

Heft 10

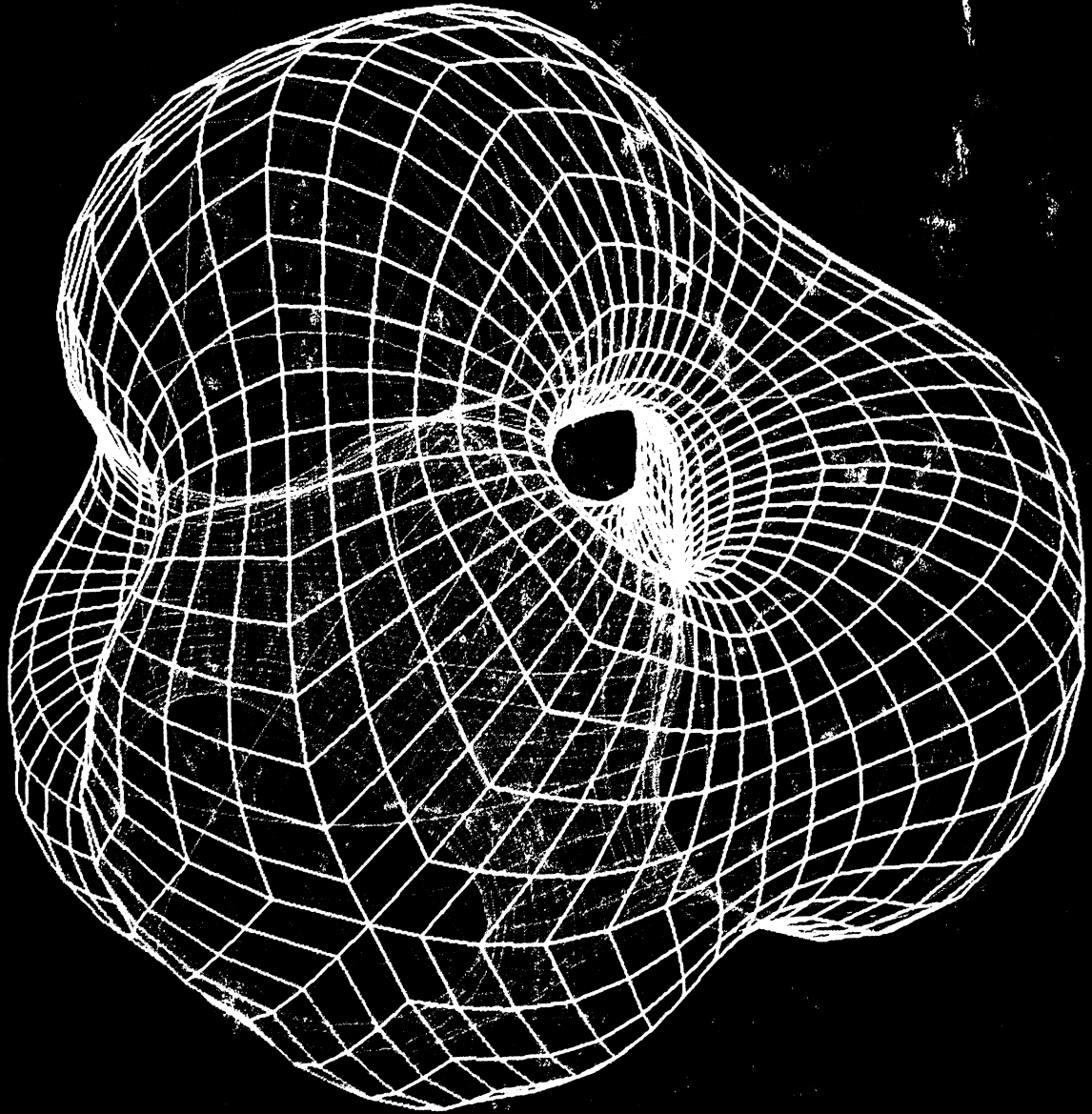
ISSN 0720-9991

ISBN 3 7983 1191 9

*H. 9 = verschollen - 85-46*  
*Falsch*

# WISSENSCHAFTSMAGAZIN

*6*



*60*

## MATHEMATIK

## Aus dem Inhalt

Wolfgang Schwarz	Seite 1	Vorwort
Manfred Fricke	Seite 4	Editorial
Robert Paul Königs	Seite 5	Die Förderung mathematischer Forschung
Barbara Windscheid	Seite 9	Mathematikzentrum im Schwarzwald
Klaus Habetha	Seite 13	Fachinformation in der Mathematik
Helmut Neunzert	Seite 16	Mathematik und Industrie: Von der Notwendigkeit eines Brückenschlags zwischen Theorie und Praxis
Wolfgang Haack	Seite 20	Rückschau über 85 Jahre
Eberhard Knobloch	Seite 24	Vom Umgang der Mathematiker mit dem Unendlichen im 17. Jahrhundert
Dorothee Stacke	Seite 27	„Da malt man furchtbar viele Formeln und schreibt halbe Sätze hin“. Der Mathematiker – das unzugängliche Wesen?
Dirk Ferus	Seite 29	Unlösbarkeit
Erwin Bolthausen	Seite 32	Das Gesetz der großen Zahlen und Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen
Christian Pommerenke	Seite 37	Einige Probleme aus der Funktionentheorie
H. Schwichtenberg	Seite 39	Mathematische Logik
Ulrich Pinkall	Seite 43	Differentialgeometrie geschlossener Flächen
Richard Koch	Seite 46	Analytisch beschreibbare Flächen in der geometrischen Datenverarbeitung
Alfred K. Louis	Seite 49	Numerik: Die Lösung von Anwendungsproblemen
Rolf Dieter Grigorieff	Seite 52	Effekthascherei in der Numerik der Diskretisierungsmethoden
G. Frey, E. Lamprecht, H. G. Zimmer	Seite 61	Neuere Ergebnisse über diophantische Gleichungen
Rudolf Fritsch	Seite 68	Zahlen in der allgemeinbildenden Schule
Stefan Polónyi	Seite 75	Mathematik und Bauwesen
Rudolf Wille	Seite 84	Musiktheorie und Mathematik
Wolfgang Glebe	Seite 94	Mathematische Spielereien Neues Puzzlefieber mit „Rubiks Magic“

Forschung	Seite 100
Publikationen	Seite 104
Personalia	Seite 109
Tagungen	Seite 111
Impressum	Seite 112

# Zahlen in der allgemeinbildenden Schule

Rudolf Fritsch\*

Dem Mathematik-Unterricht an unseren Schulen sind vor allem folgende Ziele gesetzt:

- das Verständnis funktionaler Abhängigkeiten zu vermitteln,
- Einblicke in wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Fragestellungen zu eröffnen und
- Raumanschauung zu entwickeln.

