

# annals of discrete mathematics

*General Editor*

Peter L. HAMMER, University of Waterloo, Ontario, Canada

*Advisory Editors*

C. BERGE, Université de Paris, France

M.A. HARRISON, University of California, Berkeley, CA, U.S.A.

V. KLEE, University of Washington, Seattle, WA, U.S.A.

J.H. VAN LINT, California Institute of Technology, Pasadena, CA, U.S.A.

G.-C. ROTA, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, U.S.A.



---

**Annals of Discrete Mathematics (17)**

General Editor: Peter L. Hammer

*University of Waterloo, Ontario, Canada*

**COMBINATORIAL  
MATHEMATICS**

Proceedings of the International Colloquium  
on Graph Theory and Combinatorics

Marseille-Luminy

June 1981

*Edited by:*

**C. BERGE**, C.N.R.S., Paris

**D. BRESSON**, E.H.E.S.S., Paris

**P. CAMION**, C.N.R.S.-I.N.R.I.A., Paris

**J.F. MAURRAS**, University of Paris XII, Paris

**F. STERBOUL**, University of Lille I, Paris



1983

# CONTENTS

PREFACE	v
J. ABRHAM and A. KOTZIG, Extremal bases of additive permutations	1
D. AMAR, I. FOURNIER and A. GERMA, Ordre minimum d'un graphe simple de diamètre, degré minimum et connexité donnés	7
D. AMAR, I. FOURNIER and A. GERMA, Structure des graphes de connexité $k \geq 2$ et de stabilité $\alpha = k + 2$	11
L. D. ANDERSEN, A. J. W. HILTON and C. A. RODGER, Small embeddings of incomplete idempotent latin squares	19
J. AYEL, Degrees and longest paths in bipartite digraphs	33
J. P. BARTHÉLEMY, Caractérisation médiane des arbres	39
A. BENHOCINE and A. P. WOJDA, On the existence of $D(n, p)$ in directed graphs	47
C. BENZAKEN, Hajós theorem for hypergraphs	53
C. BERGE, Path partitions in directed graphs	59
J.-C. BERMOND, C. DELORME and J.-J. QUISQUATER, Grands graphes de degré et diamètre fixés	65
C. BERNASCONI, Combinatorics of incidence structures and BIB-designs	75
K. P. BOGART, Ideal and exterior weight enumerators for linear codes: Examples and conjectures	81
B. BOLLOBÁS, The evolution of the cube	91
F. BORIES, J. L. JOLIVET and J. L. FOUQUET, Construction of 4-regular graphs	99
A. BOUCHET, A construction of a covering map with faces of even lengths	119
A. BOUCHET and J. L. FOUQUET, Trois types de décompositions d'un graphe en chaînes	131
F. BRY, Sur les couplages dans les graphes localement finis	143
P. CAMION, A deterministic algorithm for factorizing polynomials of $\mathbb{F}_q[X]$	149

A. H. CHAN, R. A. GAMES and E. L. KEY, On the complexities of periodic sequences	159
P. CHARPIN, The extended Reed–Solomon codes considered as ideals of a modular algebra	171
O. CHEVALIER, F. JAEGER, C. PAYAN and N. H. XUONG, Odd rooted orientations and upper-embeddable graphs	177
V. CHVÁTAL and E. SZEMERÉDI, Notes on the Erdős–Stone theorem	183
M. COCHAND and P. DUCHET, Sous les pavés...	191
E. J. COCKAYNE and FANG Zu Yao, Rotation numbers for unions of triangles and circuits	203
G. COHEN and P. FRANKL, On cliques and partitions in Hamming spaces	211
R. CORDOVI, Oriented matroids of rank three and arrangements of pseudolines	219
B. COURTEAU, G. FOURNIER and R. FOURNIER, Etude de certains paramètres associés à un code linéaire	225
M. CROCHEMORE, Mots et morphismes sans carré	235
L. J. CUMMINGS, Strongly $q$ th power-free strings	247
G. DELCLOS, Cyclic codes over $GF(4)$ and $GF(2)$	253
J. DÉNES, Some connections between groups and graphs. A survey	259
PH. DELSARTE and PH. PIRET, Algebraic codes achieving the capacity of the binary symmetric channel	265
W. DEUBER, Partitioning subwords of long words	271
P. ERDŐS and Z. FÜREDI, The greatest angle among $n$ points in the $d$ -dimensional euclidean space	275
S. FIORINI and J. LAURI, Edge-reconstruction of graphs with topological properties	285
P. FRANKL, Constructing finite sets with given intersections	289
H. DE FRAYSSEIX and P. ROSENSTIEHL, Système de référence de Trémaux d'une représentation plane d'un graphe planaire	293
G. GIRAUD, Sur un problème d'Erdős et Hajnal	303
M. HABIB and B. PÉROCHE, La $k$ -arboricité linéaire des arbres	307

