

MITTEILUNGEN
aus dem
MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Heft 163

Coxeter - Festschrift

Teil I

GIESSEN 1984

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS
ISSN 0373 - 8221 CODEN: MMUGAU

INHALTSVERZEICHNIS

Seidel, J.J.: Polytopes and non-Euclidean geometry	1
Timmesfeld, F.G.: On the "non-existence" of flag-transitive triangle geometries	19
Wills, J.M.: Platonic manifolds	45
Aigner, M.: Uses of the diagram lattice	61
André, J.: Über Kennzeichnungen zweifach transitiver Permutationsgruppen	79
Arnold, H.-J.: Fernraumverbände schwach affiner Geometrien	83
Artmann, B.: Hipposos und das Dodekaeder	103
Batten, L.M.: Affinely and projectively extendable affine subplanes	123
Baumann, B.: Symmetrische Singer-Zyklen über Körpern der Charakteristik 2	135
Bessenrodt, C; Brungs, H.H.; Törner, G.: Prime ideals in right chain rings	141
Beth, Th.; Fumy, W.; Rieß, H.P.: Der wunderschöne Oktaden-Generator	169
Betten, D.: Die 12 lateinischen Quadrate der Ordnung 6	181
Beutelspacher, A.: Embedding the complement of a Baer subplane or a unital in a finite projective plane	189
Braunss, G.: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ is the Lie algebra of a damped oscillator	203
Braunss, G.; Ruppenthal, H.: A note on finite-rank Weyl couples	211
Buset, D.: Construction of a locally icosahedral graph	221

ENERGIETETRAEDER?^{*}

(Energie-Impuls-Räume und -Flächen)

Rudolf Fritsch

1. Fragestellung

In der Kernphysik (s. [2], [8], [9]) und in der Elementarteilchenphysik (s. [1]) fragt man, wie sich eine gegebene Gesamtenergie $E > 0$ auf endlich viele (mindestens zwei) Teilchen fester Massen m_0, \dots, m_n verteilen kann, die sich unter der Bedingung bewegen, daß der Gesamtimpuls $\sum p_j$ verschwindet. Folgende Feststellungen sind leicht einzusehen:

- Kein Teilchen kann die Gesamtenergie alleine tragen, denn dann würden alle anderen Teilchen in Ruhe sein, was der Impulsbedingung widerspricht.
- Für die Energie $E_j = (2m_j)^{-1} \cdot p_j^2$ des j -ten Teilchens besteht die obere Schranke

$$(1) \quad E_j \leq (1 - m_j/m) \cdot E,$$

wobei m die Gesamtmasse des Systems bezeichnet. d.h.

$$m = \sum m_j.$$

(Das beweisen wir zusammen mit der folgenden Aussage in Abschnitt 3.1)

* Ich danke dem Rechenzentrum des Max-Planck-Institutes für Biochemie in Planegg-Martinsried für die Möglichkeit zur Herstellung dieses Manuskriptes.

- Die angegebene Schranke für die Energie E_j des j -ten Teilchens ist scharf; sie wird genau dann angenommen, wenn sich alle anderen Teilchen in genau entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.
- Wenn sich nur zwei Teilchen bewegen, etwa das j -te und das k -te, so ist die Energieverteilung eindeutig bestimmt:

$$(2) \quad E_j = m_k \cdot (m_j + m_k)^{-1} \cdot E, \quad E_k = m_j \cdot (m_j + m_k)^{-1} \cdot E.$$

- Notwendig und hinreichend dafür, daß eine gegebene Aufteilung $E = \sum E_j$ der Gesamtenergie durch entsprechende Impulsvektoren realisiert werden kann, ist das Bestehen der Ungleichung

$$2 \cdot \max \{ \sqrt{m_j E_j} \} \leq \sum \sqrt{m_j E_j}.$$

(Die Zahlen $\sqrt{m_j E_j}$ stellen - bis auf einen gemeinsamen Faktor $\sqrt{2}$ - die Beträge der Impulsvektoren P_j dar; dafür, daß $\sum P_j = 0$ realisiert werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die größte dieser Zahlen kleiner-gleich der Summe der übrigen ist.)

Zur genaueren Untersuchung der möglichen Energieverteilungen kann man nun die relativen Energien E_j/E als baryzentrische Koordinaten von Punkten in einem n -Simplex ansehen. Als *Energie-Impuls-Raum* eines n -Simplexes wird die Menge der Punkte bezeichnet, die mögliche Energieverteilungen darstellen, d.h. deren baryzentrische Koordinaten (y_0, \dots, y_n) der Ungleichung

$$(3) \quad 2 \cdot \max \{ \sqrt{m_i y_i} \} \leq \sum \sqrt{m_i y_i} .$$

genügen; sein Rand ist eine geschlossene Fläche, die sog. *Energie-Impuls-Fläche* des Simplexes. (Man beachte, daß diese Begriffe nur bei Vorgabe von festen Massen m_0, \dots, m_n definiert sind.)

Durch geschickte Wahl eines solchen Simplexes sind möglicherweise weitere Einsichten zu gewinnen. Für den Fall $n=2$ wurde das "Energiedreieck" definiert; es handelt sich um das bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte Dreieck mit den Höhen $m/(m-m_i)$. Dabei ergibt sich als Energieraum die Inkreisfläche (s.[1] für den Fall von drei gleichen Massen und [2] für den allgemeinen Fall. Es ist vielleicht bemerkenswert, daß der Inkreis des so konstruierten Dreiecks immer den Radius $\frac{1}{2}$ hat.)

