Ueber

die sogenannte Quadratur des Kreises

von

Dr. Matthäus Paschen.

1877. Programm-Nummer 158.

Ueber die sogenannte Quadratur des Kreises.

1. Ueber Streifen und Strahlen.

Jedes Raumgebilde entsteht durch Bewegung und ist in seiner erstarrten Gestalt nur durch Zurückführung auf die Erzeugungsgrösse erfassbar. Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Endpunkte in der Ebene, so entsteht ein ebenes strahliges Gebilde; bewegt sich dieselbe mit beiden Enden parallel zu sich selbst, so erzeugt sie ein Parallel- oder Streifengebilde. Die durch Strahlbewegung in der Ebene entstandene Fläche ist in der Art ihrer Begrenzung genau bestimmt, wenn sich der Drehpunkt nicht verrückt; beim Streifengebilde sind nur die aus Erzeugungs- und Schlussstrecke bestehenden Gegenseiten (Achsen) bestimmt, nicht aber die seitlichen Grenzen (Geleise), welche von den Endpunkten der Erzeugungslinie beschrieben werden. Sie können zu dieser unter verschiedenen Winkeln geneigt, können gerade und gekrümmt sein, sind aber immer kongruent und parallel, und alle Vierecke von gleichen Erzeugungslinien und Höhen sind inhaltsgleich; denn sie bestehen aus einer gleichen Anzahl gleich langer Streifen, da jeder zur Grundlinie parallele Schnitt ihr stets gleich bleibt. Dabei kann sich die Erzeugungslinie auf einer kreisförmig gebogenen oder gewellten Fläche bewegen, die aber stets durch parallele Bildungskanten bestimmt ist; sie durchläuft bei gleicher Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleiche Flächen, deren Höhe dann nicht durch die gerade senkrechte, sondern durch die gekrümmte oder gezackte Linie messbar ist, welche sich als Durchschnitt der gekrümmten mit der auf ihr senkrechten Ebene ergibt. Auch beim Strahlgebilde kann bei unverrücktem Drehpunkte der Schwingungspunkt des Strahles sich in einer Ebene ausserhalb des Drehpunktes bewegen (Kegel) oder eine wellenförmige Linie beschreiben, ohne bei gleicher Geschwindigkeit den Flächenraum zu ändern, dessen Grösse immer durch die zur Geraden ausgestreckten Weglänge des Schwingungspunktes bestimmt wird. Alle höheren Gebilde entstehen durch zusammengesetzte Bewegung des Dreh- und Schwingungspunktes der Erzeugenden.

Will man das Grössenverhältniss eines bestimmten Strahlgebildes (Kreissektor) zu einem bestimmten Streifengebilde (Rechteck) ermitteln, so ist vorerst die Grösse der Raumerfüllung durch Strahlung und Streifung festzustellen, also der naheliegende Satz:

„Wenn von zwei gleichen Geraden sich die eine um einen ihrer Endpunkte strahlend, die andere mit beiden Endpunkten aus ihrer Grundlage parallel zu sich selbst fahrend bewegt, so beschreibt bei gleicher Geschwindigkeit die fahrende einen doppelt so grossen Raum als die strahlende."

Beispiel 1. Denkt man sich die fahrende auf der strahlenden in ihrem Schwingungspunkte senkrecht und den so entstandenen rechten Winkel mit gleichen Schenkeln lothrecht gestellt und mit dem Scheitel um den freien Endpunkt des wagerechten Schenkels gedreht, so hat dieser einen Kreissektor, der lothrechte einen Theil eines Cylindermantels durchlaufen, der sich zum ganzen Mantel verhält, wie der Sektor aus dem strahlenden Schenkel zum Vollkreise. Der Mantel dieses Cylinders verhält sich aber zum Grundkreise wie 2 : 1, ebenso auch das Streifen- zum Strahlgebilde. Sie entstanden aber aus gleichen Erzeugungslinien, die, weil fest verbunden und nur auf demselben Kreisbogen beweglich, auch dieselbe Bahn und Geschwindigkeit haben mussten.

Beispiel 2. Lässt man einen beliebigen Kreisbogen B sich parallel und senkrecht über sich selbst bis zur Höhe seines Radius r erheben, so ist der Inhalt der entstandenen Wand = Br. Fügt man ihrem Fusse den zugehörigen Kreissektor ein und theilt ihn durch koncentrische Kreise in unendlich schmale Bogenstreifen, so bilden diese, wie sich leicht zeigen lässt, eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede B, dem Schlussgliede 0 und der Gliederanzahl r, da sich nur soviel Kreise ziehen lassen, als r Theile hat. Ihre Summe $\frac{1}{2}r\,(B + 0) = \frac{1}{2}Br$ macht den Kreissektor aus. Demnach verhält sich die Bogenwand zum Kreissektor, wie $Br : \frac{1}{2}Br = 2 : 1$. Es ist aber gleich, ob man sich die Bogenwand durch Erhebung des Bogens B zur Höhe r oder durch Parallelbewegung der Geraden r auf dem Bogen B entstanden denkt. Mithin hat die parallelbewegte r auf gleichem Wege einen doppelt so grossen Raum durchlaufen, als die strahlende r.

Beispiel 3. (Figur 1.) Es sei m n e d ein rechtwinkliges Streifengebilde aus der Erzeugungslinie m d = a o = o b = o c des Strahlengebildes o a b c, dessen Bogen a b c gleich der Geraden d b e, wovon er in der gemeinschaftlichen Mitte b berührt wird, so dass m o = o n. Zieht man um o den Bogen $\alpha\beta\gamma$ und im Durchschnittspunkt β mit o b die $\delta\beta\varepsilon \parallel$ d b e, begränzt durch d o und o e, so ist

$$\begin{array}{ll} \text{Bogen } \alpha\beta\gamma : abc = o\beta : ob \\ \qquad\quad \delta\varepsilon : de = o\beta : ob \\ \hline \text{Bogen } \alpha\beta\gamma : abc = \delta\varepsilon : de \\ \text{Bogen} \qquad\quad abc = de \\ \hline \text{Bogen} \qquad\quad \alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon. \end{array}$$

Es entspricht also jedem Bogenstreifen des Strahlgebildes ein gleicher Geradstreifen des Dreiecks d o e, also müssen auch die Summen gleich sein, d. i. $oabc = \triangle ode = \frac{1}{2}mned$.

Beispiel 4. (Fig 2.) Bewegt sich von zwei gleichen Kreissehnen die eine a b parallel zu sich selbst in die Lage c d, die andere $\alpha\beta$ um β sich drehend in die Lage $\beta\gamma$, und ist Bogen $\frac{\alpha\gamma}{2}$ = Bogen a c = Bogen b d, so sind die durchlaufenen Räume gleich.