Als Grundlage für jede höhere Einsicht ist Sicherheit im Umgang mit Zahlen erforderlich; dazu gehört ein solides Wissen über den Aufbau des von uns heute verwendeten Zahlensystems. In jeder Schulart und jeder Schulstufe wird deswegen das Thema Zahlen in irgendeiner Form behandelt. Es geht dabei um das Wesen der Zahlen, ihre Darstellung und das praktische Rechnen mit ihnen.

In unserem Computerzeitalter ist man geneigt, nur das als Zahl anzusehen, was man einem Computer eingeben oder entnehmen kann. Der Computer arbeitet aber im allgemeinen nur mit Näherungswerten und gibt damit ein stark vereinfachtes Bild des fein gegliederten Zahlengebäudes, das sich im Lauf der Geschichte zu seiner jetzigen Größe mit vielen Kammern, Zimmern und Stockwerken entwickelt hat. Darin gibt es natürliche, ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen, bis hin zu den Non-Standard-Zahlen, positive, negative und imaginäre Zahlen, irrationale, konstruierbare, algebraische und transzendente Zahlen. Kann man sich da überhaupt auskennen? Es ist keine leichte, aber doch eine lösbare Aufgabe für Lehrer, Schülern im Verlauf von 13 Schuljahren die Struktur des Zahlensystems zu erklären.

Dabei wird mehrfach dasselbe Verfahren angewandt: Ein bestimmter Zahlbereich ist dem Schüler bekannt; davon ausgehend werden neue Zahlen konstruiert, ihre Darstellungsformen werden erläutert und es wird erklärt, wie man mit ihnen rechnet. Gelegentlich werden jedoch vorhandene Zahlbereiche auch gegliedert, etwa die natürlichen Zahlen in Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen, oder die irrationalen reellen Zahlen in reell-algebraische und (reelle) transzendente Zahlen.

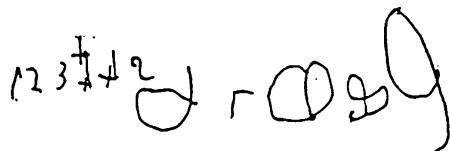
Bei Beginn der Schulzeit hat ein Kind schon eine gewisse Vorstellung von Zahlen. Ein etwas mehr als

vier Jahre alter, normal begabter Junge schrieb beispielhalber vorstehende Ziffernfolge. Durch eingehende Untersuchungen wurde nachgewiesen, daß ein gerade schulpflichtiges Kind im allgemeinen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 kennt und in diesem Bereich einfache Additionsaufgaben lösen kann. Der Unterricht in der Grundschule befaßt sich darauf aufbauend mit der Erarbeitung der Folge 1, 2, 3, . . . der natürlichen Zahlen und einer ersten „Zahlbereichserweiterung“: der Hinzunahme der Null. Zwei Aspekte des Zahlbegriffs sollen dabei besonders herausgestellt werden, die Anordnung: erster, zweiter, dritter . . . Gegenstand, und das Messen: ein, zwei, drei . . . Stück (in der Sprache der Wissenschaft: *Ordinalzahl* und *Kardinalzahl*): „Es ist etwas anderes, ob ich 50 Seiten oder die 50. Seite eines Buches zu studieren habe“ (Asser).

Eine wichtige Rolle beim Erklären des Stellenwertsystems (Einer, Zehner, Hunderter, . . .) zur Darstellung natürlicher Zahlen spielt das „Bündeln“. Dabei macht man klar, daß wir zwar heute ziemlich universell das Zehnersystem benutzen, aber im Prinzip jede andere natürliche Zahl größer als 1 die Basis eines solchen Systems bilden könnte. Technisch überaus bedeutsam ist dies heute in den elektronischen Rechenanlagen, die im wesentlichen nur zwei Zustände „Strom“ oder „nicht Strom“ haben und deswegen im Zweiersystem rechnen (Der Ausdruck „Bündeln“ kommt von der Entstehung des römischen Zahlenzeichens für zehn: Man zählte durch Hinlegen von Getreideähren I, II, III, . . .; hatte man neun schon daliegen so nahm man die zehnte und band sie außen herum zu einem Bündel: die entstehende Figur hat bekanntlich die Form des Buchstabens X im lateinischen Alphabet).

Das Wichtigste in der Grundschule ist, wie eh und je, das Erlernen der Grundoperationen des Addierens und Multiplizierens, sowie des Subtrahierens – soweit ausführbar und des Dividierens, ohne und mit Rest. Auch heute wird dabei Wert auf Fertigkeiten im Kopfrechnen und im schriftlichen Rechnen gelegt, was nun aber besonderer Anstrengungen des Lehrers bedarf. Jeder Schüler findet zu Hause einen elektronischen Taschenrechner, den er im besten Fall nur zur Kontrolle der auf andere Weise gefertigten Hausaufgaben benutzt. Aber gerade wegen dieser Taschenrechner ist geübtes Kopfrechnen unverzichtbar; zu leicht vertippt man sich bei der Eingabe der Werte in einen Taschenrechner, und man muß eben abschätzen können, ob das angezeigte Ergebnis plausibel sein kann.

Einen bedeutenden Schritt in der historischen Entwicklung des Zahlensystems, der erst im 16. oder 17. Jahrhundert vollzogen wurde, bildete die Anerkennung der Null als Zahl; auch die 1 mußte lange um



diese Anerkennung ringen. Wenn Schiller im Wallenstein formuliert „... so ist die Fünfe die erste Zahl aus Grad und Ungerade“, so ist das kein Fehler, sondern entspricht dem Zeitgeist des jungen Wallenstein, in dem drei die erste ungerade Zahl war. Ein Sprachgebrauch in diesem Zusammenhang hat sich bis heute erhalten: Wir nennen zwei natürliche Zahlen „teilerfremd (zueinander)“, wenn sie keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler besitzen. – So ist es gar nicht selbstverständlich, daß heute schon im ersten Schuljahr mit der Null gerechnet wird, und die Schwierigkeit, die manche Menschen ihr Leben lang mit der Null haben (vor allem, weil man durch Null nicht dividieren darf) erklärt sich daraus.

