MNU

Jahrgang 43
Heft 1–8
Jan.–Dez. 1990

Mathematik

Physik

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

Biologie

Chemie

DÜMMLER

FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt. Die Beiträge werden nur für satzungsgemäße Zwecke verwendet.

Vorstand

Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abonnement offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,– (für Pensionäre DM 52,–); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,– Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

FERD. DÜMMLER[s] VERLAG

DÜMMLERhaus
Kaiserstraße 31–37
Postfach 14 80
5300 Bonn 1
Telefon 02 28/22 30 31
Telefax 02 28/21 30 40

MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 82,–, Einzelheft DM 12,–, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben.

Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987.

Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif.

Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:
Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,
4190 Kleve, Tel. 0 28 21/90 76

Copyright/Fotokopien

Inhaltsverzeichnis

Abhandlungen - Beiträge zur Schulpraxis - Zur Diskussion gestellt

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Fächerübergreifendes – Allgemeines

Experimentiervorschläge

Zur Diskussion gestellt

Aufgaben, Lehrmittel, Diskussion und Kritik

Aufgaben für Mathematikzirkel mit Mittelstufenschülern

Andere Mathematik-Aufgaben

Physik-Aufgaben

Diskussion und Kritik

Biologie

Allgemeines

Schriftleitung der Zeitschrift MNU

Hauptschriftleitung
Prof. Dr. rer. nat. HELMUT SCHMIDT
Am Pleisbach 28,
5205 St. Augustin 1,
0 22 41/33 42 73

Fachschriftleitung

Mathematik OStD GERT STARKE
Wittenbrook 14a,
2300 Kiel 17,
04 31/36 23 12

Physik MinR HERWIG KRÜGER
Untereisselner Str. 33,
2305 Heikendorf,
04 31/24 15 38

Chemie StD OTTHEINRICH DÜLL
Breidenbornerstr. 8,
6750 Kaiserslautern,
06 31/9 28 83

Biologie Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK
Institut für Biologiedidaktik der Universität,
Karl-Glöckner-Str. 21C,
6300 Gießen,
06 41/8 14 62

Redaktionelle Zuschriften an den zuständigen Fachschriftleiter erbeten. Für die Gestaltung der Beiträge gelten die Manuskriptabfassungsrichtlinien in ihrer jeweils jüngsten Fassung, wie sie in Abständen in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht

Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

43. Jahrgang, Heft 1 ISSN 0025-5866 15. Januar 1990

In der Mitte dieses Heftes befinden sich Einladung und Programm zur 81. Hauptversammlung in München und die Anmeldekarten.

Beilagen: Diesem Heft ist ein Prospekt des Gustav Fischer Verlages, Stuttgart, beigelegt.

Adressenänderungen bitte nur dem Dümmler-Verlag mitteilen.
Redaktionelle Zuschriften an den zuständigen Fachschriftleiter erbeten.

FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt. Die Beiträge werden nur für satzungsgemäße Zwecke verwendet.

Vorstand

Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abonnement offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,– (für Pensionäre DM 52,–); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,– Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

FERD. DÜMMLER^S VERLAG

DÜMMLERhaus
Kaiserstraße 31–37
Postfach 14 80
5300 Bonn 1
Tel. 02 28/22 30 31

MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 82,–, Einzelheft DM 12,–, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben.

Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987.

Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif.

Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:
Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,
4190 Kleve, Tel. 0 28 21/90 76

Copyright/Fotokopien

Wie wird der Vierfarbensatz bewiesen?[1]

Verfasser: Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Mathem. Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 39, 8000 München 2

FRANCIS GUTHRIE (* London 1831, † Claremont/Südafrika 1899, ab 1876 Professor für Mathematik in Kapstadt) hatte gerade sein juristisches Examen gemacht, da konfrontierte er seinen noch studierenden Bruder FREDERICK (* London 1833, † London 1886, 1860–66 Professor für Chemie und Physik am Royal College auf der Insel Mauritius, ab 1881 Professor für Physik in London) mit einer mathematischen Aussage ([9]), die dieser am 23. Oktober 1852 dem gemeinsamen Mathematiklehrer an der Universität London AUGUSTUS DE MORGAN (* Madura/Indien 1806, † London 1871, der erste Professor für Mathematik an der 1836 gegründeten Londoner Universität) vorlegte. DE MORGAN war so beeindruckt, daß er den Sachverhalt sofort einem der führenden englischen Mathematiker der Zeit, SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (* Dublin 1805, † Dunsink 1865, Professor für Astronomie in Dublin), brieflich mitteilte ([8, Band 3. S. 423]). Der im Trinity College in Dublin aufbewahrte Brief enthält die früheste schriftliche Fixierung des Vierfarbensatzes[2], DE MORGAN schrieb:

> *If a figure be anyhow divided, and the compartments differently coloured, so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted, but no more.*

[1] Geringfügig erweiterte Fassung des Vortrages auf der 80. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Darmstadt 1989.

[2] Manchmal wird das Problem auch dem deutschen Geometer AUGUST FERDINAND MÖBIUS (* Schulpforta 1790, † Leipzig 1868) zugeschrieben, aber dieser beschäftigte sich nur mit der entfernt verwandten Frage, ob sich ein Fünfeck mit allen seinen Diagonalen kreuzungsfrei in die Ebene einbetten läßt.

MNU 43/2 (1. 3. 1990) Seiten 80–87 ISSN 0025-5866

Im deutschen Sprachgebrauch formuliert man üblicherweise das Vierfarbenproblem in folgender Weise:

Kann man jede politische Landkarte so mit vier Farben färben, daß Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie immer verschieden gefärbt sind?

