Mathematisch-Physikalische
Semesterberichte

Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität

Begründet 1932 von H. Behnke und O. Toeplitz

NEUE FOLGE · BAND XXII

GÖTTINGEN · VANDENHOECK & RUPRECHT · 1975

Gesamtherstellung: Hubert & Co., Göttingen

INHALT

Abhandlungen

Buchbesprechungen

Einbettung affiner Räume

Von RUDOLF FRITSCH in Konstanz

Einleitung

In [F] wurde gezeigt, wie man ohne Benutzung der linearen Algebra nur mit synthetischen Hilfsmitteln einen dreidimensionalen affinen Raum konstruieren kann, in dem eine gegebene desarguessche Ebene eingebettet ist. Hier soll nun in ähnlicher Weise ein beliebiger affiner Raum A als Hyperebene in einen affinen Raum $\mathfrak{A}$ eingebettet werden.

Unsere Konstruktion wird motiviert durch § 1 von [F]. Sie beruht auf dem aus der Darstellenden Geometrie bekannten Verfahren der kotierten Projektion. Auf [F] wird in folgenden Überlegungen insofern zurückgegriffen, als wir im einzelnen nur die Punkte darstellen, in denen sich die räumliche Situation von der ebenen unterscheidet.

Dabei geht es zunächst einmal um die synthetische Definition eines affinen Raumes. In der Literatur hat sich dafür noch kein Axiomensystem einheitlich durchgesetzt. Das erlaubt uns, eines zu wählen, das für unsere Zwecke besonders gut geeignet ist. Wir stellen es mit einigen Erläuterungen in § 1 dar.

In jedem affinen Raum gilt – im Unterschied zur affinen Ebene – ohne weitere Voraussetzung der Satz von DESARGUES und damit auch der Fundamentalsatz der affinen Geometrie. Wir benötigen ihn hier in einer gegenüber der Formulierung in [F] § 3 etwas verschärften Fassung (s. **2.3.**). Die Verschärfung beruht auf der Aussage in **2.5.**, deren Beweis wir z. T. skizzieren.

In § 3 beschreiben wir die Grundelemente des gesuchten affinen Raumes A. Daß wir bei der Festlegung der Ebenen in $\mathfrak{A}$ allgemeinere Punktmengen als die in [F] **4.3.** beschriebenen zulassen müssen, hat den folgenden geometrischen Hintergrund: In einem 3-dimensionalen affinen Raum ist der von einer Geraden und einer Ebene aufgespannte affine Unterraum auch höchstens 3-dimensional; deswegen lassen sich alle Ebenen in der Form [F](1.6) darstellen. In einem höherdimensionalen Raum ist das nicht möglich, weil es darin Ebenen gibt, die „affin unabhängig“ von einer festen Geraden sind und deshalb mit ihr einen 4-dimensionalen Unterraum erzeugen.

Die Gültigkeit der Axiome in dem konstruierten Raum $\mathfrak{A}$ kann man großenteils völlig analog zum Vorgehen in [F] bestätigen. Neben der Definition der Ebenen liefert das Axiom über den Durchschnitt von Ebenen, das wir in § 4 nachweisen, den zweiten Gesichtspunkt, in dem sich die ebene und die räumliche Situation unterscheiden.

Den Abschluß unser Betrachtungen bildet schließlich in § 5 der Nachweis, daß wir den gegebenen Raum A als Hyperebene in den konstruierten Raum $\mathfrak{A}$ einbetten können.

Man kann sich natürlich fragen, ob es sich lohnt, einen im Rahmen der analytischen Geometrie völlig trivialen Satz mit diesem Aufwand synthetisch beweisen zu wollen. Unseres Erachtens haben die angestellten Betrachtungen auch nicht ihren Wert im Ergebnis, sondern in der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens, das einem dann vielleicht einmal an anderer Stelle weiterhilft, wenn man keinen analytisch-algebraischen Kalkül zur Verfügung hat (vgl. auch [LV], S. 46 letzter Absatz).

§ 1. Affine Räume

1.1. Die affinen Räume sind für uns durch ein Axiomensystem definiert, in dem die HILBERTschen Verknüpfungsaxiome (oder Inzidenzaxiome) so abgeändert sind, daß auch die n-dimensionalen affinen Räume mit $n > 3$ erfaßt werden. Es geht im wesentlichen auf H. LENZ ([LG], Kap X, § 2) zurück.