In [8] und [9] hat D. KAMKE die physikalische Situation von vier Teilchen betrachtet. Was hierbei aber physikalisch wünschenswert ist, ist mathematisch leider nicht unmittelbar klar oder sogar unmöglich. Man hat den Energie-Impuls-Raum eines Tetraeders zu betrachten. Wenn ein Teilchen in Ruhe ist, liefern die noch möglichen Energieverteilungen Punkte in einem Seitendreieck des Tetraeders. Dieses läßt sich als affines Bild des zu der entsprechenden 3-Teilchen-Situation gehörenden Energiedreieckes auffassen, die möglichen Energieverteilungen füllen also das affine Bild eines Kreises, d.h. eine Ellipse, aus. Gesucht wäre nun ein "Energietetraeder", bei dem diese vier Ellipsen Kreise sind, dann notwendigerweise die Inkreise der Seitendreiecke.

Insbesondere müssen sich also diese Inkreise paarweise berühren, was nicht bei jedem Tetraeder der Fall ist. Tetraeder mit dieser Eigenschaft heißen Tangententetraeder und sind in [6] ausführlich beschrieben. Im folgenden diskutieren wir zunächst einen Ansatz über die Raumhöhen und zeigen, daß man auf diese Weise zwar ein Tangententetraeder erhält, daß aber die Energie-Impuls-Fläche dessen Rand im allgemeinen nicht in den Inkreisen der Seitendreiecke schneidet. Das tritt nur dann ein, wenn alle vier beteiligten Massen gleich sind; in diesem Fall können wir die Energie-Impuls-Fläche ganz explizit beschreiben. Bei ungleichen Massen stellt sich heraus, daß es bis auf Ähnlichkeit (und Spiegelung) höchstens eine Möglichkeit für die Definition eines Tetraeders der gesuchten Art gibt; sie ist allerdings mit dem Schönheitsfehler behaftet, daß die vorgegebenen Massen nicht zu unterschiedlich sein dürfen. Ob diese Einschränkung physikalisch relevant ist, vermögen wir nicht festzustellen.

Die Anregung, mich mit dieser Thematik zu befassen, verdanke ich einem Brief von Herrn Coxeter, der mich nach der Historie der algebraischen Charakterisierung von Tangententetraedern fragte (die Antwort findet sich in [6]), und einem Brief von Herrn Tietz (Hannover), der mich auf die physikalische Bedeutung der Sache aufmerksam machte. Herrn Süßmann (Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München) danke ich für die Erklärung des physikalischen Hintergrundes und Herrn Kamke (Institut für Experimentalphysik der Ruhr-Universität Bochum) für den Hinweis, daß da mathematisch noch etwas offen ist, und für Vorschläge, die Arbeit möglichst auch für Physiker lesbar zu machen.

2. Ergebnisse

2.1 Tangententetraeder aus vorgegeben Höhen

Wie im Fall des Dreiecks, so lassen sich auch für ein Tetraeder die (Raum-) Höhen nicht beliebig vorschreiben. Es gilt ebenfalls eine Art "Dreiecksungleichung":

Satz 1 - Vier positive reelle Zahlen können genau dann als die Höhen eines Tetraeders auftreten, wenn der Kehrwert der kleinsten unter ihnen kleiner ist als die Summe der Kehrwerte der übrigen.

Das liegt daran, daß sich beim Tetraeder die Höhen umgekehrt wie die Flächen der Seitendreiecke verhalten und daß für diese Flächen die entsprechende notwendige und hinreichende Bedingung gilt [5]. Durch vier Größen ist ein Tetraeder im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Zu jeder Vorgabe von Höhen, die den angegebenen Bedingungen genügen, gibt es eine ganze Schar von Tetraedern, jedoch gilt:

Satz 2 - In jeder Schar von Tetraedern mit gleichen Höhen gibt es bis auf (gleichsinnige oder ungleichsinnige) Kongruenz genau ein Tangententetraeder.

Dieser Satz stellt das mathematische Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit dar und wird in Abschnitt 3.3 bewiesen. Den Schlüssel dazu bildet eine andere Charakterisierung der Tangententetraeder [6]:

Satz, 3 - Die Tangententetraeder sind genau diejenigen

Tetraeder, deren Ecken Mittelpunkte von vier sich paarweise (von außen) berührenden Kugeln sind.

Die vier Kugeln und ein Tangententetraeder bestimmen sich gegenseitig eindeutig; wir nennen die Kugeln deshalb *erzeugende* Kugeln des Tangententetraeders. Sie lassen sich jedoch nicht beliebig vorgeben, im Gegensatz zur analogen Situation eine Dimension niedriger. In einer Ebene kann man drei Kreise immer so zusammenschieben, daß sie sich paarweise (von außen) berühren. Dementsprechend kann man zwar immer drei Kugeln im Raum zur paarweisen Berührung bringen, dann darf aber eine vierte Kugel, die diese drei gleichzeitig berühren soll, nicht so klein sein, daß sie durch das von den ersten drei Kugeln gebildete Loch fällt. Die genaue Bedingung an vier Kugeln, die sich paarweise von außen berühren, ergibt sich aus dem sog. Kreissatz von DESCARTES (s. [6]); sie läßt sich mit Hilfe der *Krümmungen* (= reziproken Radien) der Kugeln beschreiben.

Satz 4 - *Vier positive reelle Zahlen $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ können genau dann als die Krümmungen der erzeugenden Kugeln eines Tangententetraeders auftreten, wenn gilt:*

$$(4) \quad (\sum \epsilon_j)^2 - 2 \cdot \sum \epsilon_j^2 > 0.$$

Wir betrachten nun ein Tangententetraeder mit den Ecken A_0, A_1, A_2, A_3 und den Höhen h_0, h_1, h_2, h_3 : es seien r_0, r_1, r_2, r_3 die Radien und $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die Krümmungen der erzeugenden Kugeln. Eine leichte Rechnung ergibt.

