INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Université de Strasbourg

SEMINAIRE HEIDELBERG - STRASBOURG 1965/66

Groupes Algébriques Linéaires

Fascicule N° 2 - Exposés 9 à 16

Publication I.R.M.A. Strasbourg
N° 2 - 1967

I. R. M. A.
Rue R. Descartes
67-Strasbourg

TABLE DES MATIERES

Nombre de pages

- APPENDICES -

- EXPOSES -

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

eidelberg-Strassburger Seminar
Algebraische Gruppen

Jahrgang 1965/66
Vortrag 15

REDUKTIVE GRUPPEN VOM HALBEINFACHEN RANG 1

(von B. PAREIGIS und R. RENTSCHLER)

In diesem Vortrag werden alle Schemata als Schemata über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k betrachtet. $\underline{\underline{M}}_k$ sei die Kategorie der k-Algebren, deren unterliegende Ringe Modelle sind.

0. Das Radikal.

Mit G wird eine glatte, zusammenhängende, affine algebraische Gruppe bezeichnet. Das Radikal $\operatorname{Rad} G$ von G ist die reduzierte Zusammenhangskomponente der 1 im Durchschnitt aller Borelgruppen von G.

0.1. Satz.

(i) $\operatorname{Rad} G$ ist glatt, zusammenhängend, auflösbar und invariant in G.

(ii) Jede glatte, zusammenhängende, auflösbare und invariante Untergruppe von G ist in $\operatorname{Rad} G$ enthalten.

Folgt unmittelbar aus den Definitionen.

0.2. Satz.

G ist dann und nur dann reduktiv wenn der unipotente Anteil $\operatorname{Rad}^u G$ von $\operatorname{Rad} G$ null ist.

Eine invariante Untergruppe von G von der Gestalt $\underline{G}_a^r$ ist nach 0.1. in $\operatorname{Rad} G$, also in $\operatorname{Rad}^u G$ enthalten : wenn $\operatorname{Rad}^u G$ null ist, muss G also reduktiv sein (exposé 5, § 1).

Umgekehrt, wenn $\operatorname{Rad}^u G$ nicht null ist, hat es ein Zentrum Z der Dimension ≥ 1. Es sei H der Kern der Verschiebung in Z (exposé 11). Die reduzierte Zusammenhangskomponente H^o_{red} der 1 in H bleibt nach exposé 11 bei jedem Automorphismus von Z, oder von $\operatorname{Rad}^u G$, oder von G erhalten. Deswegen ist H^o_{red} invariant in G. Nach exposé 11, ist H^o_{red} aber von der Gestalt $\underline{G}_a^r$. Deswegen ist G nicht reduktiv.

0.3. Folgesatz.

Jede glatte, affine algebraische Gruppe ist eine Erweiterung einer reduktiven Gruppe durch eine glatte, zusammenhängende, auflösbare Gruppe.

Es seien F die gegebene Gruppe, $G = F^o$ die Zusammenhangskomponente der 1 in F. Dann ist F Erweiterung von $F/\operatorname{Rad}^u G$ durch $\operatorname{Rad}^u G$.

0.4. Definition.

Sei T ein maximaler Torus von G. Dann ist

Reduktiver Rang $G = \dim T$

Halbeinfacher Rang $G = \dim T - \dim (T \cap \operatorname{Rad} G)$.

Da alle maximalen Tori konjugiert sind, ist diese Definition eindeutig.

