Die Methode der Gleichgewichtsbewegung als Approximationsverfahren*

Von *Ekkehart Schlicht*, Bielefeld

0. Einleitung

Bei der Analyse langfristiger ökonomischer Entwicklungen wird oft vorausgesetzt, daß eine Reihe kurzfristiger Anpassungsprozesse bereits abgeschlossen ist, daß sich also die kurzfristigen Variablen stets bereits an ihre Gleichgewichtswerte angepaßt haben. Unter dieser Prämisse werden dann die langfristigen Anpassungsprozesse studiert.

In Wirklichkeit laufen nun aber die kurzfristigen und langfristigen Anpassungsprozesse gleichzeitig ab; die langfristigen Anpassungen setzen nicht erst dann ein, wenn die kurzfristigen Anpassungsprozesse bereits abgeschlossen sind. Es fragt sich mithin, ob eine Analyse, die dies voraussetzt, zu korrekten Schlüssen führt. Dies Problem soll im folgenden ein wenig erörtert werden.

1. Die Methode der Gleichgewichtsbewegung

Die Methode der Gleichgewichtsbewegung (Moving Equilibrium Method), wie sie von Lotka eingeführt wurde, kann etwa wie folgt charakterisiert werden[1]: Gegeben sei ein ökonomisches Modell, das durch ein Differentialgleichungssystem beschrieben wird. Die Variablen lassen sich, so werde angenommen, in zwei Gruppen unterteilen: in ›schnelle‹ oder ›kurzfristige‹ Variablen und in ›langsame‹ oder ›langfristige‹ Variablen. x bezeichnet den Vektor der schnellen Variablen und y den Vektor der langfristigen Variablen. Dann läßt sich das System schreiben als

$$\dot{x} = f(x, y) \qquad \dot{x}, x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(x, y) \qquad \dot{y}, y \in \mathbf{R}^m \tag{2}$$

* Ich danke dem Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek, für die freundliche Genehmigung, das Beispiel des Abschnittes 2 aus meinem Buch „Grundlagen der ökonomischen Analyse“ (rororo Studium 112) entnehmen zu dürfen.

[1] *A. J. Lotka*, Elements of Mathematical Biology, New York 1956 (1. Auflage Baltimore 1924), Kap. 11. *P. A. Samuelson*, Foundations of Economic Analysis, Cambridge (Mass.) 1947, S. 321 - 323.

Für gegebenes y besitze $f(x, y)$ einen eindeutigen Gleichgewichtswert $\bar{x}(y)$, der durch die Bedingung $f(\bar{x}, y) = 0$ definiert ist:

$$f(\bar{x}(y), y) = 0 \; . \tag{3}$$

Wenn nun (1) für jedes feste y und jeden Anfangswert x_0 eine Lösung $x(t, x_0)$ liefert, die hinreichend schnell gegen $\bar{x}(y)$ strebt, und wenn die tatsächliche Bewegung von y, wie sie durch (1), (2) gegeben wird, demgegenüber relativ langsam ist, wird sich der Zustand x stets in der Nähe von $\bar{x}(y)$ befinden.

Will man nun die zeitliche Entwicklung der langsamen Variablen y untersuchen, so kann man diesen Sachverhalt ausnutzen und x in (2) durch $\bar{x}(y)$ ersetzen und damit die Bewegung von y unter der Voraussetzung studieren, daß die kurzfristigen Anpassungen bereits erfolgt sind. Man erhält also

$$\dot{Y} = g(\bar{x}(Y), Y) \qquad Y \in \mathbf{R}^m \; , \tag{4}$$

wobei dieses System die tatsächliche Bewegung von y natürlich nur approximativ beschreiben kann. Zur Unterscheidung wurde deshalb der approximative Zustand von y mit Y bezeichnet. Mit $x = \bar{x}(Y)$ wird ein Gleichgewicht für x vorausgesetzt, das der Bewegung von Y, wie sie in (4) beschrieben wird, folgt. Man spricht deshalb von der ›Methode der Gleichgewichtsbewegung‹.