Satz 5 - Der Berührungspunkt der erzeugenden Kugeln auf der Kante $A_j A_k$ - das ist auch der Berührungspunkt der Inkreise der an dieser Kante anliegenden Seitendreiecke - hat die baryzentrischen Koordinaten

$$\begin{aligned} y_j &= r_k \cdot (r_j + r_k)^{-1} = \varepsilon_j \cdot (\varepsilon_j + \varepsilon_k)^{-1} \quad , \\ y_k &= r_j \cdot (r_j + r_k)^{-1} = \varepsilon_k \cdot (\varepsilon_j + \varepsilon_k)^{-1} \quad \text{und} \\ &0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

($0 \leq j \neq k \leq 3$).

Für das Volumen V dieses Tangententetraeders gilt [6]:

$$9 V^2 = r_0^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot [(\sum \varepsilon_i)^2 - (n-1) \sum \varepsilon_i^2] .$$

Für die Fläche F_j , $0 \leq j \leq 3$ der der Ecke A_j gegenüberliegenden Seite haben wir entsprechend:

$$F_j^2 = \prod r_i^2 \cdot \sum \varepsilon_j \varepsilon_k .$$

wobei für die Indizes gilt: $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j < k \leq 3$, $i, j, k \neq j$. Aus der Volumenformel für Pyramiden

$$V = \frac{1}{3} \cdot F_j \cdot h_j$$

ergeben sich nun die entscheidenden Beziehungen zwischen den Höhen und den Krümmungen der erzeugenden Kugeln des Tangententetraeders:

$$(5) \quad h_j^2 \cdot \varepsilon_j^2 \cdot \sum \varepsilon_j \varepsilon_k = (\sum \varepsilon_i)^2 - 2 \cdot \sum \varepsilon_i^2 ,$$

wobei die Summationen auf der rechten Seite auch den Index $i = j$ mit erfassen; damit ist die Größe

$$(6) \quad r_j = h_j^2 \cdot \varepsilon_j^2 \cdot \sum \varepsilon_j \varepsilon_k .$$

unabhängig von l .

Auf den Gleichungen (5) beruht unser Beweis von Satz 2. Hier halten wir noch eine für sich selbst interessante Folgerung fest, die wir in Abschnitt 3.2 begründen werden.

Satz 6 - *Bei einem Tangententetraeder ist die größenmäßige Anordnung der vier Höhen die gleiche wie die der entsprechenden Radien der erzeugenden Kugeln, d.h.*

$$h_1 \leq h_{1'} \iff r_1 \leq r_{1'}$$

für alle Paare $(1,1')$ mit $0 \leq 1,1' \leq 3$.

Bemerkung - Aus Satz 6 ergibt sich die Behauptung von Satz 2 unmittelbar für die Scharen der Tangententetraeder, bei denen alle vier Höhen gleich lang sind. Die Gleichheit der Höhen impliziert die Gleichheit der Radien der erzeugenden Kugeln und damit die Gleichheit der Kanten, die sich ja als die Summe von je zwei Radien darstellen lassen. Also ist ein Tangententetraeder mit gleichen Höhen notwendig regulär und durch die Höhen eindeutig bestimmt.

2.2 KAMKE's Energietetraeder.

In [8] betrachtet D. KAMKE zu vier Teilchen mit vorgegebenen Massen m_0, m_1, m_2, m_3 und Massensumme $m = \sum m_i$ die Tangententetraeder mit den Höhen $m/(m-m_i)$ als Energietetraeder. Die Bedingung aus Satz 1 ist ja offensichtlich erfüllt: Ist etwa m_3 die kleinste der beteiligten Massen, so ist $m/(m-m_3)$ die kleinste der Höhen und es gilt

$$(m-m_3)/m < (m-m_2)/m + (m-m_1)/m + (m-m_0)/m = (2m+m_3)/m.$$

Im allgemeinen schneidet der Energie-Impuls-Raum aus den Seitendreiecken dieses Tetraeders jedoch nicht die Inkreise aus; das ist dann und nur dann der Fall, wenn die vier Massen alle gleich sind. Damit scheidet leider auch der in

[9] betrachtete, physikalisch interessante Fall

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3$$

aus. Wegen der durch die Gleichungen (2) gegebenen baryzentrischen Koordinaten der Energieverteilungen auf den Kanten des Tetraeders ergibt sich diese Behauptung unmittelbar aus dem in Abschnitt 3.4 bewiesenen

Satz 7 - *Die Punkte mit den baryzentrischen Koordinaten*

$$\begin{aligned} m_k \cdot (m_j + m_k)^{-1} & \text{ an der } j\text{-ten Stelle,} \\ m_j \cdot (m_j + m_k)^{-1} & \text{ an der } k\text{-ten Stelle und} \\ 0 & \text{ sonst} \end{aligned}$$

sind genau dann die Berührungspunkte der Inkreise der Seitendreiecke des Tangententetraeders mit den Höhen $m/(m-m_i)$. wenn alle m_i gleich sind, d.h. wenn das Tangententetraeder regulär ist.

Im regulären Fall läßt sich der Energie-Impuls-Raum noch besser beschreiben. Das liegt vor allem daran, daß man dann ein durch das Tetraeder bestimmtes geeignetes Koordinatensystem zur Verfügung hat. Die drei Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der drei Gegenkantenpaare schneiden sich im Schwerpunkt eines jeden Tetraeders: bei einem regulären Tetraeder stehen sie paarweise aufeinander senkrecht und ihr Durchschnitt mit dem Tetraeder wird durch den Schwerpunkt halbiert. Wir wählen deshalb den Schwerpunkt als Ursprung und die Ortsvektoren zu den Mittelpunkten der drei von der Ecke A_0 ausgehenden Kanten als Basis. Die Umrechnung von baryzentrischen Koordinaten in kartesische Koordinaten und umgekehrt wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$x_k = 1 - 2 \cdot \sum y_j + 2y_k ,$$

$$y_0 = \frac{1}{4} (1 + \sum x_k) , \quad y_j = \frac{1}{4} (1 + 2x_j - \sum x_k) :$$

dabei durchlaufen die Indizes j, k , auch als Summationsindizes, die Werte $1, 2, 3$. Die Ecken des Tetraeders haben dann die Koordinatendarstellung

$$A_0 = \begin{pmatrix} j \\ j \\ j \end{pmatrix} , \quad A_1 = \begin{pmatrix} j \\ -j \\ -j \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} -j \\ j \\ -j \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} -j \\ -j \\ j \end{pmatrix} .$$

