Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences

BULLETIN

DE

L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

VOLUME XX
NUMÉRO 2

VARSOVIE 1972

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences math., astr.
et phys. — Vol. XX, No. 2, 1972

MATHEMATIK
(ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE)

Simpliziale und semisimpliziale Mengen*)

von

R. FRITSCH

Vorgelegt von K. BORSUK am 11. Februar 1971

Summary. The aim of this note is to give a purely combinatorial proof of a theorem of D. M. Kan [5] which states that any simplicial Kan set can be completed to a semisimplicial Kan set. After the categorical background and the proof, we ask for unicity properties of this completion and show finally that some maps appearing in this context are weak homotopy equivalences.

Einleitung

Wie D. M. Kan gezeigt hat [5], können auf jeder simplizialen Kanmenge Entartungsoperatoren so erklärt werden, daß eine semisimpliziale (Kan-) Menge entsteht. Der Kansche Beweis verwendet die geometrische Realisierung und ein Ergebnis von Rourke und Sanderson [9] über Deformationsretrakte. Die Kategorie der simplizialen Mengen läßt sich aber als eine coreflektive Teilkategorie der Kategorie der semisimplizialen Mengen (vgl. § 1) auffassen und die Aussage des Kanschen Satzes ist rein kombinatorischer Natur; deshalb wollen wir im folgenden einen rein kombinatorischen Beweis für diesen Satz angeben.

Dazu klären wir in § 1 den abstrakten Hintergrund. Nach dem Beweis des Kanschen Satzes in § 2 untersuchen wir in § 3 noch die Frage, wie weit die Erklärung von Entartungsoperatoren nur auf eine Weise möglich ist. In § 4 machen wir schließlich noch einige Aussagen über schwache Homotopieäquivalenzen, die in diesem Zusammenhang auftreten.

Wir verwenden Notation und Terminologie von [4]; was dort nicht erklärt ist, findet man in [7]. In § 1 benutzen wir außerdem die Terminologie von [8].

§ 1. Kategorielle Zusammenhänge

E sei die (große) Kategorie der Mengen, Δ die (als klein angenommene) Kategorie der endlichen, geordneten Mengen und ΔM die Teilkategorie von Δ, die aus den Monomorphismen von Δ besteht.

*) Auf diese Terminologie haben sich — wie mir K. Lamotke mitteilte — die Teilnehmer an einer Diskussion während des Internationalen Mathematikerkongresses in Moskau 1966 geeinigt. Ursprünglich verwendeten S. Eilenberg und J. A. Zilber „semisimplicial complex" für "simpliziale Menge" und „complete semisimplicial complex" für „semisimpliziale Menge" [2].

Dann ist die Kategorie $\boldsymbol{S}$ der semisimplizialen Mengen nichts anderes als die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Δ nach $\boldsymbol{E}$, d.h.

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{E}^{\Delta^{\mathrm{op}}} {}^{*)}$$

und die Kategorie $\boldsymbol{SM}$ der simplizialen Mengen ist die Kategorie der kontravarianten Funktoren von ΔM nach $\boldsymbol{E}$, d.h.

$$\boldsymbol{SM} := \boldsymbol{E}^{\Delta M^{\mathrm{op}}}.$$

Die Inklusion von ΔM in Δ induziert einen treuen „Vergiß-Funktor"

$$F : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{SM}.$$

Da $\boldsymbol{E}$ alle Limites und Colimites enthält, gilt

SATZ 1. a) *Die Kategorien $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{SM}$ enthalten alle Limites und Colimites.*

b) *Der Funktor F erhält Limites und Colimites.*

Außerdem sind die Voraussetzungen des Satzes über die Konstruktion der linken Kan-Erweiterung ([8], S. 131) erfüllt, also haben wir auch

SATZ 2. *Es gibt einen zu F linksadjungierten Funktor*

$$M : \boldsymbol{SM} \to \boldsymbol{S}.$$

Wir können einen solchen Funktor M explizit konstruieren, und zwar völlig analog zur Konstruktion des Funktors P in [4] § 3. Ist M in dieser Weise konstruiert, so gilt