Grundlegend für den weiteren Aufbau des Zahlensystems ist der geometrische Aspekt von Addition und Multiplikation, häufig recht handfest mit Stäben und Klötzen eingeführt. Man repräsentiert zwei natürliche Zahlen durch Strecken und addiert sie, indem man die beiden Strecken aneinanderlegt. Die Multiplikation wird zunächst als wiederholte Addition eingeführt

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12,$$

dann aber als Fläche eines Rechtecks gedeutet, woraus sich unmittelbar anschaulich das Kommutativgesetz

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$$

ergibt. (Natürlich lernen das die Schüler heute und es ist auch sinnvoll, solche „Strukturaussagen“ zu kennen; aber es ist eine böswillige Unterstellung, daß moderne Lehrer nicht mehr nach dem Ergebnis fragen!). Dieser Ansatz führt zum Zahlenstrahl, später zur Zahlengeraden und zur Zahlenebene, in der schließlich alle in der Schule behandelten Zahlen ihren Platz finden. Anschaulich ist dann klar, daß jede Strecke eine Länge hat und daß man zwei Strecken aneinanderlegen oder mit ihnen als Seiten ein Rechteck mit einer wohlbestimmten Fläche erzeugen kann. Das bedeutet, daß Addition und Multiplikation auch dann eindeutig bestimmt sind, wenn die Darstellung der Zahlen mit Hilfe des Dezimalsystems versagt (für die Multiplikation wird das später noch näher ausgeführt). Während man sich direkt im Anschluß an die Grundschule, im 5. Schuljahr, im wesentlichen auch nur mit den natürlichen Zahlen befaßt – die Teilbarkeitslehre bringt den Unterschied zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen – kommt es in Klasse 6 zu einer wichtigen und großen Zahlbereichserweiterung: der Hinzunahme der (positiven) *Bruchzahlen*.

Das Bruchrechnen bildet seit Jahrtausenden ein Schreckgespenst für viele Schüler, und ebenso alt sind die didaktischen Versuche, einen möglichst leichten Zugang zu finden. Der Einstieg erfolgt von alters her über einen aufzuteilenden Kuchen, aber viele andere Modelle werden daneben vorgeführt. Einen wichtigen Aspekt bei der Darstellung von Bruchzahlen bildet die mangelnde Eindeutigkeit

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} \dots$$

der Darstellung einer Bruchzahl durch einen gemeinen Bruch. Was bedeutet diese Gleichheit? Doch nicht vollständige Identität, etwa

$$3 = \frac{6}{2} :$$

drei ganze Hühner können lebendig sein, sechs halbe Hühner sind geschlachtet. Die Ausführung der Addition mit Hilfe gemeiner Brüche ist prinzipiell klar, aber technisch schwierig („gleichnamig machen des Nenners“); für die Begründung der rechnerisch einfacheren Multiplikation eignet sich das Flächenmodell. Besondere Bedeutung kommt nun der Division zu, die unbeschränkt ausführbar wird (Ausnahme, die die Regel bestätigt: Division durch Null), aber einen sehr formalen Charakter erhält, zumindest bei Division durch einen Bruch: Eine Strecke der Länge  $\frac{3}{4}$  cm in 5 gleiche Teile teilen, das kann man sich noch vorstellen; aber was in aller Welt bedeutet

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} ?$$

Man findet die Antwort, wenn man überlegt, daß die Division der natürlichen Zahlen nicht nur ein Aufteilen in gleiche Teile, sondern auch eine Umkehrung der Multiplikation liefert. Dieser Gesichtspunkt ergibt für die Division von Bruchzahlen die Zahl, die mit  $\frac{5}{6}$  multipliziert  $\frac{3}{4}$  ergibt.

Für unsere Schüler kommt beim Bruchrechnen noch ein Problem, aber auch ein Ansporn hinzu: Der Taschenrechner kann es nicht, jedenfalls nicht in der besprochenen Form. Damit werden wir zu einer anderen Darstellung von Bruchzahlen geführt: der Darstellung durch endliche oder periodisch unendliche Dezimalbrüche. Sie hat den Vorteil, daß sich Größenverhältnisse unmittelbar übersehen lassen, aber den Nachteil, daß man mit unendlichen Dezimalbrüchen nicht so richtig rechnen kann. Der Taschenrechner gibt nur Näherungswerte,

$$\left(\frac{1}{343}\right) \cdot 343 = 0,0029154 \cdot 343 = 0,9999822$$

i.a. genau genug, aber doch nicht exakt. Ein weiterer, vermeintlicher Vorteil ist die Eindeutigkeit der Darstellung durch Dezimalbrüche (bis auf Nullen vorne – wie bei den natürlichen Zahlen – und hinter dem Komma), aber leider gibt es Ausnahmen:

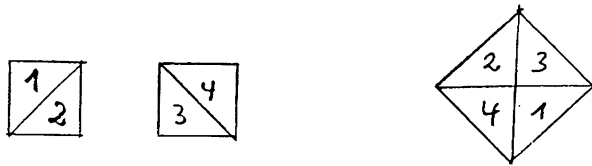
$$1,\bar{9} = 1,99 \dots = 2!$$

(Die Gleichheit wird verständlich, wenn man versucht, sich die Größe des Unterschieds zwischen 2 und  $1,\bar{9}$  klarzumachen; sie beruht auf dem sog. Archimedischen Axiom, daß es zu jeder positiven Zahl  $a$  eine natürliche Zahl  $n$  gibt, derart daß  $\frac{1}{n}$  kleiner ist als  $a$ ).

Das folgende 7. Schuljahr bringt die Erweiterung auf die rationalen Zahlen, der Zahlenstrahl wird an seinem Anfangspunkt gespiegelt und bildet zusammen mit seinem Spiegelbild die Zahlengerade: negative Zahlen treten hinzu, die Subtraktion wird unbe-

schränkt ausführbar. Die Durchführung erscheint technisch einfacher als der Umgang mit den Bruchzahlen, nur die eigenartigen Vorzeichenregeln bedürfen einer besonderen Erläuterung. Da Schulden und negative Temperaturen heute jedes Kind kennt, führt das zu der Frage: warum denn nicht die Einführung der negativen Zahlen vor den Bruchzahlen, womit man aus den natürlichen Zahlen die *ganzen* Zahlen . . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, . . . gewinnt? Die didaktische Diskussion darüber dauert bis heute an, in manchen Lehrplänen sind beide Reihenfolgen zulässig. Ein Grund für den hier genannten Weg besteht darin, daß der Übergang von den ganzen zu den rationalen Zahlen auch wieder ein zweistufiges Vorgehen erfordert. Man hat zunächst die (positiven) Bruchzahlen und ihre Rechenoperationen einzuführen und dann nimmt man das Vorzeichen hinzu, muß also den Schritt ins Negative wiederholen.