Wichtig ist dabei natürlich die Bedingung der gemeinsamen Grenzlinie; Länder, die nur einzelne Grenzpunkte gemeinsam haben, dürfen durchaus gleich gefärbt sein. Andernfalls käme man schon im Falle eines Fünfländerecks nicht mehr mit vier Farben aus. Es kommt nicht darauf an, ob man sich die Karte auf dem Globus oder eben vorstellt; da man ja einen inneren Punkt eines Landes ruhig weglassen kann, kann man mittels stereographischer Projektion von einem zum andern übergehen. Die Geschichte dieses Problems ist in der Literatur ausführlich dargestellt ([4], [1]). Es kam auch im Rahmen unserer Hauptversammlungen schon mehrfach zur Sprache, zum Beispiel:

1970 in Berlin GERHARD RINGEL: *Das Heawoodsche Kartenfärbungsproblem.* Das war noch vor der allgemeinen Lösung des Problems durch APPEL, HAKEN und KOCH im Jahre 1976 ([2], [3]).

1988 in Kiel RAINER BODENDIEK: *Bemerkungen zum Vierfarbensatz.*

1979 in Hannover der Meister HEINRICH HEESCH persönlich: *Zum Vierfarbenproblem.* Sein nahezu tragisches Ringen mit dem Vierfarbenproblem hat HANS-GÜNTHER BIGALKE in einer Biographie ausführlich dargestellt ([6]). Mit seinen Methoden ([11]) erreichten APPEL und HAKEN das Ziel. HEESCH selbst scheiterte an mathematischen Kollegen, die als Gutachter der Deutschen Forschungsgemeinschaft der Meinung waren, der für die Durchführung des Beweises notwendige maschinelle Aufwand lohne sich nicht. Bei seinem Vortrag auf der Hauptversammlung 1979 stellte er einen alternativen Lösungsansatz vor, dessen Durchführung wesentlich weniger aufwendig wäre; aber auch dafür wurde ihm die Unterstützung verweigert.

Hier versucht ein Mathematiker, aber Außenseiter in bezug auf die spezielle Fragestellung, den durchgeführten Lösungsweg zu erläutern. Es handelt sich ja um eines der seltenen allgemeinverständlichen mathematischen Probleme, nach dem man deshalb auch immer wieder von Nichtmathematikern gefragt wird. Für solche Diskussionen sind die folgenden Ausführungen gedacht; sie enthalten nichts Neues für Fachleute, also etwa für Kollegen, die das schöne Buch von MARTIN AIGNER ([1]) gelesen, über das Vierfarbenproblem ihre Zulassungsarbeit geschrieben oder promoviert haben. Die wesentliche Grundlage bildet die Darstellung der Beweisidee, die APPEL und HAKEN 1986 im Mathematical Intelligencer gegeben haben ([5]).

Zunächst wird das Problem umformuliert, in die von HEINRICH HEESCH (* Kiel 1906, Professor für Mathematik in Hannover) angegebene duale Fassung, die etwas bequemer zu handhaben ist als die ursprüngliche. Es sei eine ebene Karte gegeben, aufgetragen im $\mathbb{R}^2$ (Abb. 1). Die einzelnen, endlich vielen Länder werden als wegweise zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit inneren Punkten angenommen; zwei Länder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Grenzlinie besitzen. In jedem Land wählt man einen Punkt (die Hauptstadt) und verbindet die Hauptstädte benachbarter Länder durch eine Linie (Eisenbahnlinie), die ganz in den beiden Ländern verläuft und sich selbst nicht überschneidet; verschiedene von einer Hauptstadt ausgehenden Eisenbahnlinien dürfen sich auch nicht überkreuzen (Abb. 2, links). Das so erhaltene Gebilde (Abb. 2, rechts) ist ein ebener Graph, d. h. ein Paar $\boldsymbol{G} = (E, K)$ von endlichen Mengen E, K, deren Elemente Ecken oder Knoten, beziehungsweise Kanten des Graphen heißen, mit folgenden Eigenschaften ([13, § 1, Definition 3, S. 15]):

1. Jede Ecke ist ein Punkt im $\mathbb{R}^2$, jede Kante ist Bild einer injektiven, stetigen Abbildung w: $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$.
2. Die Randpunkte der Kanten sind Ecken; Ecken sind nie innere Punkte von Kanten.
3. Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Kanten ist entweder leer oder besteht aus genau einer Ecke.

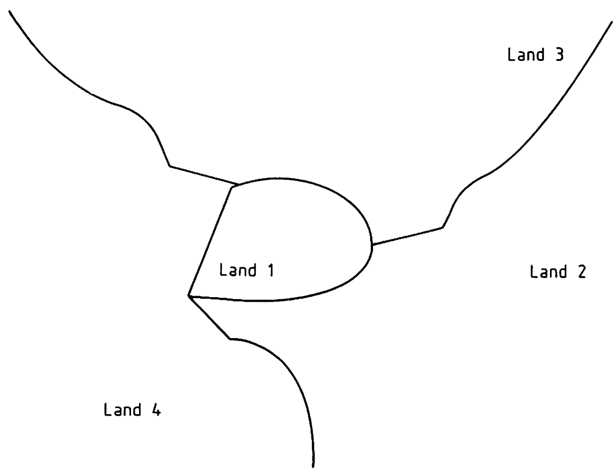

Abb. 1

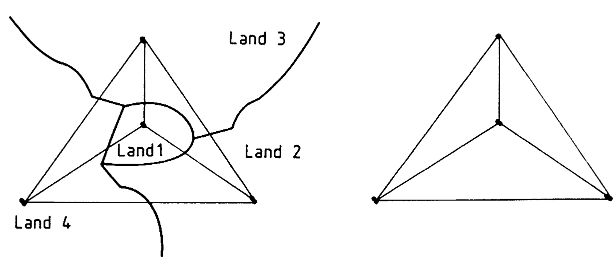

Abb. 2

Im Sinne der allgemeinen Graphentheorie liefert diese Definition einen schlichten oder einfachen Graphen, das heißt einen Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten ([13, S. 10], [1, S. 9]).