Zum Beweise ziehe man in dem Viereck a b d c die Diagonale a d und in dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Winkel- und Bogenhalbirungslinie $\beta\delta$, dann ist

$$\begin{array}{c} ab = \alpha\beta \\ \text{Bogen } bd = \text{Bogen } \delta\alpha \\ \angle bad = \angle \alpha\beta\delta \\ \hline \triangle abd \cong \triangle \alpha\beta\delta \\ \text{ebenso } \triangle adc \cong \triangle \beta\delta\gamma \\ \hline \triangle \alpha\beta\gamma = abdc. \end{array}$$

Bei gleicher Zunahme der Erzeugungsstrecken musste also der Schwingungspunkt α der Linie $\alpha\beta$ einen doppelt so grossen Bogen durchlaufen, als jeder der Endpunkte von a b. Ohne Zuwachs hätte in derselben Zeit a b nur das Bogenviereck a b d k, $\alpha\beta$ den Sektor $\beta\alpha\varepsilon\varkappa$ durchlaufen, welcher um

$aok + bed = \alpha\delta\varkappa\varepsilon$ kleiner ist als das Bogeneck a b d k. Es hat also durch das Wachsen der Erzeugungslinie das Viereck a b d k nur um a c k, dagegen der Sektor $\beta\alpha\varkappa$ um $\alpha\varkappa\gamma = ack + \alpha\delta\varkappa$ zugenommen.

Zieht man in dem Streifengebilde eine die Bogen a c und b d halbirende Parallele x y, so ist $xy = ad = \beta\delta$, oder allgemein: Werden die Bogen a b und c d von a und b aus durch Parallelen und der Winkel β von $\alpha\beta$ aus durch Strahlen in derselben Reihenfolge proportional getheilt, so sind Parallelen und Strahlen bezüglich gleich, und haben diese Kreisgebilde ein beinahe gleiches Verhältniss, als diejenigen Strahl- und Streifengebilde, welche aus einer während ihrer Bewegung unveränderlich grossen Erzeugungslinie entstanden. Auf diesem Satze beruht die Lösung der für die Kreisquadratur wichtigen Aufgabe, einen beliebigen Kreissektor als ein Kreisstreifengebilde (Differenz von zwei Kreisabschnitten) darzustellen (Umkehrung?).

Beispiel 5. (Fig. 3.) Ist $ab = ao \perp mn$ und bewegt sich a b um b beständig so wachsend, dass der Schwingungspunkt vom Drehpunkte b und der Geraden m n immer gleichen Abstand behält, einerseits bis e und andrerseits bis f, so dass $be + bf \parallel mo + on$, so sind Bogen a e und a f Zweige einer einfachen Parabel, welche den Raum $aebf = \frac{2}{3}ab \times ef$ zwischen sich fassen, also $ape = aqf = \frac{1}{3}ab.\,be$. Es ist aber Rechteck $ma = ae = \frac{3}{3}ab.\,be$, also $moap + ape = moae = \frac{4}{3}ab.\,be$.

Demnach hat die Linie a o parallel zu sich selbst und wachsend fortbewegt bis m e in gleicher Zeit einen doppelt so grossen Raum beschrieben, als die ihr gleiche a b, welche sich mit o a gleichmässig wachsend um ihren Endpunkt b bis zur Lage b e bewegt hat. Mithin ist Streifengebilde a o m e doppelt so gross als Strahlgebilde b a e, das sich übrigens nur in dieser Lage zugleich als Strahl- und Streifengebilde auffassen lässt; die sonstige Quadratur des Parabelraumes betrachtet diesen als Streifengebilde.

Beispiel 6. Bewegt sich das Quadrat r^2 parallel zu sich selbst um die Lothstrecke $2r\pi$, so erzeugt es eine Säule vom Inhalt $2r^3\pi$; macht dasselbe um eine Seite als Achse eine volle Umdrehung, so entsteht ein Cylinder von der Höhe r, Grundfläche $r^2\pi$ und Grösse $r^3\pi$. Es ist also in diesem Falle auch bei Hochgebilden das Streifengebilde doppelt so gross als das Strahlgebilde, wenn Erzeugungsflächen und Wege gleich sind.

Die hier angeführten Beispiele sind mehr oder minder sichere Ausgangspunkte für die Kreisquadratur, weil sie das oben aufgestellte Bildungsgesetz für die Raumgestalten im Auge behalten; bleibt dieses ausser Acht, so kommt man trotz tausendjährigen Grübelns nicht weiter.

2. Ueber die Möndchen des Hippokrates (Kreisverschiebungsgebilde).

Die bekannten Möndchen des Hippokrates sind mehr ein Beweis für die weltgeschichtliche Bedeutung des Satzes von Pythagoras, als für die Möglichkeit der geometrischen Kreisquadratur, aber dennoch für diese von Bedeutung geworden, da sie, wie auch das irrationale Verhältniss der Diagonale zur Seite des Quadrats, es verhindert haben, das Arithmetisch-Irrationale als eine geometrische Unmöglichkeit und dadurch jeden Versuch zur Lösung der Kreisquadratur als Lächerlichkeit hinzustellen.

Ist (Fig. 6) aus dem Punkte D mit dem Radius DA der Quadrant AEBD und über seiner Sehne AB der Halbkreis ACB beschrieben, so folgt aus dem Möndchensatze, dass Mond AEBC = △ ADB.*) Beschreibt man auf der andern Seite von AB den Halbkreis ABD und den Quadrantenbogen AFB, so fällt dessen Mittelpunkt C in die Peripherie des jetzt vollständigen Kreises ACBD, mithin

$$\begin{array}{rcl} ACBE & = & \triangle ADB \\ ADBF & = & \triangle ACB \\ \hline ACBE + ADBF & = & \square ADBC \\ ACBE + ADBF & = & \text{Kreis } ACBD - AEBF \\ \hline \square ADBC & = & \text{Kreis } ADBC - AEBF. \end{array}$$

Die Linse AEBF besteht aber aus den kongruenten Viertelkreisabschnitten AEB und AFB, die den 4 Viertelkreisabschnitten über den Quadratseiten ähnlich sind, also nach dem Satze des Pythagoras

$$\begin{array}{l} \text{Abschnitte über } AC + CB = AEBO \\ \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad AD + DB = AFBO \\ \hline \text{Abschnitte über } AC + CB + AD + DB = AEBF. \end{array}$$

So kommt man auf den Satz: Das dem Kreise eingeschriebene Quadrat ist gleich dem Kreise vermindert um die Kreisabschnitte über den Quadratseiten. Verlegt man also diese vier Kreisabschnitte von der Peripherie an den Durchmesser durch Konstruction von zwei noch einmal so grossen und ähnlichen Kreisabschnitten, so entstehen die Möndchen des Hippokrates, die allerdings, wie unzählige andere bogenseitige Gestalten, quadrirbar sind, aber bis jetzt weder als aliquote Theile der Kreisfläche bestimmt, noch unmittelbar, wie die Verschiebungsgebilde, auf geradseitige Erzeugungsgestalten zurückgeführt wurden.