Die so charakterisierte Methode findet in der Ökonomik verbreitet Anwendung, nämlich überall dort, wo kurzfristiges Gleichgewicht vorausgesetzt wird und die Verschiebung dieser Gleichgewichte im Zuge langfristiger Anpassungen untersucht wird[2].

Die Methode des temporären Gleichgewichts, die gegenwärtig in der Theorie des Allgemeinen Gleichgewichts soviel Aufmerksamkeit findet,

---

[2] In der Tat fällt es schwer, überhaupt ökonomische Modelle anzugeben, die sich *nicht* als Varianten dieser Methode interpretieren lassen. Daß es sich dabei im wesentlichen um ein *konzeptionelles* und weniger um ein *reales* Problem handelt, wird bei Hicks sehr deutlich, wenn er, bezogen auf das Problem des Marktgleichgewichts, schreibt: ›So far as this limited sense of equilibrium is concerned, it is true that we assume the economic system to be always in equilibrium. Nor is it unreasonable to do so. There is a sense in which current supplies and current demands are always equated in competitive conditions. Stocks may indeed be left in the shops unsold; but they are unsold because people prefer to take the chance of being able to sell them at a future date rather than cut prices in order to sell them now ... In this (analytically important) sense the economic system ... can be taken to be always in equilibrium; ... (J. R. *Hicks*, Value and Capital, 2. Auflage, Oxford 1946). Dieser Gedanke ist in der Mechanik als das ›Prinzip von d'Alembert‹ bekannt. Mir scheint, daß diese konzeptionelle Problematik bei einigen gegenwärtigen Diskussionen über ›Gleichgewichtstheorie versus Ungleichgewichtstheorie‹ und ähnliche Themen nicht genügend Beachtung gefunden hat, obgleich sie die Wurzel vieler Mißverständnisse ist.

ist ein Spezialfall der Methode der Gleichgewichtsbewegung: Bei den ›kurzfristigen‹ oder ›schnellen‹ Variablen handelt es sich um die Preise und Mengen, die die Märkte räumen. Die Preise und Mengen, die aus diesem kurzfristigen Anpassungsprozeß resultieren, bestimmten die Veränderungen der Angebots- und Nachfragefunktionen über die ›langfristigen‹ Variablen[3].

In diesem Sinne ist die Methode des temporären Gleichgewichts von Marshall eingeführt worden und bildet die Grundlage für seine Unterscheidung von kurzer und langer Periode[4]. Samuelson präzisiert das Marshall'sche Programm in prägnanter Weise, wenn er schreibt:

„I, myself, find it convenient to visualize equilibrium processes of quite different speed, some very slow compared to others. Within each long run there is a shorter run, and within each shorter run there is a still shorter run, and so forth in an infinite regression. For analytic purposes it is often convenient to treat slow processes as data and concentrate upon the processes of interest. For example, in a short run study of the level of investment, income, and employment, it is often convenient to assume that the stock of capital is perfectly or sensibly fixed. Of course, the stock of capital from a longer run point of view is simply the cumulation of net investment, and the reciprocal influence between capital and the other variables of the system is worthy of study for its own sake, both with respect to a hypothetical final equilibrium and the simple course of growth of the system over time.

So to speak, we are able by *ceteris paribus* assumptions to disregard the changes in variables subject to motions much ‚slower' than the ones under consideration; this is nothing but the ‚perturbation' technique of classical mechanics. At the same time we are able to abstract from the behavior of processes much ‚faster' than the ones under consideration, either by the assumption that they are rapidly damped and can be supposed to have worked out their effects, or by inclusion of them in the dynamical equations (derivatives, differences, etc.) which determine the behavior of the system out of equilibrium.

The first of the above mentioned alternatives constitutes the justification for the use for comparative statics rather than explicit dynamics. If one can be sure that the systems is stable and strongly damped, there is not great harm in neglecting to analyze the exact path from one

[3] Vgl. *J. R. Hicks*, Capital and Growth, Oxford 1965, Teil 1, für eine genauere Charakterisierung der verschiedenen Gleichgewichtsmethoden.