Ausgehend von der Kartenvorstellung nennt man zwei Ecken eines ebenen Graphen benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Der Färbung einer Landkarte entspricht nun eine Färbung der Eckenmenge des dualen ebenen Graphen. Die Relation »gleichgefärbt« ist dann eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge; die Äquivalenzklassen können durch die zugehörigen Farben gekennzeichnet werden. Im Hinblick auf das Vierfarbenproblem definiert man nun abstrakt: Eine Einteilung der Eckenmenge eines ebenen Graphen in Äquivalenzklassen heißt Färbung, wenn benachbarte Ecken immer verschiedenen Klassen angehören; die Klassen selbst heißen dann Farben. In dieser Sprache lautet der zu beweisende

Satz 1 (Vierfarbensatz): *Jeder ebene Graph besitzt eine Färbung mit vier oder weniger Farben.*

Daß dieses Ergebnis bestmöglich ist, das heißt, daß es Graphen gibt, die mindestens vier Farben benötigen, zeigt der Graph in Abbildung 2 (rechts).

Das Problem läßt sich durch einige zusätzliche Annahmen vereinfachen, die die Allgemeinheit nicht einschränken. Offensichtlich lassen sich verschiedene Zusammenhangskomponenten eines ebenen Graphen getrennt färben. Es genügt also zusammenhängende Graphen zu betrachten. – Ein ebener Graph heißt maximal, wenn er nicht durch Hinzunahme von Kanten allein erweitert werden kann ([13, S. 106]); jeder ebene Graph läßt sich offenbar (in mannigfacher Weise) zu einem maximalen ebenen Graphen erweitern. Nun verliert aber eine Färbung ihre definierende Eigenschaft nicht, wenn man Kanten wegläßt; also kann man sich, wenn passend, auf die Betrachtung maximaler ebener Graphen zurückziehen. Für diese gilt der

Satz 2 (Wagner[3] 1936 [13, S. 108]): *Jeder maximale ebene Graph (mit mindestens 3 Ecken) ist isomorph zu einem Dreiecksgraphen.*

Dabei versteht man unter einem Dreiecksgraphen einen maximalen ebenen Graphen mit mindestens drei Ecken, dessen Kanten Strecken sind. Ein Dreiecksgraph zerlegt die Ebene in lauter Dreiecke, auch das Außengebiet wird von einem Dreieck berandet. Man kann sich also auf die Betrachtung von Dreiecksgraphen beschränken.

Nun geht es weiter mit den Ideen des Londoner »Barristers« Alfred Bray Kempe (* Kensington 1849, † London 1922, die Berufsangabe bezeichnet einen Rechtsanwalt der gehobenen Klasse), der als Hobbymathematiker und Mitglied der London Mathematical Society 1879 einen Beweis des Vierfarbensatzes veröffentlichte ([12]); zu seinem eignenen großen Bedauern entdeckte der Mathematiker Percy John Heawood (* Newport 1861, † Durham 1955, Professor der Mathematik in Durham) in Kempes Argumentation eine Lücke, aber erst elf Jahre später ([10]). Appel und Haken würdigen die Leistung des Amateurs mit folgenden Worten. *»Kempes Argument war außerordentlich clever und, obwohl sich herausstellte, daß sein Beweis nicht vollständig war, so enthielt er doch die meisten grundlegenden Ideen, die schließlich – ein Jahrhundert später – zum korrekten Beweis führten.«*

Kempe arbeitete zwar nicht mit Dreiecksgraphen; aber seine Überlegungen lassen sich leicht übersetzen. Es sei $\boldsymbol{G}$ ein Dreiecksgraph und F sei die Menge der Gebiete, in die er die Ebene $\mathbb{R}^2$ zerlegt; das Außengebiet gehört natürlich mit dazu. Dann kann man das Ganze auch vermöge der stereographischen Projektion als eine Zerlegung der Kugeloberfläche ansehen und den Eulerschen Polyedersatz anwenden: Bezeichnen e, k, f die Anzahlen der Elemente der Mengen E, K, F, so gilt

$$e - k + f = 2. \qquad (1)$$

Da jedes Dreieck genau drei Seiten hat und jede Kante zu genau zwei Dreiecken gehört, hat man ferner die Beziehung

$$3 \cdot f = 2 \cdot k. \qquad (2)$$

Die Anzahl der Kanten, die eine gegebene Ecke zum Randpunkt haben, nennt man den Grad dieser Ecke. Statt Ecke vom Grad n sagt man auch n-Ecke; dabei muß man nur aufpassen, daß man die Begriffe »Dreieck« und »3-Ecke« nicht verwechselt. Mit $v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ seien die Anzahlen der Ecken vom Grad $2, 3, \ldots, n, \ldots$ bezeichnet. Dann erhält man durch Abzählung die folgenden Beziehungen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n = e \qquad (3)$$

(Gesamtzahl der Ecken) und

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot v_n = 2 \cdot k \qquad (4)$$

(zweimal Gesamtzahl der Kanten, da jede Kante zwei Ecken als Randpunkte hat); aus (4) und (2) erhält man noch

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot v_n = 3 \cdot f. \qquad (5)$$

Die Gleichungen (3), (4), (5) erlauben, die Zahlen e, k, f durch die Zahlen $v_2, \ldots$ auszudrücken. Setzt man die erhaltenen Werte in die Eulersche Gleichung (1) ein und multipliziert mit dem Hauptnenner durch, so erhält man

$$\sum_{n=2}^{\infty} (6 - n) \cdot v_n = 12. \qquad (6)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung kann es positive und negative Summanden geben, da aber die Ge-

[3] Klaus Wagner, * Köln 1910, Professor für Mathematik in Duisburg.

samtsumme rechts positiv ist, müssen links positive Summanden vorkommen. Solche gibt es aber nur bei den Indizes $n = 2, 3, 4, 5$, das heißt

Satz 3 (Kempe 1879): *In jedem Dreiecksgraphen gibt es Ecken vom Grad 2, 3, 4 oder 5.*

Von dieser Stelle an arbeitet Kempe mit der Methode des »kleinsten Verbrechers«, einer Abwandlung des Induktionsbeweises. Der Vierfarbensatz gilt ja offensichtlich für Graphen mit höchstens vier Ecken. Gibt es Gegenbeispiele, so kann man diejenigen betrachten, die unter allen eine minimale Eckenanzahl besitzen; solche muß es auf Grund der Wohlordnung der natürlichen Zahlen geben, die zum Induktionsaxiom äquivalent ist, und das sind die kleinsten Verbrecher. Die Aufgabe besteht nun darin die Existenz von kleinsten Verbrechern auszuschließen.

