

Mathem. (10)

Pareigis

ENDLICHE HOPF-ALGEBREN

von Bodo Pareigis

Vorlesungs-Ausarbeitung, 1973

Universitäts-  
Bibliothek  
München

P 73/2656

Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung enthält im wesentlichen den Inhalt meiner Vorlesung über endliche Hopf-Algebren vom Winter-Semester 1972/73 . Es war mein Ziel, endliche Hopf-Algebren über beliebigen kommutativen Ringen zu untersuchen, den Zusammenhang mit Frobenius-Algebren darzustellen und eine Einführung in die Theorie der Moduln, also die Darstellungstheorie, der endlichen Hopf-Algebren zu geben. Dabei ist der Begriff der Frobenius-Algebra einer Arbeit von Morita folgend zu P-Frobenius-Erweiterungen ausgeweitet worden. Auf diese Grundlagen aufbauend habe ich in der Vorlesung noch die Kohomologiegruppen der endlichen Hopf-Algebren untersucht. Ich muß für die Darstellung dieser Fragen, die ich nicht in diese Ausarbeitung aufgenommen habe, den Leser auf die am Schluß angegebene Spezial-Literatur verweisen. Die wichtigen Struktur-Sätze über kokommutative endliche Hopf-Algebren wie etwa die Zerlegung in separable und infinitesimale Anteile sind hier ebenfalls nicht behandelt, da ausführliche Darstellungen in der Lehrbuch-Literatur schon vorhanden sind.

Ich bin Herrn Dr. Th. Wilhelm für das sorgfältige Lesen eines Korrekturabzugs dieser Ausarbeitung zu Dank verpflichtet.

München, den 6.4.1973

Bodo Pareigis

Inhalt

§ 1. Koalgebren und Komoduln	2
§ 2. Hopf-Algebren und Hopf-Moduln	17
§ 3. P-Frobenius-Erweiterungen	28
§ 4. Beispiele für Bialgebren und Hopf-Algebren	40
§ 5. Moduln über Hopf-Algebren	46
§ 6. Charaktere von endlichen Hopf-Algebren	57
Literatur	66

§ 1. Koalgebren und Komoduln

Es sei in dieser Ausarbeitung  $k$  ein kommutativer, assoziativer Ring mit Einselement. Alle Moduln seien unitäre  $k$ -Moduln, falls nichts anderes gesagt ist. Jeder  $k$ -Links-Modul  $M$  wird auch als  $k$ -Rechts-Modul betrachtet vermöge  $ma = am$  für  $a \in k$  und  $m \in M$ .

Sind  $M$  und  $N$   $k$ -Moduln, so sei  $M \otimes_k N := M \otimes_k N$  und  $\text{Hom}(M, N) := \text{Hom}_k(M, N)$ . Beide Moduln werden in der natürlichen Weise wieder als  $k$ -Moduln betrachtet. Wir werden häufig  $M$  mit  $k \otimes M$  bzw.  $M \otimes k$  identifizieren vermöge des in  $M$  funktoriellen Isomorphismus  $M \ni m \mapsto 1 \otimes m \in k \otimes M$ . Ebenso identifizieren wir  $M$  und  $\text{Hom}(k, M)$  vermöge des in  $M$  funktoriellen Isomorphismus  $\text{Hom}(k, M) \ni f \mapsto f(1) \in M$ .

Sei  $\underline{P}(k)$  die volle Unterkategorie der Kategorie der  $k$ -Moduln, bestehend aus den endlich erzeugten, projektiven  $k$ -Moduln. Für  $P \in \underline{P}(k)$  sei  $P^* := \text{Hom}(P, k)$ , der zu  $P$  duale  $k$ -Modul. Bekanntlich ist  $P$  wieder aus  $\underline{P}(k)$ .  $D := \text{Hom}(-, k): \underline{P}(k) \rightarrow \underline{P}(k)$  definiert eine Anti-Äquivalenz von Kategorien und ist zu sich selbst (Äquivalenz-)invers. Wir identifizieren  $P$  und  $P^{**}$  vermöge des in  $P$  funktoriellen Isomorphismus

$$P \ni p \mapsto (P^* \ni p^* \mapsto p^*(p) \in k) \in P^{**}.$$

Daß dieser und ähnliche später noch zu konstruierende Homomorphismen Isomorphismen sind, wird wie folgt gezeigt. Zunächst überzeugt man sich, daß

$$M \ni m \mapsto (M^* \ni m^* \mapsto m^*(m) \in k) \in M^{**}$$

ein in  $M$  funktorieller Morphismus zwischen additiven Funktoren ist. Sodann zeigt man, daß dieser Homomorphismus für  $M = k$  ein

Isomorphismus ist. Schließlich wende man das folgende Lemma an:

Lemma 1.1: Seien  $A$  und  $B$  assoziative Ringe mit Einselement. Seien  $A\text{-Mod}$  bzw.  $B\text{-Mod}$  die Kategorien der unitären  $A$ -Links- bzw.  $B$ -Links-Moduln. Seien  $F, G: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  additive Funktoren. Sei  $\varphi: F \rightarrow G$  ein funktorieller Morphismus. Ist  $\varphi(A): F(A) \rightarrow G(A)$  ein Isomorphismus, so ist  $\varphi(P): F(P) \rightarrow G(P)$  ein Isomorphismus für alle endlich erzeugten, projektiven  $A$ -Moduln  $P$ .

Nach diesen Vorbetrachtungen geben wir jetzt eine Definition von  $k$ -Algebren, die äquivalent zu der üblichen Definition von  $k$ -Algebren ist, die aber für unsere Zwecke geeigneter ist.

Definition 1.2: Ein Tripel  $(A, \nabla, \eta)$  bestehend aus

1. einem  $k$ -Modul  $A$ ,
2. einem  $k$ -Homomorphismus  $\nabla: A \otimes A \rightarrow A$ , der Multiplikation, und
3. einem  $k$ -Homomorphismus  $\eta: k \rightarrow A$ , der Einheit,

heißt eine  $k$ -Algebra, wenn folgende zwei Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 4. & A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \nabla} & A \otimes A \\
 & \nabla \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \nabla \\
 & A \otimes A & \xrightarrow{\nabla} & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 5. & A & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & A \otimes A \\
 & \eta \otimes 1 \downarrow & \searrow 1 & \downarrow \nabla \\
 & A \otimes A & \xrightarrow{\nabla} & A
 \end{array}$$

Wir sprechen häufig von einer  $k$ -Algebra  $A$  statt  $(A, \nabla, \eta)$ .

Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Definition äquivalent dazu ist, daß  $A$  ein assoziativer Ring mit Einselement ist und  $\eta: k \rightarrow A$  ein unitärer Ringhomomorphismus von  $k$  in das Zentrum von  $A$  ist.

**Definition 1.3:** Seien  $(A, \nabla_A, \eta_A)$  und  $(B, \nabla_B, \gamma_B)$   $k$ -Algebren. Sei  $f \in \text{Hom}(A, B)$ .  $f$  heißt  $k$ -Algebren-Homomorphismus, wenn die beiden folgenden Diagramme kommutieren:

$$1. \quad \begin{array}{ccc} A \circ A & \xrightarrow{f \circ f} & B \circ B \\ \downarrow \nabla_A & & \downarrow \nabla_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} & k & \\ \eta_A \swarrow & & \searrow \gamma_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

Es bezeichne  $k\text{-Alg}(A, B)$  die Menge der  $k$ -Algebren-Homomorphismen von  $A$  nach  $B$ ,  $k\text{-Alg}$  die Kategorie der  $k$ -Algebren und  $A\text{-Mod}$  die Kategorie der unitären  $A$ -Links-Moduln. Entsprechend sei  $\text{Mod-}A$  die Kategorie der unitären  $A$ -Rechts-Moduln.

In Analogie zur Definition der  $k$ -Algebra definieren wir durch Umkehrung der Abbildungsrichtungen eine  $k$ -Koalgebra.

**Definition 1.4:** Ein Tripel  $(C, \Delta, \epsilon)$  bestehend aus

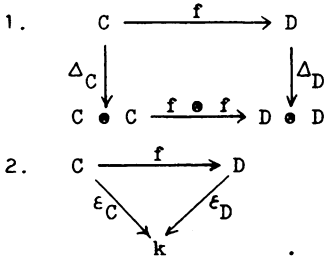
1. einem  $k$ -Modul  $C$ ,
2. einem  $k$ -Homomorphismus  $\Delta: C \rightarrow C \circ C$ , der Diagonalen oder der Komultiplikation, und
3. einem  $k$ -Homomorphismus  $\epsilon: C \rightarrow k$ , der Koeinheit oder Augmentation, heißt eine  $k$ -Koalgebra, wenn folgende zwei Diagramme kommutieren:

$$4. \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \circ C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \circ 1 \\ C \circ C & \xrightarrow{1 \circ \Delta} & C \circ C \circ C \end{array}$$

$$5. \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \circ C \\ \Delta \downarrow & \searrow 1 & \downarrow 1 \circ \epsilon \\ C \circ C & \xrightarrow{\epsilon \circ 1} & C \end{array} .$$

Wie bei den  $k$ -Algebren sprechen wir häufig von einer Koalgebra  $C$  statt von  $(C, \Delta, \epsilon)$ .

Definition 1.5: Seien  $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$  und  $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$   $k$ -Koalgebren. Sei  $f \in \text{Hom}(C, D)$ .  $f$  heißt  $k$ -Koalgebren-Homomorphismus, wenn die folgenden beiden Diagramme kommutieren:



Es bezeichne  $k\text{-Koalg}(C, D)$  die Menge der  $k$ -Koalgebren-Homomorphismen von  $C$  nach  $D$  und  $k\text{-Koalg}$  die Kategorie der  $k$ -Koalgebren.

Wie die Multiplikation einer  $k$ -Algebra gewöhnlich durch  $\nabla(a \bullet a') = aa'$  abgekürzt wird, so benötigt man für größere Rechnungen auch eine Abkürzung der Komultiplikation. Dazu wurde von M. SWEEDLER die folgende Notation eingeführt. Sei  $C$  eine Koalgebra. Wir

führen für  $\Delta(c) = \sum c_i \bullet c'_i$  die Schreibweise

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \bullet c_{(2)}$$

ein. Analog definieren wir

$$(\Delta \bullet 1)\Delta(c) = \sum c_{(1)} \bullet c_{(2)} \bullet c_{(3)} = (1 \bullet \Delta)\Delta(c),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Koassoziativität der  $k$ -Koalgebren folgt. Durch Iteration werden die Ausdrücke  $\sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet c_{(n)}$  definiert.

Ist  $f: C \times \dots \times C \rightarrow M$  eine multilineare Abbildung und  $f': C \bullet \dots \bullet C \rightarrow M$  der induzierte Homomorphismus, so definieren

wir

$$\sum f(c_{(1)}, \dots, c_{(n)}) := f'(\sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet c_{(n)}) .$$

Man rechnet leicht die folgenden Rechenregeln nach:

$$\sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet \Delta(c_{(i)}) \bullet \dots \bullet c_{(n)} = \sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet c_{(n+1)}$$

und

$$\sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet \varepsilon(c_{(i)}) \bullet \dots \bullet c_{(n)} = \sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet 1 \bullet \dots \bullet c_{(n-1)} = \sum c_{(1)} \bullet \dots \bullet c_{(n-1)} ,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Identifizierung  $C \bullet k = C$  stammt.

Definition 1.6: Ein Element  $c \in C$  heißt kokommutativ, wenn

$$\sum c_{(1)} \bullet c_{(2)} = \sum c_{(2)} \bullet c_{(1)} \text{ gilt. Eine } k\text{-Koalgebra } C$$

heißt kokommutativ, wenn alle Elemente von  $C$  kokommutativ

sind. Gleichbedeutend damit ist, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \bullet C \\ & \searrow \Delta & \parallel \tau \\ & & C \bullet C \end{array}$$

mit  $\tau(c \bullet c') = c' \bullet c$  kommutiert.

Wir geben jetzt zwei Beispiele für  $k$ -Koalgebren an. Die Einzelheiten der dabei aufgestellten Behauptungen seien dem Leser zum Beweis überlassen.

Beispiel 1.7: Sei  $X$  eine Menge und  $kX$  der freie  $k$ -Modul mit dem freien Erzeugendensystem  $X$ . Dann ist  $C = kX$  zusammen mit  $\Delta: C \rightarrow C \bullet C$  definiert durch  $\Delta(x) = x \bullet x$  für alle  $x \in X$  und  $\varepsilon: C \rightarrow k$  definiert durch  $\varepsilon(x) = 1$  eine kokommutative  $k$ -Koalgebra. Man beachte dabei, daß man  $k$ -Homomorphismen auf einem freien  $k$ -Modul nur auf dem freien Erzeugendensystem definieren bzw. nachprüfen muß. Dann kann man hier alle Eigenschaften



einer kokommutativen  $k$ -Koalgebra leicht nachprüfen. Die Zuordnung  $X \mapsto (C, \Delta, \varepsilon)$  definiert einen Funktor von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der (kokommutativen)  $k$ -Koalgebren. Dieser Funktor hat den folgenden rechts-adjungierten Funktor  $G$  :

$$G(C) := \{c \in C \mid \Delta(c) = c \otimes c, \varepsilon(c) = 1\} .$$

Insbesondere erhält der Funktor  $X \mapsto (C, \Delta, \varepsilon)$  Kolimites.

Im Spezialfall  $X = \{1\}$  des eben angegebenen Beispiels erhält man, daß  $C = k$  mit  $\Delta: k \rightarrow k \otimes k = k$  und  $\varepsilon: k \rightarrow k$  die identischen Abbildungen eine kokommutative Koalgebra ist.

Beispiel 1.8: Sei  $X$  eine Menge und  $e \notin X$ . Sei  $C := k(X \cup \{e\})$  der freie  $k$ -Modul mit dem freien Erzeugendensystem  $X \cup \{e\}$ .

$\Delta: C \rightarrow C \otimes C$  werde definiert durch  $\Delta(e) = e \otimes e$ ,  $\Delta(x) = x \otimes e + e \otimes x$  für alle  $x \in X$ .  $\varepsilon: C \rightarrow k$  werde definiert durch  $\varepsilon(e) = 1$ ,  $\varepsilon(x) = 0$  für alle  $x \in X$ . Dann ist  $(C, \Delta, \varepsilon)$

eine kokommutative  $k$ -Koalgebra. Weiterhin hat man einen

$k$ -Koalgebren-Homomorphismus  $\eta: k \rightarrow C$  mit  $\eta(1) = e$ ,

eine sogenannte Koaugmentationsabbildung.  $X \mapsto (C, \Delta, \varepsilon, \eta)$  definiert

einen Funktor von der Kategorie der Mengen in die Kategorie

der (kokommutativen)  $k$ -Koalgebren mit Koaugmentationsabbildung. Dieser

Funktor hat den folgenden rechts-adjungierten Funktor  $L$  :

$$L(C, \Delta, \varepsilon, \eta) := \{c \in C \mid \Delta(c) = c \otimes \eta(1) + \eta(1) \otimes c, \varepsilon(c) = 0\} .$$

Seien jetzt eine  $k$ -Algebra  $(A, \nabla, \eta)$  und eine  $k$ -Koalgebra

$(C, \Delta, \varepsilon)$  gegeben. Wir führen auf der Menge  $\text{Hom}(C, A)$  der

$k$ -Homomorphismen eine Multiplikation ein durch die Definition

$$(f * g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

mit  $f, g \in \text{Hom}(C, A)$  und  $c \in C$ . Offenbar ist dann  $f * g$

wieder ein Element von  $\text{Hom}(C, A)$ . Nach Definition ist

$f * g = \nabla(f \otimes g)\Delta$ . Die so definierte Multiplikation ist

assoziativ, denn für  $f, g, h \in \text{Hom}(C, A)$  und  $c \in C$  gilt:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\ &= \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \\ &= \sum f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\ &= (f * (g * h))(c) . \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Assoziativität von  $A$  ebenso verwendet wie die Koassoziativität von  $C$ . Die Distributivität ergibt sich daraus, daß die Multiplikation als Abbildung

$$\text{Hom}(C, A) \otimes \text{Hom}(C, A) \longrightarrow \text{Hom}(C \otimes C, A \otimes A) \xrightarrow{\text{Hom}(\Delta, \nabla)} \text{Hom}(C, A)$$

aufgefaßt werden kann. Zu dieser Multiplikation ist  $\eta \varepsilon: C \rightarrow A$

Einselement, denn

$$\begin{aligned} (f * \eta \varepsilon)(c) &= \sum f(c_{(1)})\eta \varepsilon(c_{(2)}) \\ &= \sum f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)}) \\ &= f(c) \end{aligned}$$

und analog  $(\eta \varepsilon * f)(c) = f(c)$ . Das beweist den

Satz 1.9: Für eine Algebra  $(A, \nabla, \eta)$  und eine  $k$ -Koalgebra  $(C, \Delta, \varepsilon)$  ist  $\text{Hom}(C, A)$  mit der Multiplikation  $f * g = \nabla(f \otimes g)\Delta$  und dem Einselement  $\eta \varepsilon$  eine  $k$ -Algebra.

Folgerung 1.10: Sind  $C$  eine kokommutative  $k$ -Koalgebra und  $A$  eine kommutative Algebra, so ist die  $k$ -Algebra  $\text{Hom}(C, A)$  kommutativ.

Beweis:  $(f * g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)}) = \sum g(c_{(1)})f(c_{(2)}) = (g * f)(c) //$

Folgerung 1.11: Ist  $C$  eine  $k$ -Koalgebra, so ist  $C^*$  eine  $k$ -Algebra.

Beweis: Man setze in Satz 1.9  $A = k$  ein. //

Satz 1.12: Seien  $\varphi: C' \rightarrow C$  ein  $k$ -Koalgebren-Homomorphismus und  $\psi: A \rightarrow A'$  ein Algebren-Homomorphismus. Dann ist

$$\text{Hom}(\varphi, \psi): \text{Hom}(C, A) \longrightarrow \text{Hom}(C', A')$$

ein k-Algebren-Homomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \text{Hom}(\varphi, \psi)(f * g) &= \psi(f * g)\varphi = \psi \nabla(f \otimes g)\Delta\varphi = \nabla(\psi \circ \varphi)(f \otimes g)(\varphi \circ \varphi)\Delta \\ &= \nabla(\psi f \varphi \circ \psi g \varphi)\Delta = \psi f \varphi * \psi g \varphi \quad \text{und} \quad \text{Hom}(\varphi, \psi)(\eta \varepsilon) = \psi \eta \varepsilon \varphi = \eta' \varepsilon' \quad . \quad // \end{aligned}$$

Folgerung 1.13:  $\text{Hom}(-, -): k\text{-Koalg} \times k\text{-Alg} \longrightarrow k\text{-Alg}$  ist ein Funktor.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \text{Man braucht nur zu verifizieren } \text{Hom}(\varphi', \psi')\text{Hom}(\varphi, \psi) &= \\ \text{Hom}(\varphi\varphi', \psi'\psi) \quad \text{und} \quad \text{Hom}(1_C, 1_A) &= 1_{\text{Hom}(C, A)} \quad . \quad // \end{aligned}$$

Bisher stand im ersten Argument von  $\text{Hom}(-, -)$  eine  $k$ -Koalgebra und im zweiten Argument eine  $k$ -Algebra. Nun ändern wir die Situation, so daß im ersten Argument von  $\text{Hom}(-, -)$  eine  $k$ -Algebra und im zweiten eine  $k$ -Koalgebra steht. Im allgemeinen kann man dann keine vernünftige Struktur auf  $\text{Hom}(A, C)$  finden. Das ist jedoch nicht der Fall, wenn man die  $k$ -Modul-Struktur von  $A$  in geeigneter Weise einschränkt.

Satz 1.14: Sei  $(A, \nabla, \eta)$  eine  $k$ -Algebra mit endlich erzeugtem, projektivem  $k$ -Modul  $A$ . Sei  $(C, \Delta, \varepsilon)$  eine  $k$ -Koalgebra. Dann ist  $\text{Hom}(A, C)$  eine  $k$ -Koalgebra.

Beweis: Der  $k$ -Homomorphismus  $\varrho: \text{Hom}(A, C) \otimes \text{Hom}(A', C') \longrightarrow \text{Hom}(A \otimes A', C \otimes C')$  mit  $\varrho(f \otimes g)(a \otimes a') := f(a) \otimes g(a')$  ist in den  $k$ -Moduln  $A$  und  $A'$  ein funktorieller Morphismus. Für  $A = A' = k$  ist er ein Isomorphismus. Also ist er nach Lemma 1.1 auch ein Isomorphismus für endlich erzeugte, projektive  $k$ -Moduln  $A$  und  $A'$ .

Die Diagonale für die  $k$ -Koalgebra  $\text{Hom}(A, C)$  sei jetzt

$$\text{Hom}(A, C) \xrightarrow{\text{Hom}(\nabla, \Delta)} \text{Hom}(A \circ A, C \circ C) \xrightarrow{\cong^{-1}} \text{Hom}(A, C) \circ \text{Hom}(A, C)$$

und werde mit  $\Delta'$  bezeichnet. Identifizieren wir vermöge  $\cong$ , so ist  $(\Delta' \circ 1)\Delta'(f) = (\Delta \circ 1)\Delta f \nabla(\nabla \circ 1) = (1 \circ \Delta)\Delta f \nabla(1 \circ \nabla) = (1 \circ \Delta')\Delta'(f)$ . Also ist die Komultiplikation koassoziativ.

