MNU

Jahrgang 42
Heft 1–8
Jan.–Dez. 1989

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

Mathematik
Physik
Biologie
Chemie

DÜMMLER

Mathematisches Institut
der Universität München

FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

Vorstand

Ehrenvorsitzender	OStD Prof. Dr. Fr. MUTSCHELLER, Wohnstift Augustinum, Jasperstr. 2, 6900 Heidelberg. Tel. 0 62 21/38 86 68
Ehrenvorsitzender	OStD i. R. A. KLEIN, Stachelsweg 28, 5000 Köln 91. Tel. 02 21/ 86 22 61
1. Vorsitzender	OStD H. LOCHHAAS, Ringstr. 105, 6101 Roßdorf über Darmstadt. Tel. 0 61 54/92 81
2. Vorsitzender	OStD Dr. H. WAMBACH, Preußenstr. 20, 4040 Neuss 1. Tel. 0 21 01/8 36 81
Geschäftsführer	StD Friedr. BECKER, Bielfeldtstr. 14, 2000 Hamburg 50. Tel. 0 40/8 80 67 81

Postgirokonto: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hamburg 439 19–202, BLZ 200 100 20.

Beisitzer

Mathematik	StD F. BARTH, Abbachstr. 23, 8000 München 50. Tel. 0 89/1 41 36 46
Physik	OStD P. WESSELS, Arensburgstr. 28, 2800 Bremen. Tel. 04 21/44 37 03
Chemie	StD W. ASSELBORN, Konrad-Adenauer-Allee 26, 6630 Saarlouis. Tel. 0 68 31/8 36 04
Biologie	Prof. Dr. M. KEIL, Kurt-Lindemann-Str. 29, 6903 Neckargemünd. Tel. 0 62 23/7 23 53
Informatik und Information	StD D. POHLMANN, Heidmühlenweg 59 d, 2200 Elmshorn. Tel. 0 41 21/9 40 30
MNU-Haupt-Schriftleiter	Prof. Dr. H. SCHMIDT, Am Pleisbach 28, 5205 St. Augustin 1

Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abonnement offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,– (für Pensionäre DM 52,–); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,– Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

FERD. DÜMMLER[S] VERLAG

DÜMMLERhaus
Kaiserstraße 31–37
Postfach 14 80
5300 Bonn 1
Tel. 02 28/22 30 31

MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 82,–, Einzelheft DM 12,–, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben.

Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987.

Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif.

Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:
Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,
4190 Kleve, Tel. 0 28 21/90 76

Copyright/Fotokopien

Sämtliche Rechte liegen beim Verlag Dümmler, Bonn. Die Zeitschrift und ihre Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Inhaltsverzeichnis

Abhandlungen - Beiträge zur Schulpraxis - Zur Diskussion gestellt

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Fächerübergreifendes - Allgemeines

Aufgaben, Lehrmittel, Diskussion und Kritik

Mitteilungen

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Aus den Landesverbänden

Allgemeines, Kurzberichte, Hinweise

Tagungen, Veranstaltungen

Besprechungen

Zeitschriften

Bücher

Mathematik

Physik

Chemie

Biologie

Allgemeines

Schriftleitung der Zeitschrift MNU

Hauptschriftleitung
Prof. Dr. rer. nat. Helmut Schmidt
Am Pleisbach 28,
5205 St. Augustin 1,
0 22 41 / 33 42 73

Fachschriftleitung

Mathematik: OStD Gert Starke
Wittenbrook 14 a,
2300 Kiel 17,
04 31 / 36 23 12

Physik: MinR Herwig Krüger
Untereisselner Str. 33,
2305 Heikendorf,
04 31 / 24 15 38

Chemie: StD Ottheinrich Düll
Breidenbornerstr. 8,
6750 Kaiserslautern,
06 31 / 9 28 83

Biologie: Prof. Dr. Karl-Heinz Berck
Institut für Biologiedidaktik der Universität,
Karl-Glöckner-Str. 21 C,
6300 Gießen,
06 41 / 8 14 62

Redaktionelle Zuschriften an den zuständigen Fachschriftleiter erbeten. Für die Gestaltung der Beiträge gelten die Manuskriptabfassungsrichtlinien in ihrer jeweils jüngsten Fassung, wie sie in Abständen in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht
Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

42. Jahrgang, Heft 1 ISSN 0025-5866 15. Januar 1989

In der Mitte dieses Heftes befinden sich Einladung und Programm zur 80. MNU-Hauptversammlung in Darmstadt und die Anmeldekarten.

