76 (Hrsg.: R. O. Gandy und J. M. E. Hyland), North-Holland, Amsterdam 1977, S. 455–467.

Feferman, S.: Generating schemes for partial recursively continuous functionals (Summary). In: Colloque International de Logique, Clermont-Ferrand 1975, CNRS, Paris 1977, S. 191–198.

Kreisel, G.: Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types. In: Constructivity in Mathematics (Hrsg.: A. Heyting), North-Holland, Amsterdam 1959, S. 101–128.

Scott, D.: Domains for denotational semantics. In: Automata, Languages and Programming (Hrsg.: M. Nielsen und E. M. Schmidt), Springer Lecture Notes in Computer Science 150, 1982, S. 577–613.