1.2. Ein affiner Raum ist eine Menge von Punkten zusammen mit zwei Mengen gewisser Untermengen, der sogenannten Geraden und Ebenen, so daß die folgenden Bedingungen I–V erfüllt sind. Dabei bezeichnen wir als Dreieck eine Menge von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, und wir nennen ein Paar von Geraden parallel, wenn sie entweder gleich sind oder beide in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben.

I. Reichhaltigkeitsaxiom: *Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte; jede Ebene enthält mindestens ein Dreieck. Es gibt ein Dreieck und darüberhinaus vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.*

II. Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden: *Zu je zwei Punkten p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gibt es genau eine Gerade, die beide enthält.* Diese wird als die Verbindungsgerade p_1p_2 der Punkte p_1, p_2 bezeichnet.

III. Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsebene: *Zu jedem Dreieck gibt es genau eine Ebene, die es enthält.*

IV. Parallelenaxiom: *Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt genau eine Parallele.*

V. Axiom über den Durchschnitt von Ebenen: *Sind e_1, e_2 Ebenen mit $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, derart daß es Geraden g_1, g_2 mit $g_i \subset e_i$ $(i = 1,2)$ und $g_1 \| g_2$ gibt, dann haben e_1 und e_2 mindestens zwei Punkte gemeinsam.*

1.3. Anstelle von Axiom V verlangte HILBERT, daß zwei beliebige Ebenen entweder keinen oder mindestens zwei Punkte gemeinsam haben. Damit enthält man aber nur die 3-dimensionalen affinen Räume, weshalb eine Abschwächung notwendig ist. Die hier gegebene Fassung findet sich in [LG] a.a.O. Um der intuitiven Vorstellung von einem affinen Raum gerecht zu werden, muß man dann das Reichhaltigkeitsaxiom verschärfen: daß jede Ebene ein Dreieck enthält, ist in dem HILBERTschen System beweisbar. Von dem LENZschen System unterscheiden wir uns zunächst dadurch, daß wir ein stärkeres Parallelenaxiom verwenden. Das bewirkt einerseits, daß die Aussage von Axiom V mit Hilfe der Axiome I–IV bewiesen werden kann, falls jede Gerade mindestens 4 Punkte enthält [K][1]). Andrerseits können wir auf ein zusätzlich bei HILBERT und LENZ auftretendes Axiom verzichten, da sich beweisen läßt:

1.4. *Wenn die Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ in der Ebene e liegen, dann liegt ihre Verbindungsgerade p_1p_2 ganz in e.*

Nach **I** enthält e nämlich mindestens einen Punkt p_3, der nicht auf p_1p_2 liegt. Nach **IV** gibt es dann durch p_3 eine Parallele g zu p_1p_2. Wegen $g \neq p_1p_2$ muß es eine Ebene $\bar{e}$ geben, die g und p_1p_2 enthält. Die Punkte p_i $(i = 1,2,3)$ bilden ein Dreieck und liegen sowohl in e als auch in $\bar{e}$. Damit folgt $e = \bar{e}$ und wegen $p_1p_2 \subset \bar{e}$ ergibt sich die Behauptung.

1.5. Im folgenden sei nun ein affiner Raum A fest vorgegeben; P sei die Menge seiner Punkte und z eine feste Gerade.

§ 2. Der Fundamentalsatz der affinen Geometrie

2.1. Die von uns benötigte Fassung des Fundamentalsatzes der affinen Geometrie formulieren wir mit Hilfe gewisser Abbildungen, die wir Deformationen nennen.

---

[1]) In Anbetracht dieses Sachverhalts könnte man fragen, ob das Wesentliche an unserer Konstruktion nicht schon deutlich würde, wenn man sich auf affine Räume beschränkt, deren Geraden mindestens 4 Punkte enthalten und damit auf den Nachweis des Axioms V verzichten könnte. Die in diesem Axiom enthaltene Aussage, die wir in § 4 beweisen, macht aber einerseits den Unterschied zwischen der ebenen und der räumlichen Situation ganz besonders deutlich und erlaubt andererseits einen sehr einfachen Nachweis des Parallelenaxioms (s. 3.7.).