Herausgeber der Zeitschrift MNU

Prof. Dr. HELMUT SCHMIDT (Hauptschriftleiter)
Am Pleisbach 28,
5205 St. Augustin 1,
0 22 41 / 33 42 73

OStD GERT STARKE (Fachschriftleiter **Mathematik**)
Wittenbrook 14a,
2300 Kiel 17,
04 31 / 36 23 12

MinR HERWIG KRÜGER (Fachschriftleiter **Physik**)
Untereisselner Str. 33,
2305 Heikendorf,
04 31 / 24 15 38

StD OTTHEINRICH DÜLL (Fachschriftleiter **Chemie**)
Breidenbornerstr. 8,
6750 Kaiserslautern,
06 31 / 9 28 83

Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK (Fachschriftleiter **Biologie**)
Institut für Biologiedidaktik der Universität,
Karl-Glöckner-Str. 21C,
6300 Gießen,
06 41 / 8 14 62

Adressenänderungen bitte nur dem Dümmler-Verlag mitteilen.
Redaktionelle Zuschriften an den zuständigen Fachschriftleiter erbeten.

FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

Vorstand

Ehrenvorsitzender	OStD Prof. Dr. Fr. MUTSCHELLER, Wohnstift Augustinum, Jasperstr. 2, 6900 Heidelberg. Tel. 0 62 21/38 86 68
Ehrenvorsitzender	OStD i. R. A. KLEIN, Stachelsweg 28, 5000 Köln 91. Tel. 02 21/ 86 22 61
1. Vorsitzender	OStD H. LOCHHAAS, Ringstr. 105, 6101 Roßdorf über Darmstadt. Tel. 0 61 54/92 81
2. Vorsitzender	OStD Dr. H. WAMBACH, Preußenstr. 20, 4040 Neuss 1. Tel. 0 21 01/8 36 81
Geschäftsführer	StD Friedr. BECKER, Bielfeldtstr. 14, 2000 Hamburg 50. Tel. 0 40/8 80 67 81

Postgirokonto: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hamburg 439 19–202. Bankleitzahl 200 100 20

Beisitzer

Mathematik	StD F. BARTH, Abbachstr. 23, 8000 München 50. Tel. 0 89/1 41 36 46
Physik	OStD P. WESSELS, Arensburgstr. 28, 2800 Bremen. Tel. 04 21/44 37 03
Chemie	StD W. ASSELBORN, Konrad-Adenauer-Allee 26, 6630 Saarlouis. Tel. 0 68 31/8 36 04
Biologie	OStR K. THAMERUS, Walther-Bothe-Str. 9, 7500 Karlsruhe 41. Tel. 07 21/47 41 42
Informatik und Information	StD D. POHLMANN, Heidmühlenweg 59 d, 2200 Elmshorn. Tel. 0 41 21/9 40 30
MNU-Haupt-Schriftleiter	Prof. Dr. H. SCHMIDT, Am Pleisbach 28, 5205 St. Augustin 1

Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abonnement offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,- (für Pensionäre DM 52,-); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,- Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

FERD. DÜMMLER^S VERLAG

DÜMMLERhaus
Kaiserstraße 31–37
Postfach 14 80
5300 Bonn 1
Tel. 02 28/22 30 31

MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 82,-. Einzelheft DM 12,-, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben.

Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987.

Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif.

Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:
Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,
4190 Kleve, Tel. 0 28 21/90 76

Copyright/Fotokopien

Sämtliche Rechte liegen beim Verlag Dümmler, Bonn. Die Zeitschrift und ihre Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Schulpraxis

Transzendenz von e im Leistungskurs?[1]

Verfasser: Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 39, 8000 München 2

Der von Hilbert angegebene Transzendenzbeweis für die Eulersche Zahl e wurde für einen Leistungskurs des 13. Jahrgangs aufbereitet.

1 Mathematik gilt als schweres Schulfach, das aber wegen des ständigen Auftretens mathematischer Problemstellungen im täglichen Leben, insbesondere in unserer vom Computer bestimmten Zeit, unvermeidlich ist. Die Rechtfertigung für den intensiven Mathematik-Unterricht an unseren Schulen wird zumeist in den Anwendungen gesehen, die die Mathematik im Alltag hat. Darüber sollten wir aber nicht vergessen, daß der Auftrag unserer allgemeinbildenden Schulen auch dahin geht, die Schüler zu logischem Denken zu erziehen und ihnen etwas vom geistigen Hintergrund und von rein abstrakten Fragestellungen der Mathematik nahezubringen, die große Denker über Jahrhunderte bewegt haben. Einen wichtigen Themenkreis, der in diesem Zusammenhang angesprochen werden sollte, bildet sicherlich der Aufbau des Zahlensystems. Hierzu will ich heute einen Punkt besonders diskutieren: den Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten reellen Zahlen. Zunächst erinnere ich an die Begriffsbildung:

Definition: *Eine reelle Zahl x ist algebraisch, wenn es eine natürliche Zahl $n\,(>0)$ und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt derart, daß gilt*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (1)$$

das heißt, wenn x Nullstelle einer ganzrationalen Funktion positiven Grades mit ganzen Koeffizienten ist.

