

M  
N  
U

IVIALLERIAK

Physik

# Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

Biologie

Chemie

Jahrgang 42  
Heft 1–8  
Jan.–Dez. 1989

# FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

## Vorstand

Ehrenvorsitzender	OStD Prof. Dr. Fr. MUTSCHELLER, Wohnstift Augustinum, Jasperstr. 2, 6900 Heidelberg. Tel. 0 62 21/38 86 68
Ehrenvorsitzender	OStD i. R. A. KLEIN, Stachelsweg 28, 5000 Köln 91. Tel. 02 21/ 86 22 61
1. Vorsitzender	OStD H. LOCHHAAS, Ringstr. 105, 6101 Rößdorf über Darmstadt. Tel. 0 61 54/92 81
2. Vorsitzender	OStD Dr. H. WAMBACH, Preußenstr. 20, 4040 Neuss 1. Tel. 0 21 01/8 36 81
Geschäftsführer	StD Friedr. BECKER, Bielfeldstr. 14, 2000 Hamburg 50. Tel. 0 40/8 80 6781

Postgirokonto: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hamburg 43919-202, BLZ 200100 20.

## Beisitzer

Mathematik	StD F. BARTH, Abbachstr. 23, 8000 München 50. Tel. 0 89/141 36 46
Physik	OStD P. WESSELS, Arensburgstr. 28, 2800 Bremen. Tel. 04 21/44 37 03
Chemie	StD W. ASSELBORN, Konrad-Adenauer-Allee 26, 6630 Saarlouis. Tel. 0 68 31/8 36 04
Biologie	Prof. Dr. M. KEIL, Kurt-Lindemann-Str. 29, 6903 Neckargemünd. Tel. 0 62 23/7 23 53
Informatik und Information	StD D. POHLMANN, Heidmühlenweg 59d, 2200 Elmshorn. Tel. 0 41 21/9 40 30
MNU-Haupt- Schriftleiter	Prof. Dr. H. SCHMIDT, Am Pleisbach 28, 5205 St. Augustin 1

## Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abonnement offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,- (für Pensionäre DM 52,-); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,- Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule versehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

# FERD. DÜMMLER<sup>s</sup> VERLAG

DÜMMLERhaus  
Kaiserstraße 31-37  
Postfach 14 80  
5300 Bonn 1  
Tel. 02 28/22 30 31

## MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

## MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis: DM 82,-, Einzelheft DM 12,-, zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar. Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

## Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

## Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben. Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987. Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif. Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:  
Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,  
4190 Kleve, Tel. 0 28 21/90 76

## Copyright/Fotokopien

Sämtliche Rechte liegen beim Verlag Dümmler, Bonn. Die Zeitschrift und ihre Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

---

# Inhaltsverzeichnis

## Abhandlungen – Beiträge zur Schulpraxis – Zur Diskussion gestellt

### **Mathematik**

---

BACHMANN, H.: Über die Häufigkeitsverteilung von Dezimalziffern in den Potenzen einer natürlichen Zahl .....	220
BRÜNING, A. – SPALLEK, K.: Operative Schulanalyse als näherungsweises Berechnen mit Fehlerabschätzungen .....	471
FISCHER, U.: Eine »Reuse« für die Zahl $\pi$ .....	396
FRITSCH, R.: Transzendenz von $e$ im Leistungskurs? .....	75
GEESE, H.: Geometrie mit dem Zufallsgenerator .....	397
HAUPTMANN, W.: Ecktransversalen eines Dreiecks .....	354
HINZ, A. M.: Mathematische Beweise mit dem Computer .....	4
KÖNIG, H.: Gleichwinklige Geraden und Punktverteilungen auf der Kugel .....	6
LENZE, B. – LOCHER, F.: Slalom, Splines und Computergrafik – wie zeichnet ein Computer Kurven? .....	81
METZGER, K. H.: Pythagoreische $n$ -Tupel .....	166
MÖBIUS, M.: Eine logische Analyse anschaulicher Evidenzen aus der Analysis .....	27
PADBERG, F.: Dezimalbrüche – problemlos und leicht? .....	387
RIEMER, W.: Der Chi-Quadrat-Anpassungstest und Irrfahrten in der Ebene .....	344
RUNG, J.: Sphärische und hyperbolische Umfangsformeln für das Höhenfußpunkt Dreieck .....	259
SCHÖNWALD, H. G.: Der Fernsehsatz mit Anwendungen .....	399
UFFRECHT, U.: Horizontalstellen statt Extremstellen .....	479

WARNEKE, K.-G.: Funktionen in zwei Variablen im Analysis-Unterricht .....	223
WEISENHORN, P.: Die Bernoullische Ungleichung einmal anders .....	164
WILHELM, H.: Orthonormierte Basissysteme in $\mathbb{Q}^3$ .....	352
ZEITLER, H.: Cantor-Staub, Sierpinski-Teppich, Menger-Schwamm – eine verrückte Welt .....	268

### **Physik**

---

BLATTER, H.: Warum verlässt Pionier-10 das Sonnensystem? .....	357
DANNER, S.: Die Bewegung bei Newtonscher Reibung – demonstriert am Beispiel eines einfachen Kugelstoßexperiments .....	330
GRONEMEIER, K.-H. – KRANZ, O.: Elementare Überlegungen zur physikalischen Größe Wirkung .....	158
GROTH, J.: Zur Bewegung eines Körpers auf der Kepler-Ellipse .....	275
HÖFLING, O.: Der Energie-Erhaltungssatz im Bereich der Mikrophysik .....	228
HÖNIC, V.: Superdichte Materiezustände und Schwarzschild-Radien .....	11
KUTZ, N.: Das Ohmsche Gesetz und die Entwicklung der Elektrizitätslehre von 1600 bis 1850 .....	482
LENKEIT, S.: Die Behandlung der mittleren Geschwindigkeit von Gasteilchen mit Hilfe des Radiometer-Effekts in der Mittelstufe .....	405

MEWES, E.-R.: Demonstration der Präzession der Erdachse an einem arabischen Himmelsglobus . . . . .	340
PHILBERTH, K.: Uhren im Gravitationsfeld und in Bewegung . . . . .	67
PHILBERTH, K.: Gibt es nach der Relativitätstheorie Vergangenheit und Zukunft? . . . . .	451
PIETSCHMANN, H.: Der Nobelpreis für Physik 1988	3
SCHMIDT, E.: Das hydrostatische Gleichgewicht . . . . .	408
SCHRÖDER, G.: Einfache Rückkopplungsexperimente als Realbeispiele für den iterativen Weg ins deterministische Chaos . . . . .	32
SCHRÖDER, W.: Das Polarlicht – ein Grundproblem der kosmischen Physik . . . . .	261
TREITZ, K.: Strahlenbelastung bei kernphysikalischen Experimenten im Unterricht der Mittelstufe . . . . .	401
VIELSTICH, W.: Kalte Fusion in Palladium – Informationen zur aktuellen Diskussion . . . . .	206

## Chemie

CZIESLIK, W.: Moderne Technologien im Chemielabor der Schule . . . . .	360
EISWIRTH, M. – SCHWANKNER, J.: Über den Ursprung optischer Aktivität . . . . .	214
FLINTJER, B. – JANSEN, W.: Die Arbeiten von Clément und Désormes – eine historisch-problemorientierte Unterrichtskonzeption zum Thema Schwefelsäure	87
HARDT, H.-D.: Grün und grün, ein Unterschied . . . . .	74
HÜTTER, L. A.: Wasseruntersuchung als Aufgabe und Herausforderung für den Experimentalunterricht in Chemie, Biologie und Physik . . . . .	323
JUNGERMANN, A.: Kritische Überlegungen zur Teilchenanzahl als eigenständige Größe im Größenkalkül . . . . .	17
JUNGERMANN, A.: Die Addition intensiver Größen, insbesondere im Fall intensiver Enthalphiegrößen	152
KOBER, F.: Computerberechnete Titrationskurven . . . . .	460
LUTZ, B.: Chemie im Alltag und Chemieunterricht – Gegensatz oder Chance für ein besseres Chemieverständnis? . . . . .	281
SCHMIDT, H.-J.: Die Entwicklung von Stöchiometrie-Aufgaben zur Berechnung der Massenanteile chemischer Elemente in Verbindungen . . . . .	173
SUMFLETH, E.: Eine Unterrichtsreihe zur Einführung in die Kinetik und Energetik chemischer Reaktionen . . . . .	43