2.2. Eine *einfache Deformation* $\varphi = h_l$ ist die Parallelprojektion einer Ebene e in A auf eine in e liegende Gerade l ($\notin h$); e ist diejenige Ebene durch l, die Geraden aus h enthält. Wie ein [F] bezeichnet h eine Äquivalenzklasse paralleler Geraden. Der Definitionsbereich Def $\varphi = e$ von φ besteht aus den Punkten p in A, für die gilt: Die Gerade in h durch p schneidet l. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ einfache Deformationen, derart daß das Ziel von φ_i im Definitionsbereich von φ_{i+1} enthalten ist, so ist die Zusammensetzung $\varphi = \varphi_n \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$ eine Abbildung des Definitionsbereiches von φ_1 auf das Ziel von φ_n. Eine solche Abbildung wollen wir *zusammengesetzte Deformation* oder kurz *Deformation* nennen. Das Ziel der zusammengesetzen Deformation φ ist natürlich das Ziel von φ_n.

2.3. (Fundamentalsatz der affinen Geometrie)

(a) *Zu* $p_1, p_2 \in P$ *mit* $p_1 \neq p_2$ *und* $p_1', p_2' \in z$ *gibt es einfache Deformationen* χ, ψ *mit*

(2.1) $\quad p_i' = (\psi \cdot \chi)(p_i)$

für $i = 1,2$.

(b) *Sind* $\varphi, \bar{\varphi}$ *Deformationen* und p_1, p_2 Punkte *mit* $p_1 \neq p_2$ und

(2,2) $\quad \varphi(p) = \bar{\varphi}(p)$

für $p = p_1$ *und* $p = p_2$, *so gilt* (2.2) *für alle* $p \in p_1 p_2$.

2.4. Der in [F] skizzierte Beweis für die dortige Fassung des Fundamentalsatzes läßt sich auch in einem affinen Raum führen. Die hier benötigte Verschärfung ergibt sich dann aus folgender Tatsache:

2.5. *Ist* φ *eine Deformation mit Ziel* z *und* g *eine Gerade im Definitionsbereich von* φ, *so gibt es einfache Deformationen* χ, ψ *mit*

(2.3) $\quad (\psi \cdot \chi)(p) = \varphi(p)$

für alle $p \in g$.

2.6. Im Fall $g \neq z$ ist das die Behauptung von Satz 8.1 in [LV] Kap. I. Der dort für eine projektive Ebene geführte Beweis läßt sich ohne weiteres auf unsere Situation in einem affinen Raum übertragen. Sieht man diesen Beweis genau an, so ergibt sich, daß die Aussage nur noch unter folgenden zusätzlichen Voraussetzungen zu zeigen ist:

(2.4) $\quad g = z,$

(2.5) $\quad \varphi = \varphi_3 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$

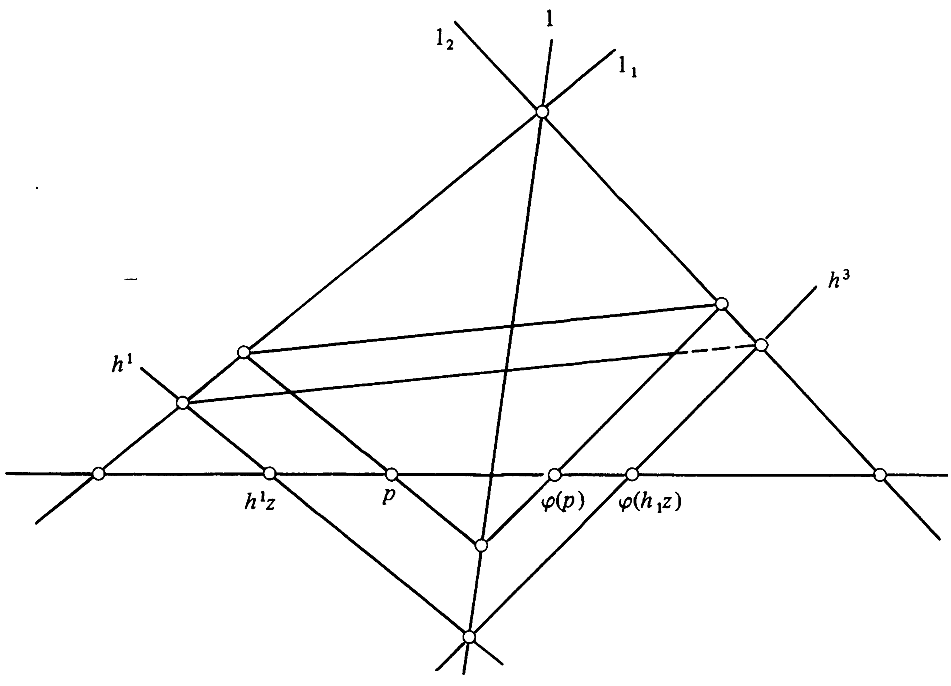
mit einfachen Deformationen φ_i $(i = 1,2,3)$ und[2])