Beispiele: 1) Rationale Zahlen sind algebraisch: Eine rationale Zahl x läßt sich in der Form $x = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}^*$ darstellen, was auf die Gleichung

$$qx - p = 0$$

führt. Man nimmt $n = 1$, $a_0 = -p$ und $a_1 = q$.

2) Die Zahl $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch: Da $x^2 - 2 = 0$ gilt, kann man $n = 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ nehmen.

3) Die Zahl $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist algebraisch. Um das einzusehen, berechnet man zunächst $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; das ist gleichbedeutend mit $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Daraus folgt durch abermaliges Quadrieren

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0\,.$$

Man findet $n = 4$, $a_0 = a_4 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = -10$.

Als Lehrer wissen Sie aus der Algebra-Vorlesung, daß alle Zahlen algebraisch sind, die sich aus rationalen Zahlen durch Wurzelziehen, Bilden von Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten und Iteration dieser Prozesse gewinnen lassen. Manchmal ist es

[1] Vortrag am 29. März 1988 auf der 79. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Kiel.

MNU 42/2 (1. 3. 1989) Seiten 75-80 ISSN 0025-5866 © FERD. DÜMMLER's VERLAG · BONN

sehr trickreich, zu einer vorgegebenen Zahl dieser Bauart eine passende Gleichung zu finden, aber es geht immer! Dadurch haben wir für den Unterricht eine Vielzahl von Beispielen und Übungsmöglichkeiten. Irgendwann sollte man dabei die folgende einfache Tatsache feststellen.

Bemerkung: Ist x eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so kann eine Gleichung der Form (1) mit der zusätzlichen Eigenschaft $a_0 \neq 0$ gefunden werden. Ist nämlich zunächst ein $k > 0$ der kleinste Index mit $a_k \neq 0$, das heißt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_k x^k = 0\,,$$

so kann man durch x^k dividieren und erhält

$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \ldots + a_k = 0\,,$$

eine Gleichung der gewünschten Art. (Unter der Voraussetzung $a_n \neq 0 \neq x$ gilt offensichtlich $k < n$, also $n - k > 0$.)

2 Aus Mächtigkeitsüberlegungen im Sinne der Mengenlehre folgt unmittelbar, daß es auch nichtalgebraische reelle Zahlen geben muß; über Mächtigkeiten wird man wohl im normalen Unterricht kaum reden. Da sollte man zunächst nur sagen, daß die Begriffsbildung »algebraische (reelle) Zahl« sich nicht gelohnt hätte, wenn alle reellen Zahlen algebraisch wären, und dann den neuen Begriff einführen.

Definition: *Eine reelle Zahl ist transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist.*

Hierbei muß man auch etwas auf die historische Entwicklung des Zahlbegriffs eingehen. Ich kann das jetzt nicht ausführen und verweise auf die Literatur: Einen kurzen Überblick zum Kapitel *algebraische* versus *transzendente* Zahlen findet man in TROPFKE [13; S. 139 ff.], dem Standardwerk zur Geschichte der Elementarmathematik – gemeint ist Schulmathematik –, von dessen 4. Auflage allerdings bisher nur der erste Band erschienen ist. Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem auch sonst sehr lesenswerten Aufsatz von ARTMANN, SPALT und GERECKE [2]. Jetzt möchte ich nur darauf hinweisen, daß die endgültige Klärung des Transzendenzbegriffes um das Jahr 1840 durch den französischen Mathematiker JOSEPH LIOUVILLE erfolgte, der auch die ersten Transzendenzbeweise führte [10]. Die von ihm als transzendent erkannten Zahlen heißen heute zu seinen Ehren »Liouvillesche Zahlen«; sie werden in ARTMANN [1] ausführlich dargestellt, eignen sich jedoch meines Erachtens nicht so sehr für den gymnasialen Unterricht, weil sie recht künstlich und nur für diesen Zweck konstruiert sind, sonst im mathematischen Alltag aber nicht auftreten. Interessant erscheint die Frage nach der Transzendenz bei Zahlen wie der Kreiszahl π – das hängt mit dem uralten Problem der Quadratur des Kreises zusammen – und der Eulerschen Zahl e, der Basis der Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmen. Der ebenfalls französische Mathematiker CHARLES HERMITE konnte im Jahr 1873 [5] zeigen:

Die Eulersche Zahl e ist transzendent.