Denkt man sich über dem Durchmesser AB unendlich viele Senkrechten errichtet und die in den Möndchenräumen befindlichen Stücke derselben auf den Durchmesser herabgelassen, so dass CE = GO, DF = KO u. s. w., so wird dadurch die (wenigstens scheinbar) geschlossene Kurve AMNBQP = ACBD bestimmt und Sichel AMNBC = Sichel APQBD = AOBE = AOBF. Halbirt man ausserdem durch eine Ellipse über dem Durchmesser AB als grosser Achse die Kreisfläche, so ist diese Ellipse AIBH das arithmetische Mittel zwischen der Linse AEBF und dem Sichelkreise AMNBQP, da die zwischen dem Linsen- und Sichelbogen liegenden Stücke der vom Durchmesser aus errichteten Senkrechten überall durch den Ellipsenbogen halbirt werden, so dass FH = HK, EI = IG u. s. w.**) Auch durch Veränderung der rechtwinkligen Dreiecke ergeben sich noch mancherlei, aber schwerlich zum Ziele führende Gestalten. Halbirt man (Fig. 5) den halben Kreisabschnitt über AO durch Bogen AG und den Kreisabschnitt über AC durch Bogen AHC, so ist △AOC = AGCH. Dreht man den Bogen CKB als Bogen CIB in das Dreieck COB, so ist Halbabschnitt OBF = Abschnitt CIB, also CFBI = △COB. Lässt man △AOD durch zu OD parallele Senkrechten auf den Quadrantenbogen AD herab, so dass RS = MT u. s. w., so ist APOD = △AOD. Senkt man ebenso △DOB auf Bogen BIE, so dass DO = LE u. s. w., so ist LNBE = △DOB. Es entstehen also mit Einschluss der halben Mondsichel fünf bogenseitige

*) Brockmann, Planimetrie S. 163 bemerkt: „Ausser dieser Form hat Clausen noch vier andere mondförmige Flächen angegeben, deren Flächeninhalt durch eine geradlinige Figur dargestellt werden kann. Vgl. Crelle's Journal Bd. 21." Leider stand mir dieser Band nicht zur Verfügung.

**) Auf diese Sichel- oder Kreiseckkurve kam ich erst in den letzten Wochen vor Druck dieser Abhandlung und muss mir die nähere Erforschung ihrer Eigenschaften, namentlich ihres Verhältnisses zur Parabel und Lemniskate vorläufig versagen.

Gestalten mit gerader Grundlinie, gleicher Höhe und dem Flächeninhalt von $^1/_4$ des eingeschriebenen Kreisquadrats.

Dass auch die Möndchen nur Streifen- und Verschiebungsgebilde aus den inhaltsgleichen Dreiecken sind, muss man vermuthen, weil man ihre Quadrirung allein durch den Pythagorassatz nachweist. Diesen kann man freilich unmittelbar auf den Zahlensatz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gründen, was in den Schulbüchern meines Wissens bis jetzt nicht geschah. Bezeichnen a und b die Katheten, c die Hypotenuse, beschreibt man über c nach Aussen c^2 und zieht durch die freien Ecken von c^2 Parallelen zu den verlängerten Katheten, so entsteht $(a + b)^2$, welches jetzt aus c^2 und vier kongruenten Dreiecken besteht, welche, da das Anfangsdreieck $= \frac{ab}{2}$, zusammen $= \frac{4ab}{2} = 2ab$ sind. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 & = & \frac{4ab}{2} + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & = & \frac{4ab}{2} + c^2 \\ 2ab & = & \frac{4ab}{4} \\ \hline a^2 + b^2 & = & c^2. \end{array}$$

Euklid dagegen weist das Hypotenusenquadrat als eine Verschiebung aus den Kathetenquadraten nach. Ebenso lässt sich der Hypotenusenkreisabschnitt als Verschiebung aus den ähnlichen Kathetenkreisabschnitten und überhaupt die Vervielfachung eines Kreises als Verschiebung auffassen. Soll z. B. (Fig. 12) der mit ba beschriebene Kreis vervierfacht werden, so verschiebe man ihn um sich selbst zu der Ellipse mit den Halbachsen bn und ba, wodurch er verdoppelt wird, und verschiebt man die Ellipse von mn aus um sich selbst, so entsteht der Kreis mit dem Halbmesser be; welcher also das vierfache des Kreises mit dem Halbmesser ba ist. Dasselbe gilt von jedem Grössenverhältnisse und allen ähnlichen Kreisabschnitten.

Man kann aber auch unmittelbar, ohne Verallgemeinerung des Pythagorassatzes, z. B. △DOB in die halbe Mondsichel ECB verschieben (Fig. 6). Bringt man es zunächst in die Lage COB, so hat es bereits das Stück CEB des halben Möndchens erfüllt. Ferner kann man auch den Halbabschnitt EOB in den Abschnitt über CB verschieben. Denn zieht man EB, halbirt den Bogen CB und konstruirt das dadurch bestimmte Abschnittsdreieck über CB, so ist

$$\begin{array}{l} \triangle BOE = \frac{1}{2}(DE - DO)\,OB = \frac{1}{2}DE.\ OB - \frac{1}{2}DO.\ OB \\ \triangle \text{ über } CB = \frac{1}{2}(OB - \frac{1}{2}CB)\,CB = \frac{1}{2}CB.\ OB - \frac{1}{2}CB^2 \\ CB = DE;\ \frac{1}{4}CB^2 = \frac{1}{2}DO.\ OB \\ \hline \triangle BOE = \triangle \text{ über } CB. \end{array}$$

Wird zur Fortschaffung des Abschnitts über EB demselben ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben, so ist dessen Hälfte wiederum gleich jedem derjenigen Dreiecke, die in den durch Halbirung des Bogens CB bestimmten Kreisabschnitten errichtet wurden u. s. w., bis bei fortgesetzter Uebertragung die immer mehr verkleinerten Kreisabschnitte zu O werden, wodurch dann Halbabschnitt EOB vollständig in den Abschnitt über CB in geradlinigen Flächen übertragen oder verschoben ist.

So lange also die Möndchen des Hippokrates nicht als Strahlgebilde nachweisbar sind, müssen sie für Streifengebilde gelten unter dem Namen Bogenecke oder Kreisverschiebungsgestalten. Sind diese nur von Konvexbogen (Linsen- oder Hochbogenecke) oder nur von Konkavbogen (Kehl- oder Tiefbogenecke) begränzt, oder sind die gemischten Bogenseiten nicht zu je zwei kongruent oder auf einander zurückführbar, so sind sie nur mit π zu berechnen. Sind aber die begrenzenden Konvex- und Konkavbogen zu je zwei von gleicher Krümmung und Länge (Ausklappecke) oder sonst auf einander zurückführbar, so sind sie zu quadriren und beweisen den für die Formenlehre wichtigen Satz:

„Jedes geradseitige Gebilde lässt sich bogenseitig vervielfachen."

Beispiel 1. (Fig. 4.) Durch die sich erst in a schneidenden Bogen amb und anc ist $\triangle$abc in die Theile amb, anc und bmnc zerlegt. Klappt man nach Aussen amb als $a\mu b$, anc als $a\nu c$, bmnc als $b\alpha c$, so ist Bogeneck $a\mu b\alpha c\nu = 2\triangle abc$.

Beispiel 2. (Fig. 7.) Theilt man das Quadrat ABCD durch die Quadranten AOC und BOD in AOD + DOC + COB + BOA und klappt diese Theile nach Aussen, so ist die von den

Konvexbogen AE = EB, FD = CG,

Konkavbogen AF = BG, CH = DH

begränzte Gestalt = 2ABCD. Durch andere Theilung des Quadrats oder durch Umstellung obiger Bogen erhält man eine von den

Konkavbogen AE = EB, FD = CG,

Konvexbogen AF = BG, CH = DH

umschlossene Gestalt gleichen Inhalts.

Beispiel 3. (Fig. 8.) Theilt man das Quadrat ABCD aus den Halbirungspunkten seiner Seiten durch 4 mit der halben Seite beschriebene Quadranten in AOB + BOC + COD + DOA und klappt diese Theile nach Aussen, so ist Bogenquadrat EFHG = 2 Geradquadrat ABCD.