Die Koeinheit für  $\text{Hom}(A, C)$  sei  $\text{Hom}(\gamma, \varepsilon): \text{Hom}(A, C) \rightarrow \text{Hom}(k, k) = k$  und werde mit  $\varepsilon'$  bezeichnet. Dann ist  $(\varepsilon' \circ 1)\Delta'(f) = (\varepsilon \circ 1)\Delta f \nabla(\gamma \circ 1) = f$  und analog  $(1 \circ \varepsilon')\Delta'(f) = f$ . //

Der hier gegebene Beweis hängt wesentlich von der Eigenschaft ab, daß  $A$  als  $k$ -Modul endlich erzeugt und projektiv ist. Wir werden im folgenden eine  $k$ -Algebra  $A$  bzw. eine  $k$ -Koalgebra  $C$  endlich nennen, wenn der  $k$ -Modul  $A$  bzw.  $C$  endlich erzeugt und projektiv ist.

Analog zu den Sätzen bzw. Folgerungen 1.10 - 1.13 wird der Leser die in dieser Ausarbeitung nicht weiter benötigten Aussagen verifizieren:

Ist  $A$  eine endliche kommutative  $k$ -Algebra und  $C$  eine kokommutative  $k$ -Koalgebra, so ist  $\text{Hom}(A, C)$  eine kokommutative  $k$ -Koalgebra.

Ist  $A$  eine endliche  $k$ -Algebra, so ist  $A^*$  eine endliche  $k$ -Koalgebra.

Sei  $k\text{-Alge}$  die Kategorie der endlichen  $k$ -Algebren. Dann ist  $\text{Hom}(-, -): k\text{-Alge} \times k\text{-Koyalg} \rightarrow k\text{-Koyalg}$  ein Funktor.

Seien  $A$  und  $A'$   $k$ -Algebren. Dann ist  $A \circ A'$  wieder eine  $k$ -Algebra, wenn man die Multiplikation durch  $(a_1 \circ a'_1)(a_2 \circ a'_2) = a_1 a_2 \circ a'_1 a'_2$  definiert. Das Einselement ist dann  $1 \circ 1'$ .

Ebenso kann man für  $k$ -Koalgebren  $C$  und  $C'$  eine  $k$ -Koalgebra

$C \otimes C'$  bilden, wenn man die Komultiplikation durch

$$C \otimes C' \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta'} C \otimes C \otimes C' \otimes C' \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} C \otimes C' \otimes C \otimes C'$$

mit  $\tau(c \otimes c') = c' \otimes c$  definiert. Die Koeinheit ist dann

$$\varepsilon \otimes \varepsilon': C \otimes C' \longrightarrow k .$$

Ist  $A$  eine endliche  $k$ -Algebra und  $C$  eine  $k$ -Koyalgebra, so ist  $\text{Hom}(A, C) \cong A^* \otimes C$  als  $k$ -Koyalgebren.

In Analogie zur Definition eines  $A$ -Links-Moduls für eine  $k$ -Algebra  $A$  definieren wir jetzt einen  $C$ -Rechts-Komodul für eine  $k$ -Koyalgebra  $C$ . Der Leser möge eine Definition von  $A$ -Moduln so angeben, daß die folgende Definition von  $C$ -Komoduln daraus durch Umkehrung der Abbildungsrichtungen hervorgeht.

Definition 1.15: Sei  $(C, \Delta, \varepsilon)$  eine  $k$ -Koyalgebra. Ein  $C$ -Rechts-Komodul ist ein Paar  $(M, \chi)$  mit

1.  $M$  ist ein  $k$ -Modul,
2.  $\chi: M \longrightarrow M \otimes C$  ist ein  $k$ -Homomorphismus,
3. 
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\chi} & M \otimes C \\ \chi \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \Delta \\ M \otimes C & \xrightarrow{\chi \otimes 1} & M \otimes C \otimes C \end{array}$$
 ist kommutativ und
4. 
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\chi} & M \otimes C \\ & \searrow 1 & \downarrow 1 \otimes \varepsilon \\ & & M = M \otimes k \end{array}$$
 ist kommutativ.

Wir schreiben ähnlich wie bei  $k$ -Koyalgebren  $\chi(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ , wobei bei multilinearen Abbildungen  $m_{(0)}$  im Argument für Elemente aus  $M$  und  $m_{(1)}$  im Argument für Elemente aus  $C$  stehen. Man rechnet leicht die folgenden Rechenregeln nach:

$$\sum m_{(0)} \otimes \dots \otimes \Delta(m_{(i)}) \otimes \dots \otimes m_{(n)} = \sum \chi(m_{(0)}) \otimes \dots \otimes m_{(n)} =$$

$$= \sum m_{(0)} \otimes \dots \otimes m_{(n+1)}$$

und

$$\sum m_{(0)} \otimes \dots \otimes \varepsilon(m_{(1)}) \otimes \dots \otimes m_{(n)} = \sum m_{(0)} \otimes \dots \otimes m_{(n-1)} .$$

**Definition 1.16:** Seien  $(M, \chi_M)$  und  $(N, \chi_N)$   $C$ -Rechts-Komoduln. Sei  $f \in \text{Hom}(M, N)$ .  $f$  heißt  $C$ -Komodul-Homomorphismus, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \chi_M \downarrow & & \chi_N \downarrow \\ M \otimes C & \xrightarrow{f \otimes 1} & N \otimes C \end{array} .$$

Wir bezeichnen die Menge der  $C$ -Komodul-Homomorphismen von  $M$  in  $N$  mit  $C\text{-Komod}(M, N)$ . Die Kategorie der  $C$ -Rechts-Komoduln werde mit  $\text{Komod-}C$  bezeichnet.

Am Schluß dieses Kapitels werden wir sehen, daß der Begriff des Komoduls im allgemeinen Schwierigkeiten bereitet, wenn man von Unterstrukturen, also von Unterkomoduln sprechen will. Daher besprechen wir jetzt Methoden, die es erlauben, aus einem Komodul einen Modul zu machen. Dazu betrachten wir den funktoriellen Morphismus (funktoriell in  $P$ )

$$\lambda: \text{Hom}(M, N \otimes P) \longrightarrow \text{Hom}(P^* \otimes M, N), \quad \lambda(f)(p^* \otimes m) = (1 \otimes p^*)f(m) .$$

**Lemma 1.17:** Für endlich erzeugte, projektive  $k$ -Moduln  $P$  ist  $\lambda: \text{Hom}(M, N \otimes P) \longrightarrow \text{Hom}(P^* \otimes M, N)$  ein Isomorphismus.

**Beweis:** Man verifiziert leicht, daß  $\lambda$  für  $P = k$  ein Isomorphismus ist. Dann wende man Lemma 1.1 an. //

**Satz 1.18:** Sei  $C$  eine  $k$ -Koalgebra. Sei  $(M, \chi)$  ein  $C$ -Rechts-Komodul. Dann ist  $M$  ein  $C^*$ -Links-Modul mit der Multiplikation

$$\lambda(\chi): C^* \otimes M \longrightarrow M .$$

Beweis: Zunächst ist  $C^*$  eine  $k$ -Algebra nach Folgerung 1.11.

Die Multiplikation ist dabei in folgender Weise erklärt:

$$c^* d^*(c) = \sum c^*(c_{(1)}) d^*(c_{(2)}) .$$

Für die Multiplikation auf dem  $C^*$ -Modul  $M$  müssen wir das Assoziativgesetz  $(c^* d^*)m = c^*(d^*m)$

nachprüfen:

$$\begin{aligned} (c^* d^*)m &= \lambda(\chi)(c^* d^* \otimes m) \\ &= (1 \otimes c^* d^*)\chi(m) \\ &= \sum m_{(0)} c^* d^*(m_{(1)}) \\ &= \sum m_{(0)} c^*(m_{(1)}) d^*(m_{(2)}) \\ &= \sum c^* m_{(0)} d^*(m_{(1)}) \\ &= c^*(d^*m) . \end{aligned}$$

Weiter ist nachzuprüfen, ob  $M$  unitär ist:

$$\varepsilon m = \sum m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)}) = m . \quad //$$

Satz 1.19: Seien  $(M, \chi_M)$  und  $(N, \chi_N)$   $C$ -Rechts-Komoduln und sei  $f: M \longrightarrow N$  ein  $C$ -Komodul-Homomorphismus. Dann ist  $f$  ein  $C^*$ -Modul-Homomorphismus.

Beweis: Wir verwenden die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M, M \otimes C) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}(C^* \otimes M, M) \\ \text{Hom}(M, f \otimes 1) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(C^* \otimes M, f) \\ \text{Hom}(M, N \otimes C) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}(C^* \otimes M, N) \\ \text{Hom}(f, N \otimes C) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}(1 \otimes f, N) \\ \text{Hom}(N, N \otimes C) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}(C^* \otimes N, N) . \end{array}$$

$\lambda$  ist nämlich funktoriell in allen drei Argumenten. Da  $f$  ein Komodul-Homomorphismus ist, ist  $\text{Hom}(M, f \otimes 1)(\chi_M) = (f \otimes 1)\chi_M = \chi_N f = \text{Hom}(f, N \otimes C)(\chi_N)$ . Aus der Kommutativität der obigen Diagramme folgt dann  $f\lambda(\chi_M) = \text{Hom}(C^* \otimes M, f)\lambda(\chi_M) = \lambda(\text{Hom}(M, f \otimes 1)(\chi_M)) = \lambda(\text{Hom}(f, N \otimes C)(\chi_N)) = \text{Hom}(1 \otimes f, N)\lambda(\chi_N) = \lambda(\chi_N)\chi_N^1 \otimes f$ . //

Man erhält also einen Funktor von der Kategorie der  $C$ -Rechts-Komoduln in die Kategorie der  $C^*$ -Links-Moduln. Dieser Funktor ist jedoch nur eine Äquivalenz, wenn  $C$  eine endliche  $k$ -Koalgebra ist. Das soll mit den nächsten beiden Sätzen gezeigt werden.

Satz 1.20: Sei  $C$  eine endliche  $k$ -Koalgebra und  $M$  ein  $k$ -Modul.

$\chi: M \rightarrow M \otimes C$  definiert genau dann eine  $C$ -Rechts-Komodul-Struktur auf  $M$ , wenn  $\lambda(\chi): C^* \otimes M \rightarrow M$  eine  $C^*$ -Links-Modul-Struktur auf  $M$  definiert. Weiterhin ist jede  $C^*$ -Links-Modul-Struktur auf  $M$  von der beschriebenen Art.

**Beweis:** Nach Lemma 1.17 ist  $\lambda$  ein Isomorphismus. Weiter ist  $\varphi: M \otimes P \otimes Q \rightarrow \text{Hom}(P^* \otimes Q^*, M)$  mit  $\varphi(m \otimes p \otimes q)(p^* \otimes q^*) = p^*(p)q^*(q)m$  ein in  $P$  und  $Q$  funktorieller Morphismus. Für  $P = Q = k$  ist  $\varphi$  ein Isomorphismus, also ist  $\varphi$  auch ein Isomorphismus für endlich erzeugte, projektive  $k$ -Moduln  $P$  und  $Q$ .

Wir wollen jetzt die Koassoziativität von  $\chi$  nachweisen, wenn  $\lambda(\chi)$  eine  $C^*$ -Links-Modul-Struktur definiert. Dazu ist

$(\chi \otimes 1)\chi = (1 \otimes \Delta)\chi$  zu zeigen. Sei  $x = ((\chi \otimes 1)\chi - (1 \otimes \Delta)\chi)(m) \in M \otimes C \otimes C$ . Es genügt zu zeigen  $x = 0$ .

Nach Definition ist  $c^*m = \lambda(\chi)(c^* \otimes m) = (1 \otimes c^*)\chi(m) = \sum m_{(0)}c^*(m_{(1)})$

Also ist

$$\begin{aligned} \varphi(x)(c^* \otimes d^*) &= \varphi\left(\sum \chi(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}\right)(c^* \otimes d^*) \\ &\quad - \varphi\left(\sum m_{(0)} \otimes \Delta(m_{(1)})\right)(c^* \otimes d^*) \\ &= \sum (1 \otimes c^*)\chi(m_{(0)})d^*(m_{(1)}) \\ &\quad - \sum m_{(0)}(c^* \otimes d^*)\Delta(m_{(1)}) \\ &= \sum c^*m_{(0)}d^*(m_{(1)}) - \sum m_{(0)}(c^*d^*)(m_{(1)}) \\ &= c^*(d^*m) - (c^*d^*)m = 0. \end{aligned}$$



Damit ist  $\varphi(x) = 0$ . Da  $\varphi$  ein Isomorphismus ist, ist  $x = 0$ .

$\varepsilon$  ist Koeinheit für  $M$ , weil  $\sum m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)}) = \varepsilon m = m$  ist.

Daß jede  $C^*$ -Links-Modul-Struktur von der Form  $\lambda(\chi)$  ist, folgt aus der Tatsache, daß  $\lambda$  ein Isomorphismus ist. //

Satz 1.21: Sei  $C$  eine endliche  $k$ -Koalgebra und seien  $(M, \chi_M)$  und  $(N, \chi_N)$   $C$ -Rechts-Komoduln.  $f: M \rightarrow N$  ist genau dann ein  $C$ -Komodul-Homomorphismus, wenn  $f$  ein  $C^*$ -Modul-Homomorphismus ist.

**Beweis:** Im Beweis von Satz 1.19 sind die Homomorphismen  $\lambda$  Isomorphismen. Daher ist  $f\lambda(\chi_M) = \lambda(\chi_N)(1 \bullet f)$  äquivalent zu  $(f \bullet 1)\chi_M = \chi_N f$ . //

Nach diesen Überlegungen ist es jetzt gleichgültig, ob wir Komoduln über einer endlichen Koalgebra  $C$  oder Moduln über der endlichen Algebra  $C^*$  studieren, weil diese beiden Kategorien isomorph sind. Insbesondere besitzt die Kategorie der  $C$ -Komoduln für eine endliche  $k$ -Koalgebra  $C$  Kerne und Kokerne. Ist die  $k$ -Koalgebra  $C$  jedoch nicht flach (bzw. nicht endlich), so existieren in der Kategorie der  $C$ -Komoduln zwar noch Kokerne und diese werden wie in der unterliegenden Kategorie der  $k$ -Moduln gebildet. Jedoch kann man auf diese Weise im allgemeinen keine Kerne erhalten. Ist  $N \subseteq M$  nämlich ein  $k$ -Untermodul, so ist  $N \bullet C$  kein Untermodul von  $M \bullet C$ . Also wird die Komultiplikation  $\chi: M \rightarrow M \bullet C$  auf  $N$  im allgemeinen keine Komultiplikation induzieren, und selbst, wenn es ein  $\chi_N: N \rightarrow N \bullet C$  so gibt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & M \\ \downarrow \chi_N & & \downarrow \chi_M \\ N \bullet C & \longrightarrow & M \bullet C \end{array}$$

kommutativ ist, so braucht  $\chi_N$  im allgemeinen nicht koassoziativ zu sein. Entsprechende Schwierigkeiten entstehen bei der Betrachtung von Unterkoalgebren. Selbst wenn man von einer Teilmenge von einer  $k$ -Koalgebra  $C$  oder von einem  $C$ -Komodul  $M$  verlangt, daß sie selbst eine  $k$ -Koalgebra bzw. ein  $C$ -Komodul ist und die Inklusionsabbildung ein Homomorphismus ist, so ist die Unterkoalgebren- bzw. -Komodul-Struktur nicht eindeutig bestimmt. Wir werden uns aus diesen Gründen und wegen der bequemen Dualisierungsmöglichkeiten im wesentlichen auf endliche  $k$ -Koalgebren beschränken.

§ 2. Hopf-Algebren und Hopf-Moduln

Im ersten Abschnitt haben wir gesehen, daß man gewisse Fragen über  $k$ -Koalgebren zurückspielen kann auf Fragen über  $k$ -Algebren, in-dem man vermöge  $\text{Hom}(-, k)$  dualisiert. Trägt die zu untersuchende  $k$ -Koalgebra weitere Struktur, so kann sich diese beim Dualisieren wesentlich verändern und auch komplizieren. Im folgenden werden wir solche Fälle antreffen. Die  $k$ -Koalgebra trägt hier noch die zusätzliche Struktur einer  $k$ -Algebra. Ist die  $k$ -Koalgebra endlich, so erhalten wir nach dem Dualisieren wieder eine  $k$ -Koalgebra und eine  $k$ -Algebra, so daß durch das Dualisieren nichts wesentliches gewonnen ist. Es müssen also andere Techniken zusätzlich eingeführt werden. Dazu definieren wir zunächst

Definition 2.1: Eine  $k$ -Bialgebra ist ein Quintupel  $(H, \nabla, \gamma, \Delta, \varepsilon)$  mit den Eigenschaften

1.  $(H, \nabla, \gamma)$  ist eine  $k$ -Algebra,
2.  $(H, \Delta, \varepsilon)$  ist eine  $k$ -Koalgebra,
3.  $\Delta, \varepsilon$  sind  $k$ -Algebren-Homomorphismen,
4.  $\nabla, \gamma$  sind  $k$ -Koalgebren-Homomorphismen.

Lemma 2.2: Gegeben sei ein Quintupel  $(H, \nabla, \gamma, \Delta, \varepsilon)$ , das die Axiome (1) und (2) der Definition 2.1 erfüllt. Dann sind die Axiome (3) und (4) äquivalent zueinander.

Beweis: Wir betrachten die folgenden vier Diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(a)} & H \otimes H \xrightarrow{\nabla} H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H & \text{(b)} & H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \\
 & \downarrow \Delta \circ \Delta & & \uparrow \gamma & \uparrow \gamma \circ \gamma \\
 & H \otimes H \otimes H \otimes H \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} H \otimes H \otimes H \otimes H & & k \xrightarrow{\sim} k \otimes k
 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & k \otimes k \\ \downarrow \nabla & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\varepsilon} & k \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{ccc} & H & \\ \nearrow \eta & & \searrow \varepsilon \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array} .$$

Die Diagramme (a) und (b) sind genau dann kommutativ, wenn  $\Delta$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus ist. Die Diagramme (c) und (d) sind genau dann kommutativ, wenn  $\varepsilon$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus ist. Andererseits sind die Diagramme (a) und (c) genau dann kommutativ, wenn  $\nabla$  ein  $k$ -Koalgebren-Homomorphismus ist und die Diagramme (b) und (d) sind genau dann kommutativ, wenn  $\eta$  ein  $k$ -Koalgebren-Homomorphismus ist. //

Damit ist eines der Axiome 3. oder 4. in der Definition der  $k$ -Bialgebra überflüssig. Wir werden wieder häufig von einer  $k$ -Bialgebra  $H$  statt von  $(H, \nabla, \eta, \Delta, \varepsilon)$  sprechen.

Definition 2.3: Seien  $H$  und  $H'$   $k$ -Bialgebren.  $f \in \text{Hom}(H, H')$  ist ein Bialgebren-Homomorphismus, wenn  $f$  ein Algebren- und ein Koalgebren-Homomorphismus ist.

Es bezeichne  $k\text{-Bialg}(H, H')$  die Menge der  $k$ -Bialgebren-Homomorphismen von  $H$  nach  $H'$  und  $k\text{-Bialg}$  die Kategorie der  $k$ -Bialgebren.

Ist  $H$  eine Bialgebra, so können wir je nach Bedarf  $H$  einmal als Koalgebra und einmal als Algebra betrachten. Nach Satz 1.9 ist dann  $\text{Hom}(H, H)$  eine Algebra. Man beachte dabei, daß die Multiplikation in  $\text{Hom}(H, H)$  nicht durch die Hintereinanderausführung der  $k$ -Homomorphismen gegeben ist, sondern durch  $(f * g)(h) = \sum f(h_{(1)})g(h_{(2)})$ . Weiter ist das Einselement  $\eta\varepsilon$  und nicht die identische Abbildung  $\text{id}_H$ .

Definition 2.4: Hat das Element  $\text{id}_H$  in der  $k$ -Algebra  $\text{Hom}(H, H)$

ein (eindeutig bestimmtes) zweiseitiges Inverses  $S \in \text{Hom}(H, H)$  unter der Multiplikation, so heißt  $S$  Antipode oder Antipodenabbildung.

Eine Bialgebra  $H$  mit Antipodenabbildung  $S$  heißt Hopf-Algebra.

Wie wir an Beispielen später sehen werden, hat die Antipode einer Hopf-Algebra ähnliche Eigenschaften, wie die Inversenbildung in einer Gruppe. Zunächst werden wir einige Eigenschaften der Antipode untersuchen.