1. Die Struktur von $\underline{PGL}_2$

1.1. Nach Definition ist $\underline{PGL}_2 := \underline{GL}_2/\underline{G}_m$. Die Dimension von $\underline{GL}_2$ ist 4, die von $\underline{G}_m$ ist 1, also hat $\underline{PGL}_2$ die Dimension 3. Es bezeichne $\psi : \underline{GL}_2 \to \underline{PGL}_2$

den kanonischen Epimorphismus. B, B' und $\underline{D}_2$ seien die folgenden Untergruppen von $\underline{GL}_2$:

$$B(A) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} \mid a,d \in A^* \ , \ b \in A\}$$

$$B'(A) := \{\begin{pmatrix} a & o \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,d \in A^* \ , \ c \in A\}$$

$$\underline{D}_2(A) := \{\begin{pmatrix} a & o \\ o & d \end{pmatrix} \mid a,d \in A^*\} \qquad \text{für alle } A \in \underline{\underline{M}}_k \ .$$

Ferner seien $B^o := \psi(B)$, $B^\infty := \psi(B')$, $T^{o,\infty} := \psi(\underline{D}_2)$. Es seien $i, i' : \underline{G}_a \to \underline{GL}_2$ die wie folgt definierten Homomorphismen $i(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ o & 1 \end{pmatrix}$, $i'(x) := \begin{pmatrix} 1 & o \\ x & 1 \end{pmatrix}$ für $x \in \underline{G}_a(A)$; ausserdem seien $i^o := \psi\, i$, $i^\infty := \psi\, i'$.

1.2. <u>Behauptung</u> .

i) $T^{o,\infty}$ <u>ist ein maximaler Torus von</u> $\underline{PGL}_2$, $\dim T^{o,\infty} = 1$.

ii) B^o , B^∞ <u>sind Borelgruppen von</u> $\underline{PGL}_2$, $B^o \cap B^\infty = T^{o,\infty}$, $\dim B^o = \dim B^\infty = 2$.

iii) $i^o : G_a \xrightarrow{\cong} B^{o\,u}$ $\quad i^\infty : G_a \xrightarrow{\cong} B^{\infty\, u}$

<u>Beweis</u> : i) Da $\underline{D}_2$ ein maximaler Torus von $\underline{GL}_2$ ist (exposé 5 , § 4.3.) und da $\operatorname{Ker}\psi = \underline{G}_m \subset \underline{D}_2$, ist $T^{o,\infty}$ ein maximaler Torus von $\underline{PGL}_2$. Ausserdem gilt $\dim T^{o,\infty} = \dim \underline{D}_2 - \dim \underline{G}_m = 1$.

ii) $B^o \cap B^\infty = T^{o,\infty}$, da $B \cap B' = \underline{D}_2$, und $\dim B^o = \dim B^\infty = 2$, da $\dim B = \dim B' = 3$. Da B, B' Borelgruppen von $\underline{GL}_2$ (Vortrag 14) sind, ist B^o in einer Borelgruppe $\widetilde{B}$ von $\underline{PGL}_2$ enthalten. $\psi^{-1}(\widetilde{B})$ ist glatt, zusammenhängend, auflösbar und enthält B , daher ist $B = \psi^{-1}(\widetilde{B})$, $B^o = \psi(B) = \widetilde{B}$.

iii) Zunächst ist $i : G_a \xrightarrow{\cong} B^u$ ein Isomorphismus, sowie $i' : G_a \xrightarrow{\cong} B'^u$. Ausserdem sind i^o und i^∞ Monomorphismen wegen $\operatorname{Ker}\psi \cap i(G_a) = \{e\}$ und $\operatorname{Ker}\psi \cap i'(G_a) = \{e\}$. Aus dem nachfolgenden Lemma ergibt sich $\psi(B^u) = B^{o\,u}$ und $\psi(B'^u) = B^{\infty\,u}$. Daher ist $\psi i : \underline{G}_a \xrightarrow{\cong} B^{o\,u}$ ein Isomorphismus sowie $\psi i' : \underline{G}_a \xrightarrow{\cong} B^{\infty\,u}$.

1.3. Lemma.

Ist G eine trigonalisierbare Gruppe, D eine maximale diagonalisierbare Untergruppe von G, $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus in eine algebraische Gruppe H, so ist $\varphi(G) = \varphi(G^u).\varphi(D)$ (semidirektes Produkt), insbesondere $\varphi(G)^u = \varphi(G^u)$.