MARSHALL HALL, JR., Designs and coding theory	319
S. HARARI, Le décodage rapide des codes de Reed–Solomon et leur généralisation	327
M. C. HEYDEMANN, Nombre maximum d’arcs d’un graphe antisymétrique sans chemin de longueur $l$	337
W. IMRICH and G. SCHWARZ, Trees and length functions on groups	347
B. JACKSON, Maximal cycles in bipartite graphs	361
H. JACOB and H. MEYNIEL, Extension of Turán’s and Brooks’ theorems and new notions of stability and coloring in digraphs	365
F. JAEGER, Symmetric representations of binary matroids	371
G. O. H. KATONA, Sums of vectors and Turán’s graph problem	377
J. M. LABORDE, L’hypercube infini et la connexité dans les graphes infinis	383
J. LACAZE and L. BENETEAU, The automorphism group of the smallest non-affine Hall triple system	387
A. LAHRICHI and J. L. SERET, Un algorithme linéaire pour l’énumération des créneaux d’une suite	393
M. LAS VERGNAS, Le polynôme de Martin d’un graphe eulérien	397
J. LEHEL, $\tau$ -critical hypergraphs and the Helly property	413
A. LENTIN, On certain families of disjoint perfect matchings in $K_{2,n}$	419
R. LÓPEZ BRACHO, Décompositions en chaînes d’un graphe complet d’ordre impair	427
W. MADER, On $n$ -edge-connected digraphs	439
A. R. MAHJOUB, Polytope des absorbants dans une classe de graphe à seuil	443
H. F. MATTSON, JR., An upper bound on covering radius	453
J. F. MAURRAS, Sur une propriété extrême des plans projectifs finis	459
J. MAYER, Note sur le problème de Heawood	465
M. MOLLARD, Le nombre d’absorption du $n$ -cube	469
B. MONTARON, Sur une construction de codes sphériques	473
A. F. MOUYART, Symmetric inseparable double squares	483

H. M. MULDER, The number of edges in a $k$ -Helly hypergraph	497
U. S. R. MURTY, Projective geometries and their truncations	503
M. W. PADBERG and L. A. WOLSEY, Trees and cuts	511
G. PASQUIER, Binary self dual codes construction from self dual codes over a Galois field $\mathbb{F}_2^m$	519
C. PAYAN and N. H. XUONG, Sur un théorème min-max en théorie des graphes	527
J. E. PIN, On two combinatorial problems arising from automata theory	535
A. POLI and M. VENTOU, Construction de codes autoduaux de profondeur 1 ou 2 dans $A = \mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_n]/(X_1^2 - 1, \dots, X_n^2 - 1)$	549
M. PREISSMANN, C-minimal snarks	559
A. RECSKI, On the generalization of the matroid parity and the matroid partition problems, with applications	567
I. G. ROSENBERG, Cycle structure of affine transformations of vector spaces over $\text{GF}(p)$	575
H. SACHS and M. STIEBITZ, Construction of colour-critical graphs with given major-vertex subgraph	581
S. C. SHEE and H. H. TEH, Graphs and inverse semigroups	599
F. STERBOUL and D. WERTHEIMER, Colorations extrêmes dans les hypergraphes	605
W. T. TROTTER, JR. and J. A. ROSS, Every $t$ -irreducible partial order is a suborder of a $t+1$ -irreducible partial order	613
P. VADERLIND, Between clutters and matroids	623
S. A. VANSTONE, A note on the existence of strong Kirkman cubes	629
W. F. DE LA VÉGA, On the bandwidth of random graphs	633
D. DE WERRA, On the use of bichromatic interchanges	639
D. WERTHEIMER, Extreme coloring of the edges of a graph	647
J. WOLFMANN, New decoding methods of the Golay code (24, 12, 8)	651
T. ZASLAVSKY, Uniform distribution of a subgraph in a graph	657
List of problems submitted during the conferences	665

## SUR LES COUPLAGES DANS LES GRAPHES LOCALEMENT FINIS\*

François BRY

*Université Pierre et Marie Curie, U.E.R. 48, Equipe de Recherche Combinatoire 4, place  
Jussieu, 75005 Paris, France*

We present some results on matchings in locally finite graphs. First, we give an extension to locally finite graphs of a theorem of Edmonds and Gallai giving a decomposition of graphs according to matchings. Then we estimate the number of perfect matchings (1-factors) in locally finite graphs, depending on connexity. These results generalize some theorems of Kotzig, Lovász and Zaks.