Die Punkte des Tetraeders sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) den Ungleichungen

$$-1 \leq \sum x_j \leq 1 + 2 \cdot \min\{x_j\}$$

genügen. Die Inkreise der Seiten des Tetraeders sind die Durchschnitte der Seiten mit der Einheitskugel

$$(7) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 ,$$

d.h. die Einheitskugel ist die *Kantenkugel* des Tetraeders [6], die Kanten sind Tangenten an die Einheitskugel. In Abschnitt 3.4 beweisen wir:

Satz 8 - *Bei gleichen Massen enthält der Energie-Impuls-Raum eines regulären Tetraeders den zum Tetraeder gehörenden Teil der Kantenkugel.*

Wie schon D. KAMKE bemerkt hat, gibt es auch außerhalb der Kantenkugel noch Punkte des Energie-Impuls-Raumes. Als Beispiel nennt er den Fall, in dem ein Teilchen die maximale Energie erhält. Nehmen wir das Teilchen mit dem Index 0 , so haben wir nach (1) als baryzentrische Koordinaten $y_0 = 3/4$.

$y_1=y_2=y_3=1/12$, also als kartesische Koordinaten
 $x_1=x_2=x_3=2/3$ mit $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4/3 > 1$. In Abschnitt 3.6
beweisen wir das scharfe Resultat:

Satz 9 - *Bei gleichen Massen besteht die Energie-Impuls-Fläche aus den Inkreisen der Seitendreiecke und aus den außerhalb der Kantenkugel liegenden regulären Punkten der Römerfläche*

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 = 2x_1 x_2 x_3 .$$

Die Römerfläche hat seit ihrer ersten Erwähnung durch J. STEINER [12, S.721,741] viele Mathematiker beschäftigt; eine neuere ausführliche Beschreibung (mit graphischer Darstellung) findet sich in [4, 8. Abschnitt]. Für unsere Zwecke ist wichtig, daß diese Fläche die Seitenebenen unseres Tetraeders in den Inkreisen der Seitendreiecke berührt und die Kantenkugel in diesen Inkreisen schneidet. Außerdem bemerken wir, daß

- der Ursprung eine singuläre Stelle der Vielfachheit 3 bildet,
- die sonstigen Punkte auf den Koordinatenachsen als singuläre Stellen der Vielfachheit 2 zur Fläche gehören,
- alle anderen Punkte der Fläche regulär sind und zum Tetraeder gehören.

2.3 Die Alternative.

Das Energiedreieck ist ähnlich zu dem Dreieck mit den Seiten m_0+m_1 , m_0+m_2 , m_1+m_2 : der Ähnlichkeitsfaktor bestimmt den Inkreisradius $\frac{1}{2}$. Ein Tetraeder, dessen Energie-Impuls-Fläche mit den Seitendreiecken die Inkreise gemeinsam hat, ist notwendig ein Tangententetraeder; die Radien seiner erzeugenden Kugeln verhalten sich nach (2) und Satz 5 wie die entsprechenden Massen:

$$r_j/r_k = m_j/m_k.$$

Daraus folgt

Satz 10 - Ein Tetraeder, dessen Energie-Impuls-Fläche in bezug auf vier Massen m_0 , m_1 , m_2 , m_3 mit den Seitendreiecken die Inkreise gemeinsam hat, ist ähnlich zu einem Tetraeder mit den Kanten m_j+m_k , $0 \leq j < k \leq 3$.

Allerdings gibt es ein solches Tetraeder nicht immer. Wenn es existiert, ist es sicher ein Tangententetraeder, da die Längensummen der drei Gegenkantenpaare gleich sind [6]. Die Massen spielen die Rolle der Radien der erzeugenden Kugeln, ihre Kehrwerte müssen also die Ungleichung (4) erfüllen. Aber hier reduziert sich nun der Fall, in dem von vier Teilchen eines in Ruhe ist, offensichtlich auf die Situation mit drei Teilchen; das entsprechende Seitendreieck ist ja ähnlich zu dem Energiedreieck der drei Teilchen. Also haben wir als Umkehrung von Satz 10

Satz 11 - Sind vier Massen m_0 , m_1 , m_2 , m_3 so gegeben,

daß

$$(8) \quad (\sum 1/m_j)^2 - 2 \cdot \sum 1/m_j^2 > 0$$

gilt, so schneidet die Energie-Impuls-Fläche des Tetraeders mit den Kanten $m_j + m_k$, $0 \leq j < k \leq 3$, die Seitendreiecke in den Inkreisen. \square

Wir schlagen deshalb vor, falls die Bedingung (8) erfüllt ist, als Alternative zu KAMKE's Energietetraeder das in Satz 11 beschriebene Tetraeder zu verwenden.

Bemerkungen - 1. Die Inkreise der Seitendreiecke dieses Tetraeders liegen auch auf einer Kantenkugel [6]. Um eine weitere Analogie zum ebenen Fall herzustellen, könnte man auf das Tetraeder noch eine Ähnlichkeitstransformation ausüben, die für die Kantenkugel den Radius $\frac{1}{2}$ erzwingt. Das bringt aber nichts, weil die Inkreise der Seitendreiecke dann im allgemeinen einen davon verschiedenen, echt kleineren Radius haben und weil der Energie-Impuls-Raum im Innern des Tetraeders ja nicht von einer Kugelfläche, also einer Quadrik, sondern - wie Satz 8 zeigt - von einer Fläche vierten Grades begrenzt wird.