Beweis : G ist semidirektes Produkt von G^u und D (exposé 12, § 4.3.3.), also $G = G^u.D$. Aus $\varphi(G^u) \cap \varphi(D) = \{e\}$ folgt $\varphi(G) = \varphi(G^u).\varphi(D)$ (semidirektes Produkt).

1.4. Bemerkung.

i) $\underline{\operatorname{Norm}}_{\underline{GL}_2}(\underline{D}_2)(A) = \{g \in \underline{GL}_2(A) \mid g = \begin{pmatrix} a & o \\ o & d \end{pmatrix}$ oder $g = \begin{pmatrix} o & b \\ c & o \end{pmatrix}\}$

ii) $\underline{\operatorname{Norm}}_{\underline{PGL}_2}(T^{o,\infty}) = \psi(\underline{\operatorname{Norm}}_{\underline{GL}_2}(\underline{D}_2))$.

Beweis : i) ergibt sich durch leichte Rechnung, ii) gilt wegen $\operatorname{Ker}\psi \subset \underline{D}_2$

1.5. Behauptung.

$\operatorname{Zentrum}(\underline{PGL}_2) = \{e\}$.

Beweis : Sei $g \in \underline{GL}_2(A)$, $\psi(g) \in \underline{\operatorname{Zentrum}}(\underline{PGL}_2)(A)$. Dann gilt für jede treuflache Erweiterung A' von A und für jedes $h \in \underline{GL}_2(A')$ $g h g^{-1} h^{-1} \in \underline{G}_m(A')$. Insbesondere muss $g \in \underline{\operatorname{Norm}}_{\underline{GL}_2}(\underline{D}_2)(A)$ sein, d.h. $g = \begin{pmatrix} a & o \\ o & d \end{pmatrix}$ oder $g = \begin{pmatrix} o & b \\ c & o \end{pmatrix}$.

Nun ist

$$\begin{pmatrix} o & b \\ c & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & o \\ o & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & c^{-1} \\ b^{-1} & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-1} & o \\ o & t_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^{-1}t_2 & o \\ o & t_1 t_2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & o \\ o & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ o & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & o \\ o & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ o & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ad^{-1}x-x \\ o & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t_1, t_2 \in A'^*$, $x \in A'$. Der Fall $g = \begin{pmatrix} o & b \\ c & o \end{pmatrix}$ kann deshalb nicht auftreten und der Fall $g = \begin{pmatrix} a & o \\ o & d \end{pmatrix}$ ist nur möglich für $a = d$, also $g \in G_m(A)$

1.6. Lemma.

Sei G eine reduktive Gruppe, D ein diagonalisierbarer Normalteiler von G, dann ist G/D reduktiv.

Beweis:

Es bezeichne $p : G \to G/D$ den kanonischen Epimorphismus. Ist U ein zu G_a^n isomorpher Normalteiler von G/D, so ist $p^{-1}(U)$ ein Normalteiler von G, der nach exposé 12, § 4.7. in ein direktes Produkt $V \times D$ mit $V \cong U$ zerfällt. Da $V = (p^{-1}(U))^u$ in $p^{-1}(U)$ vollinvariant ist, ist V Normalteiler von G, also $V = \{1\}$ und damit $U = \{1\}$.

1.7. Folgerung.

$\underline{PGL}_2$ ist reduktiv.

Beweis. $\underline{GL}_2$ ist reduktiv nach exposé 5 § 3.

$\underline{GL}_2$ operiert durch $\underline{PGL}_2$ auf $\mathbb{P}_1$. Es sei darum erinnert, dass die Punkte $x \in \underline{G}_a(A)$ mit den Punkten $A\binom{1}{x} \in \mathbb{P}_1(A)$ identifiziert werden und dass mit ∞_A der Punkt $A\binom{o}{1} \in \mathbb{P}_1(A)$ bezeichnet wird. Es sei $\tau : \underline{PGL}_2 \to \mathbb{P}_1$

der durch $\underline{PGL}_2(A) \ni g \mapsto g.0 \in \mathbb{P}_1(A)$ definierte Morphismus und

$\bar{\tau} : \underline{PGL}_2/\underline{Stab}_{\underline{PGL}_2}(o) \to \mathbb{P}_1$ seine Faktorisierung.