SATZ 3. a) *Der Funktor M läßt sich über die Kategorie $\boldsymbol{P}$ der nichtentarteten, semisimplizialen Mengen* ([4] § 3.1) *faktorisieren, d.h. es gibt einen Funktor*

$$M' : \boldsymbol{SM} \to \boldsymbol{P},$$

derart, daß das Dreieck

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{SM} \arrow[rr, "M'"] \arrow[dr, "M"'] & & \boldsymbol{P} \arrow[dl, "E"] \\ & \boldsymbol{S} & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

b) *Dieser Funktor M' ist eine natürliche Äquivalenz.*

Auf Grund dieses Satzes können wir $\boldsymbol{SM}$ mit $\boldsymbol{P}$ identifizieren und damit $\boldsymbol{SM}$ als coreflektive Teilkategorie von $\boldsymbol{S}$ mit Coreflektor

$$P = M' F$$

auffassen ([3] § 3]).

Im folgenden stellen wir uns eine simpliziale Menge X als eine Folge

$$X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$$

*) Das Zeichen „: =" bedeutet „definitorisch gleich".

von (paarweise disjunkten) Mengen vor, auf deren Elementen die passenden Monomorphismen aus Δ von rechts operieren; operieren alle Morphismen aus Δ, so haben wir eine semisimpliziale Menge. Der Funktor F „vergißt" auf die Entartungsoperatoren; deshalb gehen wir im folgenden davon aus, daß eine semisimpliziale Menge X und die entsprechende simpliziale Menge FX die gleichen Elemente (Simplizes) enthalten. Man setzt für eine simpliziale Menge X

$$\dim X := \dim MX.^{*)}$$

§ 2. Simpliziale und semisimpliziale Kanmengen

Definition. Eine simpliziale (semisimpliziale) Menge X ist eine simpliziale (semisimpliziale) Kanmenge, wenn es zu jedem Trichter (mit einem Loch)

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, -, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

($n \in N$, $j \in [n]$, $x_i \in X_{n-1}$ für alle $i \in [n]-\{j\}$,

$$x_i\, \delta_k = x_k\, \delta_{i-1}$$

für alle i, k mit $n \geqslant i > k \geqslant 0$ und $i \neq j \neq k$) in X eine Füllung, d.h. ein n-Simplex x mit

$$x\delta_i = x_i$$

für alle $i \in [n]-\{j\}$, gibt.

Wie für semisimpliziale Kanmengen ([7], S. 15) beweist man, daß sich in simplizialen Kanmengen auch Trichter mit mehr als einem Loch füllen lassen; daraus ergibt sich unmittelbar

Lemma 1. *Jede nichtleere, simpliziale Kanmenge ist unendlichdimensional.*

Es geht uns um den Zusammenhang zwischen simplizialen und semisimplizialen Kanmengen. Zunächst einige fast triviale Feststellungen:

Lemma 2. *Eine semisimpliziale Menge X ist genau dann eine semisimpliziale Kanmenge, wenn FX eine simpliziale Kanmenge ist.*

Dieses Lemma besagt insbesondere, daß der Vergiß-Funktor F mit der Kanbedingung verträglich ist. Der zu F linksadjungierte Funktor M ist dagegen mit der Kanbedingung vollkommen unverträglich: MX ist sicher keine semisimpliziale Kanmenge, wenn X eine nichtleere simpliziale Kanmenge ist. Das ergibt sich aus Lemma 1 und dem folgenden

Lemma 3. *Ist X eine nichtleere simpliziale Menge, so ist MX genau dann eine semisimpliziale Kanmenge, wenn X 0-dimensional ist.*

Beweis. a) Ist X 0-dimensional, so auch MX. Jede 0-dimensionale semisimpliziale Menge ist aber eine semisimpliziale Kanmenge.