Beispiel 4. Durchsägt man einen Würfel senkrecht zur Grundfläche so, dass diese so, wie die Quadrate in Beispiel 2 und 3, getheilt werden, und stellt die Theile mit den 4 ungetheilten Quadratflächen so zusammen, dass sie den Hohlraum des Würfels begränzen, so wird der Würfelraum bogenseitig verdoppelt, und hat die so entstandene Säule nur nach oben und unten ebene Flächen von der in Beispiel 2 und 3 angegebenen Gestalt, deren Hälften auch Rotationskörper erzeugen können. Diese würden aber nicht auf den Kubus zurückführbar sein, was dagegen bei den nur von gebogenen Flächen begränzten Doppelkappen der Fall ist.

3. Ueber die Kreiserhebungsgebilde.

Abweichend vom Rotationssystem und in näherem Anschluss an's Leben kann man sich die krummflächigen Körper aus einer parallel zu sich selbst mit ihren Ecken auf bestimmten Bildungskanten aufsteigenden Grundfläche entstanden denken. So erwächst die Halbkugel durch verjüngende Erhebung ihres Grundkreises auf einem im Durchmesser der Grundfläche senkrechten und sämmtliche wagerechte Durchschnittskreise der Halbkugel halbirenden grössten Halbkreise.

Statt des Kreises kann ein beliebiges Kreisvieleck eintreten, das sich auf ebensovielen in den Eckstrahlen der Grundfläche senkrechten Quadranten erhebt, als diese Ecken hat. Einen solchen Körper, der durch Erhebung seiner Grundfläche auf Kreis- oder Ellipsenkanten entstand, kann man nach Vorgang der Baukunst (Kappen- und Sterngewölbe) mit dem Namen Kappe (Quadratkappe, Sternkappe, Sehnenkappe, Tangentenkappe u. s. w.) bezeichnen

Der Kegel entsteht durch Erhebung seines Grundkreises auf den geraden Schenkeln eines in dessen Durchmesser als Grundlinie senkrechten Dreiecks, das bei den Konoiden bogenschenklig ist und sämmtliche wagerechte Querdurchschnitte halbirt, die Pyramide durch Erhebung der Grundfläche auf soviel geraden Kanten, als diese Seiten hat, oder an einem senkrechten Dreiecke, dessen eine Seite

bei unpaariger Kantenzahl keine Kante bildet, sondern in der Seitenfläche verschwindet, Cylinder und Säule auf dem senkrechten Axenparallelogramm.

Statt der parallelen, gewölbten und gedachten (konvergirenden) Leitkanten können auch einwärts gedrehte (Hohlbogen) eintreten, und so bilden die durch ihre Erzeugungsfläche mit dem Erzeugungskreise der Halbkugel verwandten Körper folgende Gruppen:

I. Gleichwüchsige. Berührungs- und Sehnensäulen. Kehlsäulen.

II. Einwüchsige (verjüngende): a. Wölbständige. Halbkugel. Kappe. Hochkerbkappe. b. Dachständige. Kegel. Geradpyramide. Kehlpyramide. c. Hohlständige. Kreiselkegel. Hohlkappe. Hohlkerbkappe.

III. Auswüchsige. a. Wölbhang. Kugelhang. Kappenhang. Kehlkappenhang. b. Schräghang. Kegelhang. Kastenhang. Kehlkastenhang. c. Hohlhang. Kreiselhang. Kappenhang. Kerbkappenhang.

Die Räume dieser Körper sind aus dem Radius des gemeinschaftlichen Bildungskreises berechenbar. Einzelne als Hohlkörper erscheinende Differenzgebilde lassen sich durch Umstellung in Vollkörper verwandeln, wenn die π-Formel negativ ist, z. B. die Differenz der dem Cylinder umschriebenen Quadratsäule und des Cylinders lässt sich aus ihren vier kongruenten Theilen in eine Kehlsäule zusammensetzen, da die vier rechten Winkel in einander passen.

Wenn der Coefficient, womit das Produkt aus Höhe und Grundfläche multiplicirt werden muss, um die Masse zu erhalten, mit dem Worte „Hebungszähler" bezeichnet wird, gilt für das Grössenverhältniss dieser Körper das allgemeine Gesetz, dass sich verhalten 1. bei gleichen Grundflächen und Hebungszählern die Massen wie die Höhen, 2. bei gleichen Grundflächen und Höhen die Massen wie die Hebungszähler, 3. bei gleichen Grundflächen und Massen die Höhen umgekehrt wie die Hebungszähler, 4. bei gleichen Hebungszählern und Höhen die Grundflächen wie die Massen, 5. bei gleichen Hebungszählern und Massen die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, 6. bei gleichen Höhen und Massen die Grundflächen umgekehrt wie die Hebungszähler, und dass 7. bei gleichen Grundflächen, Hebungszählern und Höhen die Massen, 8. bei gleichen Hebungszählern, Höhen und Massen die Grundflächen, 9. bei gleichen Höhen, Massen und Grundflächen die Hebungszähler, 10. bei gleichen Massen, Grundflächen und Hebungszählern die Höhen gleich sind.

Ueber das Verhältniss der Hebungswege (Bildungskanten) zu den Hebungszählern lässt sich im Allgemeinen behaupten, dass Gleichartigkeit der Hebungswege Gleichheit der Hebungszähler in sich schliesst, aber nicht umgekehrt.

Zum Beweise, dass bei gleichen Hebungswegen (Hebungszählern) und Höhen sich die Grundflächen verhalten wie die Massen (Regel 4) überstelle man (Fig. 9) das Quadrat ABCD senkrecht über den Diagonalen mit den Halbkreisen AEC und BED, welche dem ABCD umschriebenen Kreise angehören, so entsteht eine Kugelsehnenkappe, indem sich das Grundquadrat parallel zu sich selbst verjüngend auf Halbkreiskanten bis zum Scheitel E erhebt und mit seinen Seiten eine elliptische Wölbung beschreibt. Denkt man sich die Kappe im Halbkreise BODE durchschnitten und auseinandergenommen und die beiden Kappenhälften mit den beiden Quadrathälften aufeinander gedreht, so bleibt DB auf DB, die Punkte A und C dagegen fallen aufeinander, und es hat der Körper (Fig. 10) jetzt die Kreisebene $AEDE^1$ zur Grundfläche und die Gestalt eines Daches mit rechtwinkligen Sparren über einer halbkreisförmig gebogenen First.

Alle auf BD und der Halbkreisfläche BA(C)D senkrechten Schnitte sind also rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke. Halbirt man die Höhenabschnitte ihrer Grundlinien und errichtet in den Halbirungspunkten (Ellipse) Senkrechte gleich den Dreieckshöhen, so bestimmen diese den Dreiecken inshaltsgleiche Quadrate. Werden in dieser Weise alle Dreiecke in Quadrate verwandelt, so zieht sich (Fig. 11) die Kreisgrundfläche in eine halb so grosse Ellipse $BEDE^1$ zusammen, auf deren Peripherie die senkrecht aufgestellten Bogenwände BEDA und BE^1CA sich in den Ellipsenkanten BAD und

BCD mit dem Kreisgewölbstreifen BADC schneiden. Alle die grosse Achse BOD senkrecht durchkreuzenden Schnitte sind Quadrate. Ausserdem lässt sich der Körper, was für die Hufberechnung bemerkbar ist, in zwei Ellipsencylinderhufe BEDOA und BE^1DOC und den Doppelhuf eines Kreiscylinders BADOC zerlegen.