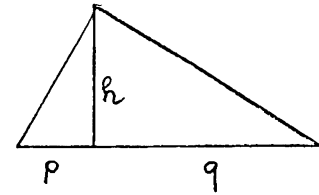
Das 9. Schuljahr bringt die nächste Zahlbereichserweiterung, vom theoretischen Unterbau her gesehen die schwierigste, die in der Schule behandelt wird. Zunächst gilt es aufzuzeigen, daß man auch im praktischen Leben nicht mit den bisher betrachteten Zahlen auskommt. Das wohl einfachste Beispiel dafür ergibt sich folgendermaßen: Man nehme zwei Quadrate (aus Pappe) mit der Seitenlänge 1 (cm), zerschneide sie und setze sie zusammen wie die folgenden Figuren zeigen:



Die beiden ursprünglichen Quadrate haben jedes die Fläche 1. Die neue Figur ist wieder ein Quadrat, offensichtlich mit der Flächenmaßzahl 2. Wie groß ist seine Seitenlänge  $s$ ? Natürlich können wir eine Seite des neuen Quadrates auf der Zahlengeraden abtragen und erhalten einen wohlbestimmten Punkt. An der Existenz einer Zahl  $s$  ist nicht zu zweifeln. Versuchen wir nun  $s$  als rationale Zahl darzustellen, indem wir annehmen: es gibt natürliche Zahlen  $p$  und  $q$  mit  $s = \frac{p}{q}$ . Wir können dabei voraussetzen, daß  $p$  und  $q$  nicht beide gerade Zahlen sind; andernfalls kürzen wir den Bruch durch 2 (notfalls mehrfach). Für die Fläche des zusammengesetzten Quadrates gilt dann  $2 = s^2 = \frac{p^2}{q^2}$ , woraus  $p^2 = 2q^2$ , also  $p^2$  gerade folgt. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ergibt sich daraus, daß  $p$  eine gerade Zahl sein muß, also  $\frac{p}{2}$  auch eine natürliche Zahl ist. Schreiben wir  $r$  für  $\frac{p}{2}$ , so ist  $p = 2r$ , also  $p^2 = 4r^2 = 2q^2$  und damit  $q^2 = 2r^2$ . Dann muß aber auch  $q$  eine gerade Zahl sein, was unserer Voraussetzung widerspricht:  $s$  kann keine rationale Zahl sein, ist aber wohlbestimmt und benötigt eine Darstellung:  $\sqrt{2}$ , genannt (Quadrat-) Wurzel aus 2.

Es gibt also tatsächlich auf der Zahlengeraden noch Platz für Zahlen, die wir noch nicht kennen.

$\sqrt{2}$  ist keine Ausnahme, sondern die Spitze eines riesigen Eisberges. Im Geometrie-Unterricht beweist man gleichzeitig den Satz des Pythagoras und als Konsequenz daraus den Höhensatz: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC

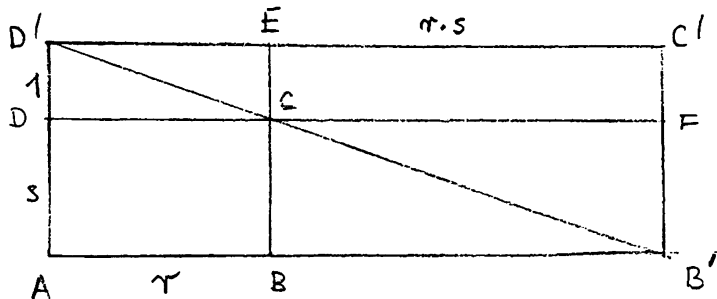


ist das Quadrat über der Höhe  $h$  flächengleich dem Rechteck aus den Hypothenusenabschnitten:  $h^2 = pq$ . Nimmt man nun eine beliebige rationale Zahl als  $q$  und setzt  $p = 1$ , so gelingt es mit Hilfe des Thaleskreises leicht, ein rechtwinkliges Dreieck mit den Hypothenusenabschnitten  $p$  und  $q$  zu konstruieren. Die Höhe dieses Dreiecks hat dann eine Länge  $h$ , deren Quadrat  $q$  ist; wenn sich  $q$  nicht als Quotient von zwei Quadratzahlen darstellen läßt – was beliebig oft möglich ist – dann ist  $h$  keine rationale Zahl. Man erhält so beliebig viele neue Zahlen – bezeichnet durch  $\sqrt{q}$ , die (Quadrat-)Wurzel aus  $q$  – die man ihrer Herleitung entsprechend auf dem positiven Teil der Zahlengeraden ansiedelt; durch Spiegelung an der Null ergeben sich auch im negativen Teil neue Punkte, die sinngemäß durch  $-\sqrt{q}$  bezeichnet werden.

Erfassen wir auf diese Weise nun alle Punkte der Zahlengeraden? Das ist unwahrscheinlich. Man kann ja etwa die obige Konstruktion einer Quadratwurzel auf eine Quadratwurzel anwenden und erhält dann so etwas wie  $\sqrt{\sqrt{2}}$ ; von dieser Zahl überlegt man sich leicht, daß es sich nicht um die Quadratwurzel einer rationalen Zahl handeln kann. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert immer wieder neue Zahlen, die *konstruierbaren* Zahlen; es sind genau die Zahlen, die im klassischen Sinn mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Ob diese nun die Zahlengerade vollständig ausfüllen? Darüber machen wir uns zunächst keine Gedanken. An dieser Stelle kommt der große Wurf. Wir erweitern den Zahlbereich, so daß jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl entspricht und erhalten damit die *reellen* Zahlen. Alle Zahlen, die nicht rational sind, werden als *irrational* bezeichnet (auch in später eingeführten, noch größeren Zahlbereichen). Die grundlegenden Rechenoperationen Addition und Multiplikation lassen sich geometrisch leicht veranschaulichen. Die Addition wird über das Abtragen von Strecken gewonnen, die Multiplikation zunächst für zwei positive reelle Zahlen über das altgriechische „Gnomon“ und dann durch Hinzufügen der Vorzeichenregeln für beliebige reelle Zahlen. Das Gnomon beruht auf der Idee, ein Rechteck mit den Seiten  $r$  und  $s$  in ein Rechteck mit den Seiten 1 und  $r \cdot s$  zu verwandeln, wie folgende Skizze zeigt.