2. Um die Bedingung (8) an die Massen etwas zu verstehen, überlegen wir, was passiert, wenn eine oder zwei der beteiligten Massen relativ klein im Vergleich zu den andern sind. Ist etwa m_0 sehr klein, so kann man gegenüber dem Kehrwert $1/m_0$ die anderen vernachlässigen und erhält einen offensichtlichen Widerspruch zu (8). Sind m_0 und m_1 beide klein, so kann man $1/m_2$ und $1/m_3$ vernachlässigen

und kommt zu der ebenfalls nicht erfüllbaren Ungleichung

$$-\left(\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_j}\right)^2 > 0 \quad . \quad \square$$

3. *Beweise*

3.1 Maximale Energie eines Teilchens.

Wir zeigen

$$(1_0) \quad E_0 \leq (1 - m_0/m) \cdot E \quad .$$

Dazu gehen wir aus von der offensichtlich richtigen Ungleichung

$$(9) \quad 0 \leq \sum m_j \cdot m_k \cdot (m_j^{-1} p_j - m_k^{-1} p_k)^2 \quad .$$

wobei über alle Paare (j, k) mit $1 \leq j < k \leq n$ summiert wird. Dieser Ansatz "fällt vom Himmel" (KAMKE), führt aber mathematisch am schnellsten zum Ziel; Physiker argumentieren lieber mit der inneren Energie des nach Auszeichnung eines Teilchens verbleibenden n -Teilchen-Systems. Durch Anwendung der binomischen Formel und Umordnen kommen wir zu der äquivalenten Ungleichung

$$(10) \quad 2 \cdot \sum p_j \cdot p_k \leq \sum (m_k \cdot m_j^{-1} \cdot p_j^2 + m_j \cdot m_k^{-1} \cdot p_k^2) \quad .$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung läßt sich mit Hilfe der Beziehungen $m = \sum m_j$, $p_i^2 = 2m_i E_i$ und $E = \sum E_j$ ($0 \leq i \leq n$) umrechnen zu

$$\sum_{j < k} (m_k \cdot m_j^{-1} \cdot p_j^2 + m_j \cdot m_k^{-1} \cdot p_k^2) = \sum_{j \neq k} m_k \cdot m_j^{-1} \cdot p_j^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_j \left(\sum_{k \neq j} m_k \right) \cdot m_j^{-1} \cdot P_j^2 = \sum_j (m - m_0 - m_j) \cdot m_j^{-1} \cdot P_j^2 = \\
 &= (m - m_0) \cdot \sum_j m_j^{-1} \cdot P_j^2 - \sum_j P_j^2 = (m - m_0) \cdot \sum_j 2E_j - \sum_j P_j^2 = \\
 &= 2(m - m_0) \cdot \sum_j E_j - \sum_j P_j^2 = 2(m - m_0)(E - E_0) - \sum_j P_j^2 .
 \end{aligned}$$

Addieren wir nun $\sum_j P_j^2$ ($1 \leq j \leq n$) zu beiden Seiten der Ungleichung (10) und beachten wir $\sum_j P_j = 0$ ($0 \leq j \leq n$), so erhalten wir

$$2m_0 \cdot E_0 = P_0^2 \leq 2(m - m_0)(E - E_0) .$$

woraus die Behauptung (1₀) mühelos folgt.

In (9) - und damit in (1₀) - tritt Gleichheit genau dann auf, wenn für alle Paare (j, k) gilt

$$m_j^{-1} P_j = m_k^{-1} P_k .$$

Für alle Indizes i ist aber $m_i^{-1} P_i$ nichts anderes als die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens, womit alles bewiesen ist. □

3.2 Beweis von Satz 6.

Es genügt, zwei spezielle Werte, etwa $l=0$, $l'=3$, zu betrachten. Aus der Gleichung (s. (6))

$$(11) \quad f_0 = f_3$$

ergibt sich durch Umordnen und Faktorzerlegung

$$(h_0 \varepsilon_0 - h_3 \varepsilon_3) \cdot (h_0 \varepsilon_0 + h_3 \varepsilon_3) \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 = (h_3^2 \varepsilon_3 - h_0^2 \varepsilon_0) .$$

Da es sich bei allen h_j und allen ε_j um positive Größen

handelt, folgt

$$h_0 \varepsilon_0 \succ h_3 \varepsilon_3 \iff h_3^2 \varepsilon_3 \succ h_0^2 \varepsilon_0 .$$

woraus die gewünschte Behauptung leicht herzuleiten ist.

3.3 Beweis von Satz 2.

3.3.1 Beweisansatz.

Gegeben seien vier positive reelle Zahlen h_0, h_1, h_2, h_3 . Wir können ohne Einschränkung

$$(12) \quad h_0 \succ h_1 \succ h_2 \succ h_3 > 0$$

und wegen der Bemerkung im Anschluß an Satz 6 auch

$$(13) \quad h_0 \succ h_3$$

annehmen.

Unsere Aufgabe besteht nun in dem Nachweis, daß das Gleichungssystem (5) für die Unbekannten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ unter der sich aus Satz 1 ergebenden Voraussetzung

$$(14) \quad 1/h_3 < 1/h_2 + 1/h_1 + 1/h_0$$

genau eine Lösung hat, bei der alle ε_i positiv sind und die die Ungleichung (4) befriedigt.