Dazu sei ein kleinster Verbrecher $\boldsymbol{G}$ als gegeben angenommen. Es kann vorausgesetzt werden, daß $\boldsymbol{G}$ ein Dreiecksgraph ist und daß jeder ebene Graph mit kleinerer Eckenzahl eine Färbung mit höchstens vier Farben besitzt. Zunächst kann man die Existenz von 2- und 3-Ecken ausschließen: Gäbe es eine solche Ecke A, so bilde man den Teilgraphen, der durch Herausnahme von A und der Kanten mit A als Randpunkt entsteht. Für diesen wähle man eine Färbung mit vier Farben. Da A im ganzen Graphen höchstens drei Nachbarn hat, ist eine geeignete Farbe für die Färbung von A frei. Man hätte also im Widerspruch zur Annahme eine Färbung mit vier Farben (Abb. 3 zeigt die Überlegung für eine 3-Ecke).

Um den Fall der Existenz einer 4-Ecke darzustellen, ist ein auch weiterhin nützlicher Begriff bequem: Sind B und C verschiedene Ecken eines gefärbten Graphen, so heißt eine endliche Folge $K = (F_0, \ldots, F_r)$ von Ecken Kempe-Kette von B nach C, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $F_0 = B$, $F_r = C$.
2. Je zwei aufeinanderfolgende Glieder sind benachbart.
3. Die Glieder sind paarweise verschieden.
4. Alle Glieder mit geradem Index haben die gleiche Farbe wie B.
5. Alle Glieder mit ungeradem Index haben die gleiche Farbe.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß die Endpunkte der Kempe-Kette bei geradem r gleich und bei ungeradem r verschieden gefärbt sind (Abb. 4).

Nun sei A eine 4-Ecke (in einem kleinsten Verbrecher $\boldsymbol{G}$), und es seien B, C, D, E die Nachbarn von A, in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn angeordnet. Man wähle wieder eine Färbung des Teilgraphen $\boldsymbol{G}'$ von $\boldsymbol{G}$, der durch Herausnahme von A und der Kanten mit Randpunkt A entsteht ($\boldsymbol{G}'$ ist zwar kein Dreiecksgraph mehr, da er offensichtlich nicht maximal ist, aber das stört die Argumentation nicht). Sind die Nachbarecken von A dabei nicht alle verschieden

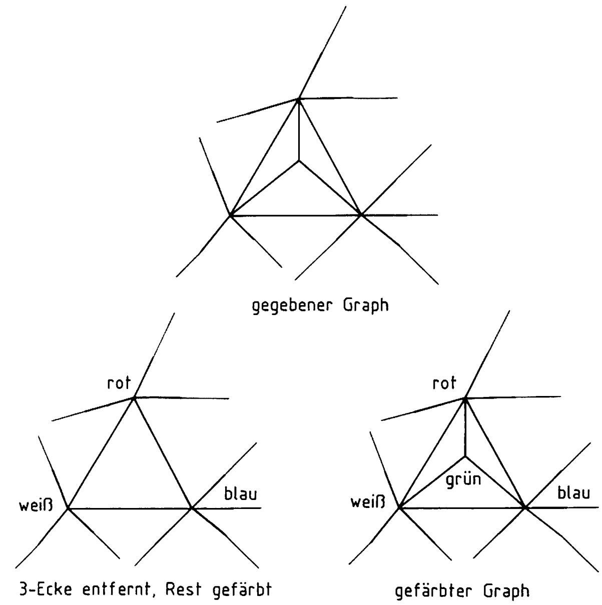

Abb. 3

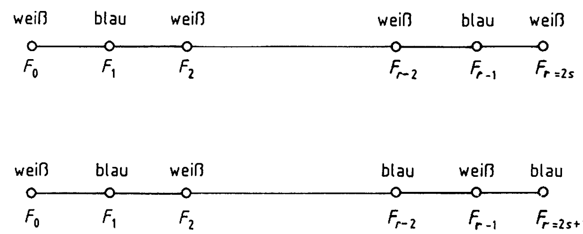

Abb. 4

gefärbt, so hat man noch eine Farbe für die Färbung von A frei. Andernfalls hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es gibt keine Kempe-Kette von B nach D (Abb. 5a). Dann betrachte man alle Ecken auf von B ausgehenden Kempe-Ketten, die nur Ecken in den Farben von B und D enthalten. Diese Ecken färbe man um, in dem man die Farben von B und D vertauscht. Da D dabei seine Farbe behält und B nunmehr wie D gefärbt ist, steht die ursprüngliche Farbe von B für die Färbung von A zur Verfügung.

b) Es sei eine Kempe-Kette K von B nach D gegeben (Abb. 5b). Dann bilden die Kanten, die die benachbarten Ecken dieser Kempe-Kette verbinden, zusammen mit den Kanten, die A mit B und D verbinden, eine geschlossene Jordan-Kurve, die die Ebene in zwei disjunkte Gebiete zerlegt und insbesondere die Ecken C, E trennt. Eine Kempe-Kette K' in $\boldsymbol{G}'$ von C nach E müßte deshalb die Kempe-Kette K treffen und damit Ecken in drei verschiedenen Farben, nämlich in den Farben von C, E und B oder D, enthalten. Also gibt es keine solche Kempe-Kette K', und deshalb kann man – wie unter a) beschrieben – so umfärben,