(Konstruktion: Man zeichnet ein Rechteck ABCD mit den Seiten  $AB = CD = r$ ,  $AD = BC = s$  und verlängert AD um eine Strecke der Länge 1 über D hinaus zum Punkt D'. Dann schneidet man die Verbindungsgerade der Punkte D' und C mit der Verlängerung von AB und

erhält  $B'$ . Das Dreieck  $AB'D'$  wird zu einem Rechteck  $AB'C'D'$  ergänzt und die Strecken  $BC$ ,  $DC$  werden bis zu den Punkten  $E$  und  $F$  auf  $C'D'$  bzw.  $B'C'$  verlängert. Behauptung: Die Rechtecke  $ABCD$  und  $CFC'E$  sind flächengleich, woraus  $C'E = rs$  folgt. Beweis: Die Strecke  $B'D'$  halbiert die Rechtecke  $AB'C'D'$ ,  $BB'FC$  und  $DCED'$ . Das Rechteck  $ABCD$  entsteht aus dem Dreieck  $AB'D'$  durch Wegnahme der Dreiecke  $BB'C$  und  $DCD'$ ; das Rechteck  $CFC'E$  entsteht aus dem zu  $AB'D'$  flächengleichen Dreieck  $B'C'D'$  durch Wegnahme der zu  $BB'C$  und  $DCD'$  flächengleichen Dreiecke  $B'FC$  und  $CED'$ .



Wenn geometrisch alles klar ist, kommt die Frage nach der arithmetischen Behandlung. Diese hat einen theoretischen und einen numerischen Aspekt. Numerisch arbeitet man wieder mit dem Taschenrechner, der eine reelle Zahl im allgemeinen aber nur näherungsweise angibt. Theoretisch stellen wir uns vor, daß die irrationalen positiven reellen Zahlen den unendlichen nicht-periodischen Dezimalbrüchen entsprechen. Wir wissen ja von früher, daß jeder endliche oder unendliche periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl darstellt. Jeder positiven reellen Zahl  $r$  wird damit eine *Dezimalbruchentwicklung* zugeordnet; das ist die Folge  $r_1, r_2, \dots$  endlicher Dezimalbrüche, wobei sich  $r_k$  aus  $r$  durch „Abschneiden“ der  $(k+1)$ ten und aller höheren Dezimalen ergibt.

Aber wie früher ergeben sich Schwierigkeiten bei der Ausführung der Rechenoperationen und ein Zurückführen auf gemeine Brüche ist hier nicht möglich; wir helfen uns mit den *Intervallschachtelungen*. Ein Intervall ist eine Teilmenge der Zahlengeraden, die aus allen Zahlen zwischen zwei gegebenen Zahlen  $a, b$  besteht, wobei  $a$  kleiner als  $b$  vorausgesetzt wird und die Grenzen  $a$  und  $b$  als zum Intervall zugehörig betrachtet werden – Bezeichnung:  $[a; b]$ . Von einer Intervallschachtelung spricht man, wenn eine Folge von Intervallen  $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots$  gegeben ist, so daß jedes der auftretenden Intervalle das nachfolgende enthält und genau eine reelle Zahl allen diesen Intervallen angehört. Simpelstes Beispiel

$[1; 2], [1, 9; 2], [1, 99; 2], [1, 999; 2] \dots$

genau die Zahl 2 gehört allen diesen Intervallen an; wir sagen: die Intervallschachtelung stellt die Zahl 2 dar. Jede positive reelle Zahl läßt sich nun durch Intervallschachtelungen darstellen, bei denen die Intervallgrenzen aus lauter positiven rationalen Zahlen bestehen und damit können wir die Rechenoperationen von den rationalen auf die reellen Zahlen übertragen. Wir finden: Sind die positiven reellen Zahlen  $r$  und  $r'$  durch Intervallschachtelungen

$[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots$

bzw.

$[a'_1; b'_1], [a'_2; b'_2], \dots$

dargestellt, so bilden die Folgen

$[a_1 + a'_1; b_1 + b'_1], [a_2 + a'_2; b_2 + b'_2], \dots$

bzw.

$[a_1 a'_1; b_1 b'_1], [a_2 a'_2; b_2 b'_2], \dots$

Intervallschachtelungen, die die reellen Zahlen  $r+r'$  bzw.  $r \cdot r'$  darstellen.

Innerhalb der Gesamtheit der reellen Zahlen hat man nun noch qualitative Unterschiede, die man auf dieser Stufe allerdings nur plausibel machen kann. Zunächst kommen wir zu den höheren Wurzeln: Es ist ja ein leichtes, einen unendlichen Dezimalbruch zu konstruieren, dessen 3. Potenz etwa gleich 5 ist:

$$1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8$$

$$1,7^3 = 4,913 < 5 < 1,8^3 = 5,832$$

$$1,70^3 = 4,913 < 5 < 1,71^3 = 5,000221$$

Das Ergebnis dieses Prozesses ist die 3. *Wurzel aus 5*, die auch kurz durch das Symbol  $\sqrt[3]{5}$  bezeichnet wird. Allgemein erhält man so zu jeder natürlichen Zahl  $n$  und jeder positiven reellen Zahl  $a$  eine  $n$ -te Wurzel aus  $a$ :  $\sqrt[n]{a}$ . Diejenigen reellen Zahlen, die man ausgehend von den rationalen Zahlen durch wiederholtes Wurzelziehen oder *Radizieren* (lat. radix = Wurzel) in Verbindung mit den Grundrechenarten erreicht, heißen reelle Radikale. Spezielle Radikale sind die vorhin schon beschriebenen konstruierbaren Zahlen. – Alle reellen Radikale sind Nullstellen von ganzzahligen Polynomen, d.h. Lösungen von *polynomialen Gleichungen* mit ganzen Koeffizienten z.B. ist  $\sqrt[3]{5 + \sqrt{2}}$  Lösung der Gleichung

$$x^6 - 10x^3 + 26 = 0.$$

Ein uraltes mathematisches Problem bildete die Frage, ob jede reelle Lösung einer solchen Gleichung ein reelles Radikal ist. Der aus dem Jahr 1826 stammende *Abelsche Unmöglichkeitssatz* (nach dem Norweger Niels Henrik Abel 1802–1929) gibt eine negative Antwort und führt zu einem neuen Begriff: Eine reelle Zahl heißt *reell-algebraisch*, wenn sie Lösung einer polynomialen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Alle reellen Radikale sind demnach *reell-algebraisch*, aber nicht umgekehrt. Andererseits gibt es auch noch reelle Zahlen, die nicht einmal reell-algebraisch sind; man bezeichnet sie als *transzendent*. Die Bezeichnung ist etwas irreführend; denn es handelt sich dabei nicht um Zahlen, die nur in der Ideenwelt der Mathematiker leben. Zumindest eine von ihnen begegnet uns fortwährend im Alltag und tritt spätestens in der 6. Jahrgangsstufe in allen Schularten auf: die Kreiszahl  $\pi$ . Zunächst rechnet man ohne weitere Erklärung mit den Näherungswerten  $\frac{22}{7}$  oder 3,14; die meisten handelsüblichen Taschenrechner haben  $\pi$  als Konstante mit 8 bis 10 Dezimalen fest gespeichert.