b) MX sei semisimpliziale Kanmenge. Nach Satz 3a) können wir MX als nichtentartete semisimpliziale Menge auffassen. Wäre X nicht 0-dimensional, so

*) Die Dimension von semisimplizialen Mengen ist in [7] (S. 6) definiert.

gäbe es in MX mindestens ein nichtentartetes 1-Simplex. Sei $x \in (MX)_1^+$. Damit bilden wir den Trichter

$$(-, x\delta_1 \sigma_0, x).$$

Eine Füllung dieses Trichters müßte ein nichtentartetes 2-Simplex mit entarteter 1-ter Seite $x\delta_1 \sigma_0$ sein. Da MX eine nichtentartete semisimpliziale Menge ist, ist das nicht möglich.

In dieser Arbeit geht es hauptsächlich um

SATZ 4. *Zu jeder simplizialen Kanmenge X gibt es (mindestens) eine semisimpliziale Kanmenge Y, derart daß gilt*

$$X \cong FY.$$

Ist X eine simpliziale Kanmenge, so gibt es auf Grund des Zornschen Lemmas mindestens eine maximale semisimpliziale Menge Y, derart daß gilt

$$FY \subset X.$$

Wäre nun

$$FY \nsubseteq X,$$

so gäbe es in X ein Simplex x, das nicht in FY liegt, dessen Seiten aber zu FY gehören. Daß das im Widerspruch zur Maximalität von Y steht, ergibt sich aus

LEMMA 4. *Die semisimpliziale Menge Z werde von dem nichtentarteten n-Simplex z erzeugt; mit $\dot{Z}$ sei die vom Rand von z erzeugte semisimpliziale Teilmenge von Z bezeichnet. X sei eine simpliziale Kanmenge und*

$$\dot{f}: F\dot{Z} \to X$$

ein Monomorphismus. In $X - \dot{f}(F\dot{Z})$ gebe es ein Simplex x, derart daß gilt:

$$x\delta_i = \dot{f}(z\delta_i)$$

für alle $i \in [n]$. Dann gibt es einen Monomorphismus

$$f: FZ \to X$$

mit

$$f \mid F\dot{Z} = \dot{f}$$

und

$$fz = x.$$

Zum Beweis dieses Lemmas setzen wir

$$fy := \dot{f}y$$

für alle $y \in \dot{Z}$ und

$$fz = x$$

Dann haben wir noch für alle surjektiven

$$a = \sigma_{i_0} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \quad (i_0 < i_1 < \dots < i_k)$$

ein Element $f(za)$ derart anzugeben, daß gilt

$$f(za\delta_i)=f(za)\delta_i$$

für alle $i\in[\dim a]$. Wir konstruieren diese Elemente durch Induktion nach

$$m:=\dim a,$$

derart daß gilt:

$$f(za)=x_\alpha\,\delta_r$$

wobei

$$r:=\min\{r'\mid a\sigma_{i_k+1}\,\delta_{r'}=a\}.$$

und x_α einen Trichter der Form

$$(f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_0),\,f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_1),\ldots,f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{r-1}),\,-,\,x'_\alpha,\ldots,x'_\alpha,\\ f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{i_k+3}),\ldots,f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{m+1}))$$

füllt. Sei also

$$m>n$$

und $f(za')$ für alle surjektiven a' mit

$$\dim a'<m$$

bereits in der angegebenen Weise konstruiert. In der Menge A der surjektiven

$$a:[m]\to[n]$$

definieren wir nur eine Relation „Vorgänger von" durch die Festsetzung:

$$a'=\sigma_{j_0}\,\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_k}\qquad(j_0<j_1<\ldots<j_k)$$

ist *Vorgänger von*

$$a=\sigma_{i_0}\,\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_k}\qquad(i_0<i_1<\ldots<i_k),$$

wenn $a\neq a'$ und ein $j\in[m]$ so existiert, daß gilt

$$a\sigma_{i_k+1}\,\delta_j=a'.$$

Ist a' Vorgänger von a (Indizes wie oben), so gilt $i_s\leqslant j_s$ für alle $s\in[k-1]$ und $i_k=j_k$.