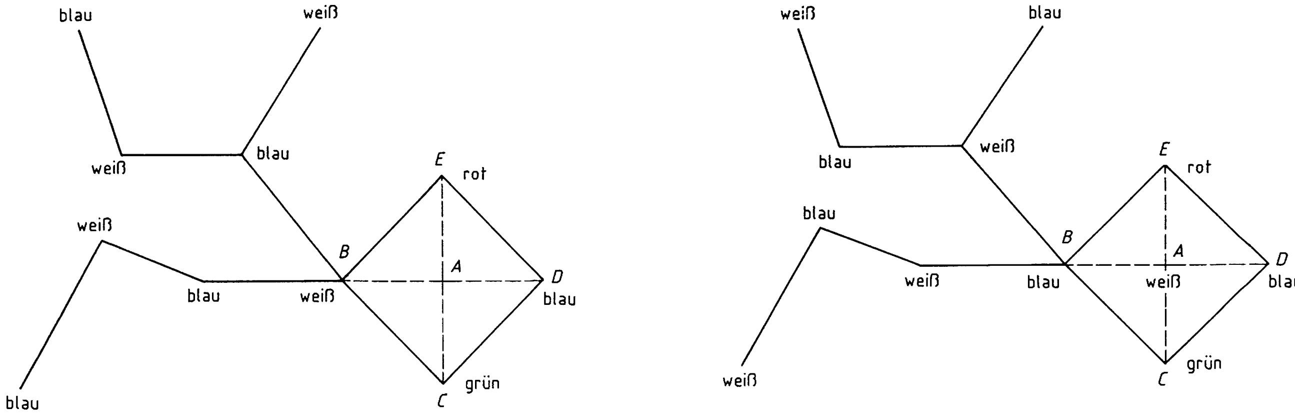

Abb. 5a

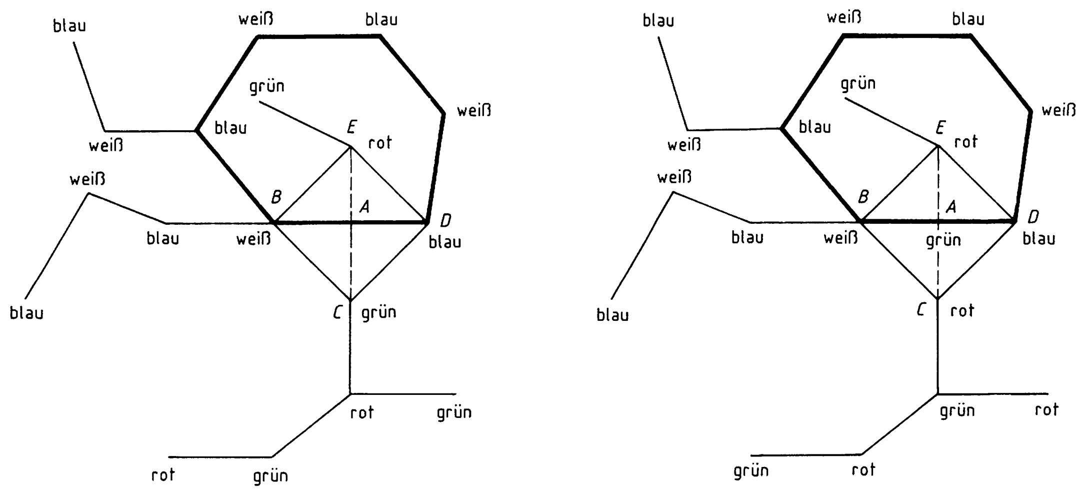

Abb. 5b

daß C die Farbe von E erhält und die ursprüngliche Farbe von C für die Färbung von A zur Verfügung steht.

Damit ist nun gezeigt, daß kleinste Verbrecher auch keine 4-Ecken enthalten können. Die hierfür angewandte Technik, Kempe-Austausch, Kempe-Verfahren ([1]) oder Kempe-Ketten-Spiel ([6, S. 173]) genannt, erweist sich auch für den weiteren Fortgang als sehr fruchtbar. Dafür kann man sich jetzt auf kleinste Verbrecher konzentrieren, die keine Ecken der Grade 2, 3, 4, aber mindestens eine 5-Ecke besitzen. Bei der Anwendung seiner Methode auf diesen Fall beachtete Kempe nicht, daß sich bei der Umfärbung auch Kempe-Ketten ändern können, die Ecken in einer der zu vertauschenden Farben enthalten. Heawood bemerkte jedoch in seiner – wie er selbst sagte – destruktiven Arbeit, daß das Kempe-Kettenspiel ohne weiteres liefert:

Satz 4 (Fünffarbensatz, Heawood 1890): *Jeder ebene Graph besitzt eine Färbung mit fünf oder weniger Farben.*

Beweis: Der Dreiecksgraph $\boldsymbol{G}$ sei ein kleinster Verbrecher (gegen den Fünffarbensatz). Die Existenz von n-Ecken mit $n = 2, 3, 4$ kann mit dem schon verwendeten Argument ausgeschlossen werden: Man nimmt eine solche Ecke und die mit ihr inzidierenden Kanten zunächst heraus und erhält einen kleineren Graphen, den man nach Voraussetzung mit fünf Farben färben kann. Ist das geschehen, so hat man für die herausgenommene Ecke, die ja höchstens vier Nachbarn hat, eine Farbe frei. – Nun wähle man eine 5-Ecke A; eine solche muß es ja nach den vorigen Überlegungen geben. Ferner seien B, C, D, E, F die Nachbarn von A, in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn angeordnet (Abb. 6). Man wähle wieder eine Färbung des Teilgraphen $\boldsymbol{G}'$ von $\boldsymbol{G}$, der durch Herausnahme von A und der Kanten mit Randpunkt A entsteht. Sind die Nachbarecken von A dabei nicht alle verschieden gefärbt, so hat man noch eine Farbe für die Färbung von A frei. Andernfalls hat man wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