1.8. Behauptung .

ia) $\underline{Stab}_{\underline{GL}_2}(o) = B \qquad \underline{Stab}_{\underline{GL}_2}(\infty) = B'$

ib) $\underline{Stab}_{\underline{PGL}_2}(o) = B^o \qquad \underline{Stab}_{\underline{PGL}_2}(\infty) = B^\infty$

ii) $\underline{GL}_2/B \cong \underline{PGL}_2/B^o \xrightarrow[\bar{\tau}]{\cong} \mathbb{P}_1$

Beweis : ia) ergibt sich unmittelbar durch Rechnung, ib) fogt aus ia) . Da $\underline{PGL}_2(k)$ auf $\mathbb{P}_1(k)$ transitiv operiert, ist nach exposé 2 § 5.3. τ treuflach. Daraus folgt ii) .

1.9. Folgerung .

i) Sind B_1, B_2, B_3 drei Borelgruppen von $\underline{GL}_2$, so ist $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \underline{G}_m$.

ii) Sind B_1, B_2, B_3 drei Borelgruppen von $\underline{PGL}_2$, so ist $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \{1\}$.

Beweis : Es ist $\mathrm{Stab}_{\underline{GL}_2}(o) \cap \underline{Stab}_{\underline{GL}_2}(\infty) \cap \underline{Stab}_{\underline{GL}_2}(1) = \underline{D}_2 \cap \mathrm{Stab}_{\underline{GL}_2}(1) = \underline{G}_m$.

Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}_1(k)$ so kann man (s. Anhang 11) immer ein $g \in \underline{GL}_2(k)$ finden mit $g.o = x_1$, $g.1 = x_2$, $g.\infty = x_3$. Daher ist

$$\mathrm{Stab}_{\underline{GL}_2}(x_1) \cap \underline{Stab}_{GL_2}(x_2) \cap \underline{Stab}_{\underline{GL}_2}(x_3) = g.\underline{G}_m\, g^{-1} = \underline{G}_m .$$

Da jede Borelgruppe von $\underline{GL}_2$ Stabilisator eines Punktes von $(\underline{GL}_2/B)(k)$ ist, folgt die Behauptung i) und damit auch ii) .

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\gamma_n : \underline{G}_m \to T^{o\,\infty}$ definiert durch G_m

$$\underline{G}_m(A) \ni t \longmapsto \psi(\begin{pmatrix} t^n & o \\ o & 1 \end{pmatrix}) \in \underline{PGL}_2(A) .$$

Auf dieser Weise erhält man alle Homomorphismen von $\underline{G}_m$ in $T^{o,\infty}$.

Für $x \in \underline{G}_a(A) \subseteq \mathbb{P}_1(A)$ ist $\gamma_n(t) \circ x = A \circ \binom{t^n}{x} = A \circ \binom{1}{t^{-n}} = t^{-n} x$. Daher gilt

Ist $n > 0$, so ist für alle $x \in \mathbb{P}_1(k) - \{\infty\}$ $\gamma_n(\infty) \circ x = 0$

Ist $n < 0$, so ist für alle $x \in \mathbb{P}_1(k) - \{o\}$ $\gamma_n(\infty) \circ x = \infty$

Daraus folgt

1.10. <u>Behauptung</u> .

Weylsche Kammer von B^o bezüglich $T^{o,\infty}$ $= \{\gamma_n \mid n > 0\}$

Weylsche Kammer von B^∞ bezüglich $T^{o,\infty}$ $= \{\gamma_n \mid n < 0\}$.

2 . <u>Reduktion der Gruppen vom halbeinfachen Rang 1 auf $\underline{PGL}_2$</u> .

2.1. <u>Satz</u> .

<u>Operiere</u> G <u>nicht trivial auf einer vollständigen, glatten, algebraischen Kurve</u> C . <u>Dann ist</u> $C \cong \mathbb{P}_1$.