Satz 2.5: Sei  $H$  eine Hopf-Algebra. Dann gelten:

1.  $S: H \rightarrow H$  ist ein Algebren-Antihomomorphismus.
2.  $S: H \rightarrow H$  ist ein Koalgebren-Antihomomorphismus.
3. Äquivalent sind:
  - a)  $S \circ S = \text{id}_H$ .
  - b)  $\sum S(h_{(2)})h_{(1)} = \eta \varepsilon(h)$ .
  - c)  $\sum h_{(2)}S(h_{(1)}) = \eta \varepsilon(h)$ .
4. Ist  $H$  kommutativ oder kokommutativ, so ist  $S \circ S = \text{id}_H$ .

Beweis: 1. Wir zeigen  $S(1) = 1$  und  $S(gh) = S(h)S(g)$ .

$$\begin{aligned} S(1) &= S(1)\text{id}_H(1) = \eta \varepsilon(1) = 1. \\ S(gh) &= \sum S(g_{(1)})\varepsilon(g_{(2)})h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= \sum S(g_{(1)}h_{(1)})g_{(2)}\varepsilon(h_{(2)})S(g_{(3)}) \\ &= \sum S(g_{(1)}h_{(1)})g_{(2)}h_{(2)}S(h_{(3)})S(g_{(3)}) \\ &= \sum \varepsilon(g_{(1)}h_{(1)})S(h_{(2)})S(g_{(3)}) \\ &= S(h)S(g). \end{aligned}$$

2. Wir zeigen  $\varepsilon S(h) = \varepsilon(h)$  und  $\Delta S(h) = (S \circ S)\tau \Delta(h)$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon S(h) &= \varepsilon S\left(\sum h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})\right) \\ &= \sum \varepsilon S(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= \varepsilon\left(\sum S(h_{(1)})h_{(2)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta S(h) &= \sum (1 \otimes \gamma \epsilon(h_{(1)})) \Delta S(h_{(2)}) \\
 &= \sum (1 \otimes S(h_{(1)}) h_{(2)}) \Delta S(h_{(3)}) \\
 &= \sum (S(h_{(2)}) h_{(3)} \otimes S(h_{(1)}) h_{(4)}) \Delta S(h_{(5)}) \\
 &= \sum (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})) (h_{(3)} \otimes h_{(4)}) \Delta S(h_{(5)}) \\
 &= \sum (S \otimes S) \tau_{\Delta}(h_{(1)}) \Delta(h_{(2)}) \Delta S(h_{(3)}) \\
 &= \sum (S \otimes S) \tau_{\Delta}(h_{(1)}) \Delta(h_{(2)}) S(h_{(3)}) \\
 &= (S \otimes S) \tau_{\Delta}(h) .
 \end{aligned}$$

3. Wir zeigen zunächst, daß a) aus b) folgt.

$$\begin{aligned}
 S * (S \cdot S)(h) &= \sum S(h_{(1)}) (S \cdot S)(h_{(2)}) \\
 &= S \left( \sum S(h_{(2)}) h_{(1)} \right) \\
 &= S(\gamma \epsilon(h)) \\
 &= \gamma \epsilon(h) .
 \end{aligned}$$

Daher ist  $S * (S \cdot S) = \gamma \epsilon = S * \text{id}_H$ , also  $S \cdot S = \text{id}_H$ .

Gilt nun  $S \cdot S = \text{id}_H$ , so ist

$$S \left( \sum S(h_{(2)}) h_{(1)} \right) = S * (S \cdot S)(h) = \gamma \epsilon(h).$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned}
 \sum S(h_{(2)}) h_{(1)} &= (S \cdot S) \left( \sum S(h_{(2)}) h_{(1)} \right) \\
 &= S(\gamma \epsilon(h)) \\
 &= \gamma \epsilon(h).
 \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man die Äquivalenz von a) und c).

4. Bei (Ko-)Kommutativität gelten die Bedingungen 3.b) und 3.c). //

Definition 2.6: Seien  $H$  und  $H'$  Hopf-Algebren. Ein Hopf-Algebren-Homomorphismus  $f: H \rightarrow H'$  ist ein Bialgebren-Homomorphismus.

Wir benötigen hier also keine extra Bedingung für die Verträglichkeit eines Hopf-Algebren-Homomorphismus mit den Antipoden. Diese Verträglichkeit ist automatisch gegeben, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.7: Seien  $H$  und  $H'$  Hopf-Algebren mit den Antipoden  
 $S$  und  $S'$  . Sei  $f: H \rightarrow H'$  ein Hopf-Algebren-Homomorphismus.  
Dann gilt  $S'f = fS$  .

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } fS(h) &= \sum \eta' \varepsilon(h_{(1)}) fS(h_{(2)}) \\
 &= \sum \eta' \varepsilon'(f(h_{(1)})) fS(h_{(2)}) \\
 &= \sum S'(f(h_{(1)}))_{(1)} f(h_{(1)})_{(2)} fS(h_{(2)}) \\
 &= \sum S'f(h_{(1)}) f(h_{(2)}) fS(h_{(3)}) \\
 &= \sum S'f(h_{(1)}) f(h_{(2)}) S(h_{(3)}) \\
 &= \sum S'f(h_{(1)}) \eta' \varepsilon(h_{(2)}) \\
 &= S'f(h) . //
 \end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt 1.9 und 1.14, um auf der Menge der  $k$ -Homomorphismen einer Bialgebra in eine andere Bialgebra eine Bialgebren-Struktur zu definieren.

Lemma 2.8: Sei  $H$  eine endliche Bialgebra (Hopf-Algebra mit  
Antipode  $S)$  . Sei  $L$  eine Bialgebra (Hopf-Algebra mit Antipode  
 $S')$  . Dann ist  $\text{Hom}(H,L)$  eine Bialgebra (Hopf-Algebra mit Anti-  
poden  $S''(f) = S'fS)$  .

Beweis: Nach 1.9 und 1.14 ist  $\text{Hom}(H,L)$  eine  $k$ -Algebra und eine  $k$ -Koalgebra. Identifiziert man  $\text{Hom}(H \otimes H, L \otimes L) = \text{Hom}(H,L) \otimes \text{Hom}(H,L)$ , was wegen der Endlichkeit von  $H$  möglich ist, so kann man leicht Kommutativität der vier relevanten Diagramme aus Lemma 2.2 nachrechnen. Damit erhält man, daß  $\text{Hom}(H,L)$  eine Bialgebra ist.

Sind nun Antipoden  $S$  und  $S'$  vorhanden, so definiere man zunächst  $\text{Hom}(\nabla, \Delta)(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}$  . Dann gilt  $\sum f_{(1)}(h) \otimes f_{(2)}(h') = \text{Hom}(\nabla, \Delta)(f)(h \otimes h') = \Delta f \nabla(h \otimes h') = \sum (f(hh'))_{(1)} \otimes (f(hh'))_{(2)}$  .

Damit ist

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\Delta, \nabla) \left( \sum f_{(1)} \otimes S' f_{(2)} S \right) (h) &= \sum f_{(1)} (h_{(1)}) S' f_{(2)} S (h_{(2)}) \\ &= \sum (f(h_{(1)} S(h_{(2)}))_{(1)}) S' (f(h_{(1)} S(h_{(2)}))_{(2)}) \\ &= \gamma_L \varepsilon_L f \gamma_H \varepsilon_H (h) = \text{Hom}(\varepsilon_H, \gamma_L) \text{Hom}(\gamma_H, \varepsilon_L) (f) (h) . \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß  $S''$  wie oben definiert die Antipode für  $\text{Hom}(H, L)$  ist.

Wir stellen jetzt einige Tatsachen über Komoduln über Bialgebren bzw. Hopf-Algebren zusammen. Sei  $B$  eine Bialgebra und  $M$  ein Rechts-Komodul über der Koalgebra  $B$ . Wir definieren

$$P(M) := \{ m \in M \mid \chi(m) = m \otimes 1 \} .$$

$P(M)$  ist offenbar ein  $k$ -Unter-Modul von  $M$ . Sei  $f: M \rightarrow N$  ein  $B$ -Komodul-Homomorphismus. Wir definieren  $P(f): P(M) \rightarrow P(N)$  als Einschränkung von  $f$  auf  $P(M)$ . Es ist zu zeigen, daß  $f$  den  $k$ -Modul  $P(M)$  in den  $k$ -Modul  $P(N)$  abbildet. Sei also  $m \in P(M)$ . Dann ist  $\chi_N f(m) = (f \otimes 1) \chi_M(m) = f(m) \otimes 1$ . Damit ist  $f(m) \in P(N)$ . Damit ist  $P: \text{Komod-}B \rightarrow k\text{-Mod}$  ein additiver Funktor.

Zum weiteren Studium des Funktors  $P$  benötigen wir den Begriff des Hopf-Moduls.

**Definition 2.9:** Sei  $H$  eine Hopf-Algebra. Ein  $k$ -Modul  $M$ , der  $H$ -Rechts-Modul vermöge  $\varrho: M \otimes H \rightarrow M$  und  $H$ -Rechts-Komodul vermöge  $\chi: M \rightarrow M \otimes H$  ist, heißt Hopf-Modul, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes H & \xrightarrow{\varrho} & M & \xrightarrow{\chi} & M \otimes H \\ \downarrow \chi \otimes \Delta & & & & \uparrow \varrho \otimes \nabla \\ M \otimes H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} & M \otimes H \otimes H & & M \otimes H \otimes H \end{array}$$

kommutiert, d.h. wenn  $\chi(mh) = \sum m_{(0)} h_{(1)} \otimes m_{(1)} h_{(2)}$  für alle  $h \in H$  und  $m \in M$  gilt.

Ein Hopf-Modul-Homomorphismus ist ein Modul- und Komodul-Homomorphismus.

München



Offenbar ist eine Hopf-Algebra  $H$  über sich selbst ein Hopf-Modul. Weiter ist für jeden  $k$ -Modul  $X$  auch der Modul  $X \otimes H$  ein Hopf-Modul. Ist  $f: X \rightarrow Y$  ein  $k$ -Homomorphismus, so ist  $f \otimes 1: X \otimes H \rightarrow Y \otimes H$  ein Hopf-Modul-Homomorphismus. Damit ist  $- \otimes H: k\text{-Mod} \rightarrow H\text{-Hopf-Mod}$  ein additiver Funktor. Es gilt nun der wichtige Satz:

Satz 2.10: Der Funktor

$$H\text{-Hopf-Mod} \ni M \mapsto P(M) \otimes k\text{-Mod}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien mit dem inversen Funktor

$$k\text{-Mod} \ni X \mapsto X \otimes H \otimes H\text{-Hopf-Mod} .$$

**Beweis:** Wir konstruieren funktorielle Isomorphismen

$P(M) \otimes H \cong M$  und  $X \cong P(X \otimes H)$  durch

$$P(M) \otimes H \ni m \otimes h \xrightarrow{\alpha} mh \in M$$

mit der inversen Abbildung

$$M \ni m \xrightarrow{\alpha^{-1}} \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} \in P(M) \otimes H .$$

und durch

$$X \ni x \xrightarrow{\beta} x \otimes 1 \in P(X \otimes H)$$

mit der inversen Abbildung

$$P(X \otimes H) \ni x \otimes h \xrightarrow{\beta^{-1}} x \varepsilon(h) \in X .$$

Alle diese Homomorphismen sind offenbar funktoriell in  $M$  bzw.  $X$  .

Weiter ist  $\alpha$  ein  $H$ -Homomorphismus.  $\alpha^{-1}$  ist wohldefiniert wegen

$$\begin{aligned} \chi\left(\sum m_{(0)} S(m_{(1)})\right) &= \sum m_{(0)} S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)} S(m_{(2)}) \\ &\quad (\text{da } M \text{ ein Hopf-Modul ist}) \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \otimes \eta \varepsilon(m_{(1)}) \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes 1 \end{aligned}$$

also ist  $\sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes P(M)$  . Außerdem ist  $\alpha^{-1}$  ein Komodul-Homomorphismus wegen

$$\chi \alpha^{-1}(m) = \chi\left(\sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \bullet m_{(2)} \bullet m_{(3)} \\
&= \sum \alpha^{-1}(m_{(0)}) \bullet m_{(1)} \\
&= (\alpha^{-1} \bullet 1) \chi(m) .
\end{aligned}$$

Schließlich sind  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  invers zueinander wegen

$$\begin{aligned}
\alpha \alpha^{-1}(m) &= \alpha \left( \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \bullet m_{(2)} \right) \\
&= \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) m_{(2)} \\
&= m
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} \alpha(m \bullet h) &= \alpha^{-1}(mh) \\
&= \sum m_{(0)} h_{(1)} S(m_{(1)} h_{(2)}) \bullet m_{(2)} h_{(3)} \\
&= \sum mh_{(1)} S(h_{(2)}) \bullet h_{(3)} \quad (\text{wegen } \chi(m) = m \bullet 1) \\
&= m \bullet h .
\end{aligned}$$

Damit sind  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  zueinander inverse Hopf-Modul-Homomorphismen.

Das Bild von  $\beta$  liegt in  $P(X \bullet H)$  wegen  $\chi(x \bullet 1) = x \bullet \Delta(1) = (x \bullet 1) \bullet 1$ . Offenbar sind  $\beta$  und  $\beta^{-1}$   $k$ -Homomorphismen.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\beta^{-1} \beta(x) &= \beta^{-1}(x \bullet 1) \\
&= x \varepsilon(1) \\
&= x
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\beta \beta^{-1} \left( \sum x_i \bullet h_i \right) &= \beta \left( \sum x_i \varepsilon(h_i) \right) \\
&= \sum x_i \varepsilon(h_i) \bullet 1 \\
&= \sum x_i \bullet \varepsilon(h_i) \bullet 1 \\
&= \sum x_i \bullet \varepsilon(h_{i(1)}) h_{i(2)} \quad \text{wegen } \sum x_i \bullet h_i \bullet P(X \bullet H) \\
&= \sum x_i \bullet h_i .
\end{aligned}$$

Damit sind auch  $\beta$  und  $\beta^{-1}$  invers zueinander. //

Folgerung 2.11:  $P(M)$  ist  $k$ -direkter Summand des Hopf-Moduls  $M$  .

Beweis: Die Komposition von  $P(M) \subseteq M$  mit  $\gamma: M \ni m \mapsto \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \bullet m_{(2)}$   $\in P(M)$  ist die Identität auf  $P(M)$  . //

Sei jetzt  $M \in \text{Mod-}B$  für eine Bialgebra  $B$ . Wir definieren

$$M^B := \{m \in M \mid mb = m\varepsilon(b) \text{ für alle } b \in B\}.$$

$M^B$  ist offenbar ein  $k$ -Unter-Modul von  $M$ , der Fixmodul von  $M$ .

Sei  $f: M \rightarrow N$  ein  $B$ -Modul-Homomorphismus. Wir definieren

$$f^B: M^B \rightarrow N^B \text{ als Einschränkung von } f \text{ auf } M^B. \text{ Wegen } f(m)b = f(mb) = f(m\varepsilon(b)) = f(m)\varepsilon(b) \text{ für } m \in M^B \text{ und } b \in B \text{ ist } f(m) \in N^B.$$

Damit ist  $-^B: \text{Mod-}B \rightarrow k\text{-Mod}$  ein additiver Funktor.

Betrachten wir  $\text{Hom}_B(k, M)$  als Untermodul von  $\text{Hom}_B(B, M)$  vermöge des Monomorphismus  $\text{Hom}_B(\varepsilon, M): \text{Hom}_B(k, M) \rightarrow \text{Hom}_B(B, M)$ , so erhält man weitere Eigenschaften des Fixmoduls aus dem folgenden Lemma:

Lemma 2.12: Unter dem Isomorphismus  $\text{Hom}_B(B, M) \ni f \mapsto f(1) \in M$  sind  $\text{Hom}_B(k, M)$  und  $M^B$  isomorph.

Beweis: Sei  $f \in \text{Hom}_B(B, M)$ . Dann gilt  $f \in \text{Hom}_B(k, M) \Leftrightarrow f(b) = f(\varepsilon(b))$  für alle  $b \in B \Leftrightarrow f(1)b = f(1)\varepsilon(b)$  für alle  $b \in B \Leftrightarrow f(1) \in M^B$ . //

Aus diesem Lemma entnimmt man insbesondere, daß  $-^B$  linksexakt ist und Limites erhält.

Satz 2.13: Sei  $B$  eine endliche Bialgebra und  $M$  ein B-Rechts- Komodul. Dann ist  $P(M) = {}^{B^*}M$ .

Beweis: Nach Lemma 2.8 ist  $B^*$  wieder eine Bialgebra und nach Satz 1.18 ist  $M$  ein  $B^*$ -Links-Modul. Den Fixmodul bezeichnen wir durch  ${}^{B^*}M$ . Sei  $m \in P(M)$ . Dann ist  $b^*m = \sum m_{(0)}b^*(m_{(1)}) = mb^*(1)$ , also  $m \in {}^{B^*}M$ . Genaugenommen benötigt man hier also für die Inklusion  $P(M) \subseteq {}^{B^*}M$  nicht die Endlichkeit von  $B$ .

Der Homomorphismus  $\varphi: M \otimes B \rightarrow \text{Hom}(B^*, M)$  mit  $\varphi(m \otimes b)(b^*) =$

$mb^*(b)$  ist ein Isomorphismus, weil  $B$  endlich ist (Lemma 1.1).

Sei  $m \in B^*M$ . Dann ist  $b^*m = mb^*(1)$ , also  $\varphi(\chi(m))(b^*) =$

$$\sum m_{(0)} b^*(m_{(1)}) = b^*m = mb^*(1) = \varphi(m \otimes 1)(b^*) \quad \text{für alle } b^* \in B^*.$$

Daraus folgt  $\chi(m) = m \otimes 1$  und  $m \in P(M)$ . //

Folgerung 2.14: Sei  $H$  eine endliche Hopf-Algebra. Dann gilt für jeden Hopf-Modul  $M$  der Isomorphismus  $M \cong H^*M \otimes H$ .

Beweis: Satz 2.10 und Satz 2.13. //

Satz 2.15: Sei  $H$  eine endliche Hopf-Algebra. Dann ist  $H^*$  ein H-Hopf-Modul.

Beweis:  $H^*$  ist  $H^*$ -Links-Modul, also nach Satz 1.20 ein H-Rechts-

Komodul mit der Komodul Struktur  $\chi: H^* \rightarrow H^* \otimes H$ ,  $\chi(h^*) =$

$$\sum h_{(0)}^* \otimes h_{(1)}^* \quad \text{bestimmt durch}$$

$$g^*h^* = \lambda(\chi)(g^* \otimes h^*) = (1 \otimes g^*)\chi(h^*) = \sum h_{(0)}^* g^*(h_{(1)}^*),$$

$$\text{also } g^*h^*(h) = \sum h_{(0)}^*(h)g^*(h_{(1)}^*) = \sum g^*(h_{(1)})h^*(h_{(2)}), \quad \text{wobei}$$

die letzte Gleichung nach Definition der Multiplikation in  $H^*$  gilt.

$H^* = \text{Hom}(H, k)$  ist in der natürlichen Weise ein H-Links-Modul

und wird ein H-Rechts-Modul, wenn man die Operation von  $H$  auf

$H^*$  durch die Antipode modifiziert, also durch

$$(h^* \cdot h)(a) = h^*(aS(h)).$$

$H^*$  ist ein H-Rechts-Hopf-Modul, denn für  $h^*, g^* \in H^*$ ,  $a, b \in H$  gilt:

$$\chi(h^* \cdot a)(g^*)(b) = \left( \sum (h^* \cdot a)_{(0)} g^*((h^* \cdot a)_{(1)}) \right)(b)$$

(wobei wir  $H^* \otimes H$  mit  $\text{Hom}(H^*, H^*)$  identifiziert haben)

$$= g^*(h^* \cdot a)(b)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum g^*(b_{(1)})(h^* \cdot a)(b_{(2)}) \\
 &= \sum g^*(b_{(1)})h^*(b_{(2)})S(a) \\
 &= \sum g^*(b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})h^*(b_{(2)})S(a_{(1)}) \\
 &= \sum (a_{(3)}g^*)(b_{(1)})S(a_{(2)})h^*(b_{(2)})S(a_{(1)}) \\
 &= \sum (a_{(2)}g^*)h^*(bS(a_{(1)})) \\
 &= \sum (((a_{(2)}g^*)h^*) \cdot a_{(1)})(b) \\
 &= \sum ((h_{(0)}^*(a_{(2)}g^*)(h_{(1)}^*)) \cdot a_{(1)})(b) \\
 &= \sum ((h_{(0)}^* \cdot a_{(1)})(a_{(2)}g^*)(h_{(1)}^*)) (b) \\
 &= \sum ((h_{(0)}^* \cdot a_{(1)})g^*(h_{(1)}^*a_{(2)}))(b),
 \end{aligned}$$

also ist  $\chi(h^* \cdot a) = \sum h_{(0)}^* \cdot a_{(1)} \circ h_{(1)}^* a_{(2)}$  .

Folgerung 2.16: Sei H eine endliche Hopf-Algebra. Dann gibt es einen endlich erzeugten, projektiven k-Modul  $P(H^*)$ , so daß  $H^* \cong P(H^*) \circ H$  als Hopf-Moduln gilt.