Darauf aufbauend, unter zusätzlicher Benutzung der Integration im Komplexen, bewies der Deutsche FERDINAND LINDEMANN im Jahr 1882 [9]:

Die Kreiszahl π ist transzendent.

Es dürfte von vornherein jedem Schüler klar sein, daß der Nachweis der Transzendenz einer vorgelegten Zahl, zu dem man alle ganzrationalen Funktionen positiven Grades mit ganzen Koeffizienten in Betracht zu ziehen hat, sich im allgemeinen wesentlich schwieriger gestalten wird als das Aufsuchen geeigneter Koeffizienten für eine gegebene algebraische Zahl. Insofern kann man sich fragen, ob echte Transzendenzbeweise in der Schule überhaupt behandelt werden können. Ich bin der Meinung, daß das für die Eulersche Zahl durchaus möglich ist. Im Gegensatz zu den Herren ARTMANN, SPALT und GERECKE, die ein integrationsfreies, von Herrn KARCHER beschriebenes, auf A. HURWITZ [7] zurückgehendes Verfahren benutzen, möchte ich jedoch vorschlagen, den Ideen von HILBERT zu folgen, dem im Jahre 1893 eine wesentliche Vereinfachung [6] der HERMITEschen und LINDEMANNschen Überlegungen gelang. Die zusätzlichen »Elementarisierungen«, etwa auch durch Zurückführung auf Potenzreihen wie in PERRONS Buch [12] haben meines Erachtens keine echten Vereinfachungen mehr gebracht. Leider geht dasselbe nicht für Transzendenz von π; auch der HILBERTsche Beweis verwendet die Integration im Komplexen, die in der Schule nicht zur Verfügung steht.

3 Bevor ich nun auf Einzelheiten des Beweises der Transzendenz von e eingehe, möchte ich Herrn OStD KRATZ, der es vermittelte, und Herrn OStR KOLLMANN, Kursleiter eines Leistungskurses der 13. Jahrgangsstufe am MAX-BORN-Gymnasium in Germering bei München, der es ermöglichte und vorbereitete, dafür danken, daß ich meine Vorstellungen auch einmal in zwei Schulstunden, genauer: in einer durch eine Pause unterbrochenen Doppelstunde, wirklich ausprobieren konnte. Ich habe natürlich nicht mit Hilfe eines Testes nachgeprüft, wieviel von meinem Unterricht bei den Schülern hängen geblieben ist; aber ich hatte doch den Eindruck, daß die Schüler meinem Unterrichtsversuch mit einem gewissen Verständnis folgten.

Der Beweis geht nicht direkt von einer möglichen Definition von e aus, sondern er verwendet eine abgeleitete Eigenschaft der Exponentialfunktion. Er baut auf der folgenden Tatsache auf.

B e w e i s g r u n d l a g e : *Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt*

$$\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx = k!. \qquad (2)$$

Das ist mit Hilfe partieller Integration und vollständiger Induktion leicht zu beweisen. In den bayerischen Lehrplänen ist allerdings die Behandlung der vollständigen Induktion nicht mehr vorgesehen, und die partielle Integration kommt erst am Schluß des Leistungskurses, wenn man für die Transzendenz von e sicherlich keine Zeit mehr hat. Für meinen Unterrichtsversuch hat der Kursleiter diese Eigenschaft nach meinem folgenden Vorschlag hergeleitet (hinter dem sich natürlich beide Methoden verbergen, was man im Unterricht nicht zu sagen braucht): Zunächst zeigt man (siehe etwa [3, S. 104])

$$\lim_{x \to \infty} x^k \cdot e^{-x} = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}^*. \qquad (3)$$

Ebenfalls für alle $k \in \mathbb{N}^*$ sei dann f_k die durch

$$x \mapsto x^k \cdot e^{-x}; \ x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion und F_k sei die (wegen der Stetigkeit von f_k existierende und) durch die Bedingung $F_k(0) = 0$ eindeutig bestimmte Stammfunktion zu f_k. Durch Differenzieren bestätigt man, daß für $k > 0$ auch die Funktion

$$\overline{F}_k : x \mapsto k \cdot F_{k-1}(x) - x^k \cdot e^{-x}; \ x \in \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion zu f_k ist. Da die Differenz zweier Stammfunktionen zur gleichen Funktion eine konstante Funktion und $\overline{F}_k(0) = 0 = F_k(0)$ ist, gilt

$$\overline{F}_k = F_k. \qquad (4)$$

Daraus folgt

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \to \infty} \int_0^{\bar{x}} x^k e^{-x} dx =$$