SUMFLETH, E.: Stoffe: Eigenschaften und Reaktionen; Modelle: Teilchenanordnungen und -umordnungen; eine mit Lernhilfen gestützte Einführung in die Chemie . . . . .	411
---	-----

## Biologie

AEPPLI, H. M. – EGLI, M.: Biologie-Geschichte am Computer – Carl Wilhelm von Nägeli's Gleichgewichte der Konkurrenz . . . . .	291
BIRETT, H.: Eine schnelle Rechenroutine zur Demonstration der Gendrift . . . . .	50
CAMPENHAUSEN, CHR. v.: Farbsehen und Helligkeitskonstanz . . . . .	143
FRÄNZ, D.: Der Kohl ( <i>Brassica oleracea</i> ) – Thema des Biologieunterrichts . . . . .	422
FÜHRES, W.: Das Energie-Niveauschema von Chlorophyll a – Erörterung der Vorgänge bei der Lichtabsorption . . . . .	99
GRAF, D.: Begriffsauszählungen in Biologiebüchern der Sek.-St. I . . . . .	231
GRAF, D.: Anwendung der Mapping-Methode zur Begriffsvermittlung am Beispiel einer Unterrichtseinheit für die Klassen 5/6 . . . . .	427
HESSE, M.: Blausäure – ein Gift lässt Pflanzen überleben . . . . .	488
HÖGERMANN, CHR.: Zum Stellenwert der Kybernetik im Biologieunterricht . . . . .	21
LABAHN-LUCIUS, CHR.: Die enzymatische Bestimmung von Glukose mit Glukoseoxidase und Peroxidase . . . . .	496
LAUFENS, G. – GREBE, G.: Selbstuntersuchung und Analyse von tagesperiodischen Vorgängen beim Menschen . . . . .	365
ROTTLÄNDER, E.: Wissenschaftspropädeutische und fächerübergreifende Behandlung evolutionstheoretischer Fragen im Unterricht . . . . .	104
SCHMIDT, E.: Simulation der komplexen Thermik im See/Teich in einfachen Schulversuchen . . . . .	296

## Fächerübergreifendes – Allgemeines

FELDMANN, A.: Schadensinduktion und Schadensabwehr bei schwachen Dosen ionisierender Strahlung	131
LABUDDA, P.: Computer im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht in den USA . . . . .	208
LOCHHAAS, H.: Begrüßungsansprache auf der Fest-sitzung (80. Hauptversammlung in Darmstadt) . . . . .	195
MOHR, H.: Verfügungswissen und Orientierungswissen: Die Verantwortung des Wissenschaftlers . . . . .	200

---

## Experimentervorschläge

BROCKMEYER, H.: Versuche mit Caesium 137 bzw. Barium 137 m . . . . .	240
BROSOWSKI, G.: Experiment zum Reedrelais . . . . .	431
ČABRIĆ, B.: Ein mechanisches Gerät zur Winkel- trisektion . . . . .	302
REIMANN, A.: Chemie im Diarahmen: Kristallformen zum Projizieren . . . . .	241

---

## Zur Diskussion gestellt

KAUFMANN, U.: Chemie – nein danke! Eine Folge des gegenwärtigen Chemieunterrichts . . . . .	113
KRANZ, O. – GRONEMEIER, K.-H.: Darstellung mecha- nischer Größen und Einheiten in mehrdimensio- nalen Gittern . . . . .	109

# Aufgaben, Lehrmittel, Diskussion und Kritik

---

## Aufgaben für Mathematikzirkel mit Mittelstufenschülern

Heft 1 (S. MAENNEL) . . . . .	53
Heft 2 (G. STARKE) . . . . .	108
Heft 3 (G. STARKE) . . . . .	179
Heft 4 (H. SCHRENK) . . . . .	244
Heft 5 (G. STARKE) . . . . .	304
Heft 6 . . . . .	373
Heft 7 (G. STARKE) . . . . .	433
Heft 8 (G. STARKE) . . . . .	498

---

## Andere Mathematik-Aufgaben

MAENNEL, S.: Ein Satz über Primzahlen . . . . .	53
MAENNEL, S.: Ein Kriterium für die Vereinfachung von $\sqrt{a} \pm b\sqrt{c}$ ( $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ ) . . . . .	434
RIEDER, W.: Bemerkungen zu einer Aufgabe der IMO	244
MAENNEL, S.: Aufgaben zu mathematischen Eilinien und Eikörpern . . . . .	498

---

## Physik-Aufgaben

GOMOLETZ, J.: PHYSIK PLUS – Aufgaben für Ar- beitsgruppen zur Förderung besonders interessier- ter Schülerinnen und Schüler . . . . .	434
---	-----

---

## Diskussion und Kritik

DIEMANN, E.: zu »Grün und grün, ein Unterschied«	438
FRANZEN, R.: zu »Berechnung von e auf beliebig viele Stellen« . . . . .	180
FRITSCH, K.-H.: zu »Eigenschaften von vier Zahlen $a, b, c, d$ , die der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ ge- nügen« . . . . .	181
HELLMUND, J.: Überlegungen zum Basic-Programm in MNU 42 (1989) 220 . . . . .	499
HÜRTEN, K.-H.: zu »Eine bemerkenswerte Identität«	436
JANOUS, W.: zu »Bemerkungen zu einer Aufgabe der IMO« . . . . .	500
KÖRNER, H.: zu »Schadensinduktion und Schadens- abwehr« . . . . .	374

KRÄMER, K.: zu »Klassische und relativistische Compton-Streuung« .....	179	PICKERT, G.: zu »Eine bemerkenswerte Identität« ...	55
LERCHE, H.: zu »Die $n$ -te Potenz der Summe zweier Quadrate« .....	307	SCHÖNWALD, H. G.: zu »Verfügungs- und Orientierungswissen« .....	374
LOTZ, J.: zu »Transzendenz von $e$ «.....	375	TAUSCH, M.: zu »Kritische Überlegungen zur Teilchenanzahl« .....	438
NOLDEN, W.-TH.: zu »Chemie – nein danke!« .....	437	WÖHLK, D.: zu »Störungen des didaktischen Gleichgewichts« .....	305
OLMESDAHL, W.: zu »Bemerkungen zu einer Aufgabe der IMO« .....	500		

## Mitteilungen

### Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Vorstandssitzung in Darmstadt am 22. und 23. 10. 1988 .....	54
Beitragszahlung 1989 .....	56
Neue MAK-Werte-Liste .....	56
Reisestipendium zum Deutschen Museum München .....	56
10. Fachleiterstagung für Chemie 1988 (Bericht: W. ASSELBORN) .....	115
Prof. Dr. E. GREINER zum 80. Geburtstag (M. OTTER) .....	122
Nachruf auf Prof. Dr. O. HAUPT (H. LOCHHAAS) .....	122
Nachruf auf Dr. O. HÖFLING (FR. MUTSCHELLER) .....	122
Empfehlungen zur Lehrerausbildung in Mathematik und in den Naturwissenschaften .....	
..... Beihefter zu Heft 3 (nach S. 160)	
DPG-Physik-Schulen für Lehrer .....	182
Jahrestagung der »Union des Physiciens« in Rouen (O. DÜLL) .....	183
9. Fachleiterstagung für Biologie .....	184
81. Hauptversammlung 1990 in München .....	246
26. Jahrestagung der ASE .....	247
Empfehlungen zur Gestaltung von Mathematik-Lehrplänen .....	
..... Beihefter zu Heft 5 (nach S. 288)	
Bericht über die 80. Hauptversammlung in Darmstadt vom 19. bis 23. 3. 1989 .....	308
Mitgliederversammlung auf der 80. Hauptversammlung in Kiel .....	312
Kassenbericht 1989 .....	314
Erste deutsch-französische Fortbildungstagung für Chemielehrer (O. DÜLL, V. SCHMITTER) .....	376