Aus dieser Tatsache folgt, daß die von der Relation „Vorgänger von" induzierte Präordnung auf A eine (partielle) Ordnung ist. Wir konstruieren nun $f(za)$ unter der Voraussetzung, daß $f(z_\alpha)$ für alle Vorgänger a' von a bekannt ist. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1) $i_k>i_{k-1}+1$ bzw. $k=0$. Wir wählen eine Füllung x'_α des Trichters

$$(f(za\delta_0),f(za\delta_1),\ldots,f(za\delta_{i_k}),\,-,f(za\delta_{i_k+2}),\ldots,f(za\delta_m))$$

und bilden damit den Trichter

$$(f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_0),f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{i_k-1}),\,-,\,x'_\alpha,\,x'_\alpha,f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{i_k+3}),\ldots,f(za\sigma_{i_k+1}\,\delta_{m+1})).$$

Wir wählen nun eine Füllung x_α dieses Trichters und setzen

$$f(za):=x_\alpha\,\delta_{i_k}.$$

2) $i_k = i_{k-1} + 1$. Wir setzen

$$a' := \sigma_{i_0} \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_{k-1}}$$

und

$$r := \min (r' \mid a\sigma_r = a').$$

Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung

$$f(z_\alpha') = x_{\alpha'} \sigma_r$$

wobei $x_{\alpha'}$ eine Füllung eines Trichters der Form

$$(f(za\delta_0), f(za\delta_1), \ldots, f(za\delta_{r-1}), -, x'_{\alpha'}, \ldots, x'_{\alpha'} f(za\delta_{i_k+2}), \ldots, f(za\delta_m))$$

ist. Wir bilden nun den Trichter

$$(f(za\sigma_{i_k+1} \delta_0), f(za\sigma_{i_k+1} \delta_1), \ldots, f(za\sigma_{i_k+1} \delta_{r-1}), -, x_{\alpha'}, \ldots, x_{\alpha'},$$
$$f(za\sigma_{i_k+1} \delta_{i_k+3}), \ldots, f(za\sigma_{i_k+1} \delta_{m+1})),$$

wählen eine Füllung x_α und setzen

$$f(za) := x_\alpha \delta_r.$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

§ 3. *Eindeutigkeitsfragen*

Der Beweis von Satz 4 führt zu der Vermutung, daß eine semisimpliziale Menge X nicht bis auf semisimpliziale Isomorphie durch FX bestimmt ist. Diese Vermutung ist für endlich-dimensionale semisimpliziale Mengen falsch, was sich aus dem folgenden Satz ergibt. Jedoch werden wir im Anschluß daran zwei semisimpliziale Mengen X, Y mit $X \not\cong Y$ aber $FX \cong FY$ angeben.

SATZ 5. *X, Y seien semisimpliziale Mengen, Y sei endlichdimensional und $f: FX \to FY$; dann ist f mit den Entartungsoperatoren verträglich, d.h. es gibt eine semisimpliziale Abbildung $f': X \to Y$ mit*

$$f = Ff'.$$

Der Beweis von Satz 5 ergibt sich aus den beiden folgenden Lemmata.

LEMMA 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 gilt für alle $x \in X$, daß fx entartet ist, falls x entartet ist.*

LEMMA 6. *Sind X und Y semisimpliziale Mengen und ist $f: FX \to FY$ eine simpliziale Abbildung, derart daß fx entartet ist, falls x entartet ist, so ist f mit den Entartungsoperatoren verträglich.*

In Lemma 6 wird also die endliche Dimension von Y nicht mehr benötigt.