nach Definition des uneigentlichen Integrals

$$= \lim_{\bar{x} \to \infty} (F_k(\bar{x}) - F_k(0)) = \lim_{\bar{x} \to \infty} F_k(\bar{x})$$

nach $F_k(0) = 0$

$$= \lim_{\bar{x} \to \infty} \overline{F}_k(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \infty} (k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) - \bar{x}^k \cdot e^{-\bar{x}})$$

nach (4) und Definition von $\overline{F}_k$

$$= \lim_{\bar{x} \to \infty} k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) = k \cdot \lim_{\bar{x} \to \infty} F_{k-1}(\bar{x})$$

nach (3),

falls nur $\lim_{\bar{x} \to \infty} F_{k-1}(\bar{x})$ existiert. Nun gilt aber $F_0(\bar{x}) = 1 - e^{-\bar{x}}$ für alle $\bar{x} \in \mathbb{R}$; also existiert $\lim_{\bar{x} \to \infty} F_0(\bar{x})$ und hat den Wert 1. Die Gleichungskette zeigt, daß daraus der Reihe nach folgt:

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \to \infty} F_1(\bar{x}) = 1$$

$$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \to \infty} F_2(\bar{x}) = 2$$

$$\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \to \infty} F_3(\bar{x}) = 6$$

$$\vdots$$

$$\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \to \infty} F_k(\bar{x}) = k!,$$

was zu beweisen war. Nebenbei sei noch bemerkt, daß die Gleichung (4) eine explizite Darstellung der Funktionen F_k durch rekursive Berechnung ermöglicht und daß die Gleichung (2) für die Definition der Γ-Funktion von grundlegender Bedeutung ist.

Als H i l f s m i t t e l werden der für alle $x \in \mathbb{R}$ geltende Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \qquad (5)$$

und die verallgemeinerte Dreiecksungleichung benötigt:

Für beliebige reelle Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$|x_0 + x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_0| + |x_1| + \ldots + |x_n|. \qquad (6)$$

Zum Nachweis des Grenzwertes (5) überlegt man, daß das $(k+1)$-ste Folgenglied aus dem k-ten Glied durch Multiplikation mit dem Faktor $x/(k+1)$ entsteht. Bei gegebenem x gilt für alle $k > 2|x|$, daß der hinzukommende Faktor kleiner als ½ ist, also von einer bestimmten Stelle an das nächste Glied immer – dem Betrage nach – kleiner ist als die Hälfte des vorangehenden. Damit muß es sich um eine Nullfolge handeln. – Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung (6) ist offensichtlich richtig, wenn alle auftretenden x_i das gleiche Vorzeichen haben; dann gilt sogar Gleichheit. Im anderen Fall hebt sich auf der linken Seite einiges auf, während rechts weiterhin alle x_i ihren vollen Betrag einbringen.

4 Nun wenden wir uns dem eigentlichen Beweis zu. Er wird üblicherweise in der Form eines Widerspruchsbeweises geführt. Die Erfahrung zeigt aber, daß man sich dabei häufig fragt, wo der Widerspruch eigentlich steckt. Es hat sich unter Mathematikern die Unsitte eingeschlichen, daß man nahezu alles und jedes durch Widerspruch beweist, obwohl oft der direkte Weg einfacher ist; dies sollte man sich möglichst abgewöhnen. Auch hier ist der Beweissatz viel leichter zu verstehen, wenn man die zu beweisende Aussage positiv formuliert. Man zeigt:

Für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \neq 0$ und $a_n \neq 0$ gilt

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0 \neq 0. \qquad (7)$$

B e w e i s i d e e : Es seien solche Zahlen $n, a_0, \ldots, a_n$ vorgegeben. Wir konstruieren Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt

$$r \cdot (a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0) = s + p \qquad (8)$$

mit $$|s| < 1 \qquad (9)$$

und $$p \neq 0. \qquad (10)$$

Da p eine ganze Zahl sein soll, ergibt sich aus (9) und (10), daß die rechte Seite der Gleichung (8) von Null verschieden ist; dann kann aber auch keiner der Faktoren links verschwinden, woraus (7) folgt. (Ähnliche Ideen liegen auch anderen Transzendenz- sowie Irrationalitätsbeweisen zugrunde.)

Zur Ausführung dieser Idee definieren wir zwei Hilfsfunktionen:

$$g: x \mapsto x(x-1)(x-2)\ldots(x-n); \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$h: x \mapsto (x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,e^{-x}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem fixieren wir ein $k \in \mathbb{N}^*$, zunächst beliebig, aber später so, daß gewisse Bedingungen erfüllt sind, und definieren damit eine weitere Funktion

$$f: x \mapsto g(x)^k \cdot h(x); \quad x \in \mathbb{R},$$

das heißt

$$f(x) = x^k \cdot [(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n)]^{k+1} \cdot e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Multiplizieren wir die auftretenden Klammern aus, so erhalten wir für $f(x)$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot x^j \qquad (11)$$

mit $b_j \in \mathbb{Z}$ für alle vorkommenden j. Insbesondere haben wir $b_k = \pm(n!)^{k+1}$; auf das Vorzeichen von b_k und die genauen Werte der übrigen $b_j (j > k)$ kommt es im folgenden nicht an.