(2.6) $\quad l_1 z \neq l_2 z,$

wobei l_i das Ziel von φ_i $(i = 1,2,3;\ l_3 = z)$ bezeichnet. Darüberhinaus können wir noch ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß φ die Gerade z bijektiv auf sich abbildet. Setzen wir nun

(2.7) $\quad \varphi_i = h^i_{l_i},$

so haben wir $z \notin h^1$ und $l_i \notin h^{i+1}$ für $i = 1,2$. Ist dann h^1 eine Gerade in h^1, die z schneidet, h^3 die Gerade durch $\varphi(h^1 z)$ in h^3 und l die Verbindungsgerade von $l_1 l_2$ und $h^1 h^3$ (Figur 1)



Figur 1

so gilt

(2.8) $\quad \varphi(p) = (h^3_z \cdot h^1_l)(p)$

---

[2]) Sind g und h verschiedene Geraden einer Ebene in A, so bezeichnet gh ihren eigentlichen oder uneigentlichen Schnittpunkt.

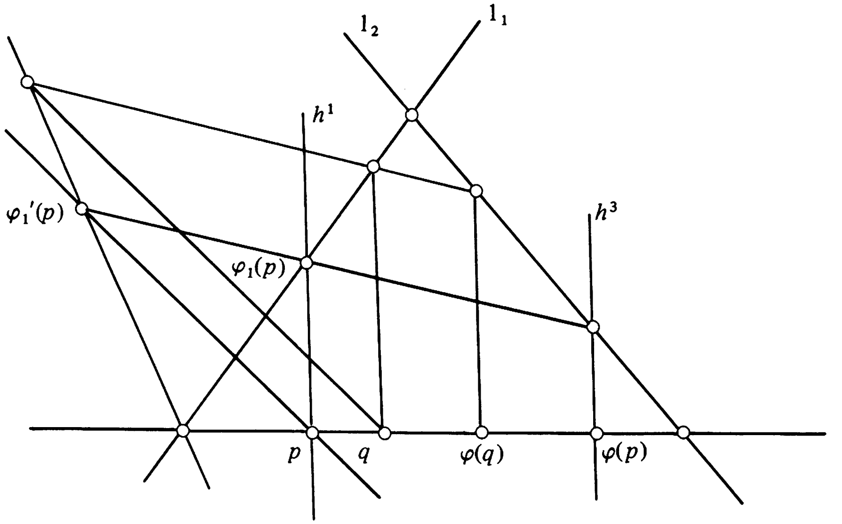
für alle $p \in g$ jedenfalls dann, wenn h^1 und h^3 nicht parallel sind. Im Falle

(2.9) $h^1 = h^3$

aber kann man φ_1 zunächst so zu einer einfachen Deformation φ_1' abändern, daß φ_1' und φ_3 verschiedene Projektionsrichtungen haben, aber trotzdem

(2.10) $(\varphi_3 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1')(p) = \varphi(p)$

für alle $p \in z$ gilt (Figur 2; vgl. auch Hilfssatz 8.2 in [LV] Kap. I).



Figur 2

§ 3. Punkte, Geraden, Ebenen

3.1. Wir beschreiben nun die Grundelemente des affinen Raumes $\mathfrak{A}$, der den gegebenen affinen Raum A als Hyperebene enthalten soll.

3.2. Als Punkte von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Elemente von

(3.1) $\mathfrak{P} = P \times z$.

Wie in [F] bezeichnen wir mit Spur und Höhe die Projektionen von $\mathfrak{P}$ auf den ersten bzw. zweiten Faktor, d.h. die Abbildungen $(p,p') \to p$ bzw. $(p,p') \to p'$ von $\mathfrak{P}$ auf P.

3.3. Als Ebenen von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Teilmengen $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{P}$, für die es eine Gerade g in A („vertikale" Ebenen) mit

(3.2) $\mathfrak{e} = g \times z$

oder eine Deformation φ mit Ziel z und

(3.3) $\quad \mathfrak{e} = \langle\varphi\rangle = \{(p,\varphi(p)) \mid p \in \operatorname{Def} \varphi\}$

gibt[3].