### 1. Introduction

Edmonds et Gallai ont donné dans [4], [5] une décomposition des graphes finis relative aux couplages maximums. En collaboration avec Las Vergnas, nous avons étendu cette décomposition aux graphes localement finis. Ce théorème est énoncé au Section 3.

Kotzig a prouvé dans [7] que tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage. Un graphe fini 2-arête-connexe contenant un couplage parfait en a donc au moins deux. Il existe par contre des graphes localement finis (infinis) 2-arête-connexes ne contenant qu'un seul couplage parfait. Au paragraphe 4 nous en donnons un exemple et nous montrons que *tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus 2-connexe*.

Le théorème de Kotzig est le premier résultat sur le nombre  $f(G)$  de couplages parfaits d'un graphe fini  $G$ . Auparavant, dans le cas particulier des graphes bipartis finis, Hall [6] avait estimé ce nombre ( $f(G) \geq n!$ , si  $G = (X, Y; U)$  est un graphe biparti fini tel que  $|X| = |Y|$  et tel que tout sommet de  $X$  soit de degré supérieur ou égal à  $n$ ). Beineke et Plummer ont ensuite prouvé que  $f(G) \geq n$  si  $G$  est un graphe fini  $n$ -connexe contenant un couplage parfait [1]. Zaks a amélioré ce résultat en montrant dans [10] que  $f(G) \geq n!!$  sous les mêmes hypothèses. (Si  $n$  est impair, cette borne est exacte en

\* L'auteur bénéficie d'une allocation de recherche de la D.G.R.S.T. (Contrat n° 79317).

ce sens que le graphe complet  $K_{n+1}$  contient exactement  $n!$  couplages parfaits.) Dans le cas particulier des graphes finis non bicritiques (un graphe est bicritique s'il contient un couplage parfait et si le sous-graphe obtenu en supprimant deux sommets quelconques contient encore un couplage parfait) Lovász [8] a précisé cette borne inférieure:  $f(G) \geq n!$  si  $G$  est un graphe fini non bicritique  $n$ -connexe. Finalement, Mader a donné dans [9] la borne inférieure exacte du nombre de couplages parfaits d'un graphe fini ne dépendant pas de la connexité mais du degré minimum du graphe: si  $G$  est un graphe fini 2-connexe de degré minimum  $n$  et si  $G$  contient au moins un couplage parfait, alors  $f(G) \geq n!$  si  $n$  est impair, et  $f(G) \geq f(S_n)$  si  $n$  est pair, où  $S_n$  est  $K_{n+2}$  moins un couplage parfait.

Nous donnons au paragraphe 5 des exemples de graphes localement finis (infinis)  $n$ -connexes avec un nombre fini (non nul) de couplages parfaits, pour tout entier  $n$ . Des résultats analogues à ceux de Zaks et Lovász sont ensuite énoncés pour les graphes localement finis.

Les preuves seront publiées ultérieurement.

## 2. Terminologie et notations

Les graphes considérés sont des *graphes simples* [2].

Un couplage d'un graphe  $G = (X, U)$  est un *couplage parfait* si tout sommet de  $G$  appartient à une arête du couplage. Un couplage  $F$  d'un graphe  $G$  est un *couplage maximum* si pour tout couplage  $H$  de  $G$  tel que  $\cup H \supset \cup F$ , on a  $\cup H = \cup F$ . D'après un théorème de Brualdi ([3] Théorème 4), tout graphe localement fini a au moins un couplage maximum.

Si  $F$  est un couplage maximum d'un graphe  $G$ , le *défaut* de  $F$ , noté  $\delta(F)$ , est le cardinal de l'ensemble des sommets de  $G$  insaturés par  $F$ . Deux couplages maximums d'un même graphe ont même défaut. On appelle *défaut* d'un graphe  $G$  le défaut d'un couplage maximum de  $G$ , on le note  $\delta(G)$ .