Beweis: folgt aus Satz 2.10 und Folgerung 2.11. //

§ 3. P-Frobenius-Erweiterungen

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß der Leser mit der Morita-Äquivalenz von Modul-Kategorien vertraut ist. Insbesondere verstehen wir unter einem A-A-Progenerator P für einen Ring A einen A-A-Bimodul P mit den Eigenschaften, daß  ${}_A P$  endlich erzeugt und projektiv ist und daß  $A \cong \text{Hom}_A({}_A P, {}_A P)^{\text{op}}$  ist, wenn man Homomorphismen links vom Argument schreibt. Dazu ist äquivalent, daß  $P_A$  endlich erzeugt und projektiv ist und daß  $A \cong \text{Hom}_A(P_A, P_A)$  ist. Ist A eine k-Algebra, so verlangen wir, daß die induzierte k-Modul-Struktur auf beiden Seiten von P dieselbe ist.

Definition 3.1: Seien  $f: A \rightarrow B$  ein k-Algebren-Homomorphismus und P ein A-A-Progenerator. B heißt eine P-Frobenius-Erweiterung von A, wenn

- 1)  ${}_A B$  endlich erzeugt und projektiv ist und
- 2)  ${}_B B_A \cong {}_B \text{Hom}_A(.B, .P)_A$ , wobei die Punkte die Seiten angeben, bezüglich der die Homomorphismen die A-Modul-Struktur erhalten sollen.

Lemma 3.2: Sei B eine P-Frobenius-Erweiterung von A. Dann gelten:

- 1')  ${}_A B$  ist endlich erzeugt und projektiv,
- 2')  ${}_A B_B \cong {}_A \text{Hom}_A(B, .P)_B$ .

Beweis: 1') Aus 2) folgt  ${}_A B \cong \text{Hom}_A(.B, .P)_A$ . Nun ist  $P_A \cong \text{Hom}_A(.A, .P)_A$  wie man leicht verifiziert. Insbesondere ist also  $\text{Hom}_A(.A, .P)_A$  endlich erzeugt und projektiv. Mit direkten Summen-Argumenten und der Tatsache, daß  ${}_A B$  endlich erzeugt und projektiv ist, erhält man, daß  $\text{Hom}_A(.B, .P)_A$ , also auch  ${}_A B$  endlich erzeugt und projektiv sind.

2')  ${}_A \text{Hom}_A(B, .P)_B \cong {}_A \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(.B, .P), .P)_B$

$$\begin{aligned} &\cong {}_A \text{Hom}_A (\text{Hom}_A (.B, .A) \circlearrowleft_A P., P.)_B \\ &\cong {}_A \text{Hom}_A (\text{Hom}_A (.B, .A), \text{Hom}_A (P., P.))_B \\ &\cong {}_A \text{Hom}_A (\text{Hom}_A (.B, .A), A.)_B \\ &\cong {}_A B_B \end{aligned}$$

da  ${}_A B$  endlich erzeugt und projektiv ist. //

Dieses Lemma zeigt, daß die Definition einer P-Frobenius-Erweiterung unabhängig von der Wahl der Seite ist, bezüglich der die Definition gegeben wird.

Definition 3.3: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$ . Dann heißen die Isomorphismen aus 2) bzw. 2')

$$\varphi: {}_B B_A \cong {}_B \text{Hom}_A (.B, .P)_A \quad \text{und} \quad \varphi': {}_A B_B \cong {}_A \text{Hom}_A (B., P.)_B$$

Frobenius-Isomorphismen und

$$\psi := \varphi(1): {}_A B \longrightarrow {}_A P$$

Frobenius-Homomorphismus.

Lemma 3.4:  $\psi = \varphi(1) = \varphi'(1)$ , also  $\psi \in \text{Hom}_{A-A} (.B., .P.)$ .

Beweis: Für  $f \in \text{Hom}_A (.B., .P)$  gilt  $f = \varphi(b) = b\varphi(1) = b\psi$  mit eindeutig bestimmtem  $b \in B$ . Wir verfolgen nun den Isomorphismus 2') aus dem Beweis von Lemma 3.2 elementweise:

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto (g \longmapsto g(1)) \\ &\longmapsto (g \longmapsto (p \longmapsto g(1)p)) \\ &\longmapsto (g \circ p \longmapsto g(1)p) \\ &\longmapsto (f \longmapsto f(1)) = (b\psi \longmapsto (b\psi)(1) = \psi(b)) \\ &\longmapsto (b \longmapsto \psi(b)) . \quad // \end{aligned}$$

Im folgenden werde der Zentralisator von  $A$  in  $B$  mit  $Z_B(A)$  bezeichnet.

Lemma 3.5: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$ . Dann ist  $Z_B(A) \ni z \mapsto z\psi \in \text{Hom}_{A-A}(.B.,.P.)$  ein Isomorphismus.

Beweis: Wegen  $(z\psi)(aba') = \psi(aba'z) = a(z\psi)(b)a'$  ist  $z\psi \in \text{Hom}_{A-A}(.B.,.P.)$ . Ist  $\varphi(y) = y\psi \in \text{Hom}_{A-A}(.B.,.P.)$ , so gilt  $(ay\psi)(b) = \psi(bay) = (y\psi)(ba) = (y\psi)(b)a = \psi(by)a = \psi(bya) = (ya\psi)(b)$  für alle  $b \in B$ . Also ist  $ay = ya$  für alle  $a \in A$ , d.h.  $y \in Z_B(A)$ . //

Der Isomorphismus von Lemma 3.5 ist durch den links-seitigen Frobenius-Isomorphismus definiert. Da die Mengen  $Z_B(A)$  und  $\text{Hom}_{A-A}(.B.,.P.)$  unabhängig von der Wahl der Seiten sind, gibt es auch einen entsprechend Lemma 3.5 durch  $\varphi'$  definierten Isomorphismus  $Z_B(A) \ni z \mapsto \varphi z \in \text{Hom}_{A-A}(.B.,.P.)$ . Insbesondere gibt es zu jedem  $z \in Z_B(A)$  genau ein  $z' = \nu(z) \in Z_B(A)$  mit  $z\psi = \varphi z'$ .

Satz 3.6: Die Bijektion  $Z_B(A) \ni z \mapsto z' \in Z_B(A)$  ist ein Ring-Automorphismus und wird Nakayama-Automorphismus  $\nu$  genannt.

Beweis: Trivialerweise ist  $\nu$  additiv und gilt  $\nu(1) = 1$ . Seien nun  $y, z \in Z_B(A)$ . Dann ist  $\varphi(\nu(yz)b) = \varphi(byz) = \varphi(\nu(z)by) = \varphi(\nu(y)\nu(z)b)$  für alle  $b \in B$ . Also ist  $\nu(yz) = \nu(y)\nu(z)$ . //

Sei  ${}_B^M_B$  ein  $B$ - $B$ -Bimodul. Dann nennen wir ein Element  $m \in M$  mit  $bm = mb$  für alle  $b \in B$  ein Casimir-Element (für  $B$ ). Weiter benötigen wir jetzt den dualen Modul  ${}_A^Q_A = {}_A \text{Hom}_A(.P.,.A)_A \cong {}_A \text{Hom}_A(P.,A.)_A$  zu  $P$ .

Satz 3.7: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$ . Dann gibt es ein Element  $\sum b_i \circ q_i \circ b'_i \in B \circ_A Q \circ_A B$  mit



$$1) \sum bb_i \circ q_i \circ b'_i = \sum b_i \circ q_i \circ b'_i b \quad \text{für alle } b \in B \quad \text{und}$$

$$2) \sum \psi(b_i) q_i b'_i = 1 = \sum b_i q_i \psi(b'_i) .$$

Beweis:  $\beta: B \circlearrowleft_A M \longrightarrow \text{Hom}_A(. \text{Hom}_A(B., P.), .P \circlearrowleft_A M)$  mit  $\beta(b \circlearrowleft m)(f) := f(b) \circlearrowleft m$  ist ein B-Homomorphismus, wie man leicht nachrechnet.

Weiter ist  $\beta$  im Argument  $B \circlearrowleft \text{Mod-}A$  funktoriell. Setzen wir  $A$  anstelle von  $B$  ein, so ist  $\beta$  wegen  $\text{Hom}_A(. \text{Hom}_A(A., P.), .P \circlearrowleft_A M) \cong \text{Hom}_A(.P., .P \circlearrowleft_A M) \cong \text{Hom}_A(.A., .M)$  ( $P$  ist  $A$ - $A$ -Progenerator!) ein Isomorphismus. Da  $B_A$  endlich erzeugt und projektiv ist, ist  $\beta$  auch für das Argument  $B$  nach Lemma 1.1 ein Isomorphismus.

Insbesondere gilt für  $A M = A Q \circlearrowleft_A B$ , daß

$\alpha: B \circlearrowleft Q \circlearrowleft B \ni b \circlearrowleft q \circlearrowleft b' \longmapsto (f \longmapsto f(b)qb')$  ein Isomorphismus ist. Dabei sei  $pq \circlearrowleft A$  das Element, das im Sinne der Morita-Äquivalenz dem Element  $p \circlearrowleft q \circlearrowleft P \circlearrowleft_A Q$  unter dem Isomorphismus  $P \circlearrowleft_A Q \cong A$  entspricht.

Unter  $\alpha$  habe  $\varphi'^{-1}$  das Urbild  $\sum b_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i = \alpha^{-1}(\varphi'^{-1})$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha\left(\sum bb_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i\right)(f) &= \sum f(bb_i)q_i b'_i \\ &= \alpha\left(\sum b_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i\right)(fb) \\ &= \varphi'^{-1}(fb) \\ &= \varphi'^{-1}(f)b \\ &= \sum f(b_i)q_i b'_i b \\ &= \alpha\left(\sum b_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i b\right)(f) . \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß  $\sum b_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i$  ein Casimir-Element für  $B$  ist.

Weiter ist

$$b = \varphi'^{-1}(\psi b) = \alpha\left(\sum b_i \circlearrowleft q_i \circlearrowleft b'_i\right)(\psi b) = \sum \psi(bb_i)q_i b'_i .$$

Insbesondere gilt  $1 = \sum \psi(b_i)q_i b'_i$ .

Schließlich hat man

$$\begin{aligned} \psi(b) &= \sum \psi(\psi(b_i)q_i b'_i b) = \sum \psi(b_i)q_i \psi(b'_i b) = \sum \psi(b_i q_i \psi(b'_i b)) \\ &= \sum \psi(bb_i q_i \psi(b'_i)) = \left(\sum b_i q_i \psi(b'_i)\right)\psi(b) . \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\psi = \sum b_i q_i \psi(b'_i) \psi$ , also  $1 = \sum b_i q_i \psi(b'_i)$ . //

Das Casimir-Element  $\sum b_i \circ q_i \circ b'_i$  wird auch häufig duale Basis genannt. Wir zeigen jetzt, daß P-Frobenius-Erweiterungen schon durch die Existenz einer dualen Basis charakterisiert werden können.

Satz 3.8: Sei  $A \rightarrow B$  ein k-Algebren-Homomorphismus und

sei  ${}_A P_A$  ein A-A-Progenerator. Existieren  $\sum b_i \circ q_i \circ b'_i \circ$

$B \circ {}_A P \circ {}_A B$ ,  $\psi \in \text{Hom}_A(.B, .P)$  und  $\psi' \in \text{Hom}_A(.B, .P)$  mit

$$1) \sum b b_i \circ q_i \circ b'_i = \sum b_i \circ q_i \circ b'_i b \text{ für alle } b \in B \text{ und}$$

$$2) \sum \psi'(b_i) q_i b'_i = 1 = \sum b_i q_i \psi(b'_i),$$

so ist  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$ .

Beweis:  $\tilde{\phi}: \text{Hom}_A(.B, .P) \ni f \mapsto \sum b_i q_i f(b'_i) \in B$  ist wegen

$$\tilde{\phi}(bfa) = \sum b_i q_i f(b'_i b) a = b \sum b_i q_i f(b'_i) a = b \tilde{\phi}(f) a \text{ ein } B\text{-}A\text{-Homo-}$$

morphismus. Wegen  $\tilde{\phi}(b\psi) = b\tilde{\phi}(\psi) = b \sum b_i q_i \psi(b'_i) = b$  ist  $\tilde{\phi}$

surjektiv. Ist  $\tilde{\phi}(f) = 0$ , so gilt

$$f(b) = f\left(\sum \psi'(b_i) q_i b'_i b\right) = f\left(\sum \psi'(bb_i) q_i b'_i\right) = \sum \psi'(bb_i) q_i f(b'_i) \\ = \psi'\left(\sum bb_i q_i f(b'_i)\right) = 0,$$

also ist  $\tilde{\phi}$  ein Isomorphismus.

$$\text{Wegen } b = \sum \psi'(b_i) q_i b'_i b = \sum \psi'(bb_i) q_i b'_i = \sum ((b_i \psi')(b) q_i) b'_i$$

und wegen des Dual-Basis-Lemmas für endlich erzeugte, projektive

Moduln ist  ${}_A B$  endlich erzeugt und projektiv. //

Satz 3.9: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$  und sei

$\sum b_i \circ q_i \circ b'_i$  eine duale Basis. Dann gilt für jedes  $z \in Z_B(A)$

$$\sum b_i z \circ q_i \circ b'_i = \sum b_i \circ q_i \circ \nu(z) b'_i.$$

Beweis: Für  $b, b' \in B$  ist  $\psi'(\nu(z)b)(b') = (\psi \nu(z)b)(b') =$

$$\psi(\nu(z)bb') = \psi(bb'z) = (\psi b)(b'z) = \varphi'(b)(b'z) = (z\varphi'(b))(b'),$$

also  $\varphi'(v(z)b) = z\varphi'(b)$  . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha\left(\sum b_i \otimes q_i \otimes v(z)b'_i\right)(f) &= \sum f(b_i)q_i v(z)b'_i \\ &= v(z) \sum f(b_i)q_i b'_i \\ &= v(z)\varphi'^{-1}(f) \\ &= \varphi'^{-1}(zf) \\ &= \sum (zf)(b_i)q_i b'_i \\ &= \sum f(b_i z)q_i b'_i \\ &= \alpha\left(\sum b_i z \otimes q_i \otimes b'_i\right)(f) . \end{aligned}$$

Das impliziert schließlich

$$\sum b_i \otimes q_i \otimes v(z)b'_i = \sum b_i z \otimes q_i \otimes b'_i . //$$

Wir wollen jetzt Zusammenhänge zwischen Hopf-Algebren und P-Frobenius-Erweiterungen untersuchen. Dabei müssen wir beim Leser Vertrautheit mit einigen grundlegenden Tatsachen über Lokalisierungen voraussetzen. Der Antipodenabbildung  $S$  einer  $k$ -Hopf-Algebra  $H$  kommt in diesem Zusammenhang eine besondere Bedeutung zu. Daher beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Satz 3.10: Sei  $H$  eine endliche Hopf-Algebra. Dann ist  $S$  bijektiv.

Beweis: Da  $H$  als  $k$ -Modul endlich erzeugt und projektiv ist und da  $S$  ein  $k$ -Endomorphismus von  $H$  ist, genügt es zu zeigen, daß  $S$  surjektiv ist, wie man durch Lokalisieren leicht zeigen kann.

Ist nun  $k$  ein Körper, so ist wegen  $H^* \cong P(H^*) \otimes H$  aus Dimensionsgründen  $P(H^*) \cong k$  . Daher haben wir einen  $H$ -Rechts-Isomorphismus  $\bar{\Phi}: H \cong H^*$ , wobei wir auf die in Satz 2.15 gegebene  $H$ -Rechts-Modul-Struktur von  $H^*$  zu achten haben. Es ist also  $\bar{\Phi}(h)(h') = (\bar{\Phi}(1)h)(h') = \bar{\Phi}(1)(h'S(h))$  . Ist nun  $S(h) = 0$ , so ist  $\bar{\Phi}(h) = 0$  . Da  $\bar{\Phi}$  ein Isomorphismus ist, ist dann  $h = 0$

und  $S$  injektiv. Aus Dimensionsgründen ist dann  $S$  surjektiv.

Sei  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring. Dann existiert eine  $k$ -exakte Folge

$$H \xrightarrow{S} H \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Durch Lokalisieren und Übergang zum Restklassenkörper erhält man dann exakte Folgen

$$\begin{aligned} H_{\underline{m}} &\xrightarrow{S_{\underline{m}}} H_{\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}} \longrightarrow 0 , \\ H_{\underline{m}}/\underline{m}H_{\underline{m}} &\xrightarrow{S} H_{\underline{m}}/\underline{m}H_{\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}}/\underline{m}M_{\underline{m}} \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

Da für jeden Ring-Homomorphismus  $k \rightarrow k'$  aus einer  $k$ -Hopf-Algebra  $H$  eine  $k'$ -Hopf-Algebra  $H \otimes_k k'$  wird, ist  $H_{\underline{m}}/\underline{m}H_{\underline{m}}$  eine  $k/\underline{m}$ -Hopf-Algebra, also ist  $S$  surjektiv und  $M_{\underline{m}}/\underline{m}M_{\underline{m}} = 0$ . Da  $M_{\underline{m}}$  endlich erzeugt ist, ist  $M_{\underline{m}} = 0$ . Das gilt für alle maximalen Ideale  $\underline{m} \subseteq k$ . Daher ist  $M = 0$  und  $S$  surjektiv. //

Wir benötigen nun noch einige weitere Eigenschaften des Moduls  $P(H^*)$  für eine endliche Hopf-Algebra  $H$ . Zunächst beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.11: Seien  $k \rightarrow k'$  ein Homomorphismus von kommutativen Ringen,  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra und  $(H \otimes_k k')^*$  das Duale der endlichen  $k'$ -Hopf-Algebra  $H \otimes_k k'$  bezüglich  $k'$ . Dann ist

$$P(H^*) \otimes_k k' = P((H \otimes_k k')^*)$$

als Untermoduln von  $(H \otimes_k k')^*$ .

Beweis:  $H^* \ni h^* \mapsto \sum h^*_{(0)} S(h^*_{(1)}) \otimes h^*$  ist eine Projektion. Diese bleibt bei Grundring-Erweiterung eine Projektion. Das Bild der erweiterten Projektion ist das erweiterte Bild der Projektion. //

Satz 3.12: Sei  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra. Dann ist  $P(H^*)$  ein  $k$ - $k$ -Progenerator.

Beweis: Wegen Folgerung 2.11 ist  $P(H^*)$  endlich erzeugt und projektiv als  $k$ -Modul. Es sei  $\varphi$  der  $k$ -Homomorphismus

$$\varphi: P(H^*)^* \otimes P(H^*) \ni f \otimes x \longmapsto f(x) \otimes k.$$

Dann erhalten wir die exakte Folgen

$$P(H^*)^* \otimes P(H^*) \xrightarrow{\varphi} k \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$P(H_{\underline{m}}^*)^* \otimes P(H_{\underline{m}}^*) \xrightarrow{\varphi} k_{\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}} \longrightarrow 0$$

$$P(H_{\underline{m}/\underline{m}H_{\underline{m}}}^*)^* \otimes P(H_{\underline{m}/\underline{m}H_{\underline{m}}}^*) \xrightarrow{\varphi} k_{\underline{m}/\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}/\underline{m}} \longrightarrow 0,$$

für einen endlich erzeugten (zyklischen)  $k$ -Modul  $M$  und alle

maximalen Ideale  $\underline{m} \subseteq k$ . Da  $\dim(P(H_{\underline{m}/\underline{m}H_{\underline{m}}}^*)) = 1$  ist, ist  $M_{\underline{m}/\underline{m}} = 0$ , also  $M_{\underline{m}} = 0$  und  $M = 0$ . Das zeigt, daß  $P(H^*)$

ein Generator ist. Schließlich sei  $E = \text{Hom}_k(P(H^*), P(H^*))$ .  $E$

ist endlich erzeugter, projektiver  $k$ -Modul. Sei  $\varrho: k \longrightarrow E$

der natürliche Homomorphismus von  $k$  in  $E$ . Dann erhalten wir

exakte Folgen

$$k \xrightarrow{\varrho} E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$k_{\underline{m}} \xrightarrow{\varrho} E_{\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}} \longrightarrow 0$$

$$k_{\underline{m}/\underline{m}} \xrightarrow{\varrho} E_{\underline{m}/\underline{m}} \longrightarrow M_{\underline{m}/\underline{m}} \longrightarrow 0$$

für einen endlich erzeugten, projektiven  $k$ -Modul  $M$  und alle

maximalen Ideale  $\underline{m} \subseteq k$ . Aus Dimensionsgründen ist  $M_{\underline{m}/\underline{m}} = 0$ ,

also  $M_{\underline{m}} = 0$  und  $M = 0$ . Daher ist  $\varrho$  ein Epimorphismus. Da

$P$  ein Generator ist, ist  $P$  treu, denn  $ap = 0$  für alle  $p \in P$

und  $\sum f_i(p_i) = 1$  implizieren  $a = a \cdot 1 = a \sum f_i(p_i) = \sum f_i(ap_i)$

$= 0$ . Also ist  $\varrho$  ein Isomorphismus. //

Wir wissen jetzt, daß  $P(H^*)$  und damit auch  $P := P(H^*)^*$  für jede

endliche  $k$ -Hopf-Algebra  $k$ - $k$ -Progeneratoren sind. Damit können wir

jetzt den Hauptsatz dieses Paragraphen beweisen.