[4] *A. Marshall*, Principles of Economics, 8. Auflage (Neudruck), London 1949, S. 276 - 280; vgl. auch *E. Schneider*, Einführung in die Wirtschaftstheorie, IV. Teil: Ausgewählte Kapitel der Geschichte der Wirtschaftstheorie. 1 Band, 2. Auflage, Tübingen 1965, VII. Kapitel.

equilibrium to another, and in taking refuge in a *mutatis mutandis* assumption. Of course, if one chooses to neglect certain dynamic processes, one may still retain others; e. g. in studying capital formation over two decades I may choose to neglect inventory fluctuations, but still may retain the acceleration principle in its secular aspects.

Under the second alternative where shorter run processes are contained in (say) the differential equations of the system, it is to be understood that these differential equations do not necessarily hold exactly at each instant of time. There may well be a still shorter run theory which explains how still higher differential equations lead to (rapidly) damped approaches to the postulated differential equation relations. And do forth in endless regression[5]."

Soweit zur Charakterisierung der Methode der Gleichgewichtsbewegung. Im folgenden soll etwas näher untersucht werden, in welchem Sinne und unter welchen Bedingungen die Methode sinnvoll approximiert.

Dies soll in zwei Schritten geschehen: Zunächst soll der bekannte Marshall'sche Preismechanismus auf einem Markt untersucht werden. Hier wird sich zeigen, daß sich im allgemeinen ein besseres Approximationsverfahren als die Methode der Gleichgewichtsbewegung denken läßt. Sodann soll gezeigt werden, daß die Methode der Gleichgewichtsbewegung zur Stabilitätsanalyse in linearen Modellen geeignet ist, wenn die Bewegung der langfristigen Variablen hinreichend langsam ist.

2. Der Marshall'sche Markt[6]

Man betrachte das Modell eines Marktes. Die Nachfrage z sei eine lineare fallende Funktion des Preises p:

$$z = a - b \cdot p \qquad a, b > 0 \ . \tag{5}$$

Das Angebot y sei gleich der laufenden Produktion und sei kurzfristig fest vorgegeben. Aufgrund der Überschußnachfrage $(z - y)$ ändere sich der Preis auf diesem Markt: Eine positive Überschußnachfrage führe zu Preissteigerungen, eine negative Überschußnachfrage führe zu Preissenkungen. Wiederum sei ein linearer Zusammenhang unterstellt:

---

[5] *P. A. Samuelson*, Foundations of Economic Analysis, a.a.O., S. 330 - 331.

[6] Vgl. *A. Marshall*, Principles of Economics, a.a.O., S. 288 Fn.; *E. Schneider*, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 9. Auflage, Tübingen 1964, S. 302 - 312; *R. G. D. Allen*, Mathematical Economics, 2. Auflage, London 1965, S. 21 f.

(6) $$\dot{p} = \lambda (z - y) \qquad \lambda > 0 \;.$$

Aus (5) und (6) erhält man

(7) $$\dot{p} = \lambda (a - b \cdot p - y) \;.$$

Die Ausweitung oder Einschränkung der laufenden Produktion y sei wie folgt bestimmt:

(8) $$\dot{y} = \mu (p - c - d \cdot y) \qquad \mu, c, d > 0 \;.$$

Gleichung (8) kann wie folgt interpretiert werden: $(c + d \cdot y)$ ist jener Preis, bei dem die Produktionshöhe y gerade beibehalten wird. Dies ist Marshalls Angebotspreis. Liegt der tatsächliche Preis über diesem Angebotspreis, so wird die Produktion ausgeweitet; liegt der tatsächliche Preis niedriger, so wird die Produktion eingeschränkt. Die Kurve $p = c + d \cdot y$ kann als langfristige Angebotskurve interpretiert werden. Das kurzfristige Angebot ist jeweils völlig preisunelastisch und hat die Höhe y.

Das Modell (7), (8) soll nun mit Hilfe der Methode der Gleichgewichtsbewegung analysiert werden. Dabei werde der Preis p als die schnelle und die Produktion y als die langsame Variable aufgefaßt.