<u>Beweis</u> : Sei B eine Boreluntergruppe von G und $B = B^u \circ T$, mit dem unipotenten Teil B^u von B und einem maximalen Torus T . Operiere B^u nicht trivial auf C . Wegen (exposé 12, cor. 4.5.) operiert dann $\underline{G}_a$ treu auf C . Es existiert also ein $x \in C(k)$, das nicht Fixpunkt für $\underline{G}_a$ ist. Sei

$\tau : \underline{G}_a \to C$ durch $u \mapsto u.x$ definiert. Also ist $\tau(\underline{G}_a) \cong \underline{G}_a$, ein eindimensionaler, irreduzibler Unterraum von C. Deswegen ist $\overline{\tau(\underline{G}_a)} = C$. Weil C reduziert ist, ist $\tau(\underline{G}_a)$ ein offenes, dichtes Unterschema von C. Daher stimmen die Restklassenköper in den generischen Punkten von G_a und C überein.

Nach (Anhang 11) ist daher $C \cong \mathbb{P}^1$.

Wenn B^u trivial auf C operiert, dann nehmen wir an dass T nicht trivial auf C operiert. Wie oben sehen wir wieder $C \cong \mathbb{P}^1$.

Operieren aber alle Borelgruppen B trivial auf C, so operiert $G(k) = \bigcup B(k)$ trivial auf C. Da G reduziert ist, operiert ganz G trivial auf C.

2.2. Satz.

Sei B eine Borelgruppe von G. Dann sind äquivalent:

i) $\dim G/B = 1$

ii) Es existiert ein Gruppenepimorphismus $\varphi : G \to \underline{PGL}_2$, sodass $\operatorname{Ker} \varphi / \operatorname{Rad} G$ endlich ist.

iii) Der halbeinfache Rang von G ist 1.

iv) $|W_G(T)| = 2$, die Weyl-Gruppe hat die Ordnung 2.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii): G operiert nicht trivial auf G/B, einer vollständigen, glatten, algebraischen Kurve. Also ist $G/B \cong \mathbb{P}^1$. Also existiert ein Homomorphismus $\varphi : G \to \underline{Aut}(\mathbb{P}_1) \cong \underline{PGL}_2$ (Anhang 12). Der Kern von φ ist der Durchschnitt der Borelgruppen, d.h. der Stabilisatoren der rationalen Punkte von $\mathbb{P}_1$. Also ist $\operatorname{Ker} \varphi / \operatorname{Rad} G$ endlich - $\operatorname{Ker} \varphi$ ist auflösbar. Da G nicht auflösbar ist, ist $G/\operatorname{Ker} \varphi$ nicht auflösbar, hat also mindestens die Dimension 3 (Vortrag 13, § 2.9.). $\underline{PGL}_2$ ist irreduzibel, reduziert und von der Dimension 3 und $G/\operatorname{Ker} \varphi \to \underline{PGL}_2$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Also ist $G/\operatorname{Ker} \varphi \cong \underline{PGL}_2$, d.h. φ ist Epimorphismus.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Sei T ein maximaler Torus in G. Dann liegt T in nur endlich vielen Borelgruppen von G. Mit $\underline{\underline{PGL}}_2$ ist auch G nicht auflösbar. Daher ist $\dim G/B \geq 1$, da G/B reduziert und zusammenhängend ist. Es gibt also unendlich viele Borelgruppen in G. Daher ist T nicht im Durchschnitt aller Borelgruppen enthalten. Also ist $T \cap \mathrm{Rad}\, G$ echte Untergruppe von T und daher $\dim T - \dim (T \cap \mathrm{Rad}\, G) = \dim (T/T \cap \mathrm{Rad}\, G) \geq 1$. Aber $\varphi : G \rightarrow \underline{\underline{PGL}}_2$ faktorisiert durch $G \rightarrow G/\mathrm{Rad}\, G \xrightarrow{\bar{\varphi}} \underline{\underline{PGL}}_2$. Nach Voraussetzung ist $\dim(\mathrm{Ker}\, \bar{\varphi}) = 0$ und $\bar{\varphi}$ bildet $T/T \cap \mathrm{Rad}\, G$ ab in einen Torus von $\underline{\underline{PGL}}_2$ mit nulldimensionalen Kern. Die maximalen Tori von $\underline{\underline{PGL}}_2$ haben die Dimension 1. Also ist $\dim(T/T \cap \mathrm{Rad}\, G) \leq 1$. Damit ist der halbeinfache Rang von $G = 1$.