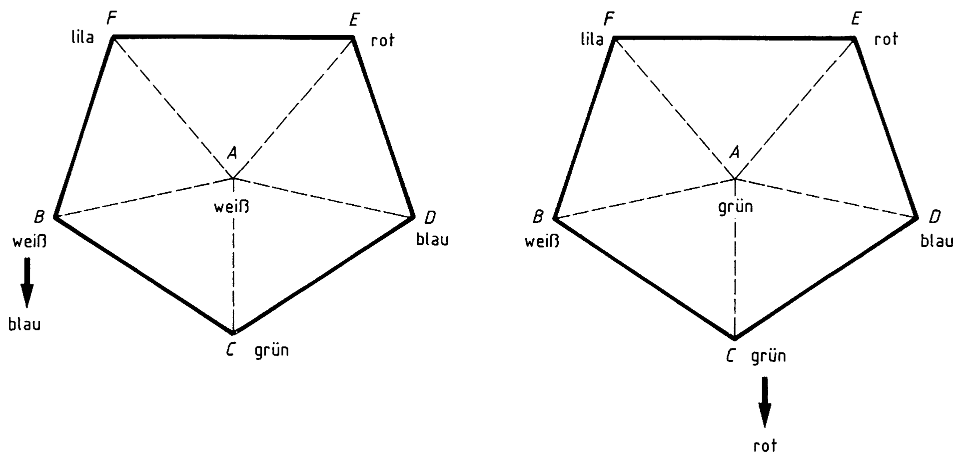

Abb. 6

a) Es gibt keine Kempe-Kette von B nach D. Dann schließt man wie unter a) beim Ausschluß der 4-Ecke im Beweis des Vierfarbensatzes.
b) Es gibt eine Kempe-Kette von B nach D. Dann liefert der Jordansche Kurvensatz wieder, daß es keine Kempe-Kette von C nach E gibt. Also kann man auch hier so umfärben, daß C die Farbe von E erhält und die ursprüngliche Farbe von C für die Färbung von A zur Verfügung steht.

Damit kann ein kleinster Verbrecher auch keine 5-Ecke enthalten, was aber nicht möglich ist. △

Für das weitere sind noch einige Begriffe zu klären. Im Rahmen dieser Theorie versteht man unter einer Konfiguration zusammenhängende ebene Graphen, die einen Randkreis besitzen, das heißt derart, daß gewisse Kanten eine geschlossene Jordan-Kurve bilden und alle anderen Kanten und mindestens eine Ecke im Innengebiet dieser Kurve liegen (Abb. 7). Die einfachsten Beispiele für Konfigurationen sind die Sterne von inneren Ecken in einem Dreiecksgraphen. Eine Konfiguration ist Summand eines ebenen Graphen, wenn sie so als Teilgraph eingebettet werden kann, daß alle Ecken innerhalb des eingebetteten Randkreises zur Konfiguration gehören. Eine Konfiguration heißt reduzibel, wenn kein Dreiecksgraph mit ihr als Summand ein kleinster Verbrecher sein kann. Dieser Begriff wurde 1913 von George David Birkhoff (* Overisel/Michigan 1884, † Cambridge/Massachussetts 1944, Professor für Mathematik an der Harvard University) eingeführt [7]. Kempes Beweis zeigt die Reduzibilität der Sterne von 3- und 4-Ecken. Eine Menge von Konfigurationen heißt unvermeidbar, wenn jeder Dreiecksgraph mindestens ein Element dieser Menge als Summanden enthält. Satz 3 besagt in dieser Terminologie gerade, daß die Menge bestehend aus den Sternen einer 3-Ecke, einer 4-Ecke und einer 5-Ecke, unvermeidbar ist. Nach den Resultaten Kempes liegt die

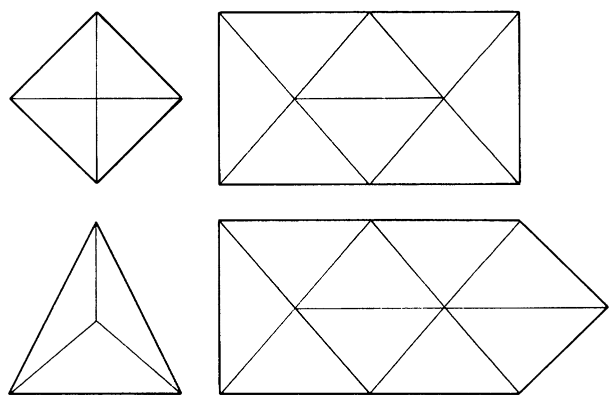

Abb. 7. Beispiele für Konfigurationen

Hauptschwierigkeit des Vierfarbensatzes im Nachweis der Reduzibilität des Sternes einer Ecke mit der Ordnung 5. Die folgenden Beweisversuche und der endgültige Beweis bestanden in der Suche nach einer unvermeidbaren Menge reduzibler Konfigurationen.

Heesch entwickelte Algorithmen für den Nachweis der Reduzibilität. Dabei muß man sich allerdings erst einmal sorgfältig klarmachen, was ein solcher Algorithmus überhaupt leisten kann. Nach dem Beweis des Vierfarbensatzes ist ja jede Konfiguration reduzibel. Das bedeutet, man sucht Algorithmen, die die Reduzibilität einer bestimmten Konfiguration schon ohne Bezug auf den Vierfarbensatz feststellen können. Der einfachste Algorithmus, den man sich vorstellen kann, ist folgender: Man schreibe alle möglichen Färbungen der ganzen Konfiguration auf und sehe nach, ob dabei auf dem Randkreis alle möglichen Färbungen induziert werden. Ist das der Fall, so liegt Reduzibilität vor: Man färbe bei einem kleinsten Verbrecher alles bis auf das Innere der Konfiguration; damit hat man eine Färbung des Randes, die man nach Voraussetzung ins Innere fortsetzen kann. Also war's doch kein kleinster Verbrecher! Dieser primi-