Der Gleichgewichtspreis $\bar{p}$ wird durch Nullsetzen der Gleichung (7) berechnet:

(9) $$\bar{p}(y) = \frac{a - y}{b} \;.$$

Setzt man dies in (8) ein, so erhält man die makroökonomische Bewegungsgleichung

(10) $$\dot{Y} = \mu \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b} - c \right) - \left(d + \frac{1}{b} \right) \cdot Y \right\} \;.$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

(11) $$Y(t) = Y^{+} + e^{\varrho t} \cdot (Y_0 - Y^{+}) \;,$$

wobei Y_0 den Anfangswert von Y, Y^{+} die konstante Lösung von (10) und ϱ die charakteristische Wurzel von (10) bezeichnet, d. h.

(12) $$Y^{+} = \frac{a - b \cdot c}{1 + b \cdot d} \,, \quad \varrho = -\mu \cdot \left(d + \frac{1}{b} \right) \;.$$

Die mit der Methode der Gleichgewichtsbewegung ermittelte Lösung (11) soll nun mit der Lösung des vollständigen Systems (7), (8) verglichen werden.

Das Gleichungssystem (7), (8) hat die charakteristischen Wurzeln

$$\varrho_{1/2} = \frac{1}{2}\{-(\lambda b + \mu d) \pm \sqrt{(\lambda b + \mu d)^2 - 4\lambda\mu \cdot (bd+1)}\}. \tag{13}$$

Da der Radikand dem Betrage nach kleiner als $(\lambda b + \mu d)$ ist, haben beide Wurzeln stets einen negativen Realteil. Die Lösungen von (7), (8) streben also im Zeitablauf gegen ihre eindeutigen Gleichgewichtswerte

$$p^+ = \frac{c + da}{1 + bd}, \quad y^+ = \frac{a - bc}{1 + bd}. \tag{14}$$

Insbesondere sind beide Wurzeln reell, wenn die Preisanpassung gegenüber der Mengenanpassung hinreichend schnell erfolgt, denn

$$\frac{\lambda}{\mu} > \frac{1}{b^2} \cdot \{b \cdot d + 2 + 2\sqrt{b \cdot d + 1}\} \quad \text{impliziert} \quad \varrho_2 < \varrho_1 < 0\ . \tag{15}$$

Dieser Fall ist derjenige, der in unserem Zusammenhang interessiert.

Insbesondere erhält man für $\lambda \to \infty$ die Grenzwerte[7]

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varrho_1 = \varrho\ , \quad \lim_{\lambda\to\infty} \varrho_2 = -\infty\ . \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung des Systems (7), (8) kann für den Fall reeller und voneinander verschiedener Eigenwerte mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation T dargestellt werden[8]:

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^+ \\ y^+ \end{bmatrix} + T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{\varrho_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\varrho_2 t} \end{bmatrix} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} p_0 - p^+ \\ y_0 - y^+ \end{bmatrix}, \tag{17}$$

wobei T eine orthogonale 2×2-Matrix ist, die die Bedingung

$$T \cdot \begin{bmatrix} -\lambda b & \lambda \\ \mu & -\mu d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_2 \end{bmatrix} \cdot T \tag{18}$$

erfüllt. Für gewisse Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4, die sich gemäß (17) als lineare Funktionen von $(p_0 - p^+)$ und $(y_0 - y^+)$ ergeben, erhält man also die Lösung

---

[7] Unter Verwendung der Wurzeldarstellung

$$\varrho_{1/2} = -\mu d + \frac{1}{2}\left(-(\lambda b - \mu d) \pm \sqrt{\{(\lambda b - \mu d) - 2\mu/(b - d\mu/\lambda)\}^2 - \{2\mu/(b - d\mu/\lambda)\}^2}\right)$$

[8] Siehe hier und zum folgenden *S. Lefschetz*, Differential Equations: Geometric Theory, 2. Auflage, New York 1962, S. 83 f. und *F. Erwe*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Auflage, Mannheim 1964, S. 137 f.

(19)
$$p\,(t) = p^+ + c_1 \cdot e^{\varrho_1 t} + c_2 \cdot e^{\varrho_2 t}$$
$$y\,(t) = y^+ + c_3 \cdot e^{\varrho_1 t} + c_4 \cdot e^{\varrho_2 t}\ .$$

Ist λ sehr groß, so geht $e^{\varrho_2 t}$ sehr schnell gegen Null und p und y nähern sich nach dieser kurzen Anpassung approximativ mit $e^{\varrho_1 t}$ ihren Gleichgewichtswerten. Da ϱ_1 für große λ auch gerade approximativ gleich dem Eigenwert der Bewegungsgleichung (16) von Y ist, die mit der Methode der Gleichgewichtsbewegung abgeleitet wurde, beschreibt Y die Bewegung von y für große λ approximativ richtig: Y geht mit $e^{\varrho t}$ gegen den Gleichgewichtswert Y^+, der ja mit y^+ übereinstimmt.