iii) $\Rightarrow$ iv) : Das Radikal als auflösbare Gruppe hat die Form $\mathrm{Rad}\, G = \mathrm{Rad}_u G . S$. Durch Konjugieren können wir $S \subseteq T$, einem maximalen Torus in G, wählen. Dann ist T/S maximaler Torus in $B^u/\mathrm{Rad}^u G).(T/S) = B/\mathrm{Rad}\, G$. Da $(G/\mathrm{Rad}\, G)/(B/\mathrm{Rad}\, G) \cong G/B$ vollständig ist und $B/\mathrm{Rad}\, G$ irreduzibel, glatt und auflösbar in $G/\mathrm{Rad}\, G$, ist $B/\mathrm{Rad}\, G$ eine Borelgruppe von $G/\mathrm{Rad}\, G$. Also ist T/S maximaler Torus von $G/\mathrm{Rad}\, G$. Die Borelgruppen von G und von $G/\mathrm{Rad}\, G$ entsprechen sich eineindeutig als Stabilisatoren der rationalen Punkte von G/B. Speziell ist B das Urbild von $B/\mathrm{Rad}\, G$. Also ist $T \subseteq B$ genau dann, wenn $T/S \subseteq B/\mathrm{Rad}\, G$. Daher gilt $|W_G(T)| = |W_{G/\mathrm{Rad}\, G}(T/S)|$ Vortrag 13, § 5.8. . Da $S = T \cap \mathrm{Rad}\, G$, ist $\dim(T/S) = 1$. Also ist $\mathrm{Hom}(G_m, T/S) \cong \mathbb{Z}$, und $W_{G/\mathrm{Rad}\, G}(T/S)$ operiert treu auf T/S und daher auch auf $\mathbb{Z}$. Damit ist $|W_G(T)| \leq 2$. Da G nicht auflösbar ist, ist $|W_G(T)| \geq 2$ (Vortrag 14, § 2.7.)

iv) $\Rightarrow$ i) : Wegen $|W_G(T)| = 2$ ist T in genau 2 Borelgruppen enthalten, also ist G nicht auflösbar. Damit ist $\dim G/B \geq 1$. Ist $\dim G/B > 1$, so existieren drei Borelgruppen, die T enthalten, Vortrag 14, § 2.10. . Also $\dim G/B = 1$.

2.3. Folgerung .

Sei G eine Gruppe vom halbeinfachen Rang 1 und $\varphi : G \to \underline{PGL}_2$ der im Satz konstruierte Epimorphismus. Dann ist $\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap_{\text{alle}} \{\text{Borelgruppen von } G\} = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ für drei paarweise verschiedene Borelgruppen von G .

Beweis .

$\operatorname{Ker} \varphi$ ist das Urbild von $\{1\} \subset \underline{PGL}_2$. Die Borelgruppen von G bzw. $\underline{PGL}_2$ sind die Stabilisatoren der rationalen Punkte von $\mathbb{P}^1$. Da nach 1.9. in $\underline{PGL}_2$ gilt $\{1\} = \bigcap_{\text{alle}} \{\text{Borelgruppen von } \underline{PGL}_2\} = \operatorname{Stab}(x_1) \cap \operatorname{Stab}(x_2) \cap \operatorname{Stab}(x_3)$ für drei beliebige verschiedene Punkte x_1 , x_2 , x_3 aus $\mathbb{P}_1(k)$, gilt die Behauptung der Folgerung .