Um diesen Körper endlich in eine gleichmässige Säule aufzuziehen, stelle man sich (Fig. 12) den mit bn beschriebenen Kreis als die Grundfläche des Bogendachkörpers (Fig. 10) und die mit den Halbachsen ba und bn beschriebene Ellipse als die Grundfläche des einer halben Melone (Fig. 11) ähnlichen Körpers vor. Da dieser als aus lauter senkrechten Quadratplatten bestehend gedacht werden kann, ziehe man diese in Rechtecke aus, welche mit dem grössten Quadrate (Fig. 11) EE^1CA gleiche Höhe haben. Dieses, welches die Höhe bm = r hat, ändert weder Grund- noch Seitenlinien; alle übrigen verlängern die Seitenlinien und mögen die Grundlinien von beiden Seiten gleichmässig verkürzen, so dass ihre Halbirungspunkte in nm liegen. Die dadurch entstehende Kurve atmzn hat mit der Ellipse die Achsen und den Mittelpunkt gemeinsam. Zu ihrer Bestimmung ziehe man durch einen beliebigen Punkt d der grossen Achse mn die Senkrechte xe, welche die Kreisperipherie in e, die Ellipsenperipherie in x und y, den Kurvenbogen in z und t schneidet, und fälle von den Durchschnittspunkten t und z auf die kleine Achse die Senkrechten tp und zq, dann ist

$$
\begin{array}{rl}
 & dy = ye \\
 & dx = dy \\ \hline
 & xy = de \\
 & de^2 = nd.\ dm = (r + bd)\ (r - bd) = r^2 - bd^2 \\
 & bd = pt \\ \hline
 & de^2 = r^2 - pt^2 \\
 & de^2 = xy^2 \\ \hline
 & xy^2 = r^2 - pt^2 \\
\text{Nach Konstruktion} & xy^2 = r.\ tz \\ \hline
 & r.\ tz = r^2 - pt^2 \\
 & pt^2 = r^2 - r.\ tz \\
 & r = 2ab \\ \hline
 & pt^2 = 4ab^2 - 2ab.\ tz \\
 & pt^2 = ab\ (4ab - 2tz) \\
 & 2tz = 2pq \\ \hline
 & pt^2 = ab\ (4ab - 2pq) \\
2ab \text{ oder } & (ab + bc) - pq = ap + qc = 2ap \\
 & 4ab - 2pq = 4ap \\ \hline
 & pt^2 = 4ap.\ ab. \\
\text{Ebenso} & qz^2 = 4cq.\ ab.
\end{array}
$$

Also sind czm und atm Zweige von zwei einander durchschneidenden einfachen Parabeln. Demnach ist Parabelraum

$$
\begin{array}{l}
nbmzc = \frac{2}{3} mn.\ bc = \frac{2}{3} r^2 \\
nbmta = \frac{2}{3} mn.\ ba = \frac{2}{3} r^2 \\ \hline
atmzcn = \frac{4}{3} r^2.
\end{array}
$$

Die Höhe der gleichmässigen Säule ist r, ihr Inhalt $\frac{4r^3}{3}$. Es haben also auch ihre Ursprungskörper, namentlich die Sehnenkappe, den Inhalt $\frac{4r^3}{3}$. Da r dem um das Grundquadrat ABCD (Fig. 9) beschriebenen Kreise als Radius angehört, ist der Inhalt des Grundquadrats $2r^2$ und, da r die Höhe der Kappe ist, ihr Erhebungszähler $\frac{2}{3}$. Die aus demselben Grundkreise $r^2\pi$ mit dem Erhebungszähler $\frac{2}{3}$ zur selben Höhe erwachsene Halbkugel hat $\frac{2r^3\pi}{3}$ Inhalt, folglich

$$\frac{2r^3\pi}{3} : \frac{4r^3}{3} = r^2\pi : 2r^2$$

oder bei gleichen Höhen und Erhebungswegen (Erhebungszählern) verhalten sich die Massen wie die Erzeugungsflächen.

Die hier für die Quadratsehnenkappe aufgestellte Behauptung lässt sich auf alle Sehnen- und Tangentenkappen ausdehnen und ausserdem durch Schwerpunktsgesetze und Darstellung der Kappentheile als Kreuzdiagonalschnitte von Cylindern nachweisen, wo dann die Sehnenkappen aus geraden Ellipsen-, die Tangentenkappen aus geraden Kreiscylindern geschnitten erscheinen.

Grüson (Anleitung zur Mathematik u. s. w. Theil II. §§ 257—266 Berechnung der Gewölbe) führt für die Tangentenkappe durch An- und Abblätterung, wie beim Kugelsatze des Archimedes, den Beweis, dass ihre Oberfläche gleich dem Doppelten ihrer Grundfläche ist, und berechnet den Körperinhalt der Kappe durch Zerlegung derselben in kleine Pyramiden, deren Spitzen in der Mitte des Grundquadrats, deren Grundflächen in den Wölbseiten liegen. Da die Tangentenkappe sich auf Ellipsenkanten mit Kreiswölbung erhebt, sind die Pyramidenhöhen gleich, also auch der Inhalt der Tangentenkappe gleich dem Producte aus ihrer Grundfläche und $\frac{2}{3}$ der Höhe.

Will man die Oberfläche der Kappen nach dem Kugelsatze berechnen, so denke man sich die Kugelwölbung aus übereinander liegenden Kreisringen, die Kappenwölbung aus Quadratreifen gebildet, wo dann in (oder um) jeden Kreisring ein Quadratreifen passt. Da gerade so viel Kreis- als Quadratreifen vorhanden sind, die bei jedem wagerechten Schnitte im selben Verhältniss bleiben, so müssen beide Wölbungen sich in derselben Weise aus ihren Grundreifen ableiten lassen. Das Kugelgewölbe findet man durch Multiplikation des Grundreifens $2r\pi$ mit der Höhe $r = 2r^2\pi$, also die Wölbung der Sehnenkappe $= 4r\sqrt{2}\,r = 4r^2\sqrt{2}$, der Tangentenkappe $= 8r.\ r = 8r^2$. Die Sehnenwange $= r^2\sqrt{2}$, die Tangentenwange $= 2r^2$. Die Abblätterung der Wangenflächen, deren Inhalt und Grundlinien gegeben, deren Seiten und Höhen Ellipsenkanten von gegebenem Verhältniss sind, würde das Problem der Kreisquadratur lösen.

Da die Kappenoberflächen überhaupt ein Produkt aus Grundumfang und Höhen sind, verhalten sich dieselben bei gleichen Höhen wie die Grundreifen.

Archimedes plättete die Kugelwölbung durch Umspannung von Cylinder- und Kegelflächen und fand erst aus der Wölbungsgrösse den Inhalt der Kugel. Da man aber, wie gezeigt, bei allen Sehnen- und Berührungskappen Oberfläche wie Inhalt unmittelbar nachweisen kann, bedarf man des Kugelsatzes für die Kappenkörper und selbst für die Kugel nicht mehr, sondern kann auch diese zu den Kappen rechnen, da sie denselben Bildungsgesetzen untersteht.