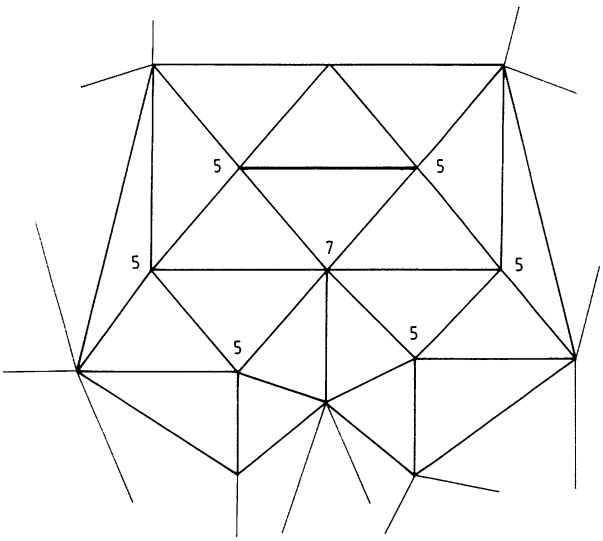

Abb. 8

tive Algorithmus zeigt aber schon, daß für Rechnungen solcher Art ein großer Aufwand erforderlich ist. Das ist natürlich noch mehr der Fall bei Algorithmen, die mit diesem Verfahren starten und bei negativem Ausgang mit Kempe-Ketten-Spielen fortsetzen. Der Aufwand hängt wesentlich von der Ringgröße, das heißt, der Zahl der Ecken im Randkreis der Konfiguration, ab. Auch maschineller Behandlung sind Ringgrößen über 18 heute noch schwer zugänglich. Allerdings hat HEESCH festgestellt und wahrscheinlichkeitstheoretisch begründet, daß – über den Daumen gepeilt – Konfigurationen mit

$$\text{Anzahl der Ecken im Innern} > \frac{3 \cdot \text{Ringgröße}}{2} - 6 \quad (7)$$

im allgemeinen algorithmisch als reduzibel erkannt werden können. Außerdem hat er auch leicht erkennbare Hindernisse für solche Nachweise gefunden, so daß man weiß, welchen Konfigurationen man bei der Suche nach einer unvermeidbaren Menge reduzibler Konfigurationen möglichst aus dem Weg gehen sollte.

Nun zur Suche nach einer geeigneten unvermeidbaren Menge. Hierfür erfand HEESCH die Entladungsprozeduren. Die Terminologie lehnt an den physikalischen Vorgang der Kondensatorentladung an; die Verfahren selbst bestehen in einer geschickten Auswertung der Gleichung (6), die man in den noch zu betrachtenden Fällen auch folgendermaßen schreiben kann:

$$v_5 - v_7 - 2\,v_8 - \ldots - (s-6)\,v_s = 12\,,$$

wobei s das Maximum der vorkommenden Grade von Ecken bezeichnet. Zu Beginn wird jeder Ecke die Ladung $60 \cdot (6 - \text{Grad der Ecke})$ zugeordnet; der Faktor 60 wird gewählt, um Brüche möglichst zu vermeiden. Aus (6) folgt, daß die Gesamtladung des Systems 720 beträgt; diese wird im Laufe des Verfahrens nicht verändert. Deshalb sollte man eigentlich besser von »Umladung« statt von »Entladung« sprechen; dieser Ausdruck wird allerdings dadurch gerechtfertigt, daß man Ladung von den positiv geladenen 5-Ecken wegschiebt. Ein einfaches Beispiel für eine Entladung ist das folgende: Jede 5-Ecke gebe an jede benachbarte schwere Ecke – darunter verstehe man eine Ecke mit einem Grad größer-gleich 7 – die Ladungsmenge 12 ab. Dann kann man folgendes erschließen: 5-Ecke mit lauter schweren Ecken als Nachbarn haben keine Ladung mehr. Ecken mit einem Grad $d \geq 8$ haben höchstens die Ladung $12 \cdot d$ aufgenommen; aus ihrer Anfangsladung $60\,(6-d)$ errechnet man

$$60\,(6-d) + 12\,d = 360 - 48\,d \leq 360 - 384 = -24\,,$$

also negative Endladung. Da die Gesamtladung aber positiv ist, muß es deshalb entweder mindestens eine 7-Ecke geben, die positiv aufgeladen wurde, oder eine 5-Ecke, die nicht vollständig entladen wurde. Im zweiten Fall hat man entweder zwei benachbarte 5-Ecken (Abb. 7, rechts oben) oder eine zu einer 6-Ecke benachbarte 5-Ecke (Abb. 7, rechts unten). Der erste Fall kann nur eintreten, wenn eine 7-Ecke mindestens sechs benachbarte 5-Ecken hat; dann sind aber unter diesen auch mindestens zwei benachbart (Abb. 8). Also hat man auf jeden Fall zwei benachbarte 5-Ecken A und B oder eine zu einer 6-Ecke B benachbarte 5-Ecke A. Nimmt man für beide Situationen die zu A und B benachbarten Ecken sowie die verbindenden Kanten hinzu, so erhält man zwei Konfigurationen, und das ganze Vorgehen zeigt, daß die Menge, die aus diesen beiden Konfigurationen und den Sternen einer 3-Ecke und einer 4-Ecke besteht, das heißt die in Abbildung 7 gezeigte Menge von Konfigurationen, unvermeidbar ist. Dies ist ein einfaches Beispiel für eine Entladungsprozedur, aber kein sehr hilfreiches; die erhaltenen Konfigurationen trotzen Reduktionsversuchen. Das kann man auch an der Faustformel (7) sehen: Man hat zwei innere Punkte, aber Ringgrößen 6 und 7 und damit für die rechte Seite von (7) die Werte 3 beziehungsweise 4½, also in jedem Fall größer als 2. Jedoch das Prinzip ist klar; man kann die Hemdsärmel hochkrempeln und mit der Arbeit beginnen. Das haben KENNETH APPEL (* 1932) und WOLFGANG HAKEN (* Berlin 1928) in der Zeit vom Herbst 1972 an getan; Ende 1974 stieß der graduierte Student JOHN KOCH zu ihnen, der sich vor allem um die Reduzibilitätsrechnungen kümmerte. Mit genialen Entladungsmethoden erreichten sie das ersehnte Ziel und legten Ende Juni 1976 den in der skizzierten Weise geführten Beweis des Vierfarbensatzes vor ([2], [3]).

