Bemerkung über Tensorprodukte von Körpern

Von

Bodo Pareigis

Für eine rein inseparable Körpererweiterung L von k und eine separable (algebraische) Erweiterung M von k ist bekanntlich das Tensorprodukt $L \otimes_k M$ ein Körper [1, § 8.2, Prop. 3]. Einen solchen Körper nennen wir nach [3] einen k-zerfallenden Körper. Die k-zerfallenden algebraischen Körper sollen charakterisiert werden. Weiter soll angegeben werden, wieweit eine beliebige algebraische Körpererweiterung von einem k-zerfallenden Körper abweicht.

Im folgenden nehmen wir an, daß alle algebraischen Körpererweiterungen von k in einem fest gewählten algebraischen Abschluß von k liegen. Sei K eine algebraische Körpererweiterung von k. Wir bezeichnen den Unterkörper aller über k separablen Elemente von K mit K_s oder genauer mit $(K/k)_s$. Dann ist K rein inseparabel über K_s. Weiter sei K_i oder genauer $(K/k)_i$ der rein inseparable Körper $K \cap k^{p^{-\infty}}$ über k. Im allgemeinen ist dann K inseparabel über K_i. Ist jedoch K normal über k, so gilt [1, § 10.9, Thm. 14]

Lemma 1. *Sei K eine normale algebraische Körpererweiterung von k. Dann ist $K = K_i \otimes_k K_s$ und K ist rein inseparabel über K_s und galoissch über K_i.*

Lemma 2. *Sei $K = L \otimes_k M$ mit einem über k rein inseparablen Körper L und einem über k separablen Körper M. Dann ist $L = K_i$ und $M = K_s$. Ist K_n der normale Abschluß von K_s im algebraischen Abschluß von k, so ist $K_i \otimes_k K_n$ der normale Abschluß von $K = K_i \otimes_k K_s$.*

Beweis. Wir verstehen hier unter einem normalen Abschluß den kleinsten über k normalen Körper, der den Körper K_s (bzw. K) enthält. Da L rein inseparabel über k ist, ist $L \subseteqq K_i$. Ebenso ist M enthalten in K_s. Wir identifizieren hier das Tensorprodukt mit dem Bild bei der Multiplikation im algebraischen Abschluß von k. Dann ist $K = L \otimes_k M \subseteqq K_i \otimes_k K_s \subseteqq K$. Folglich ist $L = K_i$ und $M = K_s$. Weiterhin ist $K_i \otimes_k K_n$ normal. Sei P der normale Abschluß von K. Dann ist $K_i \otimes_k K_n \subseteqq P_i \otimes_k P_s = P$. Nach Definition des normalen Abschluß gilt also die Gleichheit.

Satz. *Sei K ein algebraischer Erweiterungskörper von k und sei L normaler Abschluß von K. Dann folgt:*

1) *K ist rein inseparabel über $K_i \otimes_k K_s$.*
2) *$K_i \otimes_k K_s = (K/K_i)_s$.*
3) *$M := L \cap K_s^{p^{-\infty}}$ ist rein inseparabel über K und es ist $M = L_i \otimes_k K_s$.*

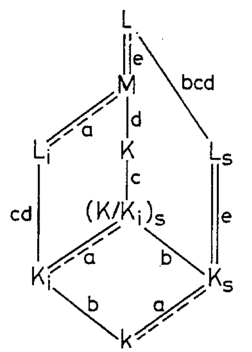
4) *Der größte k-zerfallende Körper in* K *ist* $K_i \otimes_k K_s$.

5) *Die kleinste algebraische Körpererweiterung von* K, *die über* k *zerfällt, ist* $M = L_i \otimes_k K_s$.

6) *Der größte* K_i*-zerfallende Körper in* K *ist* $K_i \otimes_k K_s$.

7) *Die kleinste algebraische Körpererweiterung von* K, *die über* K_i *zerfällt, ist* $M = L_i \otimes_k K_s$.

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm von Körpern, wobei für die endlich dimensionalen Fälle die Dimensionen angegeben sind. In dem Diagramm sei $M := L \cap K_s^{p^{-\infty}}$. Die Bezeichnungen ═══ bedeuten „galoissch", ┅┅┅ „separabel" und ─── „rein inseparabel". Von unten nach oben sind die Körper ineinander enthalten.