Un graphe est *couplage-critique* s'il ne contient pas de couplage parfait et si le sous-graphe formé en enlevant un sommet quelconque a au moins un couplage parfait. On vérifie qu'un graphe couplage-critique est fini et d'ordre impair.

Si  $G = (X, U)$  est un graphe et si  $S$  est une partie de  $X$ , on désigne par  $C_0(S)$  le cardinal de l'ensemble des composantes connexes d'ordre pair du sous-graphe  $G_S$  induit par  $S$ . De même,  $C_{cr}(S)$  désigne le cardinal de l'ensemble des composantes connexes couplage-critiques du sous-graphe  $G_S$ .

## 3. Décomposition relative aux couplages maximums d'un graphe localement fini

En collaboration avec Las Vergnas, nous avons établi le théorème suivant:



**Théorème 3.1.** Soit  $G = (X, U)$  un graphe localement fini. Soient  $P$  l'ensemble des sommets de  $G$  insaturés par au moins un couplage maximum de  $G$ ,  $Q$  l'ensemble des sommets voisins de  $P$  ( $Q = \Gamma_G(P) \setminus P$ ) et  $R = X \setminus (P \cup Q)$ . Alors :

(1) Les composantes connexes du sous-graphe  $G_P$  induit par  $P$  sont couplage-critiques.

(2) Soient  $\mathcal{C}(P)$  l'ensemble des composantes connexes de  $G_P$  et  $H = (Q, \mathcal{C}(P); E)$  le graphe biparti défini par  $(q, C) \in E$  si et seulement si il existe  $c \in C$  tel que  $(q, c) \in U$ .  $H$  a un couplage qui sature  $Q$  et laisse insaturée une partie de  $\mathcal{C}(P)$  de cardinal  $\delta(G)$ . Tout couplage de  $H$  saturant  $Q$  laisse insaturée une partie de  $\mathcal{C}(P)$  de cardinal supérieur ou égal à  $\delta(G)$ . En particulier si  $\delta(G)$  est fini,  $Q$  et  $P$  sont finis et  $|Q| = C_{cr}(P) + \delta(G)$ .

(3) Le sous-graphe  $G_R$  induit par  $R$  a un couplage parfait.

(4) Tout couplage maximum de  $G$  se décompose en un couplage parfait de  $G_R$ , en un couplage de défaut 1 de chaque composante de  $G_P$  et en un couplage maximum de  $H$ .

#### 4. Graphes localement finis avec un et un seul couplage parfait

Kotzig a prouvé dans [7] que tout graphe fini contenant un et un seul couplage parfait a un isthme appartenant à ce couplage. Cela n'est plus vrai pour les graphes localement finis infinis, comme le montre l'exemple suivant.

##### Exemple 4.1.

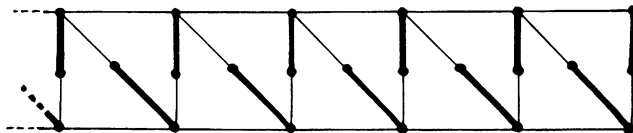


Fig. 1.

Le graphe de la Fig. 1 est 2-arête-connexe et n'a qu'un seul couplage parfait (représenté par les arêtes épaisses).

Un résultat semblable au théorème de Kotzig est le suivant.

**Théorème 4.2.** Tout graphe localement fini contenant un et un seul couplage parfait est au plus 2-connexe.

Nous ne sommes pas arrivés à caractériser les graphes localement finis (infinis) ne contenant qu'un seul couplage parfait, bien que nous ayons pu établir quelques unes de leurs propriétés. Nous faisons la conjecture suivante.

**Conjecture 4.3.** *Tout graphe  $G = (X, U)$  localement fini (infini) 2-connexe contenant un et un seul couplage parfait a un ensemble de séparation  $S$  de cardinal 2 tel que  $C_0(X \setminus S) \geq 1$ .*

**5. Nombre de couplages parfaits d'un graphe localement fini**

Si  $G$  est un graphe localement fini,  $F(G)$  désignera le nombre de couplages parfaits de  $G$ . Si  $n$  est un entier  $F(n)$  désignera la plus petite valeur de  $F(G)$  lorsque  $G$  parcourt la classe des graphes localement finis  $n$ -connexes et contenant au moins un couplage parfait. En ces termes, le Théorème 4.2 se traduit par  $F(3) \geq 2$ . Les exemples qui suivent montrent que  $F(n)$  est fini pour tout entier  $n$ .