3 . Die Wurzel einer Borelgruppe einer reduktiven Gruppe vom halbeinfachen Rang 1 .

3.1. Es sei G eine zusammenhängende reduktive Gruppe vom halbeinfachen Rang 1 . Es sei T ein maximaler Torus vom G . Nach 2.3. iv) und Vortrag 13, § 5.3. ist T in zwei Borelgruppen B^+ und B^- enthalten. Wir wählen ein Isomorphismes $G/B^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, derart dass B^+ den Punkt o und B^- den Punkt ∞ stabilisieren. Da $\underline{\operatorname{Aut}}\, \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \underline{PGL}_2$ ist (Anhang 12) , operiert G auf $\mathbb{P}_1$ durch einen Homomorphismus $G \to \underline{PGL}_2$, den wir wie in § 2 mit φ bezeichnen .

Da G nicht auflösbar ist, ist der unipotente Anteil B^{+u} von B^+ nicht null (Vortrag 13, § 2.8.) . Da $\operatorname{Rad}^u G = 0$ ist, hat jedoch der durch φ induzierte Morphismus $B^{+u} \to B^{ou}$ endlichen Kern (siehe § 1 und 2) . Deswegen hat B^{+u} die Dimension 1 , und ist isomorph zu $\underline{G}_a$ (exposé 11) . Wählen wir einen Isomorphismus $i^+ : G_a \xrightarrow{\sim} B^{+u}$, so ergibt die Operation von T auf B^{+u} durch innere Automorphismen eine Operation von T auf $\underline{G}_a$ von der Gestalt

$$t.x = \alpha^+(t).x \quad , \quad t \in T(A) \quad , \quad x \in \underline{G}_a(A) = A \; ,$$

wobei $\alpha^+ : T \to \underline{G}_m$ ein Charakter von T ist (exposé 8). Dieser Charakter hängt nicht von i^+ ab und heisst <u>die Wurzel von</u> G <u>bezüglich</u> T <u>und</u> B^+.

3.2. Entsprechend zu α^+ definiert man die Wurzel α^- von G bezüglich T und B^-.

<u>Satz</u>.

<u>Es sei n ein rationaler Punkt von G, der T normalisiert, aber nicht zentralisiert. Es gilt</u>

$$n\, B^+ n^{-1} = B^- \quad \underline{\text{und}} \quad \alpha^+ \circ (\mathrm{int}(n)|T) = \alpha^- = -\alpha^+$$

<u>Beweis</u> : Die Gleichung $n\, B^+ n^{-1} = B^-$ folgt aus Vortrag 13, § 5.8.. Die Gleichung $\alpha^+ \circ (\mathrm{int}(n)|T) = \alpha^-$ folgt unmittelbar aus der Definition : denn $i^- := (\mathrm{int}(n)) \circ i^+$ liefert einen Isomorphismus von $\underline{G}_a$ auf B^{-u}. Für $x \in B^{+u}(A)$ und $t \in T(A)$, ist also

$$\begin{aligned} i^+(\alpha^+(n\,t\,n^{-1}).x) &= n\,t\,n^{-1}\; i^+(x)\; n\,t^{-1}\,n^{-1} \\ &= n\,t\,i^-(x)\; t^{-1}n^{-1} = n\; i^-(\alpha^-(t).x)\; n^{-1} \\ &= i^+(\alpha^-(t).x)\;, \end{aligned}$$

und daher $\alpha^+(n\,t\,n^{-1}) = \alpha^-$.