Unterstützung des Chemieunterrichts durch den Fonds der Chemischen Industrie .....	377
Euregio-Konferenz in Belgien (H. J. SCHMIDT) .....	440
Für Verdienste um den Chemieunterricht ausgezeichnet (von W. ASSELBORN) .....	501

### Aus den Landesverbänden

Baden-Württemberg .....	56, 116
Bremen: Bezirksgruppe Bremerhaven .....	117
Hessen .....	118
Niedersachsen .....	118
Niedersachsen: Bezirksgruppe Emsland/Grafschaft Bentheim .....	121
Nordrhein .....	118
Rheinland-Pfalz .....	501
Saarland .....	120
Schleswig-Holstein .....	183, 247
Südbayern .....	184, 440
Westfalen .....	120
Regionale Tagungen des Fördervereins MNU .....	246

### Allgemeines, Kurzberichte, Hinweise

STEGMAIER, E. L.: Der Computer als Unterrichtsmedium .....	57
WDR Köln: 200. Geburtstag von G. S. OHM .....	73
19. Internationale Physik-Olympiade 1988 in Bad Ischl .....	122

Internationales Sommer-Symposium in Dortmund	184
Europäisches ICASE-Seminar in Caserta/Italien	185
Biologische Station in der Eifel (D. GREBEL)	248
GDCh-Statistik der Chemie-Studierenden	249
WOLF, M.: 100 Jahre Poskesche Zeitschrift	314
62. NARST-Tagung in San Francisco (H. J. SCHMIDT)	377
37. NSTA-Tagung in Seattle (H. J. SCHMIDT)	378
Hinweise für Autoren	(Anhang nach S. 384)
24. Bundeswettbewerb »Jugend forscht« (J. KÜSTER)	440
9. Sommersymposium für Fachdidaktik in Dortmund	442

RIQUARTS, K.: Verpflichtende Anteile von Mathematik und Naturwissenschaften für 10- bis 16jährige in den Staaten der EG	502
ENGEL, A.: XXX. Internationale Mathematik-Olympiade	507

## Tagungen, Veranstaltungen

Fortbildungsveranstaltung der Fachgruppe Chemieunterricht/GDCh	304
Tagungsankündigungen	57, 186, 247, 442

# Besprechungen

## Zeitschriften

DÜLL, O.: Chemie	
Oktober 1988 bis März 1989	249
April bis September 1989	509
GOLF, E. - GOLF, S.: Biologie	
April bis Oktober 1988	58
Oktober 1988 bis März 1989	316
BOYSEN, G.: Physik	
Juli bis Dezember 1988	185
Januar bis Juni 1989	443
SOLONDZ, W. - STARKE, G.: Mathematik	
Juli bis Dezember 1988	124
Januar bis Juni 1989	378

## Bücher

### Mathematik

BENDER, P. - SCHREIBER, A.: Operative Genese der Geometrie (J. Schönbeck)	63
COLLATZ, L.: Differential Equations (D. Rüthing)	254
EHRENBERG, A. S. C.: Statistik oder der Umgang mit Daten (H. Wiedling)	382
GARUS, G. - WESTERHEIDE, P.: Differential- und Integralrechnung (H. Wiedling)	253
PADBERG, F.: Didaktik der Arithmetik (D. Rüthing)	383
TIETZE, U.-P.: Der Mathematik-Lehrer in der Sek. St. II (D. Rüthing)	447

ULSHÖFER, K. (Hg.): Mathematische Abituraufgaben - Grundkurs 1974-1986 - Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik (A. Bikner)	190
WALKER, P. L.: The Theory of Fourier Series and Integrals (D. Rüthing)	447
WALTER, R.: Lineare Algebra und analytische Geometrie (D. Rüthing)	63

### Physik

BALLIF, J. R. - DIBBLE, W. E.: Anschauliche Physik (J. Gomoletz)	447
EULER, L.: Briefe an eine deutsche Prinzessin (O. Höfling)	254
FASCHING, G.: Sternbilderkunde - Himmelskarten, Himmelskörper, Sternbilder (J. Bruhn)	384
GÖTZ, R. - DAHNCKE, H. - LANGENSIEPEN, F. (Hg.): Handbuch des Physikunterrichts - Sekundarbereich I, Bd. 3 (H. Krüger)	63
HERBERT, N.: Quantenrealität - Jenseits der neuen Physik (O. Höfling)	383
HERING, E. - MARTIN, R. - STOHRER, M.: Physik für Ingenieure (H. Schmidt)	191
KUHN, W. (Hg.): Handbuch der experimentellen Physik - Sekundarbereich II (H. Krüger)	191
NACHTMANN, O.: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik (O. Höfling)	192
Naturforschergesellschaft in Basel (Hg.): Die Werke von DANIEL BERNOULLI (J. Bruhn)	447
OBERTDORFER, G.: Die Größenlehre in Physik und Technik (J. Bruhn)	64

SCHMIDT, H. - WEBER, W.: Messen und Experimentieren mit IBM-PC's und Kompatiblen ( <i>G. Boysen</i> ) .....	254
STROPPE, H.: Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften ( <i>J. Bruhn</i> ) .....	64

## Chemie

HÜTTER, L. A.: Wasser und Wasseruntersuchung ( <i>K.-E. Quentin</i> ) .....	384
WAGNER, R. (Hg.): Wasser-Kalender 1989 - Jahrbuch für das gesamte Wasserfach ( <i>L. A. Hüttner</i> ) .....	448

## Biologie

BERGMANN, H. H.: Die Biologie des Vogels ( <i>H. P. Ziemek</i> ) .....	384
BIELKA, H. (Hg.): Molekularbiologie ( <i>M. Henze</i> ) .....	64
BÖGER, P. (Hg.): Physiologische Schlüsselprozesse in Pflanze und Insekt ( <i>D. Erber</i> ) .....	255
BÜHNER, T. - HOFMANN, K.: Biologie und Computer ( <i>D. Graf</i> ) .....	384
Cox, C. B. - NOORE, P. D.: Einführung in die Biogeographie ( <i>D. Erber</i> ) .....	192

FLINDT, R.: Biologie in Zahlen ( <i>R. Klee</i> ) .....	448
FREYE, H.-A.: Humangenetik ( <i>W. Wöllert</i> ) .....	256
JACOBS, W. - RENNER, M.: Biologie und Ökologie der Insekten ( <i>D. Erber</i> ) .....	192
KAULE, G.: Arten- und Biotopschutz ( <i>R. Klee</i> ) .....	256
KUHN, K. - PROBST, W. - SCHILKE, K.: Biologie im Freien ( <i>H. P. Ziemek</i> ) .....	256
LÜTTGE, U. - KLUGE, M. - BAUER, G.: Botanik ( <i>D. Erber</i> ) .....	448
VERFÜRTH, M.: Kompendium Didaktik Biologie ( <i>F. Rüther</i> ) .....	192
WUKETITS, F. M.: Evolution, Erkenntnis, Ethik ( <i>W. Wöllert</i> ) .....	254