**Exemples 5.1.** Soit  $n \geq 3$  un entier. Définissons un graphe localement fini infini  $T_n$ . Soit  $(X_m \mid m \in \mathbb{N})$  une suite d'ensembles deux à deux disjoints, chacun d'entre eux de cardinal  $n$ . Posons  $X_m = \{x_1^m, \dots, x_n^m\}$ . L'ensemble des sommets de  $T_n$  sera  $\bigcup \{X_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ . L'ensemble  $U$  des arêtes de  $T_n$  est défini par: si  $m$  est impair ou si  $m = 0$ ,

$$\{x_i^m, x_j^{m+1}\} \in U, \quad i \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n;$$

si  $m$  est pair et si  $m \neq 0$ ,

$$\{x_i^m, x_i^{m+1}\} \in U, \quad 1 \leq i \leq n.$$

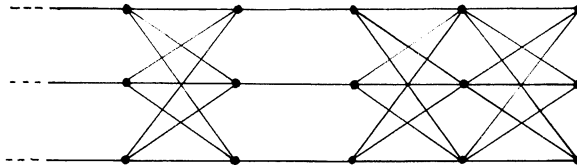


Fig. 2. Le graphe  $T_3$ .

On vérifie aisément que, pour tout  $n$ , le graphe  $T_n$  est  $n$ -connexe et contient exactement  $n!$  couplages parfaits.

Si  $G = (X, U)$  est un graphe localement fini  $n$ -connexe, posons  $a(G) = \text{Max}\{k \in \mathbb{N} \mid \forall S \subset X, k + 1 \leq |S| < \infty, C_{cr}(X \setminus S) \leq |S| - k\}$ . Si  $G$  n'est pas bicritique, on a  $a(G) = 0$  ou  $a(G) = 1$  (dans le cas des graphes finis, on a nécessairement  $a(G) = 0$ ).

**Théorème 5.2.** Soit  $G$  un graphe localement fini  $n$ -connexe non bicritique et contenant au moins un couplage parfait.

Si  $a(G) = 0$ , alors  $F(G) \geq n!$ ; si  $a(G) = 1$ , alors  $F(G) \geq (n-1)!$ .

**Théorème 5.3.** Soit  $G$  un graphe localement fini  $n$ -connexe ( $n \geq 4$ ) et bicritique.

Si  $n$  est pair, alors  $F(G) \geq n!/2$ ; si  $n$  est impair, alors  $F(G) \geq \frac{2}{3}n!$

## 6. Problèmes ouverts

(1) Quelle est la borne inférieure exacte  $F(n)$  du nombre de couplages parfaits des graphes localement finis infinis  $n$ -connexes contenant au moins un couplage parfait?

(2) Quelle est la borne inférieure exacte  $FB(n)$  du nombre de couplages parfaits des graphes localement finis infinis  $n$ -connexes et bicritiques?

(3) Peut-on donner un résultat semblable à celui de Mader [9] pour les graphes localement finis infinis?

## Bibliographie

- [1] L.W. Beineke and M.D. Plummer, On the 1-factors of a non separable graph, J. Comb. Theory 2 (1967) 285–289.
- [2] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Dunod, Paris, 2nde éd., 1973).
- [3] R.A. Brualdi, Matchings in arbitrary graphs, Proc. Camb. Phil. Soc. 69 (1971) 401–407.
- [4] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, Canad. J. Math. 17 (1965) 449–467.
- [5] T. Gallai, Maximale Systeme unabhängiger Kanten, Math. Kut. Int. Közl. 9 (1964) 373–395.
- [6] M. Hall, Distinct representatives of subsets, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 922–926.
- [7] A. Kotzig, Z teórie konečných grafov s lyeárnym factorom II, Mat. Fyz. Časopis 9 (1959) 136–159.
- [8] L. Lovász, On the structure of factorizable graphs, Acta Math. Acad. Scient. Hung. 23 (1972) 179–185.
- [9] W. Mader, Über die Anzahl der 1-Faktoren in 2-fach zusammen hängenden Graphen, Math. Nachr. 74 (1976) 217–232.
- [10] J. Zaks, On the 1-factors of  $n$ -connected graphs, J. Comb. Theory 11 (1971) 169–180.