3.3.2 Elimination von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und ε_0 .

Wir bemerken zunächst, daß für $0 \leq i \leq 3$ gelten muß:

$$(15) \quad h_0 \cdot (h_i - h_3) \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_3) = h_i \cdot (h_0 - h_3) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_3) .$$

Beweis - In den beiden Gleichungen

$$f_0 = f_2 \cdot f_2 = f_3$$

tritt ϵ_1 nur linear auf; deshalb können wir ϵ_1 aus ihnen eliminieren und erhalten die Gleichung (15) für $i=2$. Der Fall $i=1$ ergibt sich analog, für $i = 0, 3$ gilt die Gleichung (15) trivialerweise. \square

Die Gleichungen (15) sehen sehr unübersichtlich aus, lassen sich aber unter der Annahme $h_0 > h_3$ (13) in eine einfache Form umschreiben. Wir setzen zur Abkürzung

$$(16) \quad t_i = (h_0^2/h_i^2) \cdot (h_i^2 - h_3^2)/(h_0^2 - h_3^2).$$

wobei wegen der Annahme (12) gilt:

$$0 = t_3 \leq t_2 \leq t_1 \leq t_0 = 1.$$

und erhalten

$$(17) \quad \epsilon_i = t_i \epsilon_0 + (1-t_i) \epsilon_3$$

für $0 \leq i \leq 3$. Nach der Bestimmung von positiven Werten für ϵ_0 und ϵ_3 ergeben sich also aus den Gleichungen ebenfalls positive Werte für ϵ_1 und ϵ_2 .

Bemerkung - Die Definitionsgleichungen (16) für die dimensionslosen Größen t_i gestatten eine hübsche und für $i = 1, 2$ wichtige Auflösung nach den gegebenen Größen h_i :

$$(18) \quad h_i^{-2} = t_i h_0^{-2} + (1-t_i) h_3^{-2}. \quad \square$$

Setzen wir nun die Formeln aus den Gleichungen (17) für

ϵ_1 und ϵ_2 in die Gleichung (11) ein, so finden wir eine homogene Gleichung 4. Grades für die Unbekannten ϵ_0 und ϵ_3 . Also muß das Verhältnis $r = \epsilon_0/\epsilon_3$ von ϵ_0 zu ϵ_3 einer polynomialen Gleichung $P(x) = \sum a_j x^j = 0$ höchstens vierten Grades genügen. Die Koeffizienten a_j lassen sich einfach berechnen und bis auf a_2 auch allgemein abschätzen:

$$a_0 = -h_3^2 \cdot (1-t_1)(1-t_2) < 0 .$$

$$a_1 = -2h_3^2 \cdot (1-t_1 t_2) < 0 .$$

$$a_2 = h_0^2 \cdot (3-2t_1-2t_2+t_1 t_2) - h_3^2 \cdot (t_1+t_2+t_1 t_2) .$$

$$a_3 = 2h_0^2 \cdot (t_1+t_2-t_1 t_2) > 0 ,$$

$$a_4 = h_0^2 \cdot t_1 t_2 > 0 .$$

Aus den angegebenen Abschätzungen ergibt sich unmittelbar, daß die Folge

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$$

höchstens einen Zeichenwechsel aufweist. Wir sehen aber auch, daß der höchste nichtverschwindende Koeffizient immer positiv und der kleinste immer negativ ist. Aus der Zeichenregel von DESCARTES [3, S. 373] in der von O. PERRON angegebenen Formulierung [11, S. 17]) folgt nun sofort, daß das Polynom $P(x)$ genau eine positive Nullstelle r hat. Wegen $P(1) = 3(h_0^2 - h_3^2) > 0$ wissen wir außerdem

$$0 < r < 1 .$$

Setzen wir nun noch $\varepsilon_0 = r \cdot \varepsilon_3$ in (17) ein, so erhalten wir

$$(19) \quad \varepsilon_i = (t_i r + 1 - t_i) \varepsilon_3 .$$

Für $i=0, 1, 2$ handelt es sich dabei um Eliminationsgleichungen für die Unbekannten ε_0 , ε_1 und ε_2 . Jedes positive ε_3 führt vermittels dieser Gleichungen zu positiven Werten ε_0 , ε_1 , ε_2 und - wie wir jetzt zeigen werden - zu einer Erfüllung der DESCARTESschen Ungleichung (4).

3.3.3 Analyse der Bedingung (4).

Wir setzen nun die Eliminationsgleichungen (19) in die Ungleichung (4) ein. Dann können wir durch ε_3^2 dividieren und erhalten eine notwendige und hinreichende Bedingung an r :

$$(20) \quad Q(r) > 0,$$

wobei $Q(x) = \sum b_i x^i$ das Polynom höchstens zweiten Grades mit den Koeffizienten

$$b_0 = 3 - 2(t_1 + t_2) - (t_1 - t_2)^2 .$$

$$b_1 = 6 + 2(t_1 - t_2)^2 \quad (\text{immer } > 0)$$

$$b_2 = -1 + 2(t_1 + t_2) - (t_1 - t_2)^2$$

bezeichnet.

Bemerkung - Diese Definitionsgleichungen für die Koeffizienten b_i lassen sich nach $t_1 + t_2$ und $t_1 t_2$ auflösen:

$$t_1 + t_2 = 1 + (b_1 + b_2) / 4 .$$

$$t_1 t_2 = [16b_2 + (b_2 - b_0)^2] / 64 .$$

Damit können die Koeffizienten a_i des Polynoms $P(x)$ durch polynomiale Ausdrücke in h_0 , h_3 , b_0 und b_2 mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden. Wir notieren noch:

$$(21) \quad Q(1) = b_0 + b_1 + b_2 = 8 .$$

für jede Wahl der vorzugebenden Größen. \square

Zum Nachweis der Ungleichung (20) benötigen wir nun die Voraussetzung (14). Wir schreiben sie in der Form

$$(22) \quad h_3^{-1} - h_0^{-1} < h_1^{-1} + h_2^{-1} .$$

quadrieren, ordnen um und finden unter Verwendung der Gleichungen (16) die äquivalente Form:

$$(23) \quad (h_3^{-2} - h_0^{-2})(t_1 + t_2 - 1) < 2(h_0^{-1}h_3^{-1} + h_1^{-1}h_2^{-1}) .$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$(a) \quad t_1 + t_2 \leq 1$$

Hieraus folgt $Q(0) > 0$ und $Q'(0) > 0$; wegen (21), d.h. $Q(1) = 8$, ergibt sich daraus $Q(x) > 0$ für alle x zwischen 0 und 1, also insbesondere (20).