## Allgemeines

BAUMANN, R.: Schulcomputer-Jahrbuch 1988/89 ( <i>H. Schmidt</i> ) .....	62
CAPRA, F.: Wendezzeit; Bausteine für ein neues Weltbild ( <i>J. Weitendorf</i> ) .....	62
FINKENSTAEDT, TH. - HELDMANN, W. (Hg.): Studierfähigkeit konkret ( <i>H. Schmidt</i> ) .....	382

---

## Schriftleitung der Zeitschrift MNU

---

### Hauptschriftleitung

Prof. Dr. rer. nat. HELMUT SCHMIDT  
Am Pleisbach 28,  
5205 St. Augustin 1,  
0 22 41/33 42 73

### Fachschriftleitung

**Mathematik** OStD GERT STARKE  
Wittenbrook 14a,  
2300 Kiel 17,  
0431/36 23 12

**Physik** MinR HERWIG KRÜGER  
Untereisselner Str. 33,  
2305 Heikendorf,  
0431/2415 38

<b>Chemie</b>	StD OTTHEINRICH DÜLL Breidenbornerstr. 8, 6750 Kaiserslautern, 0631/9 28 83
<b>Biologie</b>	Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK Institut für Biologiedidaktik der Universität, Karl-Glöckner-Str. 21C, 6300 Gießen, 0641/814 62

**Redaktionelle Zuschriften** an den zuständigen Fachschriftleiter erbeten. Für die Gestaltung der Beiträge gelten die Manuskriptabfassungsrichtlinien in ihrer jeweils jüngsten Fassung, wie sie in Abständen in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden.

# Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht

Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des  
mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.



42. Jahrgang, Heft 1

ISSN 0025-5866

15. Januar 1989

HERBERT PIETSCHMANN: Der Nobelpreis für Physik 1988 .....	3
ANDREAS M. HINZ: Mathematische Beweise mit dem Computer .....	4
HERMANN KÖNIG: Gleichwinklige Geraden und Punktverteilungen auf der Kugel .....	6
VOLKER HÖNIG: Superdichte Materiezustände und Schwarzschild-Radien	11
ARND JUNGERMANN: Kritische Überlegungen zur Teilchenanzahl als eigen- ständige Größe im Größenkalkül .....	17
CHRISTIANE HÖGERMANN: Zum Stellenwert der Kybernetik im Biologieunterricht	21
<b>Schulpraxis</b>	
MICHAEL MÖBIUS: Eine logische Analyse anschaulicher Evidenzen aus der Analysis .....	27
KLAUS G. SCHRÖDER: Einfache Rückkopplungsexperimente als Realbeispiele für den iterativen Weg ins deterministische Chaos .....	32
ELKE SUMFLETH, PETER DANNAT: Eine Unterrichtsreihe zur Einführung in die Kinetik und Energetik chemischer Reaktionen .....	43

HARTMUT BIRETT: Eine schnelle Rechenroutine zur Demonstration der Gendrift .....	50
--	----

## Aufgaben

Aufgaben für Mathematikzirkel für Mittelstufenschüler	53
Ein Satz über Primzahlen .....	53

## Diskussion und Kritik

<b>Mitteilungen des Fördervereins MNU</b>	54
Vorstandssitzung in Darmstadt, 22. und 23. 10. 1988	54
Beitragszahlungen 1989 .....	56
Reisestipendium zum Deutschen Museum 1989 .....	56
Neue MAK-Werte-Liste .....	56

## Informationen/Tagungen

<b>Besprechungen</b>	57
Zeitschriften Biologie .....	58
Bücher .....	62

In der Mitte dieses Heftes befinden sich Einladung und  
Programm zur 80. MNU-Hauptversammlung in Darm-  
stadt und die Anmeldekarten.

## Herausgeber der Zeitschrift MNU

Prof. Dr. HELMUT SCHMIDT (Herausgeber)  
Am Pleisbach 28,  
5205 St. Augustin 1,  
0 22 41/33 42 73

OStD GERT STARKE (Fachschriftleiter Mathematik)  
Wittenbrook 14a,  
2300 Kiel 17,  
04 31/36 23 12

MinR HERWIG KRÜGER (Fachschriftleiter Physik)  
Untereisselner Str. 33,  
2305 Heikendorf,  
04 31/24 15 38

StD OTTHEINRICH DÜLL (Fachschriftleiter Chemie)  
Breidenbornerstr. 8,  
6750 Kaiserslautern,  
06 31/9 28 83

Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK (Fachschriftleiter Biologie)  
Institut für Biologiedidaktik der Universität,  
Karl-Glöckner-Str. 21C,  
6300 Gießen,  
06 41/8 14 62

Adressenänderungen bitte nur dem Dümmler-Verlag  
mitteilen.  
Redaktionelle Zuschriften an den zuständigen Fach-  
schriftleiter erbeten.

# FÖRDERVEREIN MNU

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

## Vorstand

Ehrenvorsitzender OStD Prof. Dr. Fr. MUTSCHELLER,  
Wohnstift Augustinum, Jasperstr. 2,  
6900 Heidelberg. Tel. 0 62 21 / 38 86 68

Ehrenvorsitzender OStD i. R. A. KLEIN, Stachelsweg 28,  
5000 Köln 91. Tel. 02 21 / 86 22 61

1. Vorsitzender OStD H. LOCHHAAS, Ringstr. 105,  
6101 Rödendorf über Darmstadt. Tel. 0 61 54 / 92 81

2. Vorsitzender OStD Dr. H. WAMBACH, Preußenstr. 20,  
4040 Neuss 1. Tel. 0 21 01 / 8 36 81

Geschäftsführer StD Friedr. BECKER, Bielfeldstr. 14,  
2000 Hamburg 50. Tel. 0 40 / 8 80 67 81

Postgirokonto: Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hamburg 439 19-202.  
Bankleitzahl 200 100 20

## Beisitzer

Mathematik StD F. BARTH, Abbachstr. 23,  
8000 München 50. Tel. 0 89 / 1 41 36 46

Physik OStD P. WESSELS, Arensburgstr. 28,  
2800 Bremen. Tel. 0 42 1 / 44 37 03

Chemie StD W. ASSELBORN, Konrad-Adenauer-Allee 26,  
6630 Saarlouis. Tel. 0 68 31 / 8 36 04

Biologie OStR K. THAMERUS, Walther-Bothe-Str. 9,  
7500 Karlsruhe 41. Tel. 0 72 1 / 47 41 42

Informatik StD D. POHLMANN,  
Heidmühlenweg 59 d,

Information 2200 Elmshorn. Tel. 0 41 21 / 9 40 30

MNU-Haupt-Schriftleiter Prof. Dr. H. SCHMIDT, Am Pleisbach 28,  
5205 St. Augustin 1

## Die Mitgliedschaft im Förderverein MNU

Über den Förderverein MNU, seine Ziele, Arbeitsweisen, Erfolge usw., informieren wir Sie gerne. Bitte Fö-Info-Blatt beim MNU-Geschäftsführer anfordern.

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt von natürlichen Personen kann jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet werden. Schulen, Institutionen aller Art, Wirtschaftsunternehmen und Verbände können nicht Mitglied werden. Ihnen steht das Verlags-Abo offen, vgl. rechte Spalte.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 62,- (für Pensionäre DM 52,-); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht« eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assessoren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur DM 36,- Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule verschene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zahlen. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erhoben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wochen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nachsendet, sondern vernichtet, kann verlagsseitig Ersatz nur gegen Berechnung geleistet werden.