Beweis von Lemma 5. Sei ein entartetes Simplex

$$x = \bar{x}\sigma_i$$

aus X gegeben ($\bar{x} \in X$, $i \in [\dim \bar{x}]$) und angenommen, daß

$$y := fx$$

nicht entartet ist. Wir setzen

$$y_k := f(x\sigma_{i+1}\,\sigma_{i+2}\dots\sigma_{i+k})$$

für alle natürlichen Zahlen k. Dann ergibt sich

$$y_1\,\delta_{i+\varepsilon} = f(\bar{x}\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\delta_{i+\varepsilon}) = y$$

für $\varepsilon = 0, 1, 2$. Da ein entartetes n-Simplex höchstens zwei nichtentartete $(n-1)$-dimensionale Seiten hat, folgt, daß y_1 auch nicht entartet sein kann. Aus

$$y_{k+1}\,\delta_{i+k+\varepsilon} = f(x\sigma_{i+1}\,\sigma_{i+2}\dots\sigma_{i+k+1}\,\delta_{i+1+\varepsilon}) = yk$$

für alle k und $\varepsilon \in [k+1]$ ergibt sich nun auch, daß y_{k+1} nicht entartet ist, falls nur y_k nicht entartet ist. Also sind alle y_k nicht entartet, und wegen

$$\dim y_k = \dim x + k$$

haben wir einen Widerspruch zu der Voraussetzung

$$\dim Y < \infty\,.$$

Beweis von Lemma 6. Zu zeigen ist

$$f(x\sigma_i) = (fx)\,\sigma_i$$

für alle $x \in X$ und $i \in [\dim x]$. Das geschieht durch Induktion nach $\dim x$. Auf Grund der Voraussetzung stehen auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung entartete Simplizes. Diese sind genau dann gleich, wenn ihre Seiten gleich sind ([6] I.3.8). Ist $\dim x = 0$, so ist $i = 0$ und

$$f(x\sigma_0)\,\delta_\varepsilon = f(x\sigma_0\,\delta_\varepsilon) = fx = (fx)\,(\sigma_0\,\delta_\varepsilon) = \big((fx)\,\sigma_0\big)\,\delta_\varepsilon$$

für $\varepsilon = 0, 1$. Zum Nachweis der Induktionsbehauptung genügt es zu zeigen

$$f(x\sigma_i\,\delta_j) = (fx)\,(\sigma_i\,\delta_j)$$

für $i \in [\dim x]$ und $j \in [\dim x+1]$. Im Falle

$$\sigma_i\,\delta_j = id$$

ist das trivial, also können wir

$$\sigma_i\,\delta_j = \delta'_j\,\sigma'_i$$

voraussetzen. Dann gilt aber

$$f(x\sigma_i\,\delta_j) = f(x\delta'_j\,\sigma'_i) = f(x\delta'_j)\,\sigma'_i = (fx)\,(\delta'_j\,\sigma'_i) = (fx)\,(\sigma_i\,\delta_j)$$

nach Induktionsvoraussetzung.

Die Voraussetzung "Y endlich dimensional" in Satz 5 kann nicht ersatzlos gestrichen werden, das zeigt schon

Beispiel 1: Sei S^1 die topologische 1-Sphäre (Kreislinie), SS^1 ihre singuläre semisimpliziale Menge, $z: \Delta_0 \to S^1$ ein singuläres 0-Simplex und $z': \Delta_1 \to S^1$ ein nicht konstantes, aber nullhomotopes singuläres 1-Simplex mit

$$z' \cdot |\Delta\delta_\varepsilon| = z$$

für alle $\varepsilon \in [1]$. Dann zeigt der Beweis von Satz 4, daß wir auf FSS^1 Entartungsoperatoren auch so erklären können, daß gilt

$$z\sigma_0 = z'.$$

Anders ausgedrückt, bedeutet das, daß es eine semisimpliziale Kanmenge Y und einen simplizialen Isomorphismus

$$f\colon FSS^1 \to FY$$

gibt mit

$$(+) \qquad f(z \cdot |\Delta\sigma_0|) \neq (fz)\,\sigma_0 = fz'.$$

Dieses f ist also nicht den Entartungsoperatoren verträglich.

