

Didaktik der Mathematik

21. Jahrgang 1993

Wissenschaftlicher
Beirat

Martin Barner
Friedrich Barth
Arthur Engel
Uwe Feiste
Jürgen Flachsmeyer
Friedrich Flohr
Rudolf Fritsch
Robert Ineichen
Johannes Kratz
Günter Pickert
Hans-Christian Reichel
Karl Seebach
Hans-Georg Steiner
Horst Woschner
Herbert Zeitler

415 146 292 200 17



8 Z 75-197(21)

Redaktion

Franz Hager

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München



P 1993

Anschriften der Beiratsmitglieder:

Prof. Dr. Martin Barner,
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 79104 Freiburg
StD Friedrich Barth, Abbachstr. 23, 80992 München
Prof. Dr. Arthur Engel, Inst. f. Didaktik d. Mathematik,
Senckenberganlage 9-11, 60325 Frankfurt
Dr. Uwe Feiste, Lehrprüfungsamt Mecklenburg/Vorpom-
mern, Nst. Greifswald, Goethestr. 1, 17489 Greifswald
Prof. Dr. Jürgen Flachsmeyer, Ernst-Moritz-Arndt-Univ.,
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15 a, 17489 Greifswald
Prof. Dr. Friedrich Flohr, Math. Inst. d. Univ.,
Hebelstr. 29, 79104 Freiburg
Prof. Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Str. 61,
82166 Gräfelfing

Prof. Dr. Robert Ineichen, Institut. d. Mathématiques
de l'Université, Péroles, CH-1700 Fribourg
OSTD Johannes Kratz, Ulmenstr. 16, 82131 Gauting
Prof. Dr. Günter Pickert, Math. Inst. d. Justus-Liebig-
Universität, Arndtstr. 2, 35392 Gießen
Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel, Inst. f. Mathematik,
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien
Prof. Dr. Karl Seebach, Walhallastr. 5, 80639 München
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner,
Marsstr. 16, 33739 Bielefeld
StD Horst Woschner, Theresienstr. 60, 80333 München
Prof. Dr. Herbert Zeitler, Lehrst. f. Didaktik d. Mathematik,
Universitätsstr. 30, 95447 Bayreuth

Anschrift der Redaktion:

StD Franz Hager, Blütenstr. 9, 82178 Puchheim,
Telefon (089) 80 30 43

Bezugsbedingungen

Jahresabonnement 4 Hefte DM 58,-,
Einzelheft DM 16,- zuzüglich Versandkosten
Postscheckkonto München 933 70-805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal viertel-
jährlich. Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird
keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der
gesetzlichen Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung
des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung

Bayerischer Schulbuch-Verlag,
Postfach 190253, 80602 München,
Hubertusstraße 4, 80639 München,
Telefon (089) 17 91 20
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 3 vom 1. 1. 1983 gültig.
Satz: Tuttle Druckerei GmbH, Salzweg
Druck: E. Rieder Nachf., Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im
PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für
pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch
nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw.
die Datenbank MATHDI ausgewertet.

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind
urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere
das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche
Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form —
durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren —
reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere
von Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache
übertragen werden.

Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag,
Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren
oder ähnlichem Wege bleiben vorbehalten.

Fotokopien für den persönlichen und sonstigen
eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen
oder Teilen daraus als Einzelkopien hergestellt werden.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

Bardy, Peter

Mathematische Modellbildungen und Computersimulationen als rationale Grundlage für Entscheidungen im Tennissport (207–222)

Beutelspacher, Albrecht

Kann man mit Kindern Mathematik machen, bevor sie rechnen können? (265–278)

BUCHBESPRECHUNG

J. E. Hofmann: Ausgewählte Schriften zur Geschichte der Mathematik (70–74)

Burde, Gerhard

Die beiden Kleeblattschlingen.
Eine elementare Begründung des Jones-Polynoms (250–264)

Cösters, Franz

Die Ableitung der Exponentialfunktion auf geometrisch-anschaulichem Wege (66–69)

Ein indirekter Beweis des Schrankensatzes (300–316)

Danckwerts, Rainer / Dankwart Vogel

Das Testen von Hypothesen – Mißverständnisse und Perspektiven (51–65)

Flachsmeyer, Jürgen

Albrecht Dürers Quadratur des Kreises (238–240)

Baryzentrische Koordinaten und der Satz von Ceva (107–116)

Die beiden goldenen rechtwinkligen Dreiecke (81–94)

Götz, Stefan

Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons (182–206)

Heinze, Gerald

Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich interessierter und begabter Schüler in Sachsen am Beispiel der Mathematikausbildung am Gymnasium Dresden Blasewitz (140–153)

Henn, Hans-Wolfgang

Volumenbestimmung bei einem Rundfaß (17–32)

Hungerbühler, Norbert

Die zehn Apollonischen Probleme (241–249)