$$(b) \quad t_1 + t_2 > 1$$

Von jetzt an ist $b_2 > 0$. Nochmaliges Quadrieren liefert die nun zu (23) äquivalente Form

$$(24) \quad -h_3^{-4} \cdot Q(h_3^2/h_0^2) < 8(h_0h_1h_2h_3)^{-1} .$$

die zu einer weiteren Fallunterscheidung Anlaß gibt:

$$(c) \quad Q(h_3^2/h_0^2) > 0$$

Wegen (13) ist $h_3^2/h_0^2 < 1$ und $Q(x)$ ist für x zwischen h_3^2/h_0^2 und 1 sicher positiv; da aus (13) auch folgt

$$P(h_3^2/h_0^2) = (h_3^2 - h_0^2)h_3^6(h_0h_1h_2)^{-2} < 0,$$

gilt aber $h_3^2/h_0^2 < \tau < 1$.

$$(d) \quad Q(h_3^2/h_0^2) < 0$$

Durch Quadrieren von (24) und Umordnen erhalten wir nun

$$h_0^{-8}(h_0^2 - h_3^2)(h_0^2b_0^2 - h_3^2b_2^2) < 0,$$

was wegen (13) offensichtlich äquivalent ist zu

$$(25) \quad h_0^2b_0^2 < h_3^2b_2^2.$$

Das Polynom $Q(x)$ hat nun genau eine Nullstelle σ zwischen h_3^2/h_0^2 und 1: es genügt zu zeigen:

$$(26) \quad P(\sigma) < 0.$$

Bezeichnet

$$d = b_1^2 - 4b_0b_2 = 64 - 16(b_2 + b_0) + (b_2 - b_0)^2$$

(vgl. (21)) die Diskriminante des Polynoms $Q(x)$, so gilt $\sigma = (\sqrt{d} - b_1) \cdot (2b_2)^{-1}$. (Da das Polynom $Q(x)$ zwei verschiedene Nullstellen hat, ist $d > 0$.) Durch Einsetzen in das Polynom $P(x)$ erhalten wir nach ermüdender, aber nicht schwieriger Rechnung

$$P(\sigma) = 128(h_0^2 b_0^2 - h_3^2 b_2^2).$$

$$\cdot [128b_2^2 + (b_1 + 2b_2)^2 \cdot d + (d + 16b_2) \cdot (b_1 + 2b_2) \cdot \sqrt{d}]^{-1}.$$

womit wegen (25) die Ungleichung (26) bewiesen ist.

3.3.4 Berechnung von ε_3 .

Die Überlegungen im vorigen Abschnitt gelten für jede positive Größe ε_3 . Jedoch für uns kommt nur ein Wert in Frage. Setzen wir nämlich die Eliminationsgleichungen (19) in die Gleichung (5₃) - das ist die Gleichung zum Index $l=3$ des Gleichungssystems (5) - ein, so ergibt sich

$$h_3^2 \cdot \varepsilon_3^4 \cdot (a_2 r^2 - a_1 r - a_0) = Q(r) \cdot \varepsilon_3^2.$$

mit $a_2 = h_3^2 (t_1 + t_2 + t_1 t_2)$. Diese Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$\varepsilon_3 = \sqrt{Q(r) \cdot (a_2 r^2 - a_1 r - a_0)^{-1}} !$$

Damit ist nun Satz 2 vollständig bewiesen.

3.4 Beweis von Satz 7.

Die angegebene Bedingung ist offensichtlich hinreichend. Zum Beweis der Notwendigkeit beziehen wir uns auf die in 3.3 eingeführten Größen und Formeln. Aus der Voraussetzung folgt mit Hilfe von Satz 5

$$\varepsilon_j = \varepsilon_k \cdot m_k / m_j$$

($0 \leq j \neq k \leq 3$).

Setzen wir dies für $j=0, 1$, $k=3$ in die Gleichungen (17) für

$i=1$ ein, so können wir durch ε_3 dividieren und nach t_1 auflösen:

$$t_1 = (m_0/m_1) \cdot (m_1 - m_3)/(m_0 - m_3) .$$

Andererseits berechnen wir aus der definierenden Gleichung (16₁) für t_1 :

$$t_1 = [(m_1 - m_3)/(m_0 - m_3)] \cdot [(m + m_0 + m_2)/(m + m_1 + m_2)] .$$

Gleichsetzen liefert nun $m_0 = m_1$ und aus Symmetriegründen folgt die Behauptung.

3.5 Beweis von Satz 8.

Hierzu ist es bequem, baryzentrische und kartesische Koordinaten gleichzeitig zu benutzen. Sei (x_1, x_2, x_3) mit (y_0, y_1, y_2, y_3) ein zum Tetraeder gehöriger Punkt der Kantenkugel. Im Hinblick auf (3) haben wir zu zeigen, daß aus (7) folgt:

$$(27) \quad \max(\sqrt{y_i}) \leq \sum \sqrt{y_i} .$$

Ohne wesentliche Einschränkung können wir dazu

$$(28) \quad x_1 \geq x_2, x_3$$

annehmen, woraus folgt

$$(29) \quad \max(\sqrt{y_i}) = \max(\sqrt{y_0}, \sqrt{y_1}) .$$

Wegen (7) gilt offensichtlich

$$(30) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 16 \cdot \sqrt{y_0 y_1 y_2 y_3} :$$

diese Ungleichung ist aber äquivalent zu

$$(31) \quad |x_1| \leq 2(\sqrt{y_0 y_1} - \sqrt{y_2 y_3}) .$$

was insbesondere

$$(32) \quad x_1 \leq 2(\sqrt{y_0 y_1} - \sqrt{y_2 y_3}) ,$$

liefert. Nochmaliges Wurzelziehen führt nun zu

$$|\sqrt{y_0} - \sqrt{y_1}| \leq \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} ,$$

was wegen (29) äquivalent zur Behauptung (27) ist. \square

3.6 Beweis von Satz 9.

Für einen außerhalb der Kantenkugel gelegenen Punkt des Tetraeders ist die Ungleichung (30) äquivalent zu

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 \leq 2x_1 x_2 x_3 ,$$

wie man durch Quadrieren erkennt. Damit folgt die Behauptung mit den in 3.4 angegebenen Umformungen. Im Hinblick auf den hier notwendigen Schluß von (32) auf (31) muß man nur bemerken, daß bei den jetzt betrachteten Punkten aus (28) auch folgt $x_j > 0$. \square

4. Weitere Fragen

Die hier angestellten Überlegungen lassen eine Reihe von Fragen offen, die wir hier einfach auflisten wollen.