Im Zusammenhang mit der Diskussion der reellen Zahlen wird dem Schüler nun in der 9. Klasse gezeigt, wie man im Prinzip Näherungswerte für  $\pi$  mit beliebiger Genauigkeit ermitteln kann. Er erfährt auch, daß  $\pi$  eine transzendente Zahl ist, allerdings ohne Beweis. Der Nachweis der Transzendenz von  $\pi$  gelang im Jahre 1882 Ferdinand Lindemann (1852–1939, in Hannover gebürtig, damals ordentlicher Professor an der Universität Freiburg im Breisgau); es war die negative Antwort auf die Frage nach der *Quadratur des Kreises*, d.h. der Konstruierbarkeit von  $\pi$ , die seit der Mitte des 5. vorchristlichen Jahrhunderts die Mathematiker bewegt hatte. Leider sind auch die bis heute gefundenen Vereinfachungen des Lindemannschen Beweises noch so kompliziert, daß sie in den Schulunterricht nicht eingebracht werden können. Man sollte eigentlich meinen, daß die Nichtkonstruierbarkeit von  $\pi$  einfacher zu überprüfen wäre als die Transzendenz, aber nach einer direkten Methode dafür wird immer noch gesucht. Relativ einfach ist lediglich die Irrationalität von  $\pi$  zu verifizieren; dem Japaner Y. Iwamoto gelang das 1949 mit den Hilfsmitteln, die einem Schüler kurz vor dem Abitur im Leistungskurs zur Verfügung stehen.

Die Beschreibung der reellen Zahlen durch Dezimalbrüche und Intervallschachtelungen ist auch nützlich für die Verallgemeinerung des Potenzierens, die der Schüler in den Klassen 9 und 10 kennenlernt. Ist  $a$  irgendeine reelle Zahl und ist  $n$  eine natürliche Zahl, so nennt man bekanntlich das Produkt  $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , bestehend aus  $n$  gleichen Faktoren  $a$ , „ $n$ -te Potenz von  $a$ “ und bezeichnet diese Zahl kurz durch  $a^n$ . Ist  $m$  eine weitere natürliche Zahl, so gilt offensichtlich

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

Ist  $a \neq 0$  und  $m$  kleiner als  $n$ , so hat man darüberhinaus die Regel

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Diese Bezeichnung legt nun eine erste Verallgemeinerung des Potenzbegriffes nahe: Jede ganze Zahl  $z$  läßt sich ja als Differenz zweier natürlicher Zahlen schreiben

$$z = n - m$$

und man setzt fest

$$a^z = a^n : a^m.$$

Ist  $z$  selbst eine natürliche Zahl, so hat man auf Grund der eben genannten Regel nichts Neues. Für  $z = 0 = 1 - 1$  ergibt sich jedoch

$$a^0 = 1;$$

Ist  $z$  eine negative Zahl, so ist  $-z$  eine natürliche Zahl und es folgt

$$a^z = \frac{1}{a^{-z}}.$$

Der Witz an dieser Verallgemeinerung ist nun, daß die genannten Potenzgesetze weiter, d.h. auch dann

gelten, wenn  $n$  und  $m$  beliebige natürliche Zahlen sind; man muß dabei allerdings die „Basis“ 0 ausschließen. (Für natürliche Zahlen  $n$  hat man natürlich  $0^n = 0$ ; die Mathematiker haben es darüberhinaus als sinnvoll angesehen, das Symbol  $0^0$  zuzulassen und ihm den Wert 1 zuzuweisen).

Die nächste Verallgemeinerung des Potenzierens beruht auf der Potenzregel

$$(a^z)^n = a^{z \cdot n},$$

die ebenfalls für jede reelle Zahl  $a$  und ganze Zahlen  $n, z$  gilt; ist  $a$  positiv und  $n$  eine natürliche Zahl, die  $z$  teilt, so folgert man daraus

$$a^{\frac{z}{n}} = (\sqrt[n]{a})^z.$$

Da sich jede rationale Zahl  $q$  als Quotient  $q = \frac{z}{n}$  aus einer ganzen Zahl  $z$  und einer natürlichen Zahl  $n$  schreiben läßt, führt dies zu der allgemeinen Festlegung

$$a^q = (\sqrt[n]{a})^z,$$

wobei allerdings als Basis  $a$  nur positive Zahlen zulässig sind. Auch bei dieser Erweiterung des Potenzbegriffes gelten die bekannten Regeln fort: Ist  $a$  eine positive Zahl und sind  $p, q$  rationale Zahlen, so hat man

$$a^p + a^q = a^p \cdot a^q, (a^p)^q = a^{pq}.$$

Für den nächsten Schritt ist noch folgende Eigenschaft des Potenzierens wichtig: Ist  $a$  eine reelle Zahl größer als 1 und sind  $p$  und  $q$  rationale Zahlen mit  $p < q$ , so ist auch  $a^p < a^q$ . Sei nun  $r$  eine positive reelle Zahl und sei  $r_1, r_2, \dots, r_k, r^n, \dots$  eine Dezimalbruchentwicklung von  $r$ ; für jedes  $k$  sei  $\bar{r}_k = r_k + 10^{-k}$ . Dann folgt für eine reelle Zahl  $a > 1$  und jedes  $k$

$$a^{\bar{r}_k} < a^{\bar{r}^k};$$

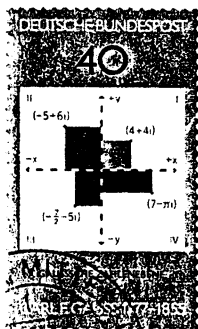
darüberhinaus zeigt man, daß die Intervalle  $[a^{\bar{r}_1}, a^{\bar{r}_1}]$ ,  $[a^{\bar{r}_2}, a^{\bar{r}_2}]$ ,  $\dots$  eine Intervallschachtelung bilden und bezeichnet die durch sie bestimmte Zahl durch  $a^r$ . Für  $a = 1$  setzt man  $a^r = 1$ ; für  $a$  kleiner als 1 (aber größer als 0) hat man  $\frac{1}{a}$  größer als 1 und kann definieren

$$a^r = \left( \left( \frac{1}{a} \right)^r \right)^{-1}.$$

Damit hat man eine Potenz  $a^r$  für jede positive reelle Zahl  $a$  und jede reelle Zahl  $r$  definiert, wiederum so, daß die genannten Potenzregeln weitergelten. Es bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten im Exponenten statt reeller Zahlen  $r$  auch komplexe Zahlen (diese werden anschließend beschrieben) zuzulassen; andersartige Wege muß man beschreiten, wenn man auch mit allgemeineren Basen arbeiten will. Aber das liegt jenseits dessen, was in der allgemeinbildenden Schule geleistet werden kann. Die hier dargestellte Entwicklung ist jedoch unverzichtbar, wenn der Schüler begreifen soll, was bei der Betätigung der Taste „ $y^x$ “ beim Taschenrechner vor sich geht: insbesondere kann er damit erklären, warum die meisten Taschenrechner bei der Eingabe  $(-3)^5$  Fehler melden.