Für einen beliebigen über k normalen Körper L, der K enthält, sind trivialerweise $K_s\colon k$, $L_s\colon k$, $(K/K_i)_s\colon K_i$ separabel und $K\colon K_s$, $L\colon L_s$ und $K\colon (K/K_i)_s$, also auch $(K/K_i)_s\colon K_s$, rein inseparabel. Da L über jedem Zwischenkörper normal ist, gilt in jedem solchen Fall Lemma 1. Also sind $L_s\colon K_s$, $L\colon M$ galoissch und $L\colon L_s$ und $M\colon K_s$ rein inseparabel. Da $K\colon K_s$ rein inseparabel ist, ist $K \subseteqq K_s^{p^{-\infty}}$, folglich ist $K \subseteqq M$. Da $M\colon K_s$ rein inseparabel ist, ist $M\colon K$ rein inseparabel. Da $L_i\colon k$ rein inseparabel ist, ist L_i im Fixkörper der Galoisgruppe von $L\colon M$ enthalten, also ist $L_i \subseteqq M$. Nach Lemma 1 ist $L\colon L_i$ galoissch, also ist $M\colon L_i$ separabel. Da $L_i\colon k$ rein inseparabel ist, ist auch $L_i\colon K_i$ und $K_i\colon k$ rein inseparabel.

Ist $[K\colon k] < \infty$, so kann auch $[L\colon k] < \infty$ angenommen werden. Da separabler und rein inseparabler Grad multiplikative Körperkonstanten sind, ist $[(K/K_i)_s\colon K_i] = [K_s\colon k]$ und $[(K/K_i)_s\colon K_s] = [K_i\colon k]$. Entsprechend ist $[M\colon L_i] = [(K/K_i)_s\colon K_i]$, $[M\colon (K/K_i)_s] = [L_i\colon K_i]$, $[L\colon M] = [L_s\colon K_s]$ und $[L\colon L_s] = [M\colon K_s]$. Aus Dimensionsgründen ist dann $(K/K_i)_s = K_i \otimes_k K_s$ und $M = L_i \otimes_k K_s$.

Sei jetzt K beliebig algebraisch über k. Wir zeigen $K_i \otimes_k K_s = (K/K_i)_s$. Offenbar ist $K_i \otimes_k K_s \subseteqq (K/K_i)_s$. Sei $z \in (K/K_i)_s$, dann ist z Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit Koeffizienten $a_i \in K_i$. Wir betrachten

$$K' = k(a_0, \ldots, a_n, z).$$

Dann ist $a_0, \ldots, a_n \in K_i'$ und $z \in (K'/K_i')_s = K_i' \otimes_k K_s'$, da $[K'\colon k] < \infty$. Weiter ist

$K_i' \subseteqq K_i$ und $K_s' \subseteqq K_s$, also ist $z \in K_i' \otimes_k K_s' \subseteqq K_i \otimes_k K_s$, woraus $(K/K_i)_s \subseteqq K_i \otimes_k K_s$ folgt. Damit sind 1) und 2) gezeigt.

Sei $z \in M$. Sei $L' = k(z_1, \ldots, z_n) \subseteqq L$ Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von z über k. Dann ist $[L' : k] < \infty$. Sei $M' = M \cap L'$, $K' = K \cap L'$. L' ist normal über k und enthält K'. Außerdem ist $L_i' = L_i \cap L'$, $L_s' = L_s \cap L'$, $K_s' = K_s \cap L'$, $K_i' = K_i \cap L'$ und insbesondere $M' = L \cap K_s^{p^{-\infty}} \cap L' = L' \cap K_s^{p^{-\infty}}$, denn $x^{p^n} \in K_s$ und $x \in L'$ impliziert $x^{p^n} \in L' \cap K_s = K_s'$. Damit sind wir im endlich-dimensionalen Fall. Aus $z \in M$ und $z \in L'$ folgt $z \in M' = L_i' \otimes_k K_s' \subseteqq L_i \otimes_k K_s$. Damit ist

$$M = L_i \otimes_k K_s,$$

und 3) ist bewiesen.

Sei jetzt $P \subseteqq K$ ein k-zerfallender Körper, so ist $P = P_i \otimes_k P_s$ nach Lemma 2. Aus $P_i \subseteqq K_i$ und $P_s \subseteqq K_s$ folgt $P = P_i \otimes_k P_s \subseteqq K_i \otimes_k K_s = (K/K_i)_s$, was 4) zeigt.