Hier möchte ich eine Überraschung erwähnen, die ich bei meinem Unterricht erlebte. Ich kenne die große Scheu vor der Verwendung des Summenzeichens »Σ« im Schulunterricht; es wird zwar in den Lehrbüchern eingeführt (siehe zum Beispiel [8; S. 193]), aber der Umgang damit wird nicht geübt. So versuchte ich es auch hier zu umgehen und sagte den Schülern etwa das folgende: Durch Ausmultiplizieren erhält man eine Summe von Termen der Form $b \cdot x^j$ mit $k \leq j \leq k + n(k+1)$ und $b \in \mathbb{Z}$. Im Fall $j = k$ hat b den speziellen Wert $\pm(n!)^{k+1}$. Dann habe ich im folgenden immer nur entsprechende Summanden einzeln angeschrieben und gesagt, daß man sich dabei die ganzen Summen denken müsse. Das kam gar nicht an, die Schüler konnten sich das Zusammenspiel dieser Summanden nicht vorstellen. Glücklicherweise wurde der Unterricht an dieser Stelle durch die Pause unterbrochen, in der mir die Schüler klarmachten, daß sie die Sache mit Verwendung des Summenzeichens besser verstehen würden.

Zurück zum Thema: Wir betrachten das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot \int_0^\infty x^j \cdot e^{-x} dx.$$

Wegen (2) sind die einzelnen Integrale unter der Summe ganze, durch $k!$ teilbare, für $j > k$ sogar durch $(k+1)!$ teilbare Zahlen. Da auch alle Koeffizienten b_j ganze Zahlen sind, ergibt sich

$$w_0 = \pm(n!)^{k+1} \cdot k! + c_0 \cdot (k+1)! \qquad (12)$$

mit $c_0 \in \mathbb{Z}$. Wir setzen

$$r = \frac{w_0}{k!} = \pm(n!)^{k+1} + c_0 \cdot (k+1); \qquad (13)$$

später werden wir Bedingungen für die noch beliebige Zahl k formulieren, die garantieren, daß die so definierte Zahl r tatsächlich zur Herstellung einer Gleichung der Form (8) mit den angegebenen Nebenbedingungen verwendet werden kann.

Als nächsten Schritt spalten wir w_0 für $i = 1, \ldots, n$ auf in der Form

$$w_0 = v_i + w_i$$

mit

$$v_i = \int_0^i f(x)\,dx, \quad w_i = \int_i^\infty f(x)\,dx.$$

So erhalten wir für $r \cdot (a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0)$ eine Zerlegung der Form

$$\frac{v_n a_n e^n + \ldots + v_1 a_1 e}{k!} + \frac{w_n a_n e^n + \ldots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!};$$

es bleibt zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von k die Zahlen

$$s = \frac{v_n a_n e^n + \ldots + v_1 a_1 e}{k!}$$

und

$$p = \frac{w_n a_n e^n + \ldots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

Betrachten wir zunächst p. Der Graph der Funktion f, eingeschränkt auf den Bereich $x \geq i$, bestimmt dieselbe Fläche wie der Graph der Funktion $\tilde{f}: \tilde{x} \mapsto f(\tilde{x} + i)$; $\tilde{x} \geq 0$. Also gilt für $i > 0$

$$w_i = \int_0^\infty (\tilde{x}+i)^k [(\tilde{x}+i-1)(\tilde{x}+i-2)\ldots\tilde{x}\ldots (\tilde{x}+i-n)]^{k+1} e^{-\tilde{x}-i} d\tilde{x}.$$

Das ist natürlich eine Integration durch Substitution. Diese Integrationsmethode war meinen Schülern noch nicht bekannt. Da es sich hier aber nur um eine einfache Verschiebung des Ursprungs handelt, hatten sie keine Schwierigkeiten.