Wir wissen nicht, ob die semisimplizialen Kanmengen SS^1 und Y in diesem Beispiel nicht vielleicht trotzdem noch isomorph sind. Das braucht i.a. jedoch auch nicht der Fall zu sein:

Beispiel 2: Wir geben semisimpliziale Mengen $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ an, derart daß gilt:

$$(*) \qquad F\tilde{X} \cong F\tilde{Y}$$

aber

$$(**) \qquad \tilde{X} \ncong \tilde{Y}.$$

Wir definieren $\tilde{Y}$ und $\tilde{X}$ mit Hilfe der Bezeichnungen aus Beispiel 1 durch die Pushouts:

$$\begin{tikzcd}
\Delta[1] \arrow[r, "\overline{z\cdot|\Delta\sigma_0|}"] \arrow[d, "\Delta\delta_0"'] & SS^1 \arrow[d, "i"] \\
\Delta[2] \arrow[r, "\overline{x}"'] & \tilde{X}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta[1] \arrow[r, "\overline{f(z\cdot|\Delta\sigma_0|)}"] \arrow[d, "\Delta\delta_0"'] & Y \arrow[d, "j"] \\
\Delta[2] \arrow[r, "\overline{y}"'] & \tilde{Y}
\end{tikzcd}$$

(Der Querstrich "—" bezeichnet die dem darunterstehenden Simplex zugeordnete semisimpliziale Abbildung [7] I.4.7). Da F Pushouts erhält (Satz 1b) und f ein simplizialer Isomorphismus ist, ergibt sich $(*)$. Versucht man nun einen semisimplizialen Isomorphismus von $\tilde{X}$ nach $\tilde{Y}$ zu konstruieren, so muß dieser offensichtlich x in y abbilden. Das ist aber unmöglich, da

$$x\delta_0 = i\,(z \cdot |\Delta\sigma_0|)$$

entartet,

$$y\delta_0 = j\,(f(z \cdot |\Delta\sigma_0)|)$$

aber wegen der Injektivität von j und $(+)$ nicht entartet ist. Daraus folgt nun $(**)$.

Die in Beispiel 2 konstruierten semisimplizialen Mengen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ sind keine Kanmengen. Wir wissen nicht, ob man auch semisimpliziale Kanmengen so finden kann, daß $(*)$ und $(**)$ gelten.

§ 4. Homotopieäquivalenzen

Wenn auch, wie in § 3 gezeigt, eine semisimpliziale Menge X durch FX nicht (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist, so ist es jedoch der Homotopietyp ihrer geometrischen Realisierung; das ergibt sich aus dem folgenden, auf Kodama [6] zurückgehenden

SATZ 6. *Der Adjunktionsmorphismus* $p: MF \to IdS$ *ist für jede semisimpliziale Menge* X *eine schwache Homotopieäquivalenz.*

Beweis s. [4] 3.4.

Für semisimpliziale Kanmengen gilt sogar

SATZ 7. *Jede semisimpliziale Kanmenge* X *ist durch* FX *bis auf semisimpliziale Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei X eine semisimpliziale Kanmenge und Y eine semisimpliziale Menge mit

$$FY = FX.$$

Nach Lemma 2 ist Y semisimpliziale Kanmenge. Wir haben eine semisimpliziale Homotopieäquivalenz von X nach Y zu konstruieren. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$X \longrightarrow S\,|X| \xleftarrow{S|pX|} S\,|MFX| \xrightarrow{S|pY|} S\,|Y| \longleftarrow Y.$$

Die beiden unbezeichneten Abbildungen bedeuten die kanonischen Inklusionen: sie sind semisimpliziale Homotopieäquivalenzen ([7] VII 9.8). Aus der Bemerkung am Anfang dieses Paragraphen und [7] I 5.3 folgt, daß auch die beiden mittleren Morphismen semisimpliziale Homotopieäquivalenzen sind. Durch die Wahl von passenden Homotopie-Inversen erhält man dann die gesuchte Homotopieäquivalenz von X nach Y.