– Noch vor wenigen Jahren schloß sich an die Behandlung dieses Stoffes das Logarithmieren an, das eine umständliche Technik lieferte, Berechnungen der Art  $y^x$  mit Hilfe von Tafeln durchzuführen. Im Computerzeitalter ist das entfallen; es interessiert nicht mehr das Logarithmieren als numerische Aufgabe, sondern das Verhalten der Logarithmusfunktion, die in der Oberstufe der Gymnasien untersucht wird.



Die bisher genannten Zahlbereichserweiterungen ließen sich gut geometrisch motivieren; das gilt zunächst nicht für den Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen, der deswegen in unseren Schulen etwas stiefmütterlich behandelt wird – mit der Konsequenz, daß auch viele Abiturienten die Darstellung auf der Briefmarke nicht verstehen können, die die Deutsche Bundespost 1977 zum 200. Geburtstag des *princeps mathematicorum* Karl Friedrich Gauß (1777–1855) herausgegeben hat. Worum geht es dabei?

Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

hat keine reelle Lösung, denn für jede reelle Zahl  $a$  ist  $a^2 + 1$  eine positive reelle Zahl. Wir wollen nun den Bereich der reellen Zahlen so erweitern, daß diese Gleichung eine Lösung hat. Im Gegensatz zu reellen Lösungen, die man sich auf der Zahlengeraden vorstellen könnte, nannte man diese zunächst nur gedachten Zahlen *imaginär*. Den Anfangsbuchstaben dieses Wortes  $i$  benutzte man dann zur Bezeichnung einer Lösung der genannten Gleichung. Damit stellt  $i$  eine Zahl dar, für die gilt  $i^2 = -1$ . Auch in dem neuen Zahlbereich sollen die Grundrechenoperationen ausgeführt werden können, unter Erhaltung der üblichen Gesetze. Sind  $a$  und  $b$  also irgendwelche reelle Zahlen, so muß man  $b \cdot i$  und auch  $a + bi$  bilden können. Wir gehen nun so vor, daß wir alle Ausdrücke der Form  $a + bi$ , in denen  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind, als *komplexe* Zahlen ansehen, und erklären

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

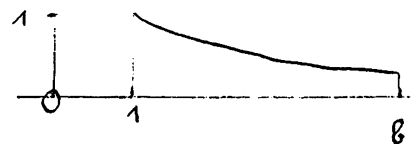
$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i,$$

(die Festlegung für die Multiplikation ergibt sich aus den sog. *Distributivgesetzen*); eine reelle Zahl  $a$  wird in dieser Schreibweise durch  $a + 0 \cdot i$  dargestellt.

Eine der wichtigsten Leistungen von Gauß bestand in der geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahlen, mit der sie dieselbe Realität gewinnen wie die reellen. Er nahm ein rechtwinkliges Koordinatensystem und ordnete der komplexen Zahl  $a + bi$  den Punkt mit den Koordinaten  $(a; b)$  zu. Damit wird die reelle Zahlengerade zur  $x$ -Achse und die Zahl  $i$  zum Einheitspunkt auf der  $y$ -Achse. Die Addition komplexer Zahlen läßt sich dann durch die übliche Parallelogrammkonstruktion geometrisch realisieren (Kräfteparallelogramm in der Physik) und die Multiplikation durch Drehstreckungen. Gauß gab auch die ersten voll-

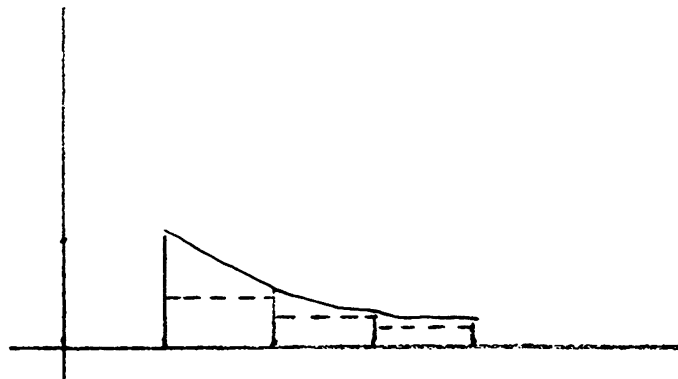
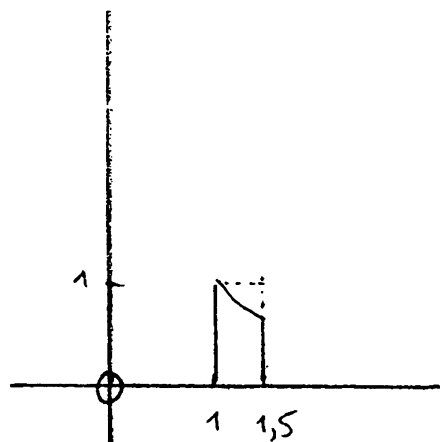
ständigen Beweise für den sog. *Fundamentalsatz der Algebra*, nach dem jede polynomiale Gleichung mit komplexen Koeffizienten mindestens eine (komplexe) Lösung hat. Schon daraus ergibt sich die große Bedeutung der komplexen Zahlen für die Mathematik; sie spielen aber auch in anderen Gebieten eine wichtige Rolle, so z.B. in der Elektrotechnik, wo sie eine bequeme Beschreibung des Wechselstromwiderstandes erlauben.