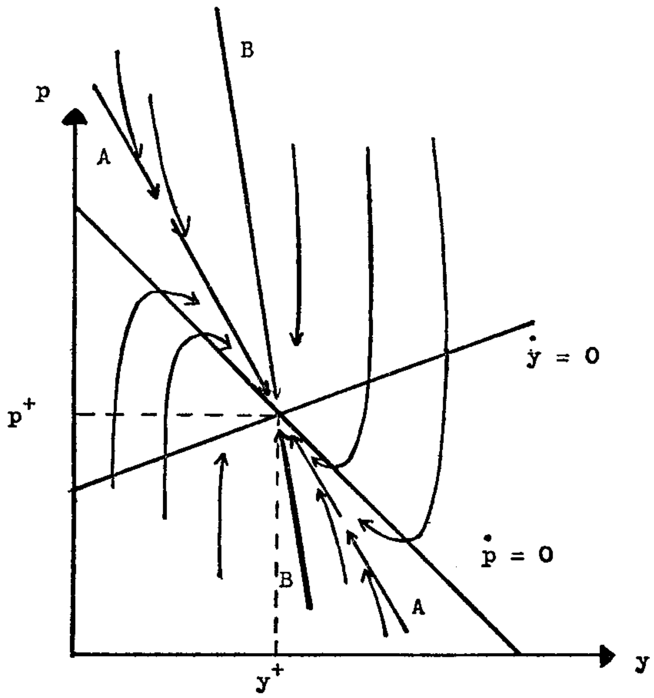

Abbildung 1

In Abbildung 1 ist das Phasendiagramm des Differentialgleichungssystems (7), (8) dargestellt. Die mit $\dot{p} = 0$ bezeichnete Kurve gibt alle Punkte (p, y) an, für die $\dot{p}$ gemäß (12) gleich Null ist. Es handelt sich um die Kurve $p = \bar{p}\,(y) = (a - y)/b$. Oberhalb dieser Kurve fällt p und unterhalb steigt p. Entsprechend ist die mit $\dot{y} = 0$ bezeichnete Kurve durch Nullsetzen von (8) konstruiert. Es handelt sich um die Kurve $p = c + d \cdot y$. Rechts von dieser Kurve fällt y, links davon steigt y. Im obersten Quadranten verläuft mithin die Bewegung von (p, y), wie sie durch (7), (8) beschrieben wird, südöstlich, im rechten Quadranten südwestlich, im unteren Quadranten nordwestlich und im linken Quadranten nordöstlich.

Ferner sind die beiden Geraden A und B eingezeichnet, die sich ebenfalls im Gleichgewichtspunkte (p^+, y^+) schneiden. Sie sind mit Hilfe der beiden Zeilen $T(1)$ und $T(2)$ der Matrix T durch die folgenden Bedingungen definiert:

$$(20) \qquad A\colon \; T(2) \cdot \begin{bmatrix} p - p^+ \\ y - y^+ \end{bmatrix} = 0 \,, \quad B\colon \; T(1) \cdot \begin{bmatrix} p - p^+ \\ y - y^+ \end{bmatrix} = 0 \,.$$