3.4. Als Geraden von $\mathfrak{A}$ nehmen wir die Teilmengen $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{P}$, für die es einen Punkt $p \in P$ („vertikale" Geraden) mit

(3.4) $\quad \mathfrak{g} = \{p\} \times z$

oder eine Gerade g in A und eine Deformation φ mit $g \subseteq \operatorname{Def} \varphi$ und

(3.5) $\quad \mathfrak{g} = g \times z \cap \langle\varphi\rangle$

gibt.

3.5. Ohne Mühe weist man mit diesen Festsetzungen das Reichhaltigkeitsaxiom (Axiom I in **1.2.**) nach, sowie analog zu [F] die Axiome von der Existenz der Verbindungsgeraden und der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden und Verbindungsebenen.

3.6. Den Nachweis der Existenz der Verbindungsebenen dreier Punkte (p_i,p_i') $(i = 1,2,3)$ in $\mathfrak{A}$ können wir gegenüber [F] sogar etwas vereinfachen, da wir den Fundamentalsatz in einer schärferen Fassung zur Verfügung haben. Dabei können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß die p_i nicht auf einer Geraden liegen und die p_i' nicht alle gleich sind, also etwa

(3.6) $\quad p_1' \neq p_2'$

gilt. Wir wählen dann eine Deformation φ_1 mit

(3.7) $\quad \varphi_1(p_i) = p_1'$

für $i = 1,2$; das ist nach dem Fundamentalsatz möglich. Aus (3.6) folgt, daß φ_1 die Gerade p_1p_2 bijektiv auf z abbildet. Also gibt es $p_3'' \in p_1p_2$ mit

(3.8) $\quad \varphi_1(p_3'') = p_3'$.

Bezeichnet nun φ_2 die einfache Deformation mit Ziel p_1p_2 die p_2 auf p_3'' abbildet ist offensichtlich $\langle\varphi_1 \circ \varphi_2\rangle$ die Verbindungsebene der (p_1,p_1').

3.7. Sieht man sich nun den Nachweis des Parallelenaxioms in [F] § 7 an, so stellt man fest, daß er sich ohne Schwierigkeiten auf unsere Situation übertragen läßt. Für einen Teil der Eindeutigkeitsaussage (s. **7.5.** in [F]) benötigt man

---

[3]) Falls man Abbildungen als Paarmengen auffaßt, ist $\langle\varphi\rangle$ nichts anderes als die Deformation φ.

jedoch das Axiom über den Durchschnitt von Ebenen in einer leicht verschärften Fassung; das wird im folgenden Paragraphen ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms nachgewiesen.

§ 4. Das Axiom über den Durchschnitt von Ebenen

4.1. Wir wollen nun zeigen, daß zwei Ebenen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ unter den in **1.2. V.** genannten Voraussetzungen nicht nur mindestens zwei Punkte, sondern eine ganze Gerade gemeinsam haben.

4.2. Sind die Ebenen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ beide vertikal, so ist das trivial. Ist

(4.1) $\quad \mathfrak{e}_1 = g \times z$

für eine Gerade g in A und

(4.2) $\quad \mathfrak{e}_2 = \langle\varphi\rangle,$

so genügt es zu zeigen, daß g im Definitionsbereich e von φ liegt. Da $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ mindestens einen Punkt (p,p') gemeinsam haben, liegt mindestens der Punkt p in $g \cap e$. Nun soll es nach Voraussetzung aber in $\mathfrak{e}_2$ eine Gerade $\bar{\mathfrak{g}}$ geben, die parallel zu einer Geraden in $\mathfrak{e}_1$ ist. Aus der Definition der Parallelität folgt leicht (vgl. [F] **5.4.**), daß

(4.3) $\quad \bar{g} = \text{Spur}\ (\bar{\mathfrak{g}})$

parallel zu g sein muß. Im Falle

(4.4) $\quad g = \bar{g}$

sind wir fertig; andernfalls ist e die Verbindungsebene von p und $\bar{g}$ und damit die einzige Ebene, die g und $\bar{g}$ enthält.