Kinski, Isolde

Mädchen und Mathematikunterricht (161–181)

Koepf, Wolfram

Ein elementarer Zugang zu Potenzreihen (292–299)

Eine Vorstellung von MATHEMATICA und Bemerkungen zur Technik des Differenzierens (125–139)

Koepf, Wolfram / Adi Ben-Israel

Integration mit Derive (40–50)

Lunter, Karl Heinz

$\sqrt{2}$ und Inkommensurabilität am Quadrat (99–106)

Meyer, Jörg

Von Fibonacci zu Heron (279–291)

PRESSEMITTEILUNG – SUCHMELDUNG

Wer hat's gemerkt? Geometrische Beweislücke über 400 Jahre unentdeckt? (157–160)

Rautenberg, Wolfgang

Leonardos Iterationsverfahren zur Berechnung der Kubikwurzel (317–320)

Redaktionelle Bemerkung des wissenschaftlichen Beirats
(154–156)

Ribenboim, Paulo
Primzahlrekorde
(1–16)

Tagungsbericht und Tagungshinweis
1. Herbstakademie Chaos und Fraktale vom
7.–9. Oktober 1992 in Bremen
(75–78)

Volkert, Klaus
Bemerkungen zum Mittelwertsatz
(33–39)

Walser, Hans
Die Eulersche Gerade als geometrischer
Ort „merkwürdiger Punkte“
(95–98)

Reguläre Vielecke in der Rastergeometrie
(230–237)

Schlußpunkt 13
Schlußpunkt 14
(79)

Wölpert, Heinrich
Effektiver Zinssatz mit Tabellenkalkulation
(223–229)

Zeitler, Herbert
Iterationen mit der Funktion
 $f(z) = z^p, p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
(117–124)

PRESSEMITTEILUNG – SUCHMELDUNG

Wer hat's gemerkt?**Geometrische Beweislücke über 400 Jahre unentdeckt?**

Schon Euklid [Die Elemente, deutsch von Clemens Thaer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1969, Drittes Buch, § 21] beweist den

Umfangswinkelsatz (Randwinkelsatz, Peripheriewinkelsatz): *Im Kreis sind die Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne einander gleich* (Fig. 1).

Unter der Umkehrung dieses Satzes versteht man die

Aussage: *Sind zwei Winkel auf derselben Seite einer Strecke gleich groß, so liegen ihre Scheitel auf einem Kreisbogen, der auch die Endpunkte der Strecke enthält.*

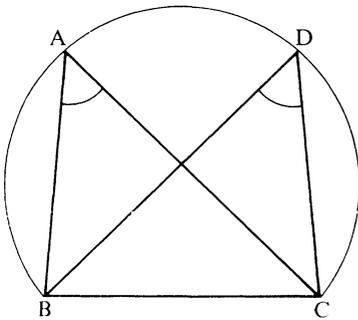


Fig. 1 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$

Johannes Tropfke [Geschichte der Elementar-Mathematik, Viertes Band, Berlin: Walter de Gruyter & Co. ³1940, Seite 147] und andere weisen daraufhin, daß diese Umkehrung zwar sicher im Altertum bekannt war, aber nicht vor 1574 explizit belegt ist.

Der aus Bamberg stammende, in Rom lehrende Jesuit Christoph Clavius (1538–1612) formuliert und beweist die Umkehrung in einer Anmerkung seiner damaligen Euklid-Bearbeitung; es heißt in der hier vorliegenden, 1603 bei Aloys Zanettus in Rom erschienenen Auflage (Seiten 411–412):

SCHOLIUM

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, et angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel ultra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, æ erunt anguli E, D æquales. Cum ergo et angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, et internus, quod est absurdum, ^bExternus enim interno major est. Transit ergo circulus per A quod est propositum.

Interessant dabei ist, daß sich Clavius unter ^b auf einen Satz beruft, den Euklid ohne Benutzung des Parallelenaxioms beweisen kann, den „schwachen Außenwinkelsatz“ [l.c., Erstes Buch, §16]: *In einem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.* Insofern ist die Umkehrung des Umfangswinkelsatzes in gewisser Weise vom Parallelenaxiom unabhängig, während der Satz selber dieses Axiom benötigt. (Der von Euklid unter Benutzung des Parallelenaxioms hergeleitete „starke Außenwinkelsatz“ besagt [l.c., Erstes Buch, § 32]: *In einem Dreieck ist jeder Außenwinkel gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel.*)

Die Argumentation von Clavius enthält jedoch eine Lücke. Er benutzt, daß der betrachtete Kreis den von B ausgehenden Strahl durch A in einem von B verschiedenen Punkt E schneidet (Fig. 2, links), woraus er mit dem schwachen Außenwinkelsatz auf den gewünschten Widerspruch

$$\sphericalangle BAC \neq \sphericalangle BEC = \sphericalangle BDC$$

schließt. Das braucht aber nicht der Fall zu sein (Fig. 2, rechts). Man könnte dann zwar