Indem wir den Faktor e^{-i} aus dem Integral herausziehen und die Integrationsvariable wieder in x umbenennen, erhalten wir

$$w_i = e^{-i} \cdot \int_0^\infty (x+i)^k [(x+i-1)(x+i-2)\dots x \dots (x+i-n)]^{k+1} e^{-x} dx.$$

Da in der eckigen Klammer das x »rein« vorkommt, ist der Integrand nun von der Form

$$\sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \bar{b}_j \cdot x^j$$

mit $\bar{b}_j \in \mathbb{Z}$ für alle vorkommenden j, das heißt

$$w_i = e^{-i} \cdot \sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \bar{b}_j \int_0^\infty x^j e^{-x} dx.$$

Jetzt folgt aus (2), daß jedes einzelne Integral unter der Summe durch $(k+1)!$ teilbar ist, das heißt, daß w_i die Form

$$w_i = e^{-i} \cdot c_i \cdot (k+1)!$$

mit $c_i \in \mathbb{Z}$ besitzt. Zusammenfassend ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned} p &= (c_n a_n + \dots + c_1 a_1 + c_0) \cdot (k+1) \pm (n!)^{k+1} \cdot a_0 \\ &= c \cdot (k+1) \pm (n!)^{k+1} \cdot a_0 \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{Z}$. Also ist p eine ganze Zahl und sicherlich dann von Null verschieden, wenn wir k so wählen, daß $k+1$ eine genügend große Primzahl ist, größer als n und a_0. (Da $(n!)^{k+1} \cdot a_0$ sicherlich von Null verschieden ist, könnte ja p nur dann gleich Null sein, wenn $(n!)^{k+1} \cdot a_0$ durch $k+1$ teilbar wäre; das ist aber bei einer solchen Wahl von k ausgeschlossen.)

Zur Untersuchung von s betrachten wir die Einschränkungen der Funktionen g, h und f auf das Intervall $[0, n]$. Da es sich dabei wieder um stetige Funktionen handelt, sind sie beschränkt, das heißt, es gibt zunächst positive reelle Zahlen G, H derart, daß für alle $x \in [0, n]$ gilt

$$|g(x)| \leq G, \quad |h(x)| \leq H,$$

woraus für dieselben x folgt

$$|f(x)| \leq G^k \cdot H.$$

Sollte der Satz von der Beschränktheit stetiger Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen nicht zur Verfügung stehen, so kann man auch direkt Schranken angeben. Für alle $x \in [0, n]$ gilt ja offensichtlich

$$|g(x)| \leq n^{n+1}, \quad |h(x)| \leq n^n;$$

wir nehmen $G = n^{n+1}$, $H = n^n$.

Ohne Betragszeichen läßt sich diese Ungleichung als Doppelungleichung schreiben:

$$-G^k \cdot H \leq f(x) \leq G^k \cdot H,$$

Daraus folgen für $i = 1, \dots, n$ die Integralabschätzungen

$$-G^k \cdot H \cdot i \leq v_i \leq G^k \cdot H \cdot i,$$

das heißt in der Betragsschreibweise

$$|v_i| \leq G^k \cdot H \cdot i.$$

Fassen wir diese zusammen, so erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (6)

$$\begin{aligned} |s| \cdot k! &= |v_n a_n e^n + \dots + v_1 a_1 e| \\ &\leq |v_n a_n e^n| + \dots + |v_1 a_1 e| \\ &\leq G^k \cdot H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \dots + 1 \cdot |a_1| \cdot e), \end{aligned}$$

wobei die Zahl

$$z = H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \dots + 1 \cdot |a_1| \cdot e)$$

nicht von k abhängt. Aus (5) folgt nun

$$\lim_{k \to \infty} \frac{G^k \cdot z}{k!} = \left(\lim_{k \to \infty} \frac{G^k}{k!} \right) \cdot z = 0,$$

also für genügend großes k

$$|s| \leq \frac{G^k \cdot z}{k!} < 1.$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, läßt sich nun sicher ein k finden derart, daß $|s| < 1$ und $p \neq 0$ ist. q.e.d.

Daß der Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen hier einmal angewandt werden kann, das war für die Schüler das i-Tüpfelchen auf meinem Unterrichtsversuch. – Sie haben gesehen, daß der Beweis, den ich hier vorgeführt habe, nur Begriffe und Methoden verwendet, die in normalen Leistungskursen behandelt werden. Einzelne Schritte können durchaus als Beispiel- und Übungsmaterial in den laufenden Unterricht eingebracht werden, vielleicht in noch expliziterer Form, etwa indem man das Integral w_0 für kleine Werte von n und k vollständig auswertet. Ich meine, daß bei entsprechender Planung und Vorbereitung wirklich nicht mehr als eine Doppelstunde notwendig ist, um diesen Beweis im Unterricht durchzuführen. Interessanter für die Schüler wäre natürlich noch ein darstellbarer Transzendenzbeweis für die Kreiszahl π; aber – wie schon gesagt – ein solcher liegt nicht vor. Mit der Aufforderung an Sie, danach zu suchen, möchte ich schließen.