Häufig wird die Frage gestellt: Haben APPEL, HAKEN und KOCH denn auf diese Weise wirklich einen Beweis geliefert, und wie ist er nachprüfbar? Ihre Veröffentlichung umfaßt 50 Druckseiten Text und Zeichnungen von Figuren, rund 85 Druckseiten mit fast

25000 weiteren Zeichnungen und 400 Microfiche-Seiten mit weiteren Zeichnungen und Tausenden von Verifikationen kleinerer Zwischenbehauptungen. Der Computereinsatz erfolgte hauptsächlich zum Nachweis der Reduzibilität der im Laufe des Entladungsprozesses erhaltenen Figuren. Daß sich Reduzibilität mit Hilfe eines Computers nachweisen läßt, das unterliegt keinem Zweifel; auch der Korrektheit solcher Ergebnise, wenn sie von erfahrenen Mathematikern erzielt wurden, kann man vertrauen. Der Haken liegt eigentlich woanders. Die Buchführung der Figuren, der Nachweis, daß die erhaltene Menge von 1825 reduziblen Figuren unvermeidbar ist, das ist im wesentlichen Handarbeit. Daß hierbei Schreibfehler und Rechenfehler auftreten, ist selbstverständlich. Ein Student der Elektrotechnik der Technischen Hochschule Aachen, ULRICH SCHMIDT, listete 1980/81 eine Reihe von solchen Fehlern auf. Bis auf einen waren sie leicht zu beheben, der übrigbleibende erforderte aber eine gewisse Änderung der verwendeten Entladungsprozedur. APPEL und HAKEN sind der Meinung, daß ihr Verfahren genügend viel Freiheit läßt, um alle diese schon gefundenen und noch zu entdeckenden Irrtümer auszumerzen. Ein Unbehagen bleibt, da es eben keine a priori-Begründung dafür gibt, daß eine endliche unvermeidbare Menge existiert. APPEL und HAKEN argumentieren hierfür wahrscheinlichkeitstheoretisch, sehr plausibel, aber überzeugend? Das ist ja hier anders als bei der sensationellen Nachricht in der Februarnummer 1989 der Communications of the Association for Computing Machinery, daß CRAY, ein amerikanischer Großrechner, die Nichtexistenz von endlichen Ebenen der Ordnung 10 bewiesen hat. Hier geht es im Prinzip nur darum, alle möglichen 0-1-Einträge in eine 100×110-Matrix auf gewisse Eigenschaften zu überprüfen; aber die Menge dieser Möglichkeiten ist eben endlich, wenn auch mit 2^{11000} Elementen riesengroß. Sehr viel tiefe Mathematik mußte eingesetzt werden, die Zahl der notwendigen Rechenoperationen so zu reduzieren, daß CRAY das Programm in endlicher Zeit – man spricht von drei bis vier Jahren, viel mehr als bisher für das Vierfarbenproblem aufgewandt wurde – bewältigen konnte.

APPEL und HAKEN selbst beschäftigen sich intensiv mit der Überprüfung ihrer Arbeit. Sie konnten inzwischen die Größe ihrer unausweichlichen Menge auf 1478 Figuren reduzieren. Auch bitten sie um Mitteilung jedweden entdeckten Fehlers »*we ... would be grateful for any information on further bookkeeping (or other) errors whenever such are found.*« Schließlich planen sie eine revidierte Fassung zu veröffentlichen, die dann – vollständig gedruckt – allgemein zugänglich sein wird. Daneben wartet der seinerzeit von HEESCH skizzierte andere Zugang auf Verwirklichung und – vielleicht hat jemand noch eine ganz andere Idee? So hat das Vierfarbenproblem, obwohl als gelöst anzusehen, doch noch nicht seinen Reiz verloren.

Literatur

[1] M. AIGNER: Graphentheorie – Eine Entwicklung aus dem 4-Farbenproblem (Teubner-Studienbücher Mathematik). Stuttgart: Teubner 1984.

[2] K. APPEL – W. HAKEN: Every planar map is four colorable, Part I: Discharging. – Illinois Journal of Mathematics **21** (1977) 429–490.

[3] K. APPEL – W. HAKEN – J. KOCH: Every planar map is four colorable, Part II: Reducibility. – Illinois Journal of Mathematics **21** (1977) 491–567.

[4] K. APPEL – W. HAKEN: The Four-Color-Problem. In: Mathematics Today, herausgegeben von L. A. STEEN, 153–180. – New York/Heidelberg/Berlin: Springer-Verlag 1978.

[5] K. APPEL – W. HAKEN: The four color proof suffices. – The Mathematical Intelligencer **8** (1986) 10–20.

[6] H.-G. BIGALKE: Heinrich Heesch (Vita Mathematica 3). – Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser Verlag 1988.

[7] G. D. BIRKHOFF: The reducibility of maps. – American Journal of Mathematics **35** (1913) 115–128.

[8] R. P. GRAVES: Life of Sir William Rowan Hamilton. – Dublin 1889.

[9] F. GUTHRIE: Note on the colouring of maps. – Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **10** (1880) 727–728.

[10] P. J. HEAWOOD: Map-colour theorems. – The Quarterly Journal of Mathematics **24** (1890) 332–338.

[11] H. HEESCH: Untersuchungen zum Vierfarbenproblem (B.I-Hochschulskripten 810/810 a/810 b). – Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut 1969.

[12] A. B. KEMPE: On the geographical problem of the four colors. – American Journal of Mathematics **2** (1879) 193–200.

[13] K. WAGNER: Graphentheorie (B.I-Hochschultaschenbücher 248/248*). – Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut 1970. □