Für alle Punkte auf A bestimmt also allein die erste Wurzel ϱ_1 den Verlauf von p und y, wie aus der Darstellung (17) hervorgeht. Auf A sind also die Konstanten c_2 und c_4 in (19) gerade gleich Null und p und y streben entlang A mit $e^{\varrho_1 t}$ gegen den Gleichgewichtspunkt. Entsprechend bewegen sich alle Punkte auf B entlang B zum Gleichgewichtspunkt, wobei die Geschwindigkeit dieser Bewegung allein durch ϱ_2 bestimmt wird; die Koeffizienten c_1 und c_3 in (19) sind hier gleich Null. Der Gleichgewichtspunkt ist ein stabiler Knoten, wobei sich die Trajektorien um so stärker an A anschmiegen, je größer ϱ_2 dem Betrage nach gegenüber ϱ_1 ist, da die Bewegungen in B-Richtung dann sehr viel schneller sind als in A-Richtung. Dieses Anschmiegen ist mithin um so ausgeprägter, je größer λ im Verhältnis zu μ ist (vgl. (16)), d. h. je schneller die Preisanpassung gegenüber der Mengenanpassung im ursprünglichen Modell erfolgt. Es läßt sich zeigen, daß für $\lambda \to \infty$ die Kurve A gegen die $\dot{p} = 0$-Kurve strebt und daß sich B der Senkrechten durch (y^+, p^+) annähert. Die Trajektorien entarten dann zu Kurven, die bis zur Kurve A senkrecht verlaufen und dann auf A gegen (y^+, p^+) streben[9].

Solange allerdings λ endlich bleibt, ist $\varrho_1 \neq \varrho$ und der Verlauf von y wird durch die Methode der Gleichgewichtsbewegung nirgendwo exakt beschrieben außer im Gleichgewicht selbst. Auch trifft für endliches (wenn auch großes) λ nicht mehr zu, daß die schnellen Anpassungen an die Kurve $\dot{p} = 0$ erfolgen, die Trajektorien schmiegen sich vielmehr

[9] Beweisskizze: Man definiere $z = (p - p^+)/(y - y^+)$ für $y \neq y^+$. Aus (7) und (8) folgt $\dot{z} = -(b \cdot z + 1) - \lambda(z^2 - dz)$. Die Kurven A und B sind dann durch die Bedingung definiert, daß z im Zeitablauf konstant bleibt. Ihre Steigungsmaße sind mithin die Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $\dot{z} = 0$. Daraus folgt dann $z_1 \to -b$ und $z_2 \to -\infty$ für $\lambda \to \infty$. Transformiert man das Phasendiagramm mittels T so, daß A zur Abszisse und B zur Ordinate wird, so werden die Trajektorien durch Gleichungen der Form $\mathfrak{E} = k \cdot |\eta|^{\lambda/\mu}$ mit k als Parameter der Familie beschrieben, d. h. es handelt sich um parabolische Lösungen, die um so ›eckiger‹ werden, je größer λ wird (vgl. *F. Erwe*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, a.a.O., S. 138).

der Kurve A an. Ersetzt man also das Modell (10), welches nach der Methode der Gleichgewichtsbewegung abgeleitet wurde, durch das Modell, welches die Bewegung von (p, y) entlang der Geraden A exakt beschreibt, so trifft diese Approximation den Grundgedanken der Methode der Gleichgewichtsbewegung für endliche λ besser. Das entsprechende Modell erhält man, wenn man in (10) ϱ durch ϱ_1 ersetzt.

$$\dot{Y} = \varrho_1 (Y - Y^+) \tag{21}$$

Der zugehörige Preis ergibt sich als

$$P = P^+ - \alpha \cdot (Y - Y^+) \qquad P^+ \equiv p^+ \ , \tag{22}$$

wobei α den Betrag des Steigungsmaßes von A bezeichnet.

Anstelle von (11) erhielte man dann die Lösung

$$Y(t) + Y^+ + e^{\varrho_1 t} (Y - \overline{Y_0)} \cdot \tag{23}$$

Dieses Modell würde die Bewegung des wahren Systems entlang der Geraden A exakt beschreiben — und nicht nur im Gleichgewicht, wie bei der Methode der Gleichgewichtsbewegung der Fall. Die schnellen Anpassungen mit ϱ_2 werden vernachlässigt und es werden die langsamen Anpassungen mit ϱ_1 alleine betrachtet. Es ist dabei nur natürlich, nicht ϱ_1 durch ϱ zu ersetzen, wie sich auch aus der Darstellung (19) ergibt, wie es aber bei der Methode der Gleichgewichtsbewegung der Fall ist.

Diese Überlegungen lassen sich leicht auf den Fall höher dimensionaler Systeme übertragen.