Andererseitz, weil B^+ nicht nilpotent ist (Vortrag 13, § 2.8.), ist $\alpha^+ \neq 0$. Deswegen ist $\mathrm{Ker}\,\alpha^+$ gleich dem Zentrum von $B^+ = i^+(\underline{G}_a).T$, also gleich dem Zentrum von G (Vortrag 13, § 4.3.3.). Deswegen induziert $\mathrm{int}(n)$ die Identität auf $\mathrm{Ker}\,\alpha^+$, und ergibt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\alpha^+ & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\alpha^+} & \underline{G}_m & \longrightarrow & 1 \\ & & \wr\big\downarrow \mathrm{Id} & & \wr\big\downarrow \mathrm{int}(n) & & \wr\big\downarrow \nu & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\alpha^- & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\alpha^-} & \underline{G}_m & \longrightarrow & 1\;, \end{array}$$

wo ν durch $\mathrm{int}(n)$ unduziert wird. Wäre $\nu = \mathrm{Id}$, so wäre $\mathrm{int}(n) = \mathrm{Id} + \lambda$, mit $\lambda \in \mathrm{Hom}_{Gr}(T, \mathrm{Ker}\,\alpha^-)$. Also wäre $\mathrm{Id} = (\mathrm{int}(n))^2 = \mathrm{Id} + 2\lambda$. Da $\mathrm{Hom}_{Gr}(T, \mathrm{Ker}\,\alpha^-)$ torsions frei ist, wäre $\mathrm{int}(n) = \mathrm{Id}$, im Widerspruch zu $n \notin \underline{\mathrm{Zent}}_G T$. Da ν ein Automorphismus ist, gilt also $\nu = -\mathrm{Id}$, was zu beweisen war.

3.3. <u>Folgesatz</u>.

$$B^{+u} \cap B^{-u} = \{e\} .$$

<u>Beweis</u>: T operiert durch innere Automorphismen auf $B^{+u} \cap B^{-u}$. Man identifiziere B^{+u} mit $\underline{G}_a$ mittels i^+: da T durch α^+ auf B^{+u} operiert, und da α^+ epimorph ist, ist $B^{+u} \cap B^{-u}$ ein $\underline{G}_m$-Untermodul von $\underline{G}_a$, also von der Gestalt $\underline{\alpha}_{p^r} \supset \underline{\alpha}_p$, oder $\{e\}$. Wäre $B^{+u} \cap B^{-u} \neq \{e\}$, so würde die Operation von T auf $\underline{\alpha}_p$ definiert sein mittels $\alpha^+ : T \to \underline{G}_m = \underline{\mathrm{Aut}}_{Gr}(\underline{\alpha}_p)$, aber auch mittels $\alpha^- = -\alpha^+$, was nicht sein kann.

3.4. <u>Folgesatz</u>.

$$B^+ \cap B^- = T .$$

Als Untergruppe von B^+, die T enthält, ist nämlich

$$B^+ \cap B^- = (B^{+u} \cap B^-).T = (B^{+u} \cap B^{-u}).T.$$

3.5. <u>Folgesatz</u>.

$$\mathrm{Ker}\,\alpha^+ = \underline{\mathrm{Zent}}\, G = \mathrm{Ker}\,\varphi .$$

<u>Beweis</u>. Die erste Gleichung ist schon im Beweis von 3.2. bewiesen worden. Andererseits liegt $\mathrm{Ker}\,\varphi$ in $B^+ \cap B^- = T$, und ist somit ein diagonalisierbarer Normalteiler der zusammenhängenden Gruppe G.

Deswegen ist $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Gr}}(\mathrm{Ker}\ \varphi)$ konstant, und Ker φ liegt im Zentrum. Dieses Zentrum liegt aber auch in Ker φ , weil φ epimorph ist und weil $\underline{\mathrm{Zent}}\ \underline{\mathrm{PGL}}_2 =$ ist .

3.6. Struktursatz .

Eine zusammenhängende reduktive Gruppe G vom halbeinfachen Rang 1 ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen :

$$\underline{SL}_2 \times G_m^r \ , \ \underline{GL}_2 \times \underline{G}_m^r \ , \ \underline{PGL}_2 \times \underline{G}_m^r \ .$$

Das folgt aus exposé 10, § 1.5.2. , weil nach 3.5. G eine zentrale Erweiterung von $\underline{PGL}_2$ durch eine diagonalisierbare Gruppe ist .