# FERD. DÜMMLER<sup>s</sup> VERLAG

DÜMMLERhaus  
Kaiserstraße 31-37  
Postfach 14 80  
5300 Bonn 1  
Tel. 02 28 / 22 30 31

## MNU-Erscheinungsweise

8 mal jährlich (alle sechs Wochen); je 64 Seiten Umfang

Heft-Nr.	Erscheinungstermin	Anzeigenschluß
1	15. Januar	15. Dezember
2	1. März	1. Februar
3	15. April	15. März
4	1. Juni	1. Mai
5	15. Juli	15. Juni
6	1. September	1. August
7	15. Oktober	15. September
8	1. Dezember	1. November

## MNU-Bezugsbedingungen

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhaltsverzeichnis; DM 82,- Einzelheft DM 12,- zuzüglich Versandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teilweise noch lieferbar. Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung DM 65,60 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im Vereinsbeitrag enthalten (vgl. linke Spalte).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 10,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt werden, wenn die schriftliche Kündigung für das folgende Jahr am 1. Oktober des laufenden Jahres beim Verlag vorliegt.

## Anschriftenänderungen

bitte rechtzeitig dem Dümmler Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht mindestens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch an den Verlag zurückgibt.

## Verlag, Anzeigen- und Beilagenverwaltung

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Bonn, Anschrift wie oben. Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 21 vom 1. 1. 1987. Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein ermäßigter Tarif. Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen (siehe obige Termine).

Satz, Druck, Bindearbeiten:

Boss-Druck und Verlag, Geefacker 63,  
4190 Kleve, Tel. 0 28 21 / 90 76

## Copyright/Fotokopien

Sämtliche Rechte liegen beim Verlag Dümmler, Bonn. Die Zeitschrift und ihre Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

---

## Schulpraxis

---

### Transzendenz von $e$ im Leistungskurs?<sup>1</sup>

Verfasser: Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 39, 8000 München 2

Der von Hilbert angegebene Transzendenzbeweis für die Eulersche Zahl  $e$  wurde für einen Leistungskurs des 13. Jahrgangs aufbereitet.

1 Mathematik gilt als schweres Schulfach, das aber wegen des ständigen Auftretens mathematischer Problemstellungen im täglichen Leben, insbesondere in unserer vom Computer bestimmten Zeit, unvermeidlich ist. Die Rechtfertigung für den intensiven Mathematik-Unterricht an unseren Schulen wird zu meist in den Anwendungen gesehen, die die Mathematik im Alltag hat. Darüber sollten wir aber nicht vergessen, daß der Auftrag unserer allgemeinbildenden Schulen auch dahin geht, die Schüler zu logischem Denken zu erziehen und ihnen etwas vom geistigen Hintergrund und von rein abstrakten Fragestellungen der Mathematik nahezubringen, die große Denker über Jahrhunderte bewegt haben. Einen wichtigen Themenkreis, der in diesem Zusammenhang angesprochen werden sollte, bildet sicherlich der Aufbau des Zahlensystems. Hierzu will ich heute einen Punkt besonders diskutieren: den Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten reellen Zahlen. Zunächst erinnere ich an die Begriffsbildung:

Definition: Eine reelle Zahl  $x$  ist algebraisch, wenn es eine natürliche Zahl  $n (> 0)$  und ganze Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n$  mit  $a_n \neq 0$  gibt derart, daß gilt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

das heißt, wenn  $x$  Nullstelle einer ganzzahligen Funktion positiven Grades mit ganzen Koeffizienten ist.

Beispiele: 1) Rationale Zahlen sind algebraisch: Eine rationale Zahl  $x$  läßt sich in der Form  $x = p/q$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}^*$  darstellen, was auf die Gleichung

$$qx - p = 0$$

führt. Man nimmt  $n = 1$ ,  $a_0 = -p$  und  $a_1 = q$ .

2) Die Zahl  $x = \sqrt{2}$  ist algebraisch: Da  $x^2 - 2 = 0$  gilt, kann man  $n = 2$ ,  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = 0$  und  $a_2 = 1$  nehmen.

3) Die Zahl  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  ist algebraisch. Um das einzusehen, berechnet man zunächst  $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ; das ist gleichbedeutend mit  $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ . Daraus folgt durch abermaliges Quadrieren

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Man findet  $n = 4$ ,  $a_0 = a_4 = 1$ ,  $a_1 = a_3 = 0$  und  $a_2 = -10$ .

Als Lehrer wissen Sie aus der Algebra-Vorlesung, daß alle Zahlen algebraisch sind, die sich aus rationalen Zahlen durch Wurzelziehen, Bilden von Linear-kombinationen mit rationalen Koeffizienten und Iteration dieser Prozesse gewinnen lassen. Manchmal ist es

<sup>1</sup> Vortrag am 29. März 1988 auf der 79. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Kiel.

sehr trickreich, zu einer vorgegebenen Zahl dieser Bauart eine passende Gleichung zu finden, aber es geht immer! Dadurch haben wir für den Unterricht eine Vielzahl von Beispielen und Übungsmöglichkeiten. Irgendwann sollte man dabei die folgende einfache Tatsache feststellen.

**Bemerkung:** Ist  $x$  eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so kann eine Gleichung der Form (1) mit der zusätzlichen Eigenschaft  $a_0 \neq 0$  gefunden werden. Ist nämlich zunächst ein  $k > 0$  der kleinste Index mit  $a_k \neq 0$ , das heißt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k = 0,$$

so kann man durch  $x^k$  dividieren und erhält

$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \dots + a_k = 0,$$

eine Gleichung der gewünschten Art. (Unter der Voraussetzung  $a_n \neq 0 \neq x$  gilt offensichtlich  $k < n$ , also  $n - k > 0$ .)

**2** Aus Mächtigkeitsüberlegungen im Sinne der Mengenlehre folgt unmittelbar, daß es auch nicht-algebraische reelle Zahlen geben muß; über Mächtigkeiten wird man wohl im normalen Unterricht kaum reden. Da sollte man zunächst nur sagen, daß die Begriffsbildung »algebraische (reelle) Zahl« sich nicht gehohnt hätte, wenn alle reellen Zahlen algebraisch wären, und dann den neuen Begriff einführen.

**Definition:** Eine reelle Zahl ist transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist.

Hierbei muß man auch etwas auf die historische Entwicklung des Zahlbegriffs eingehen. Ich kann das jetzt nicht ausführen und verweise auf die Literatur: Einen kurzen Überblick zum Kapitel *algebraische* versus *transzendente* Zahlen findet man in TROPFKE [13; S. 139 ff.], dem Standardwerk zur Geschichte der Elementarmathematik – gemeint ist Schulmathematik –, von dessen 4. Auflage allerdings bisher nur der erste Band erschienen ist. Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem auch sonst sehr lesenswerten Aufsatz von ARTMANN, SPALT und GERECKE [2]. Jetzt möchte ich nur darauf hinweisen, daß die endgültige Klärung des Transzendenzbegriffes um das Jahr 1840 durch den französischen Mathematiker JOSEPH LIOUVILLE erfolgte, der auch die ersten Transzendenzbeweise führte [10]. Die von ihm als transzendent erkannten Zahlen heißen heute zu seinen Ehren »Liouvillesche Zahlen«; sie werden in ARTMANN [1] ausführlich dargestellt, eignen sich jedoch meines Erachtens nicht so sehr für den gymnasialen Unterricht, weil sie recht künstlich und nur für diesen Zweck konstruiert sind, sonst im mathematischen Alltag aber nicht auftreten. Interessant erscheint die Frage nach der Transzendenz bei Zahlen wie der Kreiszahl  $\pi$  – das hängt mit dem uralten Problem der Quadratur des Kreises zusammen – und der

Eulerschen Zahl  $e$ , der Basis der Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmen. Der ebenfalls französische Mathematiker CHARLES HERMITE konnte im Jahr 1873 [5] zeigen:

*Die Eulersche Zahl  $e$  ist transzendent.*

Darauf aufbauend, unter zusätzlicher Benutzung der Integration im Komplexen, bewies der Deutsche FERDINAND LINDEMANN im Jahr 1882 [9]:

*Die Kreiszahl  $\pi$  ist transzendent.*

Es dürfte von vornherein jedem Schüler klar sein, daß der Nachweis der Transzendenz einer vorgelegten Zahl, zu dem man alle ganzrationalen Funktionen positiven Grades mit ganzen Koeffizienten in Betracht zu ziehen hat, sich im allgemeinen wesentlich schwieriger gestalten wird als das Aufsuchen geeigneter Koeffizienten für eine gegebene algebraische Zahl. Insfern kann man sich fragen, ob echte Transzendenzbeweise in der Schule überhaupt behandelt werden können. Ich bin der Meinung, daß das für die Eulersche Zahl durchaus möglich ist. Im Gegensatz zu den Herren ARTMANN, SPALT und GERECKE, die ein integrationsfreies, von Herrn KARCHER beschriebenes, auf A. HURWITZ [7] zurückgehendes Verfahren benutzen, möchte ich jedoch vorschlagen, den Ideen von HILBERT zu folgen, dem im Jahre 1893 eine wesentliche Vereinfachung [6] der HERMITESchen und LINDEMANNschen Überlegungen gelang. Die zusätzlichen »Elementarisierungen«, etwa auch durch Zurückführung auf Potenzreihen wie in PERRONS Buch [12] haben meines Erachtens keine echten Vereinfachungen mehr gebracht. Leider geht dasselbe nicht für Transzendenz von  $\pi$ ; auch der HILBERTSche Beweis verwendet die Integration im Komplexen, die in der Schule nicht zur Verfügung steht.

**3** Bevor ich nun auf Einzelheiten des Beweises der Transzendenz von  $e$  eingehe, möchte ich Herrn OStD KRATZ, der es vermittelte, und Herrn OStR KOLL-MANN, Kursleiter eines Leistungskurses der 13. Jahrgangsstufe am MAX-BORN-Gymnasium in Germering bei München, der es ermöglichte und vorbereitete, dafür danken, daß ich meine Vorstellungen auch einmal in zwei Schulstunden, genauer: in einer durch eine Pause unterbrochenen Doppelstunde, wirklich ausprobieren konnte. Ich habe natürlich nicht mit Hilfe eines Testes nachgeprüft, wieviel von meinem Unterricht bei den Schülern hängen geblieben ist; aber ich hatte doch den Eindruck, daß die Schüler meinem Unterrichtsversuch mit einem gewissen Verständnis folgten.

Der Beweis geht nicht direkt von einer möglichen Definition von  $e$  aus, sondern er verwendet eine abgeleitete Eigenschaft der Exponentialfunktion. Er baut auf der folgenden Tatsache auf.

Beweisgrundlage: Für alle  $k \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx = k!. \quad (2)$$

Das ist mit Hilfe partieller Integration und vollständiger Induktion leicht zu beweisen. In den bayerischen Lehrplänen ist allerdings die Behandlung der vollständigen Induktion nicht mehr vorgesehen, und die partielle Integration kommt erst am Schluß des Leistungskurses, wenn man für die Transzendenz von  $e$  sicherlich keine Zeit mehr hat. Für meinen Unterrichtsversuch hat der Kursleiter diese Eigenschaft nach meinem folgenden Vorschlag hergeleitet (hinter dem sich natürlich beide Methoden verbergen, was man im Unterricht nicht zu sagen braucht): Zunächst zeigt man (siehe etwa [3, S. 104])

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \cdot e^{-x} = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Ebenfalls für alle  $k \in \mathbb{N}^*$  sei dann  $f_k$  die durch

$$x \mapsto x^k \cdot e^{-x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion und  $F_k$  sei die (wegen der Stetigkeit von  $f_k$  existierende und) durch die Bedingung  $F_k(0) = 0$  eindeutig bestimmte Stammfunktion zu  $f_k$ . Durch Differenzieren bestätigt man, daß für  $k > 0$  auch die Funktion

$$\bar{F}_k: x \mapsto k \cdot F_{k-1}(x) - x^k \cdot e^{-x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion zu  $f_k$  ist. Da die Differenz zweier Stammfunktionen zur gleichen Funktion eine konstante Funktion und  $\bar{F}_k(0) = 0 = F_k(0)$  ist, gilt

$$\bar{F}_k = F_k. \quad (4)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \int_0^{\bar{x}} x^k e^{-x} dx = \\ &\quad \text{nach Definition des uneigentlichen Integrals} \\ &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} (F_k(\bar{x}) - F_k(0)) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_k(\bar{x}) \\ &\quad \text{nach } F_k(0) = 0 \\ &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{F}_k(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} (k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) - \bar{x}^k \cdot e^{-\bar{x}}) \\ &\quad \text{nach (4) und Definition von } F_k \\ &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) = k \cdot \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_{k-1}(\bar{x}) \\ &\quad \text{nach (3),} \end{aligned}$$

falls nur  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_{k-1}(\bar{x})$  existiert. Nun gilt aber  $F_0(\bar{x}) = 1 - e^{-\bar{x}}$  für alle  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ; also existiert  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_0(\bar{x})$  und hat den Wert 1. Die Gleichungskette zeigt, daß daraus der Reihe nach folgt:

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_1(\bar{x}) = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_2(\bar{x}) = 2 \\ \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_3(\bar{x}) = 6 \\ &\vdots \\ \int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} F_k(\bar{x}) = k!, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Nebenbei sei noch bemerkt, daß die Gleichung (4) eine explizite Darstellung der Funktionen  $F_k$  durch rekursive Berechnung ermöglicht und daß die Gleichung (2) für die Definition der  $\Gamma$ -Funktion von grundlegender Bedeutung ist.

Als Hilfsmittel werden der für alle  $x \in \mathbb{R}$  gelgende Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \quad (5)$$

und die verallgemeinerte Dreiecksungleichung benötigt:

Für beliebige reelle Zahlen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gilt

$$|x_0 + x_1 + \dots + x_n| \leq |x_0| + |x_1| + \dots + |x_n|. \quad (6)$$

Zum Nachweis des Grenzwertes (5) überlegt man, daß das  $(k+1)$ -ste Folgenglied aus dem  $k$ -ten Glied durch Multiplikation mit dem Faktor  $x/(k+1)$  entsteht. Bei gegebenem  $x$  gilt für alle  $k > 2|x|$ , daß der hinzukommende Faktor kleiner als  $1/2$  ist, also von einer bestimmten Stelle an das nächste Glied immer – dem Betrage nach – kleiner ist als die Hälfte des vorangehenden. Damit muß es sich um eine Nullfolge handeln. – Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung (6) ist offensichtlich richtig, wenn alle auftretenden  $x_i$  das gleiche Vorzeichen haben; dann gilt sogar Gleichheit. Im anderen Fall hebt sich auf der linken Seite einiges auf, während rechts weiterhin alle  $x_i$  ihren vollen Betrag einbringen.

4 Nun wenden wir uns dem eigentlichen Beweis zu. Er wird üblicherweise in der Form eines Widerspruchsbeweises geführt. Die Erfahrung zeigt aber, daß man sich dabei häufig fragt, wo der Widerspruch eigentlich steckt. Es hat sich unter Mathematikern die Unsitte eingeschlichen, daß man nahezu alles und jedes durch Widerspruch beweist, obwohl oft der direkte Weg einfacher ist; dies sollte man sich möglichst abgewöhnen. Auch hier ist der Beweissatz vieler leichter zu verstehen, wenn man die zu beweisende Aussage positiv formuliert. Man zeigt:

Für jede Wahl von  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  mit  $a_0 \neq 0$  und  $a_n \neq 0$  gilt

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \dots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0 \neq 0. \quad (7)$$

Beweisidee: Es seien solche Zahlen  $n, a_0, \dots, a_n$  vorgegeben. Wir konstruieren Zahlen  $r, s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  derart, daß gilt

$$r \cdot (a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \dots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0) = s + p \quad (8)$$

mit  $|s| < 1$  (9)

und  $p \neq 0$ . (10)

Da  $p$  eine ganze Zahl sein soll, ergibt sich aus (9) und (10), daß die rechte Seite der Gleichung (8) von Null verschieden ist; dann kann aber auch keiner der Faktoren links verschwinden, woraus (7) folgt. (Ähnliche Ideen liegen auch anderen Transzendenz- sowie Irrationalitätsbeweisen zugrunde.)