**Satz 3.13:** Sei  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra und  $P = P(H^*)^*$ .

Dann ist  $H$  eine  $P$ -Frobenius-Erweiterung von  $k$ .

Beweis: Nach Definition einer endlichen Hopf-Algebra ist  ${}_k H$  endlich erzeugt und projektiv. Sei  $\tilde{\Phi}: P(H^*) \otimes H \cong H^*$  der Isomorphismus aus Folgerung 2.16. Sei  $\Psi: H \cong \text{Hom}_k(H, P)$  definiert durch  $\Psi(h)(h')(q) := \tilde{\Phi}(q \otimes h)(h')$  für  $h, h' \in H$  und  $q \in P(H^*)$ .  $\Psi$  ist ein Isomorphismus, da  ${}_k H$  und  ${}_k P$  endlich erzeugt und projektiv sind und  $P = P(H^*)^*$  gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \Psi(h)(h')(q) &= \tilde{\Phi}(q \otimes h)(h') = (\tilde{\Phi}(q \otimes 1)h)(h') = \tilde{\Phi}(q \otimes 1)(h'S(h)) \\ &= \Psi(1)(h'S(h))(q) \end{aligned}$$

gilt  $\Psi(h)(h') = \Psi(1)(h'S(h))$ . Also ist  $\Psi(S^{-1}(h))(h') = \Psi(1)(h'h) = \Psi S^{-1}(1)(h'h)$ . Damit ist  $\Psi S^{-1}: H \rightarrow \text{Hom}(H, P)$  ein  $H$ - $k$ -Isomorphismus, der Frobenius-Isomorphismus, den wir in den weiteren Betrachtungen verwenden wollen. //

Folgerung 3.14: Für den Frobenius-Homomorphismus  $\psi: H \rightarrow P$  gilt

$$\sum h_{(1)} \otimes \psi(h_{(2)}) = 1 \otimes \psi(h) \quad \text{für alle } h \in H.$$

Beweis: Nach Definition von  $\tilde{\Phi}$  gilt für alle  $h \in H, q \in P(H^*) \subseteq H^*$ ,  $q: H \rightarrow k$

$$\psi(h)(q) = \Psi S^{-1}(1)(h)(q) = \Psi(1)(h)(q) = \tilde{\Phi}(q \otimes 1)(h) = q(h).$$

Für  $q \in P(H^*), h^* \in H^*$  und  $h \in H$  gilt nach der im Beweis von Satz 2.15 entwickelten Formel  $(h^*q)(h) = q(h)h^*(1) = \sum h^*(h_{(1)})q(h_{(2)})$ , also  $h^*(\sum h_{(1)}q(h_{(2)})) = h^*(q(h)1)$ . Da  $H$  endlich ist, gilt

$$\sum h_{(1)}q(h_{(2)}) = q(h)1 \quad \text{für alle } h \in H. \text{ Identifizieren wir}$$

$$H \otimes P = \text{Hom}(P(H^*), H), \text{ so gilt } (\sum h_{(1)} \otimes \psi(h_{(2)}))(q) =$$

$$\sum h_{(1)}q(h_{(2)}) = q(h)1 = 1q(h) = (1 \otimes \psi(h))(q) \quad \text{für alle } q \in P(H^*)^*. //$$

Wir werden im folgenden häufig  $P(H^*)$  mit  $Q$  bezeichnen. Da  $H$  als  $H$ -Links-Modul frei ist, ist auch  $\text{Hom}(H, P)$  freier  $H$ -Links-Modul mit dem Erzeugenden-System  $\{\psi\}$ . Es ist  $\text{Hom}(H, P) \otimes Q \cong H^*$  als  $H$ -Links-Moduln. Insbesondere ist bei Identifizierung dieser beiden Moduln  $\varepsilon = \sum N_i \psi \otimes q_i$  mit einem eindeutig bestimmten

Element  $\sum N_i \circ q_i = N \circ H \circ Q$ . Das Element  $N$  wird in Anlehnung an die klassische Theorie (Links-Norm) genannt. Wir vermerken die Formel

$$\sum \psi(hN_i)q_i = \varepsilon(h) \quad \text{für alle } h \in H.$$

Für die entsprechend gebildete Rechts-Norm  $N' \in H \circ Q$  gilt

$$\sum q_i' \psi(N_i' h) = \varepsilon(h) \quad \text{für alle } h \in H.$$

Aus der durch  $P$  definierten Morita-Auto-Äquivalenz von  $k$ -Mod haben wir  $k \cong P \circ Q$  und  $k \cong Q \circ P$ . Weiter haben wir einen Isomorphismus  $P \circ Q \ni p \circ q \mapsto q \circ p \in Q \circ P$ . Damit haben wir einen  $k$ -Automorphismus  $k \cong P \circ Q \cong Q \circ P \cong k$  mit  $1 \mapsto x$ .

Offenbar muß  $x \in k$  invertierbar sein mit dem inversen Element  $y \in k$ . Wegen  $1 = \sum p_i q_i \Rightarrow \sum q_i p_i = x$  erhalten wir für alle  $p \circ q \in P \circ Q$  die Gleichung  $pq = yqp$ . Insbesondere gilt dann

$$\varepsilon(h) = \sum \psi(hN_i)q_i = \sum yq_i \psi(hN_i) = \sum yq_i \psi(v(N_i)h)$$

für alle  $h \in H$ , wobei  $v$  der Nakayama-Automorphismus von  $Z_H(k) = H$  ist. Damit erhalten wir

Lemma 3.15: Für den Zusammenhang zwischen Rechts- und Links-Norm  $N$  bzw.  $N'$  einer endlichen Hopf-Algebra gilt

$$N' = \sum q_i' \circ N_i' = \sum yq_i \circ v(N_i).$$

Wir berechnen jetzt genauer die in Satz 3.7 für  $P$ -Frobenius-Erweiterungen angegebene duale Basis für eine endliche Hopf-Algebra.

Lemma 3.16: Sei  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra mit der Links-Norm  $\sum N_i \circ q_i$ . Dann hat  $H$  die duale Basis  $\sum N_{i(2)} \circ q_i \circ S^{-1}(N_{i(1)})$ .

Beweis: Nach Konstruktion der dualen Basis in 3.7 ist zu zeigen  $\varphi^{-1}(\psi h) = h = \sum (\psi h)_{N_{i(2)}} q_i S^{-1}(N_{i(1)})$ . Wegen Folgerung 3.14 gilt

$$\sum (\psi h)_{N_{i(2)}} q_i S^{-1}(N_{i(1)}) = \sum \psi(hN_{i(2)}) q_i S^{-1}(N_{i(1)})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum h_{(1)} N_{i(2)} \psi(h_{(2)} N_{i(3)}) q_i S^{-1}(N_{i(1)}) \\
 &= \sum h_{(1)} S^{-1} S(N_{i(2)}) S^{-1}(N_{i(1)}) \psi(h_{(2)} N_{i(3)}) q_i \\
 &= \sum h_{(1)} S^{-1}(N_{i(1)}) S(N_{i(2)}) \psi(h_{(2)} N_{i(3)}) q_i \\
 &= \sum h_{(1)} \varepsilon(N_{i(1)}) \psi(h_{(2)} N_{i(2)}) q_i \\
 &= \sum h_{(1)} \psi(h_{(2)} N_i) q_i \\
 &= \sum h_{(1)} \varepsilon(h_{(2)}) \\
 &= h . \quad //
 \end{aligned}$$

Satz 3.17: Sei  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra mit dem Nakayama-Automorphismus  $\nu$  von  $H$  und der Links-Norm  $N = \sum N_i \circ q_i$ .

Dann gilt

$$\nu(h) = \sum S^{-2}(h_{(1)}) \psi(N_i h_{(2)}) q_i \quad \text{für alle } h \in H .$$

Beweis: Wir zeigen  $S^2 \nu(h) = \sum h_{(1)} \psi(N_i h_{(2)}) q_i$ .

$$\begin{aligned}
 S^2 \nu(h) &= S^2(\nu(h) 1) \\
 &= S^2(\nu(h) \sum \psi(N_{i(2)}) q_i S^{-1}(N_{i(1)})) \quad (3.7 \text{ und } 3.16) \\
 &= S^2(\sum \psi(N_{i(2)}) q_i \nu(h) S^{-1}(N_{i(1)})) \\
 &= S^2(\sum \psi(N_{i(2)} h) q_i S^{-1}(N_{i(1)})) \quad (3.9) \\
 &= \sum S(N_{i(1)}) \psi(N_{i(2)} h) q_i \\
 &= \sum S(N_{i(1)}) N_{i(2)} h_{(1)} \psi(N_{i(3)} h_{(2)}) q_i \quad (3.14) \\
 &= \sum h_{(1)} \psi(N_i h_{(2)}) q_i . \quad //
 \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, daß man aus der Diagonalen und den Eigenschaften einer  $P$ -Frobenius-Erweiterung die Antipodenabbildung einer Hopf-Algebra zurück gewinnen kann.

Satz 3.18: Sei  ${}^k H$  eine Bialgebra und eine  $P$ -Frobenius-Algebra mit einem Frobenius-Homomorphismus  $\psi$ , für den gilt

$$\sum h_{(1)} \circ \psi(h_{(2)}) = 1 \circ \psi(h) \quad \text{für alle } h \in H .$$

Dann ist  $H$  eine  $k$ -Hopf-Algebra mit der Antipode

$$S(h) := \sum N_{i(1)} \psi(h N_{i(2)}) q_i .$$



Beweis: Wegen  $\sum h_{(1)} S(h_{(2)}) = \sum h_{(1)} N_{i(1)} \psi(h_{(2)} N_{i(2)}) q_i =$   
 $\sum \psi(h N_i) q_i = \eta \varepsilon(h)$  gilt  $1 * S = \eta \varepsilon$ . Der Homomorphismus

$$\text{Hom}(H, H) \ni f \longmapsto f * S \in \text{Hom}(H, H)$$

ist ein Epimorphismus wegen  $f = f * \eta \varepsilon = f * (1 * S) = (f * 1) * S$ .

Da  $\text{Hom}(H, H)$  ein endlich erzeugter projektiver  $k$ -Modul ist, ist der Homomorphismus  $f \longmapsto f * S$  sogar ein Isomorphismus mit der inversen Abbildung  $f \longmapsto f * 1$ . Also gilt auch  $S * 1 = \eta \varepsilon$ . //

§ 4. Beispiele für Bialgebren und Hopf-Algebren

4.1: p-dimensionale Hopf-Algebren über einem Körper k der Charakteristik p :

- a)  $H = k[x]/(x^p) = k[y]/(y^{p+1})$  mit  $y = x^{-1}$  und  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$  bzw.  $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y + 1 \otimes 1$  ist eine Hopf-Algebra, die universelle Hülle einer p-Lie-Algebra  $kx$  mit  $x^{[p]} = 0$ . Allgemein werden die universellen Hüllen von p-Lie-Algebren in 4.4 besprochen werden. In diesem Beispiel ist  $S(x) = -x$ ,  $\varepsilon(x) = 0$  und die duale Hopf-Algebra ist  $H^* = k[z]/(z^p)$  mit der Diagonalen  $\Delta(z) = z \otimes 1 + 1 \otimes z$  und der Operation  $z(x) = 1$ . Daraus und aus den Gesetzen über die Multiplikation und die Komultiplikation lassen sich alle übrigen Operationen  $z^i(x^j)$  angeben. Dabei ist  $z^i(x^j) = j! \delta_{ij}$ , d.h.  $\{1, z, z^2, \dots, z^{p-1}\}$  ist duale Basis zu  $\{1, x, (1/2!)x^2, \dots, (1/(p-1)!)x^{p-1}\}$ . Für  $\psi(x^i) = \delta_{i,p-1}$  ist  $h^* \psi(x^i) = \sum \binom{i}{j} h^*(x^j) \psi(x^{i-j}) = h^*(1) \delta_{i,p-1} = h^*(1) \psi(x^i)$ , d.h.  $\psi \circ H^* H^* = P(H^*)$ . Identifizieren wir  $k \ni a \mapsto a \psi \in P(H^*)$ , so ist  $\psi: H \rightarrow k$  Frobenius-Homomorphismus zu  $H$ . Wegen  $(x^{p-1} \psi)(x^i) = \psi(x^{p-1+i}) = \varepsilon(x^i)$  ist die Norm  $N = x^{p-1}$ . Schließlich ist wegen  $\Delta(N) = \sum \binom{p-1}{i} x^i \otimes x^{p-1-i}$  eine duale Basis  $\sum \binom{p-1}{i} x^i \otimes (-x)^{p-1-i}$ .
- b)  $H = k[x]/(x^p - 1) = k[y]/(y^p)$  mit  $y = x^{-1}$  und  $\Delta(x) = x \otimes x$  bzw.  $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y + y \otimes y$  ist eine Hopf-Algebra, der Gruppenring der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Allgemein werden die Gruppenringe in 4.2 besprochen werden. In diesem Beispiel ist  $S(x) = x^{p-1} = x^{-1}$  und  $\varepsilon(x) = 1$ . Die duale Hopf-Algebra ist  $k[z]/(z^p - z)$  mit der Diagonalen  $\Delta(z) = z \otimes 1 + 1 \otimes z$  und der Operation  $(z^i, x^j) = j^i$ . Der Frobenius-Homomorphismus  $\psi: H \rightarrow k$  ist  $\psi(x^i) = \delta_{0,i}$  und die Norm ist  $\sum x^i$ . Eine duale Basis ist schließlich  $\sum x^i \otimes x^i$ . Aus 2.5.3 und 3.17 folgt, daß der Nakayama-Automorphismus  $id_H$  ist.

c)  $H = k[x]/(x^p - x) = k[y]/(y^p - y)$  mit  $y = x - 1$  und  $\Delta(x) = x \circ 1 + 1 \circ x$  bzw.  $\Delta(y) = y \circ 1 + 1 \circ y + 1 \circ 1$  ist eine Hopf-Algebra, die universelle Hülle einer p-Lie-Algebra  $kx$  mit  $x^{[p]} = x$ . Weiter ist  $S(x) = -x$  und  $\varepsilon(x) = 0$ . Die duale Hopf-Algebra ist  $k[z]/(z^p - 1)$  mit der Diagonalen  $\Delta(z) = z \circ z$  und der Operation  $(z^i, x^j) = i^j$ . Der Frobenius-Homomorphismus  $\psi: H \rightarrow k$  ist  $\psi(x^i) = \delta_{i, p-1}$ . Die Norm ist  $x^{p-1} - 1$  und eine duale Basis ist  $\sum \binom{p-1}{i} x^i \circ (-x)^{p-1-i} - 1 \circ 1$ . Der Nakayama-Automorphismus ist die Identität.

d)  $H = k[x]/(x^p - x) = k[y]/(y^p - y)$  mit  $y = x - 1$  und  $\Delta(x) = x \circ x$  bzw.  $\Delta(y) = y \circ y + y \circ 1 + 1 \circ y$  ist nur eine Bialgebra.

Sie besitzt keine Antipode. Die duale Bialgebra ist  $H^* = k1 \circ kz_1 \circ \dots \circ kz_{p-1}$  mit  $z_i z_j = \delta_{ij} z_j$  und  $\Delta(1) = 1 \circ 1$  und  $\Delta(z_i) = \sum_{j=0}^i z_j \circ z_{i-j}$ . Die Operation ist  $z_i(x^j) = \delta_{ij}$ . Selbstverständlich hat auch  $H^*$  keine Antipode.

Jedoch ist  $H$  genau wie in Beispiel c) eine  $k$ -Frobenius-Erweiterung von  $k$  mit dem Frobenius-Homomorphismus  $\psi: H \rightarrow k$   $\psi(x^i) = \delta_{i, p-1}$ . Wegen Satz 3.18 kann  $\psi$  jedoch nicht die Bedingung aus 3.14 erfüllen. Die Norm ist  $x^{p-1} - 1$ . Eine duale Basis ist  $\sum \binom{p-1}{i} x^i \circ (-x)^{p-1-i} - 1 \circ 1$ . Der Nakayama-Automorphismus ist die Identität.

#### 4.2: Gruppenringe:

Sei  $G$  ein Monoid und  $k$  ein kommutativer Ring. Sei  $kG$  der freie  $k$ -Modul mit freiem Erzeugendensystem  $G$ , d.h. zu jedem  $k$ -Modul  $M$  und zu jeder Abbildung  $f: G \rightarrow M$  gibt es genau einen  $k$ -Homomorphismus  $g: kG \rightarrow M$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{c} & kG \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & M \end{array}$$

kommutiert. Die Multiplikation von  $G$  läßt sich eindeutig linear auf  $kG$  fortsetzen. Ist dann in der obigen Situation  $M$  eine

**k-Algebra** und  $f$  verträglich mit der Multiplikation in  $G$  bzw.  $M$ , so ist  $g$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus. Man braucht also  $k$ -Algebren-Homomorphismen von  $kG$  in eine  $k$ -Algebra  $A$  nur auf dem Erzeugendensystem  $G$  so zu definieren, daß die Multiplikation in  $G$  und das neutrale Element erhalten bleiben, dann existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem  $k$ -Algebren-Homomorphismus auf ganz  $kG$ . Wir definieren

$$\Delta: kG \longrightarrow kG \otimes_k kG \text{ durch } \Delta(g) = g \otimes g$$

$$\varepsilon: kG \longrightarrow k \text{ durch } \varepsilon(g) = 1.$$

Dann ist  $kG$  eine Bialgebra, denn die nachzuweisenden Gleichungen sind für Elemente aus  $G$  erfüllt, wie man leicht verifiziert.

Ebenso sieht man, daß  $kG$  kokommutativ ist. Ist  $G$  eine Gruppe, so wird  $kG$  eine Hopf-Algebra mit der Antipode

$$S: kG \longrightarrow kG \text{ definiert durch } S(g) = g^{-1}.$$

Ist  $G$  ein Monoid und  $kG$  eine Hopf-Algebra, so ist  $G$  eine Gruppe wegen  $gS(g) = \sum g_{(1)}S(g_{(2)}) = \eta\varepsilon(g) = 1 \otimes g$ . Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so ist  $H$  eine endliche Hopf-Algebra. Der Homomorphismus  $\psi: H \longrightarrow k$  mit  $\psi(g) = \delta_{g,1}$  erfüllt die Gleichungen

$$\psi(g) = \sum g_{(1)}\psi(g_{(2)}) = g\psi(g), \text{ also } \psi \in P(H^*), \text{ und } (g\psi)(g') =$$

$$\psi(g'g) = \delta_{g'g,1} = \delta_{g',g^{-1}}, \text{ also ist } \{g^{-1}\} \text{ duale Basis zu}$$

$\{g\}$ . Daher ist  $\psi$  Frobenius-Homomorphismus für  $H$ . Die Norm

$$\text{ist } \sum_{g \in G} g \text{ wegen } (N\psi)(g') = \psi(g'N) = \psi\left(\sum g'g\right) = \psi\left(\sum g\right) = 1$$

=  $\varepsilon(g')$ . Als duale Basis erhalten wir nach 3.16 das Element

$$\sum g \otimes g^{-1}. \text{ Da die Norm } N \text{ ein Element im Zentrum von } H \text{ ist,}$$

und da  $S^2 = \text{id}_H$  ist, ist der Nakayama-Automorphismus die

Identität.

#### 4.3: Die universelle Hülle einer Lie-Algebra.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über einem Körper  $k$ . Jede assoziative Algebra  $A$  kann als Lie-Algebra aufgefaßt werden vermöge der

Multiplikation  $[a,b] = ab - ba$ . Zu  $\mathfrak{g}$  existiert eine assoziative

Algebra  $U(\mathfrak{g})$  zusammen mit einem Lie-Algebren-Homomorphismus  $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ , so daß für jede Algebra  $A$  und jeden Lie-Algebren-Homomorphismus  $f: \mathfrak{g} \rightarrow A$  genau ein Algebren-Homomorphismus  $g: U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  so existiert, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad} & U(\mathfrak{g}) \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

kommutiert. Man braucht also Algebren-Homomorphismen von  $U(\mathfrak{g})$  in eine Algebra  $A$  nur auf der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und dort nur als Lie-Algebren-Homomorphismus zu definieren, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einem Algebren-Homomorphismus auf  $U(\mathfrak{g})$ . Wir definieren

$$\Delta: U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_k U(\mathfrak{g}) \quad \text{durch} \quad \Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g$$

$$\varepsilon: U(\mathfrak{g}) \rightarrow k \quad \text{durch} \quad \varepsilon(g) = 0.$$

Dann ist  $U(\mathfrak{g})$  eine kokommutative  $k$ -Bialgebra.  $U(\mathfrak{g})$  trägt sogar die Struktur einer Hopf-Algebra durch die Antipode

$$S: U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \quad \text{mit} \quad S(g) = -g.$$

Ist  $\mathfrak{g} = 0$ , so ist  $U(\mathfrak{g}) = k$ , also eine endliche Hopf-Algebra.