Daß die Zahl  $\pi$  trotz der mit ihr verbundenen Schwierigkeiten eine universelle Bedeutung hat und von großer Wichtigkeit auch für die Anwendungen der Mathematik ist, wird niemand bestreiten. In den beiden Abschlußklassen des Gymnasiums, in denen ein Schüler heute an mathematischen Grund- oder Leistungskursen teilnimmt, lernt er noch eine weitere Zahl von ähnlichem, wenn nicht noch gewichtigerem Charakter kennen: die Eulersche Zahl, benannt nach dem aus Basel stammenden, später vor allem in Berlin und Petersburg wirkenden Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), und ihm zu Ehren auch in der ganzen Welt, in allen Sprachen und Schriften durch „ $e$ “ bezeichnet. Diese Zahl  $e$  läßt sich folgendermaßen geometrisch beschreiben: Wir betrachten in der Koordinatenebene Flächenstücke, die von der  $x$ -Achse,



der Kurve  $xy = 1$  (genauer: den Punkten  $(x; y)$  mit  $xy = 1$  und  $x > 1$ ), der Geraden  $x = 1$  und einer weiteren Geraden  $x = b$  begrenzt werden, wobei  $b$  zunächst eine beliebige Zahl größer als 1 sein soll. Die Flächenmaßzahl eines solchen Flächenstücks wird normiert mit „ $1 \ln b$ “ bezeichnet ( $\ln$  als Abkürzung für „Logarithmus naturalis“); die Funktion, die jedem  $b$  den Wert  $1 \ln b$  zuordnet, heißt „natürlicher Logarithmus“ und ist bei vielen Taschenrechnern durch Tastendruck einfach abzurufen. Wenn  $b$  nahe bei 1 liegt, so ist  $\ln b$  sicher klein. Die linke Skizze der Grafik auf der folgenden Seite zeigt den Fall  $b = 1,5$ ; das fragliche Flächenstück ist dann kleiner als das eingezeichnete Rechteck mit den Seitenlängen 1 und  $1,5 - 1 = 0,5$ , also ist  $1 \ln 1,5$  kleiner als  $1 \cdot 0,5 = 0,5$ . Verschieben wir  $b$  nach rechts, so wird das Flächenstück immer größer:  $\ln b$  wächst stetig, man kann zeigen, daß  $\ln b$  größer als jede vorgegebene Zahl gemacht werden kann (das ist nicht selbstverständlich, denn wenn man in dieser Überlegung die Kurve  $xy = 1$  durch die Kurve  $x^2y = 1$  ersetzt, so bleiben die entstehenden Flächenmaßzahlen immer kleiner als 1).

Wir wollen hier noch den Fall  $b = 4$  genauer ins Auge fassen. Im rechten Bild sind in das nun zu diskutierende Flächenstück drei Rechtecke mit den Flächen  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ , also der Flächensumme  $\frac{13}{12}$  eingezeichnet. Damit ist  $\ln 4$  größer als  $\frac{13}{12}$ , also auch größer als 1 und so muß es zwischen 1,5 und 4 genau eine Zahl



mit dem natürlichen Logarithmus 1 geben: das ist die Eulersche Zahl! Die Bedeutung der Eulerschen Zahl liegt in der durch sie definierten „Exponentialfunktion“, die jeder reellen Zahl  $x$  die Potenz  $e^x$  zuordnet; aus dieser Funktion abgeleitete (nicht im Sinne der Differentialrechnung) Funktionen beschreiben viele biologische und wirtschaftliche Wachstumsprozesse. Im Unterricht nimmt die Behandlung dieser Anwendungen natürlich einen breiten Raum ein, aber hier soll nur noch der Eulerschen Zahl ihr Platz im Zahlengebäude zugewiesen werden. Im Jahre 1873 bewies der französische Mathematiker Charles Hermite (1822–1901) die Transzendenz von  $e$ ! Sein Beweis inspirierte Lindemann zum Beweis der Transzendenz von  $\pi$ . Dem aus Königberg in Ostpreußen stammenden, später in Göttingen wirkenden David Hilbert (1862–1943) gelang eine wesentliche Vereinfachung beider Beweise, so daß heute die Transzendenz von  $e$  im Leistungskurs nachgewiesen werden kann, was – wie schon gesagt – leider nicht für den Beweis der Transzendenz von  $\pi$  gilt. Trotzdem ein paar Andeutungen zu letzterem: Man setzt die Exponentialfunktion ins Komplexe fort, das heißt man definiert für jede komplexe Zahl  $w$  eine komplexe Zahl  $e^w$ . Das geschieht in der Weise, daß für reelles  $w$  sich die schon bekannte reelle Zahl  $e^w$  ergibt, und daß die Potenzregel

$$e^{w+v} = e^w e^v$$

für alle komplexen Zahlen  $w, v$  gilt. Dann erhält man den seit Beginn des 18. Jahrhunderts bekannten merkwürdigen Zusammenhang zwischen  $e$  und  $\pi$

$$e^{\pi i} = -1$$

Die Hauptarbeit besteht nun in dem Nachweis, daß  $e^w$  für eine von 0 verschiedene algebraische Zahl immer transzendent ist. Da  $-1$  natürlich nicht transzendent ist, folgt daraus unmittelbar die Transzendenz von  $\pi$ .

Zum Abschluß sei noch kurz darauf hingewiesen, daß das im 18. Jahrhundert fast fertige Zahlengebäude vor wenigen Jahrzehnten noch einmal eine Erweiterung erfahren hat. Der aus Oberschlesien kommende, an der Yale University lehrende Abraham Robinson (1918–1974) erkannte, daß es möglich ist, den Bereich der reellen Zahlen in einen größeren Zahl-

bereich einzubetten, der immer noch „linear“ angeordnet ist, allerdings unter Verzicht auf das Archimedische Axiom: In dem neuen Zahlbereich gibt es Zahlen, die von keiner natürlichen Zahl übertroffen werden und damit auch positive Zahlen, die kleiner sind als jede positive Zahl  $q$ , deren Inverses  $\frac{1}{q}$  eine natürliche Zahl ist. Da dies unserer Anschauung zu widersprechen scheint, nannte er die neuen Zahlen „Non-Standard-Zahlen“. Daraus entwickelte sich die „Non-Standard-Analysis“, ein aktuelles und interessantes Gebiet mathematischer Forschung. Der Didaktik stellt sich die Frage, ob die „Non-Standard-Methoden“ auch in den Schulunterricht eingehen sollten. Selbst im Falle einer positiven Antwort wird diese Einführung sicher noch lange dauern, aber man sollte sie nicht von vornherein ausschließen. Im Rahmen dieser Theorie lassen sich ja offensichtlich die Begriffe „unendlich groß“ und „unendlich klein“ präzise fassen, mit denen Leibniz und Newton fruchtbar gearbeitet hatten, die aber in den folgenden Jahrhunderten als unexakt verworfen wurden.

\*Prof. Dr. rer. nat. Rudolf Fritsch, Wissenschaftlicher Rat und Professor im Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz, wurde 1939 geboren. Studium von 1958 bis 1967 an den Universitäten München und Saarbrücken der Fächer Mathematik und Physik, wo er von 1962 an verschiedene Positionen in den mathematischen Instituten inne hatte. 1963 wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Höheren Schulen und Promotion in Saarbrücken 1968. 1968 bis 1969 Studienassessor am Aufbau-gymnasium in Dudweiler (Saar). 1969 bis 1973 an der Universität Konstanz Akademischer Rat. Habilitation 1973. Seit 1981 ordentlicher Professor für Mathematik, vornehmlich Didaktik der Mathematik und Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität in München.