3. Die Methode der Gleichgewichtsbewegung als Instrument der qualitativen Analyse

Die mit der Methode der Gleichgewichtsbewegung gewonnene Bewegungsgleichung (10) beschreibt den qualitativen Verlauf des wahren mikroökonomischen Systems korrekt: nämlich die Konvergenz von Y gegen Y^+ (und — über (9) — die Konvergenz von P gegen P^+), auch wenn sich, wie gezeigt wurde, bezüglich der Geschwindigkeit bessere Approximationen denken lassen.

Aus dieser Beobachtung ergibt sich die Frage, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Methode der Gleichgewichtsbewegung als Methode der qualitativen Analyse sinnvoll anwendbar ist. Dieses Problem kann hier natürlich nicht erschöpfend behandelt werden. Es sei deshalb gestattet, daß ich hier nur ein besonders einfaches Problem andeute, welches die Konvergenz zu Gleichgewichtswerten betrifft, und zwar nur für den Fall linearer Systeme, der aber wegen seiner großen Bedeutung für lokale Stabilitätseigenschaften von allgemeiner Relevanz ist.

Den Ausgangspunkt der Analyse bildet das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax + By \qquad x \in \mathbf{R}^n \tag{24}$$

$$y = Cx + Dy \qquad y \in \mathbf{R}^m \; . \tag{25}$$

Dabei sei angenommen, daß die Matrix A, die die Anpassung der schnellen Variablen x beschreibt, nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, oder kurz: A sei stabil.

Die zugehörige Gleichgewichtsbewegung wird durch

$$\dot{Y} = (D - CA^{-1}B)\,y \tag{26}$$

beschrieben. Aus dieser Darstellung ergibt sich, daß die Methode der Gleichgewichtsbewegung bezüglich der Konvergenzeigenschaften zu Fehlschlüssen verleiten kann, auch dann, wenn die Konvergenz des Teilsystems (24) groß ist, d. h. wenn die Realteile der Eigenwerte von A dem Betrage nach alle sehr groß sind. Z. B. ist das System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -x - y \\ \dot{X} &= 3x + 2y \end{aligned} \tag{27}$$

instabil (denn die Spur ist positiv), obwohl die zugehörige Gleichgewichtsbewegung

$$\dot{Y} = -Y \tag{28}$$

sowie auch die Gleichung für $\dot{x}$ bei vorgegebenem y stabil sind.

Es läßt sich jedoch zeigen, daß die Methode der Gleichgewichtsbewegung bezüglich der Konvergenz des wahren Systems (24), (25) zu korrekten Schlüssen führt, wenn die Bewegung von y gegenüber der von x hinreichend klein ist. Um dies zu formalisieren, sei das System (24), (25) durch das System

$$\dot{x} = Ax + By \tag{29}$$

$$\dot{y} = \alpha\,\{Cx + Dy\} \qquad \alpha > 0 \tag{30}$$

ersetzt, wobei der Skalar α hinreichend klein gewählt werden kann, um den Sachverhalt zum Ausdruck zu bringen, daß sich x gegenüber y schnell bewegt. (Alternativ — und äquivalent — könnte man $Ax + By$ mit einem hinreichend großen Skalar multiplizieren.) Die zu (29), (30) gehörige Gleichgewichtsbewegung ist

$$\dot{Y} = \alpha (D - CA^{-1} B) Y . \tag{31}$$

Wie man sieht, ändert die Einführung des Parameters α die Konvergenzeigenschaften dieser Gleichung nicht, denn wenn $(D - CA^{-1} B)$ stabil ist, ist auch $\alpha (D - CA^{-1} B)$ stabil, und zwar für alle $\alpha > 0$ [10].

Der folgende Satz zeigt, daß eine mit der Methode der Gleichgewichtsbewegung abgeleitete Konvergenz auch für den wahren Verlauf des unterliegenden Systems (29), (30) vorliegt, wenn sich die kurzfristigen Variablen gegenüber den langfristigen Variablen hinreichend schnell bewegen.

Satz

Sei A stabil und sei $(D - CA^{-1} B)$ stabil. Dann ist auch

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} A & B \\ \alpha C & \alpha D \end{pmatrix} \tag{32}$$

für hinreichend kleines α stabil.