Nimmt man die Kappe doppelt (Durchbohrung von gleichen Cylindern), so erhält man eine krummflächige und krummkantige Gestalt, welche trotz ihrer Verwandtschaft mit der Kugel nach Oberfläche und Inhalt eckig darstellbar ist.

Eine für die Auseckung der Kugel wichtige Kappe anderer Art ergiebt sich, wenn man die Hälfte eines durch den Lothschnitt getheilten gleichseitigen Cylinders auf diesen Schnitt als Grundfläche legt, sämmtliche zum Grundquadrate parallelen Rechteckschnitte in Quadrate verwandelt und diese mit ihren Mitten und Ecken senkrecht über die des Erzeugungsquadrates bringt. Diese Kappe hat, was ich noch nicht untersuchte, keine volle Kreis- oder Ellipsenkanten, da sie die aus demselben Grundquadrate zu gleicher Höhe gehobene Tangentenkappe überwölbt, könnte höchstens Abschnitt einer gewöhnlichen Kappe sein; jedenfalls lässt sie sich in der oben gezeigten Weise in eine gleichmässige Säule ausziehen, deren Grundflächengestalt für die Möglichkeit der Auseckung massgebend ist.

Die Kappen des zwei- und dreiachsigen Ellipsoids, der Parabel-, Hyperbel-, Konchoiden- und anderer Bogenkegel (Konoide) und Kuppen füllen den durch Archimedes mit Kugel und Kegel (Kappe und Pyramide) dreigetheilten Raum zwischen Achse und Säule, mit den Erhebungszählern zwischen 0 und 1 wechselnd, und liefern den Beweis, dass von den einfachen krummflächigen Körpern die meisten auseckbar sind.

Die Anwendung des Erhebungs- oder Verjüngungszählers auf Flächen, die man als gleichmässig wachsende Reihen von Linienstreifen betrachtet, misst Dreieck, Kegelmantel, Parabel u. s. w., auch die Halbkreisfläche, wenn man vom Halbkreisbogen, nicht aber, wenn man vom Durchmesser ausgeht; beim Pythagorassatze kann man auch für den Durchmesser den Erhebungszähler anwenden. Der Quadratsatz lässt sich nämlich als Ausklappung des mit dem Höhenstrahl getheilten Dreiecks beweisen und dann verallgemeinern. Es sind ja einerseits die ausgeklappten Schenkeldreiecke (Kathetendreiecke), andrerseits das ausgeklappte Scheiteldreieck (Hypotenusendreieck) dem Erzeugungsdreieck gleich und unter sich ähnliche und ähnlich liegende Gestalten. Errichtet man auf den Erzeugungsseiten den Dreiecken inhaltsgleiche Rechtecke, so sind auch diese ähnliche und ähnlich liegende Figuren. Statt ihrer lassen sich als beliebige Vielfache derselben ähnliche Parallelogramme, Vielecke, also auch Quadrate und Sternecke setzen, welche, durch dieselbe Vervielfachung aus Schenkel- und Scheiteldreieck entstanden, auch ihr Grössenverhältniss festhalten müssen.

Durch das rechtwinklige Dreieck kann man sogleich zu ähnlichen Kreisgestalten übergehen. Beschreibt man um die ausgeklappten Dreiecke Halbkreise und weist, wie oben bei den Möndchen des Hippokrates, etwa bei den kleineren Abschnitten, nach, dass der Abschnitt des Scheitelhalbkreises gleich ist den Abschnitten der Schenkelhalbkreise, so stehen, wenn man sich jedes Dreieck mit dem entsprechenden Kreisabschnitte als ein Ganzes denkt, jetzt auch die drei Strahlgebilde im Grössenverhältniss der ausgeklappten Dreiecke, und müssen also auch die Kreisstreifengebilde, worein man sie verwandelt, im selben Verhältnisse bleiben. Diese sind aber aus den Seiten des Erzeugungsdreiecks durch verjüngende Erhebung entstanden, ihre Höhen stehen im gleichen Verhältniss zu den Erzeugungsseiten und ihre Erhebungszähler sind gleich.

Erheben sich also die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes parallel zu sich selbst mit demselben Erhebungszähler zu einer im Verhältniss zur Grundlinie gleichen Höhe, so ist die Scheitelgestalt an Inhalt den Schenkelgestalten gleich. Da die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen gleich ist dem Quadrate ihrer Summe, also $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots = (1 + 2 + 3 \ldots)^2$, so hat der Quadratsatz für die körperlichen Gebilde keine Gültigkeit. Denn ist in einem Dreieck $A^2 + B^2 = C^2$, so ist über dem entsprechenden Quadratprisma nicht $A^3 + B^3 = C^3$, sondern $A^3 + B^3 + (C - A)\, A^2 + (C - B^2) = C^3$, und ist die Ableitung eines geometrischen Satzes $A^3 + B^3 = C^3$ aus dem algebraischen $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,a^2b + 3\,a\,b^2$, wie es oben beim Pythagorassatze geschah, bis jetzt ebensowenig gelungen, als die Auseckung und Vieltheilung der Kreisfläche.

4. Ueber die Geradstreckung (Rektifikation) des Kreisbogens.

Der zur Berechnung von π führende arithmetische Näherungsweg gewinnt geometrische Bedeutung, wenn man die Umfänge der Kreiseinecke von der Mitte einer Seite, die der Kreisumecke von einer Ecke aus senkrecht auf der Centrale ausstreckt, wodurch die Umfänge sowohl der Um- als Einecke Punkte von Kurvenzweigen bestimmen, die sich dort, wo der Umfang des letzten Um- und Einecks in die ausgestreckte Kreisperipherie übergeht, entweder schneiden oder zu einer einzigen Kurve vereinigen. Die Tangente durch den Punkt, wo die Centrale des Umecks die Kreisperipherie schneidet, wird von beiden Kurvenpaaren begränzt und ist die ausgestreckte Kreisperipherie. Die Centrallinie z. B. des umschriebenen Quadrats, welche die Seite des einbeschriebenen senkrecht in ihrer Mitte schneidet, bleibt als alle übrigen Umfänge senkrecht halbirende Achse liegen. Sie muss also in dem Stücke zwischen der Seite des Quadrats und dem Kreise die Seite des einbeschriebenen 8,16 . . . . Ecks halbiren und in dem Stücke zwischen der Ecke des Aussenquadrats und dem Kreise die Ecken des umschriebenen 8,16 . . . . Ecks aufnehmen. Streng genommen müssen die Umfänge der Kreiseinecke mit dem Doppeldurchmesser als eingeschriebenem Kreiszweieck beginnen und sich durch Bruchecke, welche auf mehrere Kreisumläufe berechnet sind, wie $\frac{5}{2}$-, $\frac{7}{3}$-Eck, ganz allmählich auseinander entwickeln, weil nur so eine genaue Bestimmung jedes Kurvenpunktes möglich ist. Ausserdem ist es nöthig, dass man die wenn auch nur mit der Kreistheilschiene gefundenen, aber bis jetzt nicht verwertheten Kreisecke dazu benutzt, wie das 7- und 9-Eck, wofür die Gleichungen bereits festgestellt sind. Bis zur Fertigstellung solcher für Winkeltheilung und Bogenzug bereits erfundener Werkzeuge muss ich von der Darstellung und Benutzung dieser, wie der Kreisbogenkurve, des Kreisüberhangbogens, der Ellipsenstreckkurve und der bekannten Radlinie, Evolvente u. s. w. vorläufig absehen.