Ist  $\mathfrak{g} \neq 0$ , so ist  $\dim(U(\mathfrak{g})) = \infty$ , also kann  $U(\mathfrak{g})$  keine endliche Hopf-Algebra und damit auch keine  $P$ -Frobenius-Algebra sein.

#### 4.4: Die universelle Hülle einer $p$ -Lie-Algebra

Sei  $k$  ein Ring mit der Primzahl-Charakteristik  $p > 0$ . In  $k[x, y]$  gelten

$$(1) \quad (x - y)^p = x^p - y^p$$

$$(2) \quad (x - y)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-1-i},$$

$$\text{denn} \quad \sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-1-i} (x - y) = \sum_{i=0}^{p-1} x^{i+1} y^{p-1-i} - \sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-i} =$$

$$\sum_{i=1}^p x^i y^{p-i} - \sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-i} = x^p - y^p = (x - y)^p = (x - y)^{p-1} (x - y).$$

Diese Rechnung spielt sich schon in  $\mathbb{Z}_p[x, y]$  ab. Da das ein

Integritätsring ist, gilt (2). Für eine  $k$ -Algebra  $A$  und  $b \in A$

sei  $b_L, b_R \in \text{Hom}(A, A)$  definiert durch  $b_L(a) = ba$  und  $b_R(a) = ab$

für alle  $a \in A$ . Da in  $\text{End}_k(A)$  gilt  $b_L b_R = b_R b_L$ , gelten (1) und (2) für  $b_L$  und  $b_R$ . Es ist  $[b, a] = b_L(a) - b_R(a) = (b_L - b_R)(a)$ , oder  $\text{ad}(b) = b_L - b_R$ . Aus (1) und (2) folgt dann

$$(3) \text{ad}(b)^p = \text{ad}(b^p)$$

$$(4) \text{ad}(b)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} b_L^i b_R^{p-1-i}.$$

Wir untersuchen jetzt die Gleichung

$$(5) (ax + b)^p = a^p x^p + b^p + \sum_{i=0}^{p-1} s_i(a, b) x^i$$

in  $A[x]$ . Durch Ableitung bezüglich  $x$  erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{p-1} (ax + b)^i a(ax + b)^{p-i-1} = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a, b) x^{i-1}.$$

Also folgt aus (4)

$$(6) \text{ad}(ax + b)^{p-1}(a) = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a, b) x^{i-1},$$

was zur Bestimmung der  $s_i(a, b)$  dienen kann. Setzt man  $x = 1$  in

(5) ein, so erhält man

$$(7) (a + b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a, b).$$

Wegen (6) können die  $s_i(a, b)$  nur mit Hilfe der Lie-Operationen in  $A$  geschrieben werden. Daher können wir jetzt die folgende Definition geben:

Eine p-Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  über  $k$  zusammen mit einer zusätzlichen Operation  $\mathfrak{g} \ni a \mapsto a^{[p]} \in \mathfrak{g}$  mit

$$1) (\lambda a)^{[p]} = \lambda^p a^{[p]} \text{ für } \lambda \in k, a \in \mathfrak{g},$$

$$2) (\text{ad}(b))^p = \text{ad}(b^{[p]}) \text{ für } b \in \mathfrak{g},$$

$$3) (a + b)^{[p]} = a^{[p]} + b^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a, b).$$

Man kann zeigen, daß

$$s_1(a_0, a_1) = -\frac{1}{1} \sum_t [a_{t(1)}, \dots, [a_{t(p-1)}, a_1], \dots]$$

mit  $t: \{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{0, 1\}$  und  $t$  nimmt  $i$ -mal den Wert 0 an.

Wir haben oben gezeigt, daß eine Algebra  $A$  als p-Lie-Algebra betrachtet werden kann mit  $a^{[p]} := a^p$ . Zu einer p-Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  existiert eine Algebra  $U_p(\mathfrak{g})$  (z.B.  $U(\mathfrak{g})/(a^{[p]} - a^p)$ ) zusammen mit einem p-Lie-Homomorphismus  $\mathfrak{g} \rightarrow U_p(\mathfrak{g})$ , so daß für jede Algebra  $A$  und jeden p-Lie-Homomorphismus  $f: \mathfrak{g} \rightarrow A$  genau ein Algebren-Homomorphismus  $g: \mathfrak{g} \rightarrow A$  so existiert, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & U_p(\mathfrak{g}) \\ & \searrow f & \downarrow \mathfrak{g} \\ & & A \end{array}$$

kommutiert. Man braucht also Algebren-Homomorphismen von  $U_p(\mathfrak{g})$  in eine Algebra  $A$  nur auf der  $p$ -Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und dort nur als  $p$ -Lie-Algebren-Homomorphismus zu definieren, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einem Algebren-Homomorphismus auf  $U_p(\mathfrak{g})$ . Wir definieren eine Hopf-Algebren-Struktur auf  $U_p(\mathfrak{g})$  in gleicher Weise wie in 4.3 auf  $U(\mathfrak{g})$ .

Ist  $k$  ein Körper und  $\mathfrak{g}$  endlich-dimensional, dann ist auch  $U_p(\mathfrak{g})$  endlich-dimensional und trägt damit die Struktur einer  $k$ -Frobenius-Erweiterung.

§ 5. Moduln über Hopf-Algebren

Wir untersuchen in diesem Abschnitt zunächst die einfachsten nicht-trivialen Moduln über Hopf-Algebren. Sei dazu  $k$  ein Körper und  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra. Ein (als  $k$ -Modul) eindimensionaler  $H$ -Modul wird häufig als eindimensionale Darstellung bezeichnet. Zwei Darstellungen heißen nicht-äquivalent, wenn die zugehörigen Moduln nicht-isomorph sind.

Lemma 5.1: Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der nicht-äquivalenten eindimensionalen Darstellungen und  $k$ -Alg( $H, k$ ) .

**Beweis:** Bekanntlich ist ein  $H$ -Modul  $M$  gegeben durch einen  $k$ -Modul  $M$  zusammen mit einem  $k$ -Algebren-Homomorphismus  $H \rightarrow \text{Hom}_k(M, M)$  . Durch alle möglichen  $k$ -Algebren-Homomorphismen  $H \rightarrow \text{Hom}_k(k, k)$  sind daher alle möglichen  $H$ -Modul-Strukturen auf  $k$  gegeben. Man überzeugt sich leicht, daß man so nur nicht-äquivalente  $H$ -Modul-Strukturen erhält. Sind nämlich  $\varphi, \psi \in k\text{-Alg}(H, \text{Hom}_k(k, k))$  gegeben und  $k \cong k$  als  $H$ -Moduln, so ist der Isomorphismus gegeben durch  $k \ni x \mapsto xy \in k$  für ein festes  $y \in k$  . Also ist  $(\varphi(h)x)y = \psi(h)(xy)$  , woraus  $\varphi(h) = \psi(h)$  folgt. Schließlich beachte man  $k \cong \text{Hom}_k(k, k)$  . //

Wir definieren jetzt auf dem  $k$ -Modul  $L \otimes_k M$  eine  $H$ -Modul-Struktur für eine Bialgebra bzw. Hopf-Algebra  $H$  , wenn  $L$  und  $M$  schon  $H$ -Moduln sind. Es sei dann nämlich  $h(l \otimes m) := \sum h_{(1)}l \otimes h_{(2)}m$  . Man verifiziert leicht, daß dadurch  $L \otimes M$  ein  $H$ -Modul wird. Das folgt auch aus der Tatsache, daß  $H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{\zeta} \text{Hom}(L, L) \otimes \text{Hom}(M, M) \rightarrow \text{Hom}(L \otimes M, L \otimes M)$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus ist.

In ähnlicher Weise kann man auf  $\text{Hom}(L, M)$  für  $H$ -Moduln  $L$  und  $M$



zwei verschiedene H-Modul-Strukturen definieren durch

$$(hf)(1) = \sum h_{(1)} f(S(h_{(2)}))1 \text{ bzw. } (hf)(1) = \sum h_{(2)} f(S(h_{(1)}))1).$$

Die so definierten Strukturen deuten wir mit der Schreibweise

$\Delta \text{Hom}(L, M)$  bzw.  $\Delta, \text{Hom}(L, M)$  an. Ebenso führen wir für die auf  $L \otimes M$  definierte H-Modul-Struktur die Schreibweise  $\Delta L \otimes M$  ein.

Satz 5.2: Sei H eine Hopf-Algebra über einem Körper k. Die Menge der eindimensionalen Darstellungen von H bildet eine Gruppe unter der Multiplikation  $(L, M) \mapsto \Delta L \otimes M$ .  $k\text{-Alg}(H, k)$  bildet eine Gruppe unter  $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma * \tau$ . Diese beiden Gruppen sind unter der in 5.1 gegebenen Zuordnung zueinander isomorph.

Beweis: Seien  $\sigma : H \rightarrow \text{Hom}(k, k)$  und  $\tau : H \rightarrow \text{Hom}(k, k)$  eindimensionale Darstellungen. Dann gehört zu  $\Delta L \otimes M$  die eindimensionale Darstellung  $H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{\sigma \otimes \tau} \text{Hom}(k \otimes k, k \otimes k) \cong k$ , also  $\sigma * \tau$ . Damit ist die in 5.1 gegebene Bijektion ein Isomorphismus. Weiter ist  $k\text{-Alg}(H, k)$  unter  $*$  ein Monoid. Das inverse Element zu  $\sigma$  ist  $\sigma \circ S$  wegen  $(\sigma * \sigma \circ S)(h) = \sum \sigma(h_{(1)}) \circ S(h_{(2)}) = \sigma(\sum h_{(1)} S(h_{(2)})) = \sigma(\epsilon(h)1) = \eta \epsilon(h)$ .

Mit Hilfe dieses Satzes wollen wir in einigen Beispielen die Gruppe der eindimensionalen Darstellungen explizit berechnen.

Sei  $H = kG$  für eine Gruppe  $G$ . Dann ist wegen der universellen Eigenschaft des Gruppenringes  $k\text{-Alg}(kG, k) \cong \text{Grp}(G, k^*)$ , der Menge der Gruppenhomomorphismen von  $G$  in die multiplikative Gruppe des Körpers  $k$ . Sei  $p$  die Charakteristik von  $k$  und sei  $m$  der Exponent von  $G$ , d.h.  $m$  ist minimal mit der Eigenschaft  $g^m = 1$  für alle  $g \in G$ . Sei  $p$  kein Teiler von  $m$  und besitze  $k$  eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel. Dann ist, falls  $G$  abelsch und endlich ist,  $\text{Grp}(G, k^*) \cong G$ . Ist der Exponent von  $G$  gleich  $p$ , so gibt es nur den trivialen Homomorphismus  $G \rightarrow k^*$ , also

gibt es nur die triviale Darstellung  $\varepsilon: kG \rightarrow k$  als eindimensionale Darstellung.

Sei  $H = U_p(\mathfrak{g})^*$  für eine endlich-dimensionale  $p$ -Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist  $k\text{-Alg}(U_p(\mathfrak{g})^*, k) \subseteq \text{Hom}(U_p(\mathfrak{g})^*, k) = U_p(\mathfrak{g})$ . Nun gilt allgemein für eine endliche Hopf-Algebra  $H$ , daß  $f \in H^*$  ein Algebren-Homomorphismus von  $H$  in  $k$  ist genau dann, wenn  $f(hh') = f(h)f(h')$  und  $f(1) = 1$  genau dann, wenn  $\Delta'(f) = f \otimes f$  und  $\varepsilon'(f) = 1$  sind, wobei  $\Delta'$  und  $\varepsilon'$  zur Koalgebren-Struktur von  $H^*$  gehören. Bei  $p$ -Lie-Algebren und ihren universellen Hüllen kann man durch Angabe einer Basis und durch Koeffizientenvergleich zeigen, daß nur  $1 \in U_p(\mathfrak{g})$  die Eigenschaft  $\Delta(f) = f \otimes f$  und  $\varepsilon(f) = 1$  erfüllt. Daher gibt es nur die triviale eindimensionale Darstellung von  $U_p(\mathfrak{g})^*$ .

Sei  $H = kG^*$  für eine endliche Gruppe  $G$ . Dann ist  $k\text{-Alg}(H, k) \subseteq \text{Hom}(H, k) = kG$ . In  $kG$  haben genau die Elemente von  $G$  die Eigenschaft  $\Delta(f) = f \otimes f$  und  $\varepsilon(f) = 1$ . Also ist  $k\text{-Alg}(H, k) \cong G$ .

Satz 5.3: Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $H$  eine endliche kommutative halbeinfache Hopf-Algebra. Dann sind alle einfachen  $H$ -Moduln eindimensional und es gibt genau  $n = \dim_k H$  nicht-äquivalente eindimensionale Darstellungen.

**Beweis:** Aus der Theorie der halbeinfachen Ringe weiß man, daß  $H \cong k \times k \times \dots \times k$  als Ring gilt. Dieser Ring hat aber genau  $n = \dim_k H$  nicht-isomorphe einfache Moduln, nämlich die  $n$  Komponenten des Ringes. //

Wir wollen jetzt einige Tatsachen über projektive und injektive Moduln über einer Hopf-Algebra entwickeln, die uns dann später

die Möglichkeit geben zu bestimmen, ob eine Hopf-Algebra halbeinfach ist. Wir wollen die Theorie jedoch in einem allgemeinen Rahmen halten und den Grundring  $k$  zunächst beliebig wählen. Daher ist es günstiger, relativ projektive bzw. injektive Moduln zu betrachten.

Definition 5.4: Sei  $A \rightarrow B$  ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus. Eine Folge von  $B$ -Moduln und  $B$ -Homomorphismen

$$\dots M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \dots$$

heißt  $(B,A)$ -exakt oder relativ exakt, wenn  $\text{Bi}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$  ist und  $A$ -direkter Summand von  $M_{i+1}$  ist für alle  $i$ .

Ein  $B$ -Modul  $P$  heißt  $(B,A)$ -projektiv oder relativ projektiv, wenn für jede  $(B,A)$ -exakte Folge  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  die induzierte Folge

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(P, M') \rightarrow \text{Hom}_B(P, M) \rightarrow \text{Hom}_B(P, M'') \rightarrow 0$$

exakt ist.

Ein  $B$ -Modul  $I$  heißt  $(B,A)$ -injektiv oder relativ injektiv, wenn für jede  $(B,A)$ -exakte Folge  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  die induzierte Folge

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M'', I) \rightarrow \text{Hom}_B(M, I) \rightarrow \text{Hom}_B(M', I) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Man beachte: Ist  $A$  ein halbeinfacher Ring, so ist jede  $B$ -exakte Folge auch  $(B,A)$ -exakt. Daher stimmen die  $B$ -projektiven und die  $(B,A)$ -projektiven Moduln überein. Entsprechendes gilt für die injektiven Moduln. Allgemein gilt: jede  $(B,A)$ -exakte Folge ist  $B$ -exakt. Daher ist jeder  $B$ -projektive bzw.  $B$ -injektive Modul auch  $(B,A)$ -projektiv bzw.  $(B,A)$ -injektiv.

Lemma 5.5: a)  $B^P$  ist genau dann  $(B,A)$ -projektiv, wenn es einen  $A$ -Modul  $M$  gibt, so daß  $B^P$   $B$ -direkter Summand (bis auf Isomor-

phie) von  $B \otimes_A M$  ist.

b)  ${}_B I$  ist genau dann  $(B,A)$ -injektiv, wenn es einen  $A$ -Modul  $M$  gibt, so daß  ${}_B I$   $B$ -direkter Summand (bis auf Isomorphie) von  $\text{Hom}_A(.B,.M)$  ist.

Beweis: a) Sei  $E: 0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$  eine beliebige  $(B,A)$ -exakte Folge. Es ist  $\text{Hom}_B(.B \otimes_A M, -) \cong \text{Hom}_A(.M, \text{Hom}_B(.B, -)) \cong \text{Hom}_A(.M, -)$ . Da  $E$  als Folge von  $A$ -Moduln zerfällt, zerfällt auch  $\text{Hom}_A(.M, .E)$ . Damit ist  $B \otimes_A M$   $(B,A)$ -projektive. Wie bei projektiven Moduln zeigt man, daß jeder direkte Summand eines  $(B,A)$ -projektiven Moduls  $(B,A)$ -projektive ist.

Sei umgekehrt  $P$   $(B,A)$ -projektive. Dann ist  $B \otimes_A P \ni b \otimes p \xrightarrow{g} bp \in P$  ein  $B$ -Homomorphismus und hat den  $A$ -Schnitt  $P \ni p \mapsto 1 \otimes p \in B \otimes_A P$ . Damit haben wir eine  $(B,A)$ -exakte Folge  $0 \rightarrow X \rightarrow B \otimes_A P \rightarrow P \rightarrow 0$ . Da  $P$   $(B,A)$ -projektive ist, ist  $\text{id}_P \in \text{Hom}_B(P, P)$  Bild eines Homomorphismus  $f \in \text{Hom}_B(P, B \otimes_A P)$  bei der Verknüpfung mit  $g$ . Aus  $gf = \text{id}_P$  folgt, daß  $P$  bis auf Isomorphie  $B$ -direkter Summand von  $B \otimes_A P$  ist.

b) Es ist  $\text{Hom}_B(-, \text{Hom}_A(.B, .M)) \cong \text{Hom}_A(.B \otimes_B -, .M) \cong \text{Hom}_A(-, .M)$ . Da die  $(B,A)$ -exakte Folge  $E$  als Folge von  $A$ -Moduln zerfällt, zerfällt auch  $\text{Hom}_A(.E, .M)$ . Damit ist  $\text{Hom}_A(.B, .M)$   $(B,A)$ -injektiv. Wie bei injektiven Moduln zeigt man, daß jeder direkte Summand eines  $(B,A)$ -injektiven Moduls  $(B,A)$ -injektiv ist.

Sei umgekehrte  $I$   $(B,A)$ -injektiv. Dann ist

$$g: I \ni i \mapsto (b \mapsto bi) \in \text{Hom}_A(.B, .I)$$

ein  $B$ -Homomorphismus und hat die  $A$ -Retraktion

$$\text{Hom}_A(.B, .I) \ni f \mapsto f(1) \in I$$

Damit haben wir eine  $(B,A)$ -exakte Folge

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \text{Hom}_A(.B, .I) \longrightarrow Y \longrightarrow 0 .$$

Da  $I$   $(B, A)$ -injektiv ist, ist  $\text{id}_I \in \text{Hom}_B(I, I)$  Bild eines Homomorphismus  $f \in \text{Hom}_B(. \text{Hom}_A(.B, .I), .I)$  bei der Verknüpfung mit  $g$ . Aus  $fg = \text{id}_I$  folgt, daß  $I$  bis auf Isomorphie  $B$ -direkter Summand von  $\text{Hom}_A(.B, .I)$  ist. //

Satz 5.6: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$  und sei  $M$  ein  $B$ -Modul. Dann sind äquivalent:

- 1)  $M$  ist  $(B, A)$ -projektiv.
- 2)  $M$  ist  $(B, A)$ -injektiv.

Beweis: Die Abbildung

$B \otimes_A M \ni b \otimes m \longmapsto (\text{Hom}_A(B, .A) \ni f \longmapsto f(b)m \in M) \in \text{Hom}_A(. \text{Hom}_A(B, A), .M)$  ist in  $A$ -Moduln  $B$  ein funktorieller Homomorphismus. Für  $B = A$  ist sie ein Isomorphismus, also auch für endlich erzeugte, projektive  $A$ -Moduln. Da  $B$  endlich erzeugt und projektiv über  $A$  ist, ist also die obige Abbildung ein Isomorphismus. Daraus folgt

$$\begin{aligned} {}_B B \otimes_A M &\cong {}_B \text{Hom}_A(. \text{Hom}_A(B, .A), .M) \cong {}_B \text{Hom}_A(.Q \otimes_A \text{Hom}_A(.B, .P), .M) \cong \\ &\cong {}_B \text{Hom}_A(.B, . \text{Hom}_A(.Q, .M)) \cong {}_B \text{Hom}_A(.B, .P \otimes_A M) \end{aligned}$$

funktoriell in  $M$ . Nun ist  $B \otimes_A M$   $(B, A)$ -projektiv und  $\text{Hom}_A(.B, .P \otimes_A M)$  ist  $(B, A)$ -injektiv. Weiterhin ist für  $M = Q \otimes L$  auch  $B \otimes_A Q \otimes_A L \cong \text{Hom}_A(B, M)$ , so daß jeder Modul der Form  $B \otimes_A M$   $(B, A)$ -injektiv und jeder Modul der Form  $\text{Hom}_A(B, M)$   $(B, A)$ -projektiv ist. //

Definition 5.7: Sei  $B$  eine P-Frobenius-Erweiterung von  $A$ .

Seien  $L, M$   $B$ -Moduln. Der Homomorphismus

$$\text{Sp}: \text{Hom}_A(.M, .P \otimes_A L) \ni f \longmapsto (m \longmapsto \sum b_i q_i f(b_i' m)) \in \text{Hom}_B(.M, .L)$$

heißt Spur-Homomorphismus.  $\text{Sp}(f)$  ist  $B$ -linear wegen

$$\text{Sp}(f)(bm) = \sum b_i q_i f(b_i' bm) = \sum b b_i q_i f(b_i' m) = b \cdot \text{Sp}(f)(m) .$$

Hierbei ist  $\sum b_i \otimes q_i \otimes b_i'$  eine duale Basis der  $P$ -Frobenius-

Erweiterung.