Im Beweis zu Satz 4 hatten wir simpliziale Inklusionen der Form

$$f: FY \to X$$

betrachtet. Diese induzieren auch gewisse Homotopieäquivalenzen:

SATZ 8. *Y sei eine semisimpliziale, X eine simpliziale Menge. Ferner sei eine simpliziale Inklusion*

$$f: FY \to X$$

gegeben und das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} MFY & \xrightarrow{Mf} & MX \\ {\scriptstyle pY}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

sei ein Pushout. Dann ist q *eine schwache Homotopieäquivalenz.*

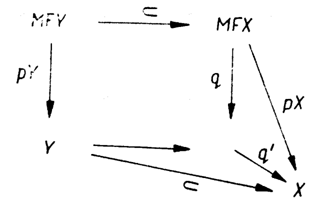
Beweis. Die geometrische Realisierung erhält Pushouts. $|Mf|$ ist Inklusion von CW-Komplexen, also Cofaserung; außerdem ist $|pY|$ nach Satz 6 Homotopieäquivalenz. Nach [1] (7.43) ist dann auch $|q|$ Homotopieäquivalenz.

FOLGERUNG. *Jede semisimpliziale Inklusion* $Y \subset X$ *induziert eine Aufspaltung*

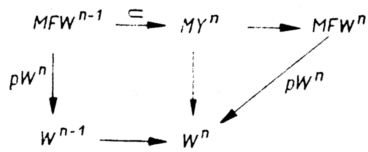
$$q' \cdot q = pX$$

von pX *in schwache Homotopieäquivalenzen.*

Beweis:



Wir schließen mit einer Bemerkung zu [5] (unter der Verwendung der dortigen Notation): Kan stellt dort (ohne Beweis) fest, daß $|Y^n|$ starker Deformationsretrakt von $|FW^n|$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Inklusion $MY^n \subset MFW^n$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Dies erhält man aber unmittelbar aus Satz 8, wenn man beachtet, daß in dem Diagramm



das Quadrat links ein Pushout ist.

FACHBEREICH MATHEMATIK, UNIVERSITÄT, 775 KONSTANZ, BRD

LITERATUR

[1] T. tom Dieck, K. H. Kamps, D. Puppe, *Homotopietheorie* (*Lecture Notes in Mathematics*, vol. 157) Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.

[2] S. Eilenberg, J. A. Zilber, *Semi-simplicial complexes and singular homology*, Ann. of Math., **51** (1950), 499—513.

[3] R. Fritsch, *On subdivision of semisimplicial sets* (*Proceedings of the International symposium on Topology and its Applications*, Herceg-Novi, Yugoslavia, 25—31. 8. 1968, Beograd, 1969.)

[4] — , *Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. I.* Math. Z., **108** (1969), 329—367.

[5] D. M. Kan, *Is an SS complex a CSS complex*? Advances in Math., **4** (1970), 170—171.

[6] J. Kodama, *A relation between two realizations of complete semisimplicial complexes*, Proc. Japan Acad., **33** (1957), 536—540.

[7] K. Lamotke, *Semisimpliziale algebraische Topologie* (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 147), Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1968.

[8] S. Mac Lane, *Categorical Algebra* (*Lectures at Bowdoin College*, *Summer 1969*, NSF Advanced Sciences Seminar).

[9] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *On the homotopy theory of Δ-sets*, [to appear].

Р. Фритш, **Симплициальные и полусимплициальные множества**

Содержание. Целью настоящей работы — представить чисто комбинаторное доказательство Д. М. Кана [5], что всякое Кановское симплициальное множество может быть пополнено к полусимплициальному Кановскому множеству. После представления необходимых категорий, а также проведения доказательства, исследуются свойства равномерности этого пополнения и в результате показано, что некоторые отображения, выступающие в настоящей работе, являются слабыми эквивалентностями гомотопии.