Die Rektifikation, als geometrische Bewegungsaufgabe gefasst, setzt zwei sich parallel zu sich selbst mit abnehmender Geschwindigkeit, in ihren Mittelpunkten stets auf ein und derselben geraden Linie entgegenbewegende Strecken von ungleicher, aber bekannter Länge voraus, von denen die kleinere wachsend, die grössere abnehmend, in einem bestimmten Punkte des ebenfalls bekannten Weges in ein und dieselbe, dann beiden gemeinschaftliche Länge übergeht, welche zu bestimmen ist. Die Schwierigkeit der Lösung liegt in der Bestimmung des Ab- und Zunahmekoefficienten.

5. Ueber die Ausrundung eines regelmässigen n-Ecks zu einem gleichmässigen Nulleck oder Kreise.

Es bezeichne U_n den Umfang, e_n den Eckstrahl (Radius des umschriebenen Kreises), s_n den Seitenstrahl (Radius des einbeschriebenen Kreises), P den Umfang des gleichräumigen Kreises, r seinen Strahl, worin die Eckstrahlen der gleichräumigen Ecke ihr Minimum, die Seitenstrahlen ihr Maximum erreichen, dann ist, da der Inhalt am besten durch U und bezeichnet wird,

$$\frac{1}{2}\,U_n\,s_n = \frac{1}{2}\,Pr,\ U_n\,s_n = Pr$$

$$U_n : P : r : s_n$$

Geht man vom regelmässigen Viereck aus und stellt in einem Quadrantenkreuze von dessen Mittelpunkte aus S_4 als Gränze zwischen Quadrant I und II, U_4 als seine Verlängerung zwischen III und IV, S_8 an S_4 in II unter einem Winkel von $\frac{1}{2}$R, daran s_{16} unter $\frac{1}{4}$R, S_{32} unter $\frac{1}{8}$R, S_{64} unter $\frac{1}{16}$R u. s. w. und U_8, U_{16}, U_{32} u. s. w. als ihre Verlängerungen in IV, so erschöpfen sich nach dem Gesetz der geometrischen Reihe die Winkel so, dass r zwischen II und III senkrecht auf S_4, P zwischen IV und I senkrecht auf U_4 zu stehen kommt. Die Enden der S-Strahlen in Quadrant II und der U-Strahlen in Quadrant IV markiren eine Kurve, die durch Einschaltung von S_5, S_{10} u. s. w., S_6, S_{12} u. s. w. unter den entsprechenden Winkeln sich noch vervollständigen lässt. Eine ähnliche Kurve (Spirale) ergeben die nach denselben Gesetzen geordneten Eckstrahlen.

Eine zum selben Ziele führende Kurve erhält man, wenn man die n^{ten} Theile (Mittelpunkts- oder Bestimmungsdreiecke) der gleichräumigen Vielecke so aufeinanderlegt, dass Mittelpunkt auf Mittelpunkt, Seitenstrahl auf Seitenstrahl zu liegen kommt, so dass die Grundlinien der Dreiecke sich parallel und verjüngend übereinander erheben und die den Mittelpunktswinkel zwischen sich fassenden Eckstrahlen den unmittelbar vorhergehenden Mittelpunktswinkel halbiren, bis er zu Null wird und sie selbst mit den letzten Seitenstrahlen in r zusammenfallen. P durchschneidet dann sämmtliche Mittelpunkts-Dreiecke, dass das von jedem Dreieck abgeschnittene spitzwinklige Stück mit Konkavbogen gleich ist dem rechtwinkligen mit Konvexbogen, welches zwischen Dreieck und P liegt, und dass alle diese Stücke unter sich im Verhältniss der zugehörigen Mittelpunktsdreiecke stehen.

Zwei ähnliche Ellipsen, deren eine sämmtliche U-Strahlen, die andere sämmtliche s-Strahlen als Mittelpunktsstrahlen vereinigt, oder eine gleichseitige Hyperbel, welche das Ausgangsquadrat zwischen Scheitel- und Asymptotenkreuz fasst und in unzählige Rechtecke auszieht, veranschaulichen die Bewegung der Bestimmungsstücke in Strahlen und Streifen. Rundet man U_4 s_4 in einen unächten Bruchkreis, das heisst einen Kreis von mehr als einer Umdrehung, wo also ein Theil doppelt liegt, so wird dieser durch U_3 s_3 vergrössert, sein Doppelsektor verkleinert und letzterer im Vollkreis $\frac{Pr}{2}$ zu Null. Erweitert man den Vollkreis zu einem ächten Bruchkreise, dem ein Sektor fehlt, so tritt jetzt die durch die Bogenlücken (vorher Doppelbogen) der Sektoren bestimmte Kurve immer weiter auseinander und dann wieder zusammen, bis sie in den grössten Radius aufgeht; aber ihre Darstellung setzt die Kreistheilung voraus.

Dagegen bietet die Parabel, wenn auch bis jetzt weder ihr Bogen gestreckt noch ihre quadrirbare Fläche ausgerundet ist, in einer bestimmten Form die Möglichkeit für die Rektifikation des Kreises. Theilt man nämlich die Quadranten des Krümmungskreises vom Scheitel aus in gleiche Theile und trägt eben so viele unter sich gleiche Stücke zu beiden Seiten des Scheitels auf der Direktrix ab, errichtet auf derselben in den Theilpunkten Senkrechte, die verlängert sich mit den durch die Bogentheilpunkte gezogenen Strahlen schneiden, so wird eine Parabel bestimmt von der Eigenschaft, dass die zu je zwei Punkten desselben Zweiges gehörigen Senkrechten und Mittelpunkts-strahlen Kreisbogen und Direktrix vom Scheitel aus proportional theilen. Je nachdem die gestreckten Bogenstücke länger oder kürzer sind, als die entsprechenden Stücke der Direktrix, ändert sich die Gestalt der Kurve. Liesse sich aus den verschiedenen Gestalten diejenige bestimmen, bei welcher die ausgestrekten Bogenstücke gleich den entsprechenden Direktrixstücken wären, so würde diese nicht nur den Kreisbogen zu strecken, sondern auch die Kreisfläche (Winkel) nach gegebenen Verhältniss zu theilen vermögen.

6. Ueber Rektifikation und Quadratur als Doppelbewegung.

Die Ecke des Kreisberührungsquadrats legt, indem sie in die Ecke des Berührungsachtecks u. s. w. übergeht und endlich in der Kreisperipherie verschwindet, den Weg $r\sqrt{2}-r$ zurück. Zu gleicher Zeit macht die Mitte des Sehnenquadrats, indem sie in die Mitte des Sehnenachtecks u. s. w.

übergeht, den Weg $r - \frac{1}{2} r\sqrt{2}$; also die Summe der Wege $= \frac{1}{2} r\sqrt{2}$. Die Durchschnitts-geschwindigkeit des Berührungsquadrats verhält sich also zu der des Sehnenquadrats wie $(r\sqrt{2} - r) : (r - \frac{1}{2} r\sqrt{2})$.