Lemma 5.8: Seien  $h \in \text{Hom}_B(.M, .M')$ ,  $g \in \text{Hom}_A(.M', .P \circlearrowleft_A M')$  und  $f \in \text{Hom}_B(.M'', .M''')$  gegeben. Dann ist

$$\text{Sp}(P \circlearrowleft_A f \circ g \circ h) = f \circ \text{Sp}(g) \circ h .$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \text{Sp}(P \circlearrowleft_A f \circ g \circ h)(m) &= \sum b_i q_i P \circlearrowleft_A f \circ g \circ h(b_i' m) \\ &= \sum b_i q_i P \circlearrowleft_A f \circ g(b_i' h(m)) \\ &= \sum b_i f(q_i g(b_i' h(m))) \\ &= \sum f(b_i q_i g(b_i' h(m))) \\ &= f \circ \text{Sp}(g) \circ h(m) . // \end{aligned}$$

Satz 5.9: Sei  $B$  eine  $P$ -Frobenius-Erweiterung von  $A$ .  $B^M$  ist genau dann  $(B, A)$ -projektiv, wenn es ein  $h \in \text{Hom}_A(.M, .P \circlearrowleft_A M)$  so gibt, daß  $\text{Sp}(h) = \text{id}_M$  ist.

Beweis: Sei  $M$   $(B, A)$ -projektiv. Nach dem Beweis von Lemma 5.5 gibt es  $B$ -Homomorphismen  $g: B \circlearrowleft_A M \rightarrow M$  und  $f: M \rightarrow B \circlearrowleft_A M$  mit  $gf = \text{id}_M$ . Sei  $\tau \circ \text{id}_M: B \circlearrowleft_A M \rightarrow P \circlearrowleft_A B \circlearrowleft_A M$  durch  $\tau \circ \text{id}_M(b \circ m) = \psi(b) \circ 1 \circ m$  definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Sp}(P \circlearrowleft_A g \circ \tau \circ \text{id}_M \circ f) &= g \circ \text{Sp}(\tau \circ \text{id}_M) \circ f = gf = \text{id}_M , \\ \text{denn } \text{Sp}(\tau \circ \text{id}_M)(b \circ m) &= \sum b_i q_i \psi(b_i' b) \circ m = \sum b b_i q_i \psi(b_i') \circ m \\ &= b \circ m . \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $\text{Sp}(h) = \text{id}_M$ . Dann ist

$$M \ni m \mapsto \sum b_i \circ q_i h(b_i' m) \in B \circlearrowleft_A M$$

ein  $B$ -Schnitt zu  $g: B \circlearrowleft_A M \ni b \circ m \mapsto b m \in M$ , also ist  $M$   $B$ -direkter Summand von  $B \circlearrowleft_A M$ , also  $(B, A)$ -projektiv. //

Definition 5.10: Eine  $(B, A)$ -projektive Auflösung eines Moduls  $B^M$  ist eine  $(B, A)$ -exakte Folge

$$\dots P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \dots P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0$$

mit  $(B, A)$ -projektiven Moduln  $P_i$ .

Eine  $(B, A)$ -injektive Auflösung eines Moduls  $B^M$  ist eine

(B,A)-exakte Folge

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \dots I_{i-1} \xrightarrow{d_i} I_i \dots$$

mit (B,A)-injektiven Moduln  $I_i$ .

Eine (B,A)-vollständige Auflösung eines Moduls  $B^M$  ist eine

(B,A)-exakte Folge

$$\dots P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \dots P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_{-2} \dots$$

$$\begin{array}{ccc} & \sigma & \tau \\ & \searrow & \nearrow \\ & M & \\ & \nearrow & \searrow \\ O & & O \end{array}$$

mit  $\tau\sigma = d_0$  und einem Epimorphismus  $\sigma$  und einem Monomorphismus  $\tau$  mit (B,A)-projektiven Moduln  $P_i$ .

Eine (B,A)-projektive bzw. -injektive Auflösung hat die Länge  $n$ , wenn  $P_i = 0$  bzw.  $I_i = 0$  für alle  $i > n$ .

Ein Modul hat die (B,A)-projektive bzw. (B,A)-injektive Dimension  $n$ , wenn er eine (B,A)-projektive bzw. (B,A)-injektive Auflösung der Länge  $n$  und keine Auflösung kürzerer Länge hat. Sonst hat er unendliche (B,A)-projektive bzw. -injektive Dimension.

Lemma 5.11: Jeder Modul  $B^M$  hat eine (B,A)-projektive und eine (B,A)-injektive Auflösung.

Beweis: Wir beweisen nur die Existenz (B,A)-projektiver Auflösungen.

Die Folge  $0 \rightarrow \text{Ker}(g) \rightarrow B \otimes_A M \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$  mit  $g(b \otimes m) = bm$  ist (B,A)-exakt, weil  $f: M \otimes m \rightarrow 1 \otimes m \in B \otimes_A M$  ein A-Schnitt zu  $g$  ist. Weiter ist  $B \otimes_A M$  (B,A)-projektiv. Ist

$$0 \rightarrow L \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

(B,A)-exakt mit (B,A)-projektiven Moduln  $P_i$ , so ist auch

$0 \rightarrow \text{Ker}(g') \rightarrow B \otimes_A L \xrightarrow{g'} L \rightarrow 0$  mit  $g'(b \otimes l) = bl$  (B,A)-exakt und  $B \otimes_A L$  (B,A)-projektiv. Daher ist auch

$$0 \rightarrow \text{Ker}(g') \rightarrow B \otimes_A L \rightarrow P_n \dots P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

(B,A)-exakt. Durch diese Induktion ist die geforderte Existenz bewiesen. //

Folgerung 5.12: Sei B eine P-Frobenius-Erweiterung von A .

Dann hat jeder Modul  $B^M$  eine vollständige Auflö-  
sung.

Beweis: Man bilde eine (B,A)-projektive und eine (B,A)-injektive  
Auflösung von  $B^M$  und verbinde sie. Wegen Satz 5.6 erhält man  
so eine (B,A)-vollständige Auflö-  
sung. //

Satz 5.13: Sei B eine P-Frobenius-Erweiterung von A und  $B^M$   
ein B-Modul von endlicher (B,A)-projektiver Dimension. Dann ist  
M (B,A)-projektiv.

Beweis: Sei  $0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \dots P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  eine (B,A)-  
projektive Auflö-  
sung kürzester Länge von M und sei  $n > 0$  .

Wegen Satz 5.6 ist  $P_n$  (B,A)-injektiv, also ist  $P_{n-1} \cong P_n \oplus P'_{n-1}$  ,  
und die Folge  $0 \rightarrow P'_{n-1} \dots P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  ist (B,A)-exakt.

Weiter ist  $P'_{n-1}$  (B,A)-projektiv. Im Widerspruch zur Annahme haben  
wir eine (B,A)-projektive Auflö-  
sung kürzerer Länge. //

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen endliche  
Hopf-Algebren H nur (H,k)-projektive Moduln haben. Dazu  
benötigen wir zunächst noch eine Überlegung über Casimir-Elemente.

Lemma 5.14: Sei H eine endliche Hopf-Algebra. Ist  $h \in H^H$  , so  
sind  $\sum h_{(1)} \bullet S(h_{(2)})$  und  $\sum h_{(2)} \bullet S^{-1}(h_{(1)})$  in  $H \bullet H$   
Casimir-Elemente. Ist  $\sum a_i \bullet b_i \in H \bullet H$  ein Casimir-Element, so  
ist  $\sum a_i \epsilon(b_i) \in H^H$  .

Beweis:  $h \in H^H \Rightarrow h'h = \epsilon(h')h$  für alle  $h' \in H \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum h'_{(1)} h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) S(h'_{(2)}) &= \sum \epsilon(h') h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) \text{ für alle } \\ h' \in H \Rightarrow \sum h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) h' &= \sum \epsilon(h'_{(1)}) h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) h'_{(2)} = \\ \sum h'_{(1)} h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) S(h'_{(2)}) h'_{(3)} &= \sum h' h_{(1)} \bullet S(h_{(2)}) \text{ für alle } \\ h' \in H . \end{aligned}$$



Sei  $h \in {}^H H$ , so ist  $S^{-1}(h) \in H^H$  und  $\sum S(S^{-1}(h)_{(1)}) \bullet S^{-1}(h)_{(2)} = \sum h_{(2)} \bullet S^{-1}(h_{(1)})$  ein Casimir-Element.

Sei umgekehrt  $\sum a_i \bullet b_i$  ein Casimir-Element, so ist  $h \sum a_i \varepsilon(b_i) = \sum a_i \varepsilon(b_i h) = \varepsilon(h) \sum a_i \varepsilon(b_i)$ , also  $\sum a_i \varepsilon(b_i) \in {}^H H$ . //

Definition 5.15: Eine  $k$ -Algebra  $A$  heißt separabel, wenn es ein Casimir-Element  $\sum r_i \bullet l_i \in A \bullet_k A$  gibt mit  $\sum r_i l_i = 1$ .

Satz 5.16: Sei  $H$  eine endliche  $k$ -Hopf-Algebra. Äquivalent sind:

- 1) Alle Moduln  $M \in H\text{-Mod}$  sind  $(H, k)$ -projektiv.
- 2) Der H-Links-Modul  $k$  ist  $(H, k)$ -projektiv.
- 3) Für die Links-Norm  $\sum N_i \bullet q_i$  existiert ein  $p \in P$  mit  
 $\sum \varepsilon(N_i) q_i p = 1$ .
- 4)  $H$  ist eine separable  $k$ -Algebra.
- 5)  $\varepsilon({}^H H) = k$
- 6)  $\varepsilon(H^H) = k$
- 7) Der H-Links-Modul  $k$  ist H-projektiv.

Beweis: 1)  $\Rightarrow$  2): trivial.

2)  $\Rightarrow$  3): Nach Satz 5.9 gibt es ein  $g: k \rightarrow P \bullet_k P = P$  mit

$$\text{Sp}(g) = \text{id}_k. \text{ Sei } g(1) = p. \text{ Dann ist } 1 = \text{Sp}(g)(1) = \sum N_{i(2)} q_i g(S^{-1}(N_{i(1)}) 1) = \sum \varepsilon(N_{i(2)}) q_i \varepsilon(N_{i(1)}) g(1) = \sum \varepsilon(N_i) q_i p.$$

3)  $\Rightarrow$  4): Wegen Lemma 3.16 ist  $\sum N_{i(2)} \bullet q_i p S^{-1}(N_{i(1)})$  ein Casimir-Element mit  $\sum N_{i(2)} q_i p S^{-1}(N_{i(1)}) = \sum \varepsilon(N_i) q_i p = 1$ .

4)  $\Rightarrow$  5): Sei  $\sum r_i \bullet l_i \in H \bullet H$  ein Casimir-Element mit  $\sum r_i l_i = 1$ . Dann ist wegen Lemma 5.14  $\sum r_i \varepsilon(l_i) \in {}^H H$  und  $\varepsilon(\sum r_i \varepsilon(l_i)) = \varepsilon(\sum r_i l_i) = \varepsilon(1) = 1$ . Also ist  $\varepsilon({}^H H) = k$ .

5)  $\Rightarrow$  7): Sei  $\varepsilon(h) = 1$  für  $h \in {}^H H$ . Sei  $\varphi: k \ni \lambda \mapsto \lambda h \in H$ .

Dann ist  $\varphi$  ein  $H$ -Schnitt zu  $\varepsilon: H \rightarrow k$ , denn  $\varphi(h' \lambda) =$

$$\varphi(\varepsilon(h')\lambda) = \varepsilon(h')\varphi(\lambda) = \varepsilon(h')\lambda h = h'\lambda h \text{ (wegen } h \in {}^H H) = h'\varphi(\lambda) .$$

Daher ist  $k$  isomorph zu einem  $H$ -direkten Summanden von  $H$ .

3)  $\Rightarrow$  1): Sei  $f: M \rightarrow P \otimes M$  definiert durch  $f(m) = p \otimes m$ . Dann ist  $\text{Sp}(f)(m) = \sum N_{i(2)} q_i f(S^{-1}(N_{i(1)})m) = \sum N_{i(2)} q_i p S^{-1}(N_{i(1)})m = m$ , also ist  $\text{Sp}(f) = \text{id}_M$ . Nach Satz 5.9 ist daher  $M$

$(H, k)$ -projektiv.

7)  $\Rightarrow$  2): trivial.

5)  $\Leftrightarrow$  6): 4) ist unabhängig von der Wahl der Seite. //

**Folgerung 5.17 (Maschke):** Sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $p$ . Sei  $G$  eine endliche Gruppe.  $kG$  ist genau dann halbeinfach, wenn  $p$  die Ordnung von  $G$  nicht teilt bzw. wenn  $p=0$  ist.

**Beweis:** Nach 4.2 ist  $P = k$ , die Norm ist  $\sum_{g \in G} g$  und  $\varepsilon(\sum_{g \in G} g)$  die Ordnung der Gruppe modulo  $p$ . Die Folgerung folgt also aus der Äquivalenz von 1) und 3) aus Satz 5.16. //

§ 6: Charaktere von endlichen Hopf-Algebren

In diesem Abschnitt sei  $H$  eine endliche Hopf-Algebra. Sei  $M_0(H, k)$  die volle Unterkategorie der  $H$ -Links-Moduln, die als  $k$ -Moduln endlich erzeugt und projektiv sind. Die kurzen  $H$ -exakten Folgen mit Objekten aus  $M_0(H, k)$  sind dann  $(H, k)$ -exakt.

Wir wollen jetzt einige Eigenschaften der Spur von Endomorphismen von endlich erzeugten, projektiven  $k$ -Moduln angeben. Für die Beweise sei der Leser auf die Fachliteratur über Algebra, etwa Bourbaki, verwiesen. Zunächst ist

$$M \otimes L^* \ni m \otimes l^* \mapsto (l^* \mapsto ml^*(l^*)) \in \text{Hom}(L, M)$$

in beiden Variablen ein funktorieller Homomorphismus, der nach Lemma 1.1 ein Isomorphismus ist, wenn beide Variablen endlich erzeugte, projektive Moduln sind. Für einen endlich erzeugten, projektiven Modul  $M$  identifizieren wir im folgenden  $\text{Hom}(M, M)$  und  $M \otimes M^*$ . Dann heißt die Abbildung  $M \otimes M^* \ni m \otimes m^* \mapsto m^*(m) \in k$  Spur des Endomorphismus  $m \otimes m^*$ . Es gilt nun für Endomorphismen  $f$  und  $g$  eines endlich erzeugten, projektiven Moduls  $M$   $\text{Spur}(f + g) = \text{Spur}(f) + \text{Spur}(g)$ ,  $\text{Spur}(\lambda f) = \lambda \text{Spur}(f)$  für alle  $\lambda \in k$  und für ein kommutatives exaktes Diagramm von endlich erzeugten, projektiven  $k$ -Moduln

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

gilt  $\text{Spur}(f) = \text{Spur}(f') + \text{Spur}(f'')$ .

Definition 6.1: Sei  $G_0^k(H)$  die abelsche Gruppe mit Isomorphieklassen  $[M]$  von Moduln in  $M_0(H, k)$  als Erzeugenden und den Relationen  $[M'] + [M''] = [M]$  für jede  $(H, k)$ -exakte Folge von Moduln  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  aus  $M_0(H, k)$ .

Lemma 6.2: Durch

$$\chi: G_0^k(H) \ni [M] \mapsto (h \mapsto \text{Spur}(M \ni m \mapsto hm \in M)) \in \text{Hom}(H, k) = H^*$$

wird ein Homomorphismus abelscher Gruppen definiert, genannt Charakter-Abbildung.

**Beweis:** Sei  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine  $(H, k)$ -exakte Folge von Moduln aus  $M_0(H, k)$ . Für  $h \in H$  erhalten wir dann ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0, \end{array}$$

also ist  $\text{Spur}(M' \ni m' \mapsto hm' \in M') + \text{Spur}(M'' \ni m'' \mapsto hm'' \in M'') = \text{Spur}(M \ni m \mapsto hm \in M)$ . Ist dabei  $M \rightarrow M''$  ein  $H$ -Isomorphismus, so ist  $M' = 0$  und damit auch  $\text{Spur}(M' \ni m' \mapsto hm' \in M') = 0$ .

$\chi$  ist also von der Wahl des Repräsentanten der Isomorphieklasse für  $[M]$  unabhängig. Ebenso zeigt die obige Betrachtung, daß  $\chi$  die Relationen erhält, denn  $\chi[M'] + \chi[M''] = \chi[M]$  impliziert  $\chi[M'] + \chi[M''] = \chi[M]$ .  $\chi$  ist also auf den Erzeugenden definiert und erhält bei linearer Fortsetzung die Relationen, ist also ein Homomorphismus. //

Statt  $\text{Spur}(f: M \rightarrow M)$  werden wir auch  $\chi[M](f)$  schreiben, auch wenn es sich nicht um Moduln aus  $M_0(H, k)$  und Operatoren aus  $H$  handelt.

- Lemma 6.3: a)  $\chi[\text{Hom}(M, L)] = \chi[L \otimes M^*]$  auf  $H \otimes H$  für  $M, L \in M_0(H, k)$ .  
 b)  $\chi[M \otimes L](h \otimes h') = \chi[M](h) \cdot \chi[L](h')$  für  $M, L \in M_0(H, k)$ .  
 c)  $\chi[M^*](h) = \chi[M](S(h))$  für  $M \in M_0(H, k)$ .

**Beweis:** a)  $\text{Hom}(M, L) \cong L \otimes M^*$  als  $H \otimes H$ -Moduln bei den Modulstrukturen  $(hm^*)(m) := m^*(S(h)m)$  und  $((h \otimes h')f)(m) = hf(S(h')m)$ .

b) Seien  $\sum m_i \otimes m_i^*$  bzw.  $\sum l_j \otimes l_j^*$  die Elemente, die  $h$  bzw.  $h'$

bei der Identifizierung  $\text{Hom}(M, M) = M \otimes M^*$  bzw.  $\text{Hom}(L, L) = L \otimes L^*$  entsprechen. Dann ist  $\chi[M \otimes L](h \otimes h') = \sum (m_i^* \otimes l_j^*)(m_i \otimes l_j) = \sum m_i^*(m_i) \cdot \sum l_j^*(l_j) = \chi[M](h) \cdot \chi[L](h')$ .

c) Wir verwenden auf  $M^*$  die in a) definierte Modul-Struktur.

Wie in b) sollen  $h$  und  $\sum m_i \otimes m_i^*$  auf  $M$  einander entsprechen.

Dann ist  $\sum m_i^*(m') m_i = hm'$ . Für  $m^* \in M^*$  gilt  $(S^{-1}(h)m^*)(m') = m^*(hm') = m^*(\sum m_i^*(m') m_i) = \sum m_i^*(m') m^*(m_i) = (\sum m^*(m_i) m_i^*)(m')$ .

Daraus folgt  $S^{-1}(h)m^* = \sum m^*(m_i) m_i^*$  und  $\sum m_i^*(m_i) =$

$$\chi[M^*](S^{-1}(h)) = \chi[M](h) \quad //$$

**Lemma 6.4:**  $G_0^k(H)$  ist ein unitärer, assoziativer Ring bei der Multiplikation  $[L] \cdot [M] := [\Delta L \otimes M]$ .

**Beweis:** Um eine distributive Multiplikation zu erhalten, genügt es zu zeigen, daß die Abbildung  $[M] \mapsto [\Delta L \otimes M]$  die durch die kurzen exakten Folgen definierten Relationen erhält. Das folgt aus der Tatsache, daß mit der  $(H, k)$ -exakten Folge

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0 \quad \text{auch die Folge}$$

$$0 \rightarrow \Delta L \otimes M' \rightarrow \Delta L \otimes M \rightarrow \Delta L \otimes M'' \rightarrow 0 \quad (H, k)\text{-exakt ist. Die}$$

Assoziativität folgt aus  $\Delta(\Delta(L \otimes M) \otimes M') \cong \Delta(L \otimes \Delta(M \otimes M'))$ . Das

Einselement ist  $[k]$  wegen  $M \cong \Delta M \otimes k$  //

Falls die Komultiplikation von  $H$  nicht kokommutativ ist, ist

$G_0^k(H)$  im allgemeinen nicht kommutativ, da im allgemeinen

$\Delta L \otimes M \cong \Delta M \otimes L$  nur bei kokommutativer Komultiplikation gilt.

**Satz 6.5:**  $\chi: G_0^k(H) \rightarrow H^*$  ist ein unitärer Ringhomomorphismus.

**Beweis:**  $\chi([M][L])(h) = \chi[\Delta M \otimes L](h) = \chi[M \otimes L](\sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = \sum \chi[M](h_{(1)}) \chi[L](h_{(2)}) = (\chi[M] * \chi[L])(h)$  impliziert, daß  $\chi$

multiplikativ ist. Wegen  $\chi[k](h) = \text{Spur}(h: k \rightarrow k) = \varepsilon(h)$  ist  $\chi$  unitärer Ringhomomorphismus. //

In vielen Fällen ist  $G_O^k(H)$  eine freie abelsche Gruppe, während  $H^*$  ein  $k$ -Modul ist. Ist  $k$  etwa ein Körper der Charakteristik  $p \neq 0$ , so ist  $H^*$  eine  $p$ -Gruppe. Daher ist es von Interesse, den Kern und den Kokern von  $\chi$  zu untersuchen. Vorher wollen wir noch die Orthogonalitätsrelationen für Charaktere untersuchen.