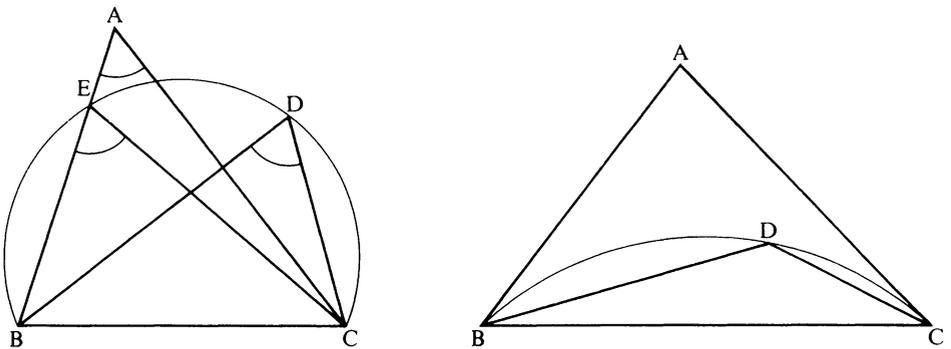


Fig. 2

nach einem von C verschiedenen Schnittpunkt des Kreises mit dem von C ausgehenden Strahl durch A suchen, aber dieser braucht – wie die Abbildung zeigt – auch nicht zu existieren.

Dieselbe lückenhafte Argumentation findet sich in vielen Euklid-Ausgaben nach Clavius und in andern Büchern, vor allem auch in allen am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität München untersuchten älteren und neueren Schulbüchern. Dabei geht es im Kern immer um den Nachweis folgender

Behauptung: *Gegeben sei ein Kreissegment (Kreisabschnitt) mit den Ecken B und C. Der Punkt A liege auf derselben Seite der Geraden BC wie der das Segment berandende Kreisbogen. Liegt A innerhalb des Segments, so ist $\sphericalangle BAC$ größer als der zugehörige Umfangswinkel, liegt A außerhalb, so ist $\sphericalangle BAC$ kleiner als der Umfangswinkel.*

In den Schulbüchern werden meistens $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BEC$ mit Hilfe des starken Außenwinkelsatzes verglichen, wobei E den Schnittpunkt des von B ausgehenden Strahles durch A bezeichnet. Wenn A innerhalb des Segmentes liegt, ist die Existenz des Schnittpunktes auch gesichert, da der ins Unendliche laufende Strahl irgendwann das beschränkte Segment verlassen muß. Aber für einen außerhalb des Segmentes liegenden Punkt A braucht dieser Schnittpunkt nicht zu existieren.

Es wird nicht behauptet, daß dieser Sachverhalt ein großes mathematisches Problem darstellt. Die Beweislücke in der eben angegebenen Fassung kann leicht geschlossen werden (Fig. 3). Man verbinde den außerhalb des Segmentes gelegenen Punkt A mit irgendeinem Punkt F im Innern der Strecke [BC]; eine kanonische Wahl für F wäre der Mittelpunkt von [BC]. Die Strecke [AF] schneidet dann sicher den das Segment berandenden Kreisbogen in einem von B und C verschiedenen Punkt E. Dann ist $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BEC$ zu zeigen. Das kann man in zwei Weisen begründen:

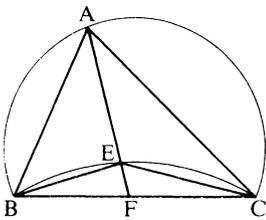


Fig. 3

1. Man wechselt den Standpunkt. Man betrachtet statt des ursprünglich gegebenen Segmentes das von der Strecke [BC] aus dem Umkreis des Dreiecks [ABC] ausgeschnittene Segment, das den Punkt A enthält. Dann ist E ein innerer Punkt dieses Segments und aus dem unstrittigen Teil des eben skizzierten Beweises folgt die Behauptung $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BEC$.

2. Man beachtet

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAF + \sphericalangle FAC, \sphericalangle BEC = \sphericalangle BEF + \sphericalangle FEC$$

und schließt mit dem schwachen Außenwinkelsatz auf $\sphericalangle BAF < \sphericalangle BEF$ und $\sphericalangle FAC < \sphericalangle FEC$, woraus sich wieder die Behauptung ergibt. (Im Schulunterricht wird meistens nur der starke Außenwinkelsatz behandelt, der das Ergebnis natürlich auch liefert.)

Sicher haben unzählige Lehrer und auch andere geometrisch Interessierte in den über 400 Jahren, die seit 1574 vergangen sind, die Lücke in der Argumentation von Clavius entdeckt. Gesucht sind gedruckte Belege, die einen vollständigen Beweis der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes enthalten.

Sachdienliche Hinweise bitte an die Redaktion.