4.1 Geometrie des Energie-Impuls-Raumes.

Ist der Energie-Impuls-Raum unabhängig von einer speziellen Wahl des Simplexes immer konvex, oder wenigstens sternförmig? Im Falle sternförmig, kann der Punkt, dessen baryzentrische Koordinaten y_0, \dots, y_n dem Gleichungssystem

$$m_0 y_0 = \dots = m_n y_n$$

genügen, als Ausgangspunkt genommen werden? Oder gelten diese Eigenschaften nur bei bestimmter Wahl des Simplexes? Wird der Energie-Impuls-Raum im allgemeinen, wenigstens stückweise, durch eine Hyperfläche der Dimension 2^{n-1} begrenzt?

4.2 Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

Satz 2 legt die Frage nahe, ob sich die Radien der erzeugenden Kugeln eines Tangententetraeders, und damit seine Kanten, aus den Höhen mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Dazu sollte man zunächst die Galoisgruppe des Polynoms $P(x)$ über $\mathbb{Q}(t_1, t_2)$ oder $\mathbb{Q}(b_0, b_2)$ berechnen.

4.3 Konstruktion von Tangentensimplizes der Dimension $n > 3$.

Schon in [6] wurde das Problem der Konstruktion höherdimensionaler Tangentensimplizes erwähnt. Satz 1 besitzt eine n -dimensionale Verallgemeinerung [7]. Gilt das in gleicher Weise für Satz 2?

4.4 Mit einem Tetraeder verbundene Koordinatensysteme.

Für Satz 8 haben wir benutzt, daß sich einem regulären Tetraeder ein ausgezeichnetes Koordinatensystem zuordnen läßt. Geht das auch bei anderen Tetraedern? Man könnte etwa an die Eulersche Gerade [10] des Tetraeders als eine Achse denken, aber diese existiert auch im nichtregulären Fall nicht immer. Bei Tetraedern mit paarweise windschiefen Raumböhen liegen diese auf einem gleichseitigen einschaligen Hyperboloid [13]. Meines Wissens hat man bis heute keine geometrische Beschreibung der Hauptachsen dieses Hyperboloids. Vielleicht könnten diese zu einem solchen Koordinatensystem führen?

Einen anderen Vorschlag hat R. KOCH (Technische Universität München) gemacht: Als eine Achse nehme man das gemeinsame Lot eines Gegenkantenpaares mit kürzestem Abstand, als Ursprung den Mittelpunkt der von diesen Gegenkanten(geraden) aus dem Lot ausgeschnittenen Strecke: in der zu dieser Achse senkrechten Ebene durch den Ursprung ziehe man die Parallelen zu den betrachteten Gegenkanten und nehme als weitere Achsen das Paar der Winkelhalbierenden dieser Geraden. Im Falle eines regulären Tetraeders ergibt diese Konstruktion die hier benutzten Koordinatenachsen: weitere Überlegungen dazu wurden bisher nicht angestellt.

Literatur

- [1] R.H. DALITZ, *On the analysis of τ -meson data and the nature of the τ -meson*, The Philosophical Magazine **44**. 1068-1080 (1953)

- [2] D. DEHNHARD - D. KAMKE - P. KRAMER, *Verallgemeinerte Dalitz - Diagramme in der Niederenergie - Kernphysik*, Physics Letters 3, 52-55 (1962)
- [3] R. DESCARTES, *Discours de la methode Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la dioptrique, les meteores et la geometrie, qui sont des essais de cette Methode*, Leiden 1637; besser zugänglich in: D.E. SMITH - M. LATHAM, *The Geometry of René Descartes, translated from the French and Latin, with a facsimile of the first edition 1637*, Chicago - London 1925
- [4] K. FLADT - A. BAUR, *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*, Braunschweig 1975
- [5] R. FRITSCH, *"Dreiecks"-Ungleichungen für Tetraeder*, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 34, 274-278 (1981)
- [6] R. FRITSCH, *Kantenkugeln - geometrische Anwendungen der linearen Algebra*, erscheint in: Mathematische Semesterberichte
- [7] L. GERBER, *The orthocentric simplex as an extreme simplex*, Pacific Journal of Mathematics 56, 97-111 (1975)
- [8] D. KAMKE, *Evaluation of Dalitz plots*, in: Clustering Phenomena in Nuclei (International Conference, held in Bochum, 21-24 July 1969, Proceedings published by the International Atomic Energy Agency), 87-107, Wien 1969
- [9] D. KAMKE, *Evaluation of Dalitz-plots II*, Annalen der Physik 28, 193-204 (1972)
- [10] G. MONGE, *Sur la pyramide triangulaire*, Correspondance sur l'école impériale polytechnique 2/3, 263-266 (1811)
- [11] O. PERRON, *Algebra II. Theorie der algebraischen Gleichungen*, 3. verbesserte Auflage, Berlin 1951
- [12] K. WEIERSTRASS, *Jacob Steiner's gesammelte Werke, Band 2*, Berlin 1882
- [13] M. ZACHARIAS, *Elementargeometrie und die elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*, in: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III AB9, 859-1172 Leipzig 1914/1931

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität
Theresienstraße 39
D-8000 München 2