Beweis

$M(0)$ besitzt die Eigenwerte von A und dem m-fachen Eigenwert Null. Die Eigenwerte von A besitzen alle einen negativen Realteil. Die Eigenwerte von $M(\alpha)$ sind stetige Funktionen von α. Also existiert ein $\alpha > 0$, welches hinreichend klein ist, so daß n Eigenwerte $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ von $M(\alpha)$ einen negativen Realteil besitzen und dem Betrage nach alle größer sind als die übrigen m Eigenwerte $(\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+m})$ von $M(\alpha)$. $M(\alpha)$ ist überdies nichtsingulär für $\alpha > 0$, da es sich mittels der nichtsingulären Transformation

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \alpha CA^{-1} & I \end{pmatrix} \tag{33}$$

[10] λ ist Eigenwert von $(D - CA^{-1} B)$ genau dann, wenn λ/α Eigenwert von $\alpha (D - CA^{-1} B)$ ist, wie sich aus der charakteristischen Gleichung mittelbar ergibt. Das Vorzeichen der Realteile der Wurzeln wird also von α nicht beeinflußt.

aus der Matrix

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \alpha\,(D - CA^{-1}\,B) \end{pmatrix} \tag{34}$$

ergibt:

$$M(\alpha) = T \cdot N\,. \tag{35}$$

Voraussetzungsgemäß ist N nichtsingulär, da A und $\alpha\,(D - CA^{-1}\,B)$ stabil sind. Also sind die Eigenwerte $(\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+m})$ von $M(\alpha)$ von Null verschieden.

Für quadratische A und D und nichtsinguläres A gilt die allgemeine Beziehung

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}\,B)\,. \tag{36}$$

Sei nun $\lambda = \lambda_i$ ein Eigenwert von $M(\alpha)$ mit $i > n$. Dann gilt $\det(A - \lambda\,I) \neq 0$ und demzufolge

$$\det(\alpha\,D - \alpha\,C\,(A - \lambda\,I)^{-1}\,B - \lambda\,I) = 0\,. \tag{37}$$

Dies impliziert

$$\det(\alpha\,(D - CA^{-1}\,B) + \alpha\,C\,\{A^{-1} - (A - \lambda\,I)^{-1}\}\,B - \lambda\,I) = 0\,. \tag{38}$$

Für $\alpha \downarrow 0$ geht $\lambda \downarrow 0$. Also konvergiert die Reihe

$$\lambda\,A^{-2} + \lambda^2\,A^{-3} + \lambda^3\,A^{-4} + \ldots \tag{39}$$

für hinreichend kleines α und es läßt sich schreiben

$$(A - \lambda\,I)^{-1} = A^{-1} + \lambda\,A^{-2} + \lambda^2\,A^{-3} + \ldots\,. \tag{40}$$

Setzt man dies in (38) ein, so folgt

$$\det(\alpha\,(D - CA^{-1}\,B) - \lambda\,I - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i\,\alpha \cdot C \cdot A^{-(i+1)} \cdot B) = 0\,. \tag{41}$$

Für hinreichendes kleines α — und damit hinreichend kleines λ — kann der letzte Term vernachlässigt werden. Für hinreichend kleines α ist λ also approximativ gleich einem Eigenwert von $\alpha\,(D - CA^{-1}\,B)$. Diese Matrix wurde als stabil vorausgesetzt. Also besitzt λ einen negativen Realteil.

q. e. d.

Aus dem Beweis geht hervor, daß die Eigenwerte von $M(\alpha)$ für hinreichend kleines $\alpha > 0$ approximativ gleich den Eigenwerten von A und den Eigenwerten von $\alpha(D - CA^{-1}B)$ sind. Deshalb ist die Methode der Gleichgewichtsbewegung nicht nur für die Untersuchung von Konvergenzverhalten, sondern ganz allgemein zur qualitativen Analyse immer dann anwendbar, wenn das wahre Modell strukturell stabil ist[11].

---

[11] Vgl. *S. Lefschetz*, Differential Equations, a.a.O., S. 250 - 256, zum Begriff der Strukturstabilität.