Zur Ausführung dieser Idee definieren wir zwei Hilfsfunktionen:

$$g: x \mapsto x(x-1)(x-2)\dots(x-n); \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h: x \mapsto (x-1)(x-2)\dots(x-n)e^{-x}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem fixieren wir ein  $k \in \mathbb{N}^*$ , zunächst beliebig, aber später so, daß gewisse Bedingungen erfüllt sind, und definieren damit eine weitere Funktion

$$f: x \mapsto g(x)^k \cdot h(x); \quad x \in \mathbb{R},$$

das heißt

$$f(x) = x^k \cdot [(x-1) \cdot \dots \cdot (x-n)]^{k+1} \cdot e^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Multiplizieren wir die auftretenden Klammern aus, so erhalten wir für  $f(x)$  eine Darstellung der Form

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot x^j \quad (11)$$

mit  $b_j \in \mathbb{Z}$  für alle vorkommenden  $j$ . Insbesondere haben wir  $b_k = \pm(n!)^{k+1}$ ; auf das Vorzeichen von  $b_k$  und die genauen Werte der übrigen  $b_j (j > k)$  kommt es im folgenden nicht an.

Hier möchte ich eine Überraschung erwähnen, die ich bei meinem Unterricht erlebte. Ich kenne die große Scheu vor der Verwendung des Summenzeichens » $\Sigma$ « im Schulunterricht; es wird zwar in den Lehrbüchern eingeführt (siehe zum Beispiel [8; S. 193]), aber der Umgang damit wird nicht geübt. So versuchte ich es auch hier zu umgehen und sagte den Schülern etwa das folgende: Durch Ausmultiplizieren erhält man eine Summe von Termen der Form  $b \cdot x^j$  mit  $k \leq j \leq k+n(k+1)$  und  $b \in \mathbb{Z}$ . Im Fall  $j = k$  hat  $b$  den speziellen Wert  $\pm(n!)^{k+1}$ . Dann habe ich im folgenden immer nur entsprechende Summanden einzeln angeschrieben und gesagt, daß man sich dabei die ganzen Summen denken müsse. Das kam gar nicht an, die Schüler konnten sich das Zusammenspiel dieser Summanden nicht vorstellen. Glücklicherweise wurde der Unterricht an dieser Stelle durch die Pause unterbrochen, in der mir die Schüler klarmachten, daß sie die Sache mit Verwendung des Summenzeichens besser verstehen würden.

Zurück zum Thema: Wir betrachten das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty f(x) dx = \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot \int_0^\infty x^j \cdot e^{-x} dx.$$

Wegen (2) sind die einzelnen Integrale unter der Summe ganze, durch  $k!$  teilbare, für  $j > k$  sogar durch  $(k+1)!$  teilbare Zahlen. Da auch alle Koeffizienten  $b_j$  ganze Zahlen sind, ergibt sich

$$w_0 = \pm(n!)^{k+1} \cdot k! + c_0 \cdot (k+1)! \quad (12)$$

mit  $c_0 \in \mathbb{Z}$ . Wir setzen

$$r = \frac{w_0}{k!} = \pm(n!)^{k+1} + c_0 \cdot (k+1); \quad (13)$$

später werden wir Bedingungen für die noch beliebige Zahl  $k$  formulieren, die garantieren, daß die so definierte Zahl  $r$  tatsächlich zur Herstellung einer Gleichung der Form (8) mit den angegebenen Nebenbedingungen verwendet werden kann.

Als nächsten Schritt spalten wir  $w_0$  für  $i = 1, \dots, n$  auf in der Form

$$w_0 = v_i + w_i$$

mit

$$v_i = \int_0^i f(x) dx, \quad w_i = \int_i^\infty f(x) dx.$$

So erhalten wir für  $r \cdot (a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \dots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0)$  eine Zerlegung der Form

$$\frac{v_n a_n e^n + \dots + v_1 a_1 e}{k!} + \frac{w_n a_n e^n + \dots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!};$$

es bleibt zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von  $k$  die Zahlen

$$s = \frac{v_n a_n e^n + \dots + v_1 a_1 e}{k!}$$

und

$$p = \frac{w_n a_n e^n + \dots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

Betrachten wir zunächst  $p$ . Der Graph der Funktion  $f$ , eingeschränkt auf den Bereich  $x \geq i$ , bestimmt dieselbe Fläche wie der Graph der Funktion  $\tilde{f}: \tilde{x} \mapsto f(\tilde{x} + i)$ ;  $\tilde{x} \geq 0$ . Also gilt für  $i > 0$

$$w_i = \int_0^\infty (\tilde{x} + i)^k [(\tilde{x} + i - 1)(\tilde{x} + i - 2)\dots\tilde{x} \dots (\tilde{x} + i - n)]^{k+1} e^{-\tilde{x}-i} d\tilde{x}.$$

Das ist natürlich eine Integration durch Substitution. Diese Integrationsmethode war meinen Schülern noch nicht bekannt. Da es sich hier aber nur um eine einfache Verschiebung des Ursprungs handelt, hatten sie keine Schwierigkeiten.

Indem wir den Faktor  $e^{-i}$  aus dem Integral herausziehen und die Integrationsvariable wieder in  $x$  umbenennen, erhalten wir

$$w_i = e^{-i} \cdot \int_0^{\infty} (x+i)^k [(x+i-1)(x+i-2) \dots x \dots (x+i-n)]^{k+1} e^{-x} dx.$$

Da in der eckigen Klammer das  $x$  »rein« vor kommt, ist der Integrand nun von der Form

$$\sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \tilde{b}_j \cdot x^j$$

mit  $\tilde{b}_j \in \mathbb{Z}$  für alle vorkommenden  $j$ , das heißt

$$w_i = e^{-i} \cdot \sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \tilde{b}_j \int_0^{\infty} x^j e^{-x} dx.$$

Jetzt folgt aus (2), daß jedes einzelne Integral unter der Summe durch  $(k+1)!$  teilbar ist, das heißt, daß  $w_i$  die Form

$$w_i = e^{-i} \cdot c_i \cdot (k+1)!$$

mit  $c_i \in \mathbb{Z}$  besitzt. Zusammenfassend ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned} p &= (c_n a_n + \dots + c_1 a_1 + c_0) \cdot (k+1) \pm (n!)^{k+1} \cdot a_0 \\ &= c \cdot (k+1) \pm (n!)^{k+1} \cdot a_0 \end{aligned}$$

mit  $c \in \mathbb{Z}$ . Also ist  $p$  eine ganze Zahl und sicherlich dann von Null verschieden, wenn wir  $k$  so wählen, daß  $k+1$  eine genügend große Primzahl ist, größer als  $n$  und  $a_0$ . (Da  $(n!)^{k+1} \cdot a_0$  sicherlich von Null verschieden ist, könnte ja  $p$  nur dann gleich Null sein, wenn  $(n!)^{k+1} \cdot a_0$  durch  $k+1$  teilbar wäre; das ist aber bei einer solchen Wahl von  $k$  ausgeschlossen.)

Zur Untersuchung von  $s$  betrachten wir die Einschränkungen der Funktionen  $g$ ,  $h$  und  $f$  auf das Intervall  $[0, n]$ . Da es sich dabei wieder um stetige Funktionen handelt, sind sie beschränkt, das heißt, es gibt zunächst positive reelle Zahlen  $G$ ,  $H$  derart, daß für alle  $x \in [0, n]$  gilt

$$|g(x)| \leq G, \quad |h(x)| \leq H,$$

woraus für dieselben  $x$  folgt

$$|f(x)| \leq G^k \cdot H.$$

Sollte der Satz von der Beschränktheit stetiger Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen nicht zur Verfügung stehen, so kann man auch direkt Schranken angeben. Für alle  $x \in [0, n]$  gilt ja offensichtlich

$$|g(x)| \leq n^{n+1}, \quad |h(x)| \leq n^n;$$

wir nehmen  $G = n^{n+1}$ ,  $H = n^n$ .