Satz 6.6 (1. Orthogonalitätsrelation): Seien  $L, M \in M_O(H, k)$  zwei nicht-isomorphe einfache Moduln. Sei  $X \in k\text{-Mod}$  reflexiv und  $\sum a_i \otimes x_i \otimes b_i \in H \otimes X \otimes H$  ein Casimir-Element. Dann ist  $\sum \chi[M](a_i) \chi[L](b_i) x_i = 0$ .

Beweis: Für  $g \in X^*$  ist

$$T_g: \text{Hom}(L, M) \ni f \mapsto (1 \mapsto \sum a_i g(x_i) f(b_i)) \in \text{Hom}_H(L, M) \subseteq \text{Hom}(L, M)$$

die Null-Abbildung, weil  $L$  und  $M$  nicht-isomorphe einfache  $H$ -Moduln sind. Da  $\text{Hom}(L, M)$  ein endlich erzeugter, projektiver  $k$ -Modul ist, können wir die Spur von  $T_g$  berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \chi[\text{Hom}(L, M)](T_g) \\ &= \chi[\text{Hom}(L, M)](\sum a_i g(x_i) \otimes S^{-1}(b_i)) \\ &= \sum \chi[M](a_i g(x_i)) \chi[L^*](S^{-1}(b_i)) \\ &= g(\sum \chi[M](a_i) \chi[L](b_i) x_i) \end{aligned}$$

für alle  $g \in X^*$ . Da  $X$  reflexiv ist, ist  $\sum \chi[M](a_i) \chi[L](b_i) x_i = 0$ . //

Da sowohl  $Q$  als auch  $k$  reflexive  $k$ -Moduln sind, kann der Satz sowohl auf das Casimir-Element  $\sum N_{1(2)} \otimes q_i \otimes S^{-1}(N_{1(1)})$  als auch auf  $\sum h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})$  mit  $h \in {}^H H$  angewendet werden.

Definition 6.7: Für einen endlich erzeugten, projektiven  $k$ -Modul definieren wir  $rg_k(M) := \chi[M](\text{id}_M) \otimes k$ .

Satz 6.8 (2. Orthogonalitätsrelation in  $k$ ): Sei  $\sum a_i \bullet b_i \in H \bullet H$  ein Casimir-Element und  $\sum a_i b_i \in \gamma(k)$  invertierbar. Sei  $M \in M_O(H, k)$  ein einfacher  $H$ -Modul. Dann ist

$$\sum \chi^{[M]}(a_i) \chi^{[M]}(b_i) = \sum a_i b_i \cdot \text{rg}_k(\text{Hom}_H(M, M)) .$$

Beweis: Ähnlich wie im Beweis von 6.6 betrachten wir

$$T: \text{Hom}(M, M) \ni f \longmapsto (m \longmapsto \sum a_i f(b_i m)) \in \text{Hom}_H(M, M) \subseteq \text{Hom}(M, M) .$$

Auf dem Untermodul  $\text{Hom}_H(M, M) \subseteq \text{Hom}(M, M)$  ist  $T$  Multiplikation mit  $\sum a_i b_i = \lambda \bullet k$ . Also ist  $\text{Hom}(M, M) = U \oplus \text{Hom}_H(M, M)$  mit  $U = \text{Ker}(T)$ . Daher ist  $\text{Hom}_H(M, M)$  ein endlich erzeugter, projektiver  $k$ -Modul. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum \chi^{[M]}(a_i) \chi^{[M]}(b_i) &= \chi^{[\text{Hom}(M, M)]}(T) \\ &= \chi[(U \oplus \text{Hom}_H(M, M))](T) \\ &= \chi[U](T) \oplus \chi[\text{Hom}_H(M, M)](T) \\ &= \chi[\text{Hom}_H(M, M)](\sum a_i b_i) \\ &= \sum a_i b_i \cdot \text{rg}_k(\text{Hom}_H(M, M)) . // \end{aligned}$$

Falls  $\text{rg}_k(\text{Hom}_H(M, M))$  invertierbar ist, kann man durch geeignete Wahl des Casimir-Elements  $\sum \chi^{[M]}(a_i) \chi^{[M]}(b_i) = 1$  erreichen.

Daß die Voraussetzungen des Satzes 6.8 allerdings sehr einschränkend sind, zeigt der folgende Satz.

Satz 6.9: Sei  $k$  ein Körper und  $\sum a_i \bullet b_i \in H \bullet H$  ein Casimir-Element, so daß  $\sum \chi^{[M]}(a_i) \chi^{[M]}(b_i) \neq 0$  für alle einfachen  $H$ -Moduln  $M$  ist. Dann ist  $H$  halbeinfach.

Beweis:  $k$  ist ein einfacher  $H$ -Modul. Dann ist

$$0 \neq \sum \chi^{[k]}(a_i) \chi^{[k]}(b_i) = \chi^{[\text{Hom}(k, k)]}(T) = \chi^{[k]}(\sum a_i b_i) = \varepsilon(\sum a_i b_i) = \varepsilon(\sum a_i \varepsilon(b_i)) \text{ und } \sum a_i \varepsilon(b_i) \in {}^H H \text{ wegen 5.14.}$$

Also ist  $\varepsilon({}^H H) = k$ . Aus Satz 5.16 folgt die Behauptung. //

Definition 6.10:  $f \in H^*$  heißt Klassenfunktion, wenn  
 $f(\sum h_{(2)} x S(h_{(1)})) = \varepsilon(h) f(x)$  für alle  $h, x \in H$  gilt.

Lemma 6.11:  $f \in H^*$  ist genau dann eine Klassenfunktion, wenn  
 $f(xh) = f(hx)$  für alle  $x, h \in H$  gilt.

Beweis: Ist  $f$  eine Klassenfunktion, so ist  $f(xh) = \sum \varepsilon(h_{(2)}) f(xh_{(1)})$   
 $= \sum f(h_{(3)} x h_{(1)} S(h_{(2)})) = f(hx)$ . Gilt umgekehrt  $f(xh) = f(hx)$   
für alle  $x, h \in H$ , so ist  $f(\sum h_{(2)} x S(h_{(1)})) = f(\sum x S(h_{(1)}) h_{(2)})$   
 $= \varepsilon(h) f(x)$ . //

Folgerung 6.12:  $\chi[M] \in H^*$  ist eine Klassenfunktion.

Beweis:  $\chi[M](xh) = \chi[M](hx)$  folgt aus den Eigenschaften der Spur. //

Wir werden die Menge der Klassenfunktionen aus  $H^*$  mit  $Cf(H)$  bezeichnen. Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir annehmen, daß  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

Satz 6.13: Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p \neq 0$ . Gelte  $p \nmid \dim_k(\text{Hom}_H(M, M))$  für alle einfachen  $H$ -Moduln  $M$ . Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow G_0^k(H) \xrightarrow{p} G_0^k(H) \xrightarrow{\chi} H^*$$

exakt.

Beweis: Bekanntlich ist für jede artinsche  $k$ -Algebra  $A$  die abelsche Gruppe  $G_0^k(A)$  frei mit den Erzeugenden  $\{[M]\}$ , wobei für die Moduln  $M$  ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen  $A$ -Moduln verwendet werden kann. Hat nämlich ein Modul  $M$  endlicher  $k$ -Dimension eine Kompositionsreihe von  $A$ -Moduln mit den einfachen Faktoren  $M_1, \dots, M_n$ , so ist  $[M] =$



$[M_1] + \dots + [M_n]$  . Wegen der Eindeutigkeit der Kompositionsfaktoren

ist daher  $G_O^k(A)$  frei. Damit ist aber die Multiplikation mit  $p$  auf  $G_O^k(H)$  ein Monomorphismus. Weiter ist  $\chi p = p\chi = 0$  .

Sei nun  $x \in G_O^k(H)$  mit  $\chi(x) = 0$  . Es ist  $x = \sum t_i [M_i] = \sum r_j [M_j] - \sum s_j [M_j]$  mit  $r_j, s_j \geq 0$  , also  $x = [M] - [L]$  mit halbeinfachen Moduln  $M$  und  $L$  . Zu zeigen ist, daß  $p \mid r_j - s_j$  für alle  $j$  . Da  $M$  und  $L$  halbeinfach sind, sind sie  $\bar{H} = H/\text{rad}(H)$ -Moduln und es ist  $\bar{H} \cong \bar{H}_1 \times \dots \times \bar{H}_n$  mit  $\bar{H}_i \cong \text{Hom}_{D_i}(M_i, M_i)$  und  $D_i \cong \text{Hom}_H(M_i, M_i)$  . Sei  $e_i \in \bar{H}_1$  gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in D_i^{(n,n)} \cong \bar{H}_1 .$$

Dann ist  $\chi[M](e_i) = \chi(r_i [M_i])(e_i) = r_i \dim_k(D_i) \pmod{p}$  .

Daraus folgt  $0 = \chi(x)(e_i) = (r_i - s_i) \dim_k(D_i) \pmod{p}$  . Da  $p \nmid \dim_k(D_i)$  ist  $r_i - s_i \pmod{p} \in \mathbb{Z}$  , also  $x \in pG_O^k(H)$  . //

Im folgenden sei  $H$  immer eine separable endliche Hopf-Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  .

Lemma 6.14: Sei  $Z(H)$  das Zentrum von  $H$  . Dann ist  $G_O^k(H)$  eine freie abelsche Gruppe mit  $\dim_k Z(H)$  freien Erzeugenden.

Beweis: Im Beweis von 6.13 haben wir schon gesehen, daß  $G_O^k(H)$  frei mit dem Erzeugendensystem  $\{[M_i]\}$  ist, wobei die  $M_i$  nicht-isomorphe einfache  $H$ -Moduln sind. Bekanntlich gibt es genausoviele nicht-isomorphe einfache  $H$ -Moduln, wie  $H$  Faktoren hat bei der Zerlegung in ein Produkt von einfachen  $k$ -Algebren. Das Zentrum von  $H$  zerfällt bei dieser Zerlegung in ein Produkt von Kopien von  $k$  mit genauso vielen Faktoren, wie  $H$  nicht-isomorphe einfache  $H$ -Moduln hat. //

Satz 6.15: Sei der Nakayama-Automorphismus von  $H$  die Identität.

Sei M ein einfacher H-Modul. Dann ist  $rg_k(M)$  invertierbar.

Beweis: Da  $k$  ein Körper ist, ist  $P(H^*) \cong k$  und  $H$  ist eine  $k$ -Frobenius-Erweiterung von  $k$ . Sei  $N$  die Links-Norm. Dann ist  $\sum N_{(2)} \bullet S^{-1}(N_{(1)})$  wegen 3.16 ein Casimir-Element. Ebenso ist  $\sum S^{-1}(N_{(1)}) \bullet N_{(2)}$  wegen 3.16 und 3.9 ein Casimir-Element, da der Nakayama-Automorphismus die Identität ist. Sei  $H = H_1 \times \dots \times H_n$  mit  $H_1 \cong \text{End}_k(M)$ . Für  $f \in \text{End}_k(M)$  ist  $\text{Sp}(f)(m) = \sum N_{(2)} f(S^{-1}(N_{(1)}))m$ . Es ist  $\text{Sp}(f) \in \text{End}_H(M) \cong k$ . Sei  $\{m_i\}$  eine  $k$ -Basis für  $M$  und sei  $h_{ij}(m_k) := m_i \delta_{jk}$ . Sei weiter  $\text{Sp}(h_{ij}) = a_{ij} \text{id}_M$ . Dann ist

$$a_{ii} \text{id}_M = \text{Sp}(h_{ii}) = \sum N_{(2)} h_{ij} h_{ji} S^{-1}(N_{(1)}) = \sum N_{(2)} h_{ji} h_{ij} S^{-1}(N_{(1)})$$

da  $\sum S^{-1}(N_{(1)}) \bullet N_{(2)}$  ebenfalls ein Casimir-Element ist. Also ist  $a_{ii} \text{id}_M = a_{jj} \text{id}_M$  und  $a_{ii} = a_{jj}$ . Beachten wir, daß wegen 5.16  $\varepsilon(N)$  invertierbar ist, ist wegen  $\varepsilon(N) \text{id}_M = \sum N_{(2)} \text{id}_M S^{-1}(N_{(1)}) = \text{Sp}(\text{id}_M) = \text{Sp}(\sum h_{ii}) = \sum a_{ii} \text{id}_M$  ebenfalls  $\sum a_{ii}$  invertierbar. Damit ist  $a_{ii} rg_k(M)$  und auch  $rg_k(M)$  invertierbar. //

Satz 6.16: Sei der Nakayama-Automorphismus von  $H$  die Identität. Dann bilden die  $\chi[M_i] \Big|_{Z(H)}$ , wobei die  $M_i$  nicht-isomorphe einfache  $H$ -Moduln sind, eine Basis für  $Z(H)^*$ .

Beweis: Sei  $\sum a_i \chi[M_i](z) = 0$  für alle  $z \in Z(H)$ . Da  $z \in Z(H)$  auf  $M_i$  durch Multiplikation mit einem  $a_i(z) \in k$  operiert, ist  $\chi[M_i](z) = a_i(z) rg_k(M_i)$ . Da  $Z(H) \cong k \times \dots \times k$ , entspreche  $z$  dem Element  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in k \times \dots \times k$  mit 1 an der  $i$ -ten Stelle. Dann ist

$$0 = \sum a_i \chi[M_i](z) = a_i rg_k(M_i),$$

also  $a_i = 0$ . Die  $\chi[M_i] \Big|_{Z(H)}$  sind also linear unabhängig. Da  $\dim_k Z(H)^*$  mit der Anzahl der freien Erzeugenden von  $G_o^k(H)$  übereinstimmt, bilden die  $\chi[M_i] \Big|_{Z(H)}$  eine Basis für  $Z(H)^*$ . //

Lemma 6.17: Es gilt  $Cf(H) = k \cdot \chi(G_O^k(H))$  .

Beweis: Da  $\chi[M]$  eine Klassenfunktion ist und  $Cf(H)$  ein  $k$ -Unterraum von  $H^*$  ist, ist  $k \cdot \chi(G_O^k(H)) \subseteq Cf(H)$  . Sei nun  $f$  eine Klassenfunktion. Unter  $H = H_1 \times \dots \times H_n$  mit einfachen  $k$ -Algebren  $H_i$  sei  $f = f_1 + \dots + f_n$  , wobei  $f_i(H_j) = 0$  für  $i \neq j$  und  $f_i|_{H_i} = f|_{H_i}$  ist. Die  $f_i$  sind offenbar wieder Klassenfunktionen, d.h.  $f_i(ab) = f_i(ba)$  für alle  $a, b \in H_i \cong \text{Hom}_k(M_i, M_i)$  . Sei  $\{h_{jk}\}$  eine Basis für  $H_i$  mit  $h_{jk}h_{lm} = \delta_{kl} \cdot h_{jm}$  . Dann ist  $h_{jk}h_{lm} - h_{lm}h_{jk} \in \text{Ker}(f_i)$  . Für  $k = l$  und  $m \neq j$  ist  $h_{jm} \in \text{Ker}(f_i)$  . Für  $k = l$  und  $m = j$  ist  $h_{jj} - h_{kk} \in \text{Ker}(f_i)$  . Also ist für  $h \in H_i$   $f_i(h) = a \cdot \text{Spur}(h: M_i \rightarrow M_i) = a \cdot \chi[M_i](h)$  , woraus  $f_i = a \cdot \chi[M_i]$  mit  $a \in k$  folgt. //

Folgerung 6.18: Sei der Nakayama-Automorphismus von H die Identität. Dann ist

$$H^* = Cf(H) \oplus Z(H)^\perp \quad \text{und} \quad Cf(H)|_{Z(H)} = Z(H)^*$$

Beweis: Wegen  $\dim_k(k \cdot \chi(G_O^k(H))) = \text{Rang}(G_O^k(H)) = \dim_k(Z(H)^*)$  und 6.16 ist  $Cf(H) = k \cdot \chi(G_O^k(H)) \rightarrow Z(H)^*$  ein Isomorphismus, woraus die zweite Behauptung folgt. Damit ist aber gleichzeitig  $Cf(H)$  ein direktes Komplement von  $Z(H)^\perp = \{f \in H^* \mid f(z) = 0 \text{ für alle } z \in Z(H)\}$  .

Literatur

- Allen, H.P. und Sweedler, M.: A theory of linear descent based upon Hopf algebraic techniques. J. Algebra 12 (1969) 242-294
- Bass, H.: Algebraic K-theory. Benjamin. New York. 1968
- Berkson, A.: The u-algebra of a restricted Lie algebra is Frobenius. Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 14-15
- Chase, S. und Sweedler, M.: Hopf algebras and Galois theory. Lecture notes in math. 97. Springer 1969
- Curtis, C.W. und Reiner, I.: Representation theory of finite groups and associative algebras. Interscience. New York. 1962
- Demazure, M.: Lectures on p-divisible groups. Lecture notes in math. 302. Springer. 1973
- Demazure, M. und Gabriel, P.: Groupes algébriques. Tome I. North Holland Co. Amsterdam 1970
- Dieudonné, J.: Introduction to the theory of formal groups. Marcel Dekker Inc. New York. 1973
- Gabriel, P.: Groupes formels. Seminaire Demazure, M. et Grothendieck, A., Exp. VII<sub>B</sub>, IHES 1962-1964
- Heyneman, R. und Sweedler, M.: Affine Hopf algebras I. J. Algebra 13 (1969) 192-241
- Affine Hopf algebras II. J. Algebra 16 (1970) 271-297
- Hochschild, G.: Representations of restricted Lie algebras of characteristic p. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 603-605
- Algebraic groups and Hopf algebras. Ill. J. Math. 14 (1970) 52-65
- Kasch, F.: Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Klasse (1960/61) 89-109
- Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen. Math. Z. 77 (1961) 219-227
- Larson, R.: Group rings over Dedekind domains. J. Algebra 5 (1967) 358-361
- Group rings over Dedekind domains II. J. Algebra 7 (1967) 278-279
- Cocommutative Hopf algebras. Canad. J. Math. 19 (1967) 350-360
- The order of the antipode of a Hopf algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969) 167-170
- Characters of Hopf algebras. J. Algebra 17 (1971) 352-368
- und Sweedler, M.: An associative orthogonal bilinear form for

- Hopf algebras. Amer. J. Math. 91 (1969) 75-94
- McConnell, J. und Sweedler, M.: Simplicity of smash products. Proc. London Math. Soc. 23 (1971) 251-266
- Milnor, J. und Moore, J.: On the structure of Hopf algebras. Ann. Math. 81 (1965) 211-264
- Morita, K.: Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions. Sc. Rep. T. K. D. Sec. A 9 (1965) 40-71
- Oberst, U. und Schneider, H.-J.: Über Untergruppen endlicher algebraischer Gruppen. manuscripta math. 8 (1973) 217-241
- Pareigis, B.: Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen. Math. Ann. 153 (1964) 1-13
- When Hopf algebras are Frobenius algebras. J. Algebra 18 (1971) 588-596
  - On the cohomology of modules over Hopf algebras. J. Algebra 22 (1972) 161-182
  - On K-theory of Hopf algebras of finite type. Algebra Berichte Nr. 3. (1970) 1-50
- Schneider, H.-J.: Bemerkung zu einer Arbeit von Tate-Oort. manuscripta math. 8 (1973) 319-322
- Swan, R. und Evans, G.: K-theory of finite groups and orders. Lecture notes in math. 149. Springer 1970
- Sweedler, M.: Cocommutative Hopf algebras with antipode. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 126-128
- Hopf algebras with one grouplike element. Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967) 515-526
  - The Hopf algebra of an algebra applied to field theory. J. Algebra 8 (1968) 262-275
  - Cohomology of algebras over Hopf algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968) 205-239
  - Hopf algebras. Benjamin, Inc. New York. 1969
  - Integrals for Hopf algebras. Ann. Math. (2) 89 (1969) 323-335
  - Connected fully reducible affine group schemes in positive characteristic are Abelian. J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 51-70
- Takeuchi, M.: On a semi-direct product decomposition of affine groups over a field of characteristic 0. Tohoku Math. J. 24 (1972) 453-456
- On the dimension of the space of integrals of Hopf algebras. Vorabdruck
  - Free Hopf algebras generated by coalgebras. Vorabdruck
- Tate, J. und Oort, F.: Group schemes of prime order. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3 (1970) 1-31

Taft, E.J.: The order of the antipode of finite-dimensional  
Hopf algebra. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68 (1971) 2631-2633  
Wraith, G.C.: Abelian Hopf algebras. J. Algebra 6 (1967) 135-156

München  
April 1973

Mathematisches Institut  
der Universität  
8 München 2  
Theresienstr. 39