Sei $K \subseteqq N$ gegeben mit einem k-zerfallenden Körper N. Dann ist $N = N_i \otimes_k N_s$. Weiter ist $N_i \cap L_i = (N \cap L)_i$ und $N_s \cap L_s = (N \cap L)_s$, also ist

$$\begin{aligned}(N \cap L)_i \otimes_k (N \cap L)_s &= (N_i \cap L_i) \otimes_k (N_s \cap L_s) = \\ &= N_i \otimes_k N_s \cap L_i \otimes_k L_s = \\ &= N \cap L,\end{aligned}$$

d.h. $N \cap L$ ist wieder ein k-zerfallender Körper. Wir können also $K \subseteqq N \subseteqq L$ annehmen. Dann ist $K_i \subseteqq N_i \subseteqq L_i$ und $K_s \subseteqq N_s \subseteqq L_s$. Sei N_n der normale Abschluß von N_s in L, so ist nach Lemma 2 $N_i \otimes_k N_n$ normaler Abschluß von N, also ist $L = N_i \otimes_k N_n$. Wieder nach Lemma 2 ist dann $N_i = L_i$ und $N_n = L_s$. Wir erhalten also $K \subseteqq L_i \otimes_k K_s = M \subseteqq L_i \otimes_k N_s = N_i \otimes_k N_s = N \subseteqq L$, was 5) zeigt.

Die Punkte 6) und 7) werden im Anschluß an Lemma 3 bewiesen werden.

Korollar. *Sei K ein algebraischer Erweiterungskörper von k und sei L normaler Abschluß von K. Dann sind äquivalent:*

1) $K = K_i \otimes_k K_s$.
2) $K : K_i$ *ist separabel.*
3) $L : K$ *ist separabel.*
4) $L : K_i$ *ist separabel.*
5) $L_i = K_i$ [2, Lemma 1].
6) $K = (L/K)_i$, *d. h.* $K = L \cap K^{p^{-\infty}}$.

Beweis. 1) $\Leftrightarrow$ 2) folgt aus $c = 1$ im obigen Diagramm (auch im unendlich-dimensionalen Fall). 1) $\Leftrightarrow$ 3) folgt aus $d = 1$. 4) $\Leftrightarrow$ 2) und 3) trivialerweise. 1) $\Leftrightarrow$ 5) folgt aus $cd = 1$. 3) $\Rightarrow$ 6) trivialerweise. 6) $\Rightarrow$ 3), weil $L : K$ normal ist nach Lemma 1 und Lemma 2.

Lemma 3. *Sei M eine rein inseparable Körpererweiterung von k und sei K eine Körpererweiterung von M. K ist genau dann k-zerfallend, wenn K M-zerfallend ist.*

Beweis. Sei K k-zerfallend, also $K = K_i \otimes_k K_s$. Dann ist $K_i \subseteqq M$, also ist $K = K_i \otimes_M (M \otimes_k K_s)$. K_i ist rein inseparabel über M und $M \otimes_k K_s$ ist separabel über M. Nach Lemma 2 ist daher K M-zerfallend.

Sei K M-zerfallend, also $K = K_i \otimes_M K_s$, wobei $K_i = (K/M)_i$ rein inseparabel über M ist und $K_s = (K/M)_s$ separabel über M ist. Dann ist K_i auch rein inseparabel über k, da M rein inseparabel über k ist. Also ist $(K_s/k)_i = M$ und $K_s = M \otimes_k (K/k)_s$ nach Satz und Lemma 2. Daraus folgt $K = K_i \otimes_M M \otimes_k (K/k)_s = K_i \otimes_k (K/k)_s$.

Mit diesem Lemma folgen 6) und 7) des Satzes trivial aus 4) und 5) des Satzes.

Wir bemerken hier noch, daß das Diagramm zum Satz zeigt, daß die Körpererweiterung $L_i : K_i$ weniger Zwischenkörper hat, als $M : (K/K_i)_s$. Durch Tensorierung der Erweiterung $L_i : K_i$ mit einem über K_i separablen Körper erhalten wir eine neue rein inseparable Körpererweiterung, die möglicherweise mehr Zwischenkörper hat. Tensoriert man mit dem separablen Abschluß von K_i, so erhält man offenbar die größtmögliche Anzahl von Zwischenkörpern. Eine offene Frage ist, ob es einen kleineren über K_i separablen Körper gibt, eventuell sogar einen kleinsten solchen Körper, für den schon die maximale Anzahl von Zwischenkörpern der gegebenen rein inseparablen Erweiterung erreicht wird. Nach [3, Cor. 2.3] ist das jedenfalls der Fall, wenn $K_i = K_i^p(x)$ für ein $x \in K_i$ gilt. Dann sind ja alle algebraischen Körper über K_i K_i-zerfallend. Also hat jede rein inseparable Körpererweiterung von K_i schon die im obigen Sinne größt-mögliche Anzahl von Zwischenkörpern.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. V. Paris 1958.

[2] R. Gilmer and W. Heinzer, On the existence of exceptional field extensions. Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 545—547 (1968).

[3] J. D. Reid, A note on inseparability. Michigan Math. J. **13**, 219—223 (1966).

Eingegangen am 21. 1. 1970

Anschrift des Autors:

Bodo Pareigis
Mathematisches Institut der Universität
8 München 13, Schellingstr. 2—8