Lässt man das Quadrat zur selben Zeit, wo es in's Achteck u. s. w. übergeht, zugleich in ein dem Achteck gleiches Quadrat verwandelt werden und ordnet die Quadrate so, dass ihre Seiten parallel und ihre Mittelpunkte alle im Mittelpunkte des Kreises liegen, so bewegt sich das Sehnen-quadrat zunehmend, das Berührungsquadrat abnehmend fort, bis beide in einander übergehen und ein dem Kreise inhaltsgleiches Quadrat bilden. Die Summe der Wege, welche die sich entgegenbewegenden Quadrate durchlaufen, beträgt für die Seiten $r - \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, für die Ecken $r\sqrt{2} - r$. Die Quadrate bewegen sich, wie die Ursprungsvielecke, mit abnehmender, aber verschiedener Geschwindigkeit. Lässt sich die Duchschnittsgeschwindigkeit der Quadrate entweder an und für sich oder aus der bekannten Geschwindigkeit der Vielecke bestimmen, so ergeben sich ihre Wege x und y aus der geometrisch lösbaren Gleichung

$$x + y = r - \frac{1}{2} r\sqrt{2}$$

$$x : y = m : n.$$

Da die Berührungsvielecke in den Höhenstrahlen der Bestimmungsdreiecke übereinstimmen, verhalten sich ihre Flächen wie ihre Umfänge. Die aus ihnen entstandenen inhaltsgleichen Quadrate verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten- oder Eckstrahlen. Also verhalten sich die Umfänge der Berührungsvielecke wie die Quadrate der Seitenstrahlen der aus ihnen entstandenen Quadrate, demnach verhält sich das Quadrat des Seitenstrahls des Berührungsquadrats zum Quadrate des Seitenstrahls des Achteckquadrats, wie der Umfang des Berührungsquadrats zum Umfange des Berührungsachtecks. Streckt man also die Seite des Berührungsquadrats von ihrer Mitte zur Länge des Quadratumfanges, ebenso die Seite des Achteckquadrats zum Umfange des Berührungsachtecks u. s. w., so wird dadurch eine Parabel bestimmt, deren Scheitel im Mittelpunkt des Kreises liegt, deren Abscissen die Umfänge der Berührungsecke, deren Ordinaten die Seitenstrahlen der inhaltsgleichen Quadrate sind. Da die Umfänge der Berührungsecke in den Kreisumfang übergehen, wird dieser durch eine Abscisse dieser Parabel gestreckt, und ist die zugehörige Ordinate der Seitenstrahl des dem Kreise inhaltsgleichen Quadrats.

Die entsprechende Kurve für die Sehnenvielecke hat eine andere Krümmung, da mit Anwendung der Dreiecksseitenformel, wenn I den Inhalt eines n-Sehnenecks mit der Seite s und dem Umfang u bezeichnet, $I_n = n.\frac{1}{4} s \sqrt{4r^2 - s_n^2} = \frac{u}{4}\sqrt{4r^2 - s_n^2}$, also $I_n : I_{2n} = u_n : u_{2n} \sqrt{\frac{4r^2 - s_{2n}^2}{4r^2 - s_n^2}}$.
Es stehen also die Umfänge der Sehnenecke mit den Seitenstrahlen ihrer Inhaltsquadrate nicht in demselben Verhältnisse. Werden bei den Berührungsecken die Seite des Inhaltsquadrats mit Q, der Umfang mit U, die Seite mit S, bei den Sehnenecken dieselben Stücke mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, der Radius des gemeinschaftlichen Kreises mit r bezeichnet, so ist $Q^2 = \frac{Ur}{2}$, $q^2 = \frac{u}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}$, also $Q^2 : q^2 = U : u \sqrt{\frac{4r^2 - s^2}{4r^2}}$. Daher schneiden sich die Kurven, wenn $Q^2 = q^2$ und s^2 zu Null wird.

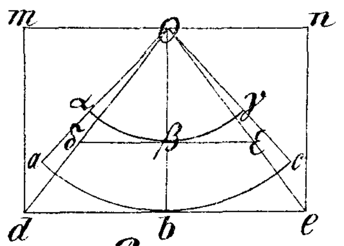
7. Ueber die Kreisquadratur am Cylinder.

Die Grundfläche des gleichseitigen Cylinders ist ein Viertel der Wölbfläche. Denn denkt man sich diese aus lauter Kreisringen bestehend, so sind diese so oft vorhanden als die Säule hoch ist, ihre Summe also $2\,r.\ 2\,r\,\pi = 4\,r^2\pi$. Schneidet man aus dem Mantel durch senkrechte Seitenlinien ein Viertel heraus, halbirt dieses ebenso durch eine Seitenlinie und beschreibt aus deren Halbirungspunkte mit dem Radius des Grundkreises einen Kreis, so berührt dieser den Kreis der Grund- und Schlussfläche, durchschneidet dagegen jede der den Viertelmantel begränzenden Seitenlinie zweimal und ist an Inhalt dem Viertelmantel gleich. Die so getheilte Seitenlinie ist nach Länge und Theilung in die Ebene übertragbar. Beschreibt man also in der Ebene mit demselben Radius einen Kreis, trägt die Sehnen des Mantelkreises parallel ein, zieht durch die Enden des gleichfalls parallelen Durchmessers Tangenten, bis zum Durchschnitt mit den beiderseits verlängerten Sehnen, so entsteht ein Rechteck $2\,r\,\frac{2\,r\,\pi}{4} = r^2\pi$, das sich weiter in ein dem Kreise inhaltsgleiches Quadrat verwandeln lässt.

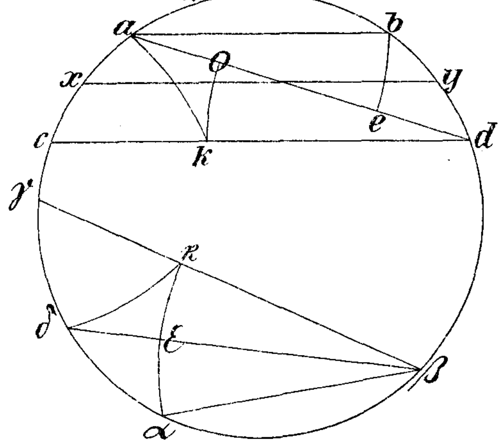
Der Mantelkreis darf nicht mit einem Faden, auch nicht mit dem Stellzirkel beschrieben werden. Letzterer zeichnet eine Kurve, welche $2\,r$ zur kleinen und $\frac{2\,r\,\pi}{3}$ zur grossen Achse hat und nur wenig kleiner als die umschriebene Ellipse ist. Während sich soviel Ellipsen, als Kreistheilungen möglich sind, auf dem Mantel punktweise angeben lassen, ist dieses beim Kreise nicht der Fall. Dieser lässt sich nur durch ein besonders dazu gefertigtes starres Werkzeug mit mathematischer Genauigkeit auf die Mantelfläche bringen. Dieses Werkzeug, so wie auch die durch die Mantelkurven im Innern des Cylinders bestimmten Bogenschnitte, beabsichtige ich in meiner nächsten Arbeit über den Bogenzug näher zu besprechen.

Buchdruckerei, F. Bär in Neisse.