4.3. Für das Weitere können wir nun voraussetzen

(4.5) $\quad \mathfrak{e}_1 = \langle\varphi\rangle$

für i = 1,2. Darüber hinaus haben wir einen Punkt $(p,p') \in \mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2$ und Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}_i$ (i = 1,2) mit $\mathfrak{g}_1 \parallel \mathfrak{g}_2$. Setzen wir

(4.6) $\quad g_i = \text{Spur}\ (\mathfrak{g}_i)$

für i = 1,2, so ist $g_1 \parallel g_2$, und es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(4.7) $\quad g_1 = g_2$

und der gegenteilige Fall.

4.4. Gilt (4.7), so können wir ohne wesentliche Einschränkung $p \notin g_1$ voraussetzen. φ_1 und φ_2 haben dann den gleichen Definitionsbereich, nämlich die von p und g_1 in A aufgespannte Ebene e. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem folgenden Hilfssatz

4.5. *Haben zwei Deformationen φ_1 und φ_2 mit dem gleichen Definitionsbereich e und dem gleichen Ziel l für einen Punkt $p \in e$ den gleichen Bildpunkt, so gilt*

$$(4.8) \qquad \varphi_1(q) = \varphi_2(q)$$

für alle Punkte einer Geraden in e.

Dazu sei g eine Gerade in e durch p, die weder durch φ_1 noch durch φ_2 in einen Punkt abgebildet wird[4]). Dann wählen wir einfache Deformationen φ_i' $(i = 1,2)$ mit Definitionsbereich e, Ziel g und

$$(4.9) \qquad \varphi_i = \varphi_i \circ \varphi_i',$$

eine von g verschiedene Gerade l' in e durch p, aber nicht durch $\varphi_i(p)$, und eine Deformation φ, die l bijektiv auf l' und insbesondere

$$(4.10) \qquad \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$$

auf p abbildet. Aus **2.5.** folgt nun zunächst die Existenz von einfachen Deformationen ψ_{ij} $(i,j = 1,2)$ mit

$$(4.11) \qquad (\psi_{i1} \circ \varphi_{i2})(q) = (\varphi \circ \varphi_i)(q)$$

für alle $q \in g$ und wegen

$$(4.12) \qquad (\psi_{i_2} \circ \psi_{i1})(p) = p$$

findet man mit Hilfe des Satzes von Desargues sogar einfache Deformationen ψ_i $(i = 1,2)$ mit

$$(4.13) \qquad \psi_i(q) = (\varphi \circ \varphi_i)(q)$$

für alle $q \in g$, d.h.

$$(4.14) \qquad (\psi_i \circ \varphi_i')(q) = (\varphi \circ \varphi_i)(q)$$

für alle $q \in e$.

---

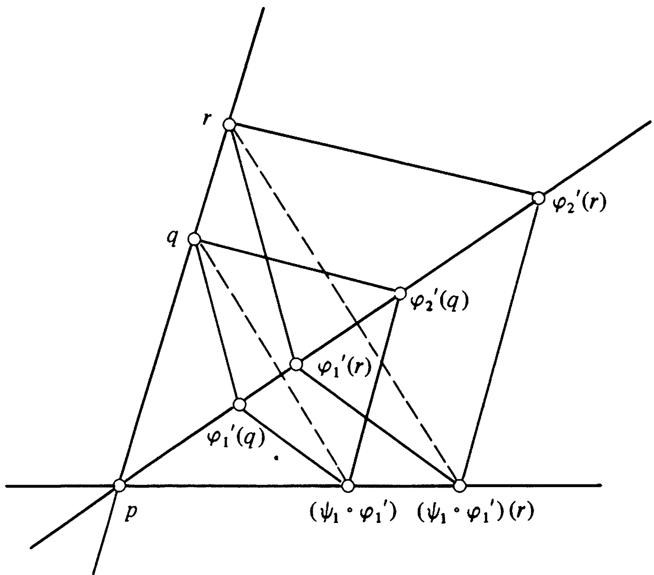
[4]) Die Existenz einer solchen Geraden können wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, denn andernfalls wäre entweder φ_1 oder φ_2 eine konstante Abbildung und die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß das Urbild eines Punktes bezüglich einer Deformation mindestens eine Gerade enthält, wenn es nicht leer ist.

Auf Grund von (4.14) und der Wahl von φ genügt es nun statt (4.8) die Existenz einer Geraden h in e mit

(4.15) $(\psi_1 \circ \varphi_1')(q) = (\psi_2 \circ \varphi_2')(q)$

für alle Punkte $q \in h$ zu zeigen.