5 In der Diskussion zum Vortrag wurde nach einfachen Beweisen für die Irrationalität von π gefragt. Der derzeit wohl einfachste für die Schule stammt von I. Niven [11] und verläuft folgendermaßen. Angenommen, $\pi = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}^*$. Abhängig von einem zunächst beliebigen $k \in \mathbb{N}^*$ definiert man Hilfsfunktionen

$$f: x \mapsto \frac{x^k \cdot (p - qx)^k}{k!}; \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F: x \mapsto f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^k f^{(2k)}(x); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nun stellt man fest, daß die Funktion f und alle ihre Ableitungen, also auch die Funktion F, an den Stellen 0 und π nur ganzzahlige Werte annehmen. Ferner bestätigt man durch Differenzieren, daß die Funktion

$$G: x \mapsto F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x; \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$g: x \mapsto f(x) \cdot \sin x; \quad x \in \mathbb{R}$$

ist. Daraus folgt, daß das Integral

$$\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = G(x)|_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

für jede Wahl von $k \in \mathbb{N}^*$ eine ganze Zahl ist. Nun gilt aber für alle $x \in (0, \pi)$

$$0 < g(x) < \frac{\pi^k \cdot p^k}{k!},$$

das heißt,

$$0 < \int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x < \pi \cdot \frac{(\pi \cdot p)^k}{k!}.$$

Für genügend großes k ist nun wegen des Grenzwertes (5) der Wert rechts kleiner als 1 und damit $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$ sicherlich keine ganze Zahl. Widerspruch! Um die Unlösbarkeit des Problems von der Quadratur des Kreises zu zeigen, würde bekanntlich der Nachweis genügen, daß die Zahl π keiner algebraischen Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen von einem Grad 2^m mit $m \in \mathbb{N}$ angehört. Obwohl diese Behauptung viel schwächer zu sein scheint als die Transzendenz von π, ist dafür kein einfacher Beweis bekannt. Ein Schritt in dieser Richtung, nämlich ein schulgemäßer Beweis der Irrationalität von π^2, gelang dem Japaner Y. IWAMOTO; seine entsprechende Variation des skizzierten NIVENschen Beweises ist in dem auch sehr empfehlenswerten, aber durchaus anspruchsvollen Buch [4] dargestellt.[2]

[2] Herr Studiendirektor H. v. KELLER, Hamburg, hat mich nach Abschluß des Manuskriptes noch darauf aufmerksam gemacht, daß der von mir skizzierte Beweis für die Irrationalität von π für den Unterricht aufgearbeitet wurde und erschienen ist in
Education Development Center (Hg.):
UMAP Modules 1977-1979. Tools for Teaching. -
Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1981.
(Rezension in MNU 36 (1983) S. 314)

Literatur

[1] B. ARTMANN: Der Zahlbegriff. - Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983.

[2] B. ARTMANN - D. D. SPALT - W. GERECKE: Transzendenzbeweis für e gestern und heute. - **34** (1987) 187-219.

[3] M. BAIERLEIN - F. BARTH - U. GREIFENEGGER - G. KRUMBACHER: Anschauliche Analysis 2. - München: Ehrenwirth 1981.

[4] H.-D. EBBINGHAUS - H. HERMES - F. HIRZENBRUCH - M. KOECHER - K. MAINZER - A. PRESTEL - R. REMMERT: Zahlen (Grundwissen Mathematik 1). - Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1983.

[5] C. HERMITE: Sur la fonction exponentielle. - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **77** (1873) 18-24, 74-79, 226-233, 285-293.

[6] D. HILBERT: Über die Transcendenz der Zahlen e und π. - Mathematische Annalen **43** (1893) 216-219.

[7] A. HURWITZ: Beweis der Transcendenz der Zahl e. - Mathematische Annalen **43** (1893) 220-221.

[8] K.-A. KEIL - J. KRATZ - H. MÜLLER - K. WÖRLE: Infinitesimalrechnung 2. - München: Bayerischer Schulbuchverlag 1986.

[9] F. LINDEMANN: Über die Zahl π. - Mathematische Annalen **20** (1882) 213-225.

[10] J. LIOUVILLE: Sur les classes très-étendus de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationeles algébrique. - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **18** (1844) 883-885; Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1) **16** (1851) 133-142.

[11] I. NIVEN: A simple proof that π is irrational. - Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947) 509.

[12] O. PERRON: Irrationalzahlen. - Göschens Lehrbücherei Band 1. - Berlin: de Gruyter 1960.

[13] J. TROPFKE: Geschichte der Elementarmathematik. - 4. Aufl., Band 1: Arithmetik und Algebra. - Berlin - New York: de Gruyter 1980. □