Ohne Betragszeichen läßt sich diese Ungleichung als Doppelungleichung schreiben:

$$-G^k \cdot H \leq f(x) \leq G^k \cdot H,$$

Daraus folgen für  $i = 1, \dots, n$  die Integralabschätzungen

$$-G^k \cdot H \cdot i \leq v_i \leq G^k \cdot H \cdot i,$$

das heißt in der Betragsschreibweise

$$|v_i| \leq G^k \cdot H \cdot i.$$

Fassen wir diese zusammen, so erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (6)

$$\begin{aligned} |s| \cdot k! &= |v_n a_n e^n + \dots + v_1 a_1 e| \\ &\leq |v_n a_n e^n| + \dots + |v_1 a_1 e| \\ &\leq G^k \cdot H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \dots + 1 \cdot |a_1| \cdot e), \end{aligned}$$

wobei die Zahl

$$z = H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \dots + 1 \cdot |a_1| \cdot e)$$

nicht von  $k$  abhängt. Aus (5) folgt nun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G^k \cdot z}{k!} = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G^k}{k!} \right) \cdot z = 0,$$

also für genügend großes  $k$

$$|s| \leq \frac{G^k \cdot z}{k!} < 1.$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, läßt sich nun sicher ein  $k$  finden derart, daß  $|s| < 1$  und  $p \neq 0$  ist. q.e.d.

Daß der Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen hier einmal angewandt werden kann, das war für die Schüler das i-Tüpfelchen auf meinem Unterrichtsversuch. – Sie haben gesehen, daß der Beweis, den ich hier vorgeführt habe, nur Begriffe und Methoden verwendet, die in normalen Leistungskursen behandelt werden. Einzelne Schritte können durchaus als Beispiel- und Übungsmaterial in den laufenden Unterricht eingebbracht werden, vielleicht in noch expliziterer Form, etwa indem man das Integral  $w_0$  für kleine Werte von  $n$  und  $k$  vollständig auswertet. Ich meine, daß bei entsprechender Planung und Vorbereitung wirklich nicht mehr als eine Doppelstunde notwendig ist, um diesen Beweis im Unterricht durchzuführen. Interessanter für die Schüler wäre natürlich noch ein darstellbarer Transzendenzbeweis für die Kreiszahl  $\pi$ ; aber – wie schon gesagt – ein solcher liegt nicht vor. Mit der Aufforderung an Sie, danach zu suchen, möchte ich schließen.

**5** In der Diskussion zum Vortrag wurde nach einfachen Beweisen für die Irrationalität von  $\pi$  gefragt. Der derzeit wohl einfachste für die Schule stammt von I. NIVEN [11] und verläuft folgendermaßen. Angenommen,  $\pi = p/q$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}^*$ . Abhängig von einem zunächst beliebigen  $k \in \mathbb{N}^*$  definiert man Hilfsfunktionen

$$f: x \mapsto \frac{x^k \cdot (p - qx)^k}{k!}; \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F: x \mapsto f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^k f^{(2k)}(x); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nun stellt man fest, daß die Funktion  $f$  und alle ihre Ableitungen, also auch die Funktion  $F$ , an den Stellen 0

und  $\pi$  nur ganzzahlige Werte annehmen. Ferner bestätigt man durch Differenzieren, daß die Funktion

$$G: x \mapsto F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x; \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$g: x \mapsto f(x) \cdot \sin x; \quad x \in \mathbb{R}$$

ist. Daraus folgt, daß das Integral

$$\int_0^\pi g(x) dx = G(x)|_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

für jede Wahl von  $k \in \mathbb{N}^*$  eine ganze Zahl ist. Nun gilt aber für alle  $x \in (0, \pi)$

$$0 < g(x) < \frac{\pi^k \cdot p^k}{k!},$$

das heißt,

$$0 < \int_0^\pi g(x) dx < \pi \cdot \frac{(\pi \cdot p)^k}{k!}.$$

Für genügend großes  $k$  ist nun wegen des Grenzwertes (5) der Wert rechts kleiner als 1 und damit  $\int_0^\pi g(x) dx$  sicherlich keine ganze Zahl. Widerspruch! Um die Unlösbarkeit des Problems von der Quadratur des Kreises zu zeigen, würde bekanntlich der Nachweis genügen, daß die Zahl  $\pi$  keiner algebraischen Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen von einem Grad  $2^m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  angehört. Obwohl diese Behauptung viel schwächer zu sein scheint als die Transzendenz von  $\pi$ , ist dafür kein einfacher Beweis bekannt. Ein Schritt in dieser Richtung, nämlich ein schulgemäßiger Beweis der Irrationalität von  $\pi^2$ , gelang dem Japaner Y. Iwata.

<sup>2</sup> Herr Studiendirektor H. v. KELLER, Hamburg, hat mich nach Abschluß des Manuskriptes noch darauf aufmerksam gemacht, daß der von mir skizzierte Beweis für die Irrationalität von  $\pi$  für den Unterricht aufgearbeitet wurde und erschien ist in  
Education Development Center (Hg.):  
UMAP Modules 1977-1979. Tools for Teaching. -  
Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1981.  
(Rezension in MNU 36 (1983) S. 314)

MOTO; seine entsprechende Variation des skizzierten NIVENSchen Beweises ist in dem auch sehr empfehlenswerten, aber durchaus anspruchsvollen Buch [4] dargestellt.<sup>2</sup>

## Literatur

- [1] B. ARTMANN: Der Zahlbegriff. - Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983.
- [2] B. ARTMANN - D. D. SPALT - W. GERECKE: Transzendenzbeweis für e gestern und heute. - 34 (1987) 187-219.
- [3] M. BAIERLEIN - F. BARTH - U. GREIFENEGGER - G. KRUMBACHER: Anschauliche Analysis 2. - München: Ehrenwirth 1981.
- [4] H.-D. EBBINGHAUS - H. HERMES - F. HIRZENBRUCH - M. KOECHER - K. MAINZER - A. PRESTEL - R. REMMERT: Zahlen (Grundwissen Mathematik 1). - Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1983.
- [5] C. HERMITE: Sur la fonction exponentielle. - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 77 (1873) 18-24, 74-79, 226-233, 285-293.
- [6] D. HILBERT: Über die Transcendenz der Zahlen e und  $\pi$ . - Mathematische Annalen 43 (1893) 216-219.
- [7] A. HURWITZ: Beweis der Transcendenz der Zahl e. - Mathematische Annalen 43 (1893) 220-221.
- [8] K.-A. KEIL - J. KRATZ - H. MÜLLER - K. WÖRLE: Infinitesimalrechnung 2. - München: Bayerischer Schulbuchverlag 1986.
- [9] F. LINDEMANN: Über die Zahl  $\pi$ . - Mathematische Annalen 20 (1882) 213-225.
- [10] J. LIOUVILLE: Sur les classes très-étendus de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébrique. - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 18 (1844) 883-885; Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1) 16 (1851) 133-142.
- [11] I. NIVEN: A simple proof that  $\pi$  is irrational. - Bulletin of the American Mathematical Society 53 (1947) 509.
- [12] O. PERRON: Irrationalzahlen. - Göschens Lehrbücherei Band 1. - Berlin: de Gruyter 1960.
- [13] J. TROPFKE: Geschichte der Elementarmathematik. - 4. Aufl., Band 1: Arithmetik und Algebra. - Berlin - New York: de Gruyter 1980. □