Bilden ψ_1 und ψ_2 die Gerade g bijektiv auf l' ab, so ergibt sich das aus Figur 3 durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Desargues:



Figur 3

Bildet aber etwa ψ_1 die Gerade g konstant auf p ab, so gilt (4.15) für alle Punkte q der Geraden h, die durch φ_2' auf p abgebildet wird. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

4.6. Nun haben wir die Behauptung in **4.1.** noch unter den in **4.3.** genannten Voraussetzungen zu zeigen, falls (4.7) nicht gilt. Dabei können wir noch $p \notin g_i$ für $i = 1,2$ voraussetzen. Mit g gezeichnen wir dann die Parallele zu g_i ($i = 1$ oder 2) durch p; sie liegt offensichtlich in den Definitionsbereichen von φ_1 und φ_2 und es genügt zu zeigen

(4.16) $\varphi_1(q) = \varphi_2(q)$

für alle $q \in g$.

Da $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ parallel sind, haben wir eine Deformation φ mit Ziel z und $\mathfrak{g}_i \subset \langle \underline{\varphi} \rangle$ für $i = 1,2$.

4.7. Zunächst wollen wir annehmen, daß φ die Gerade g_1 – und damit auch g_2 – bijektiv auf z abbildet. Dann seien p_i der Punkt auf g_i mit

$$(4.17) \quad \varphi_i(p_i) = p'$$

und φ_i' die einfache Deformation mit Ziel g_i, die p auf p_i abbildet ($i = 1{,}2$). Da nun gilt

$$(4.18) \quad (\varphi \circ \varphi_i')(q) = \varphi_i(q)$$

für $q \in g_i$ und $q = p$, haben wir

$$(4.19) \quad \varphi \circ \varphi_i' = \varphi_i$$

für $i = 1{,}2$. Andererseits folgt aus dem kleinen Satz von Desargues

$$(4.20) \quad (\varphi \circ \varphi_1')(q) = (\varphi \circ \varphi_2')(q)$$

für alle $q \in g$ und zusammen mit (4.19) liefert das die Behauptung (4.16).

4.8. Bildet φ jedoch die Geraden g_i und g_2 in einen Punkt ab, so folgt, daß auch φ_i die Gerade g_i und damit jede zu g_i parallele Gerade in einen Punkt abbildet. Also haben wir nun

$$(4.21) \quad \varphi_i(q) = p'$$

für alle $q \in g$ und $i = 1{,}2$. Das ergibt wiederum (4.16).

§ 5. A als Hyperebene in $\mathfrak{A}$

5.1. Für jedes $p_0' \in z$ induziert die Abbildung $p \to (p,p_0')$ eine Einbettung von P in $\mathfrak{P}$, die Geraden in Geraden und Ebenen in Ebenen überführt. Wir wollen noch zeigen, daß A dabei sogar als Hyperebene in $\mathfrak{A}$ aufgefaßt werden kann.

5.2. Dabei legen wir folgende Definition zugrunde: Ein affiner Unterraum A eines affinen Raumes $\mathfrak{A}$ wird Hyperebene von $\mathfrak{A}$ genannt, wenn jede Gerade in $\mathfrak{A}$, die A nicht trifft, parallel ist zu einer Geraden in A.

5.3. Sei nun p_0' ein fester Punkt in z und $\mathfrak{g}$ eine Gerade in $\mathfrak{A}$, die keine Punkt (p,p_0') mit $p \in P$ enthält. $\mathfrak{g}$ muß dann die Form (3.5) haben, wobei φ die Gerad

$$(5.1) \quad g = \text{Spur}\,(\mathfrak{g})$$

konstant auf einen Punkt p' abbildet. Ist φ_0 dann eine Deformation, die g konstant auf p_0' abbildet, so ist

$$(5.2) \quad \mathfrak{g}_0 = g \times z \cap \langle \varphi_0 \rangle$$

eine Parallele zu $\mathfrak{g}$ in A.

Literatur

[F] RUDOLF FRITSCH, Synthetische Einbettung desarguesscher Ebenen in Räume, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 21 (1974), 237–249.

[K] IVAN KOLÁR, On LENZ's Problem on the Independence of the Axioms of Affine Space, Commentationes math. Univ. Carolinae 6 (1965), 339–346.

[LG] HANFRIED LENZ, Grundlagen der Elementarmathematik, 2., überarb. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften – Berlin 1967.

[LV] HANFRIED LENZ, Vorlesungen über projektive Geometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G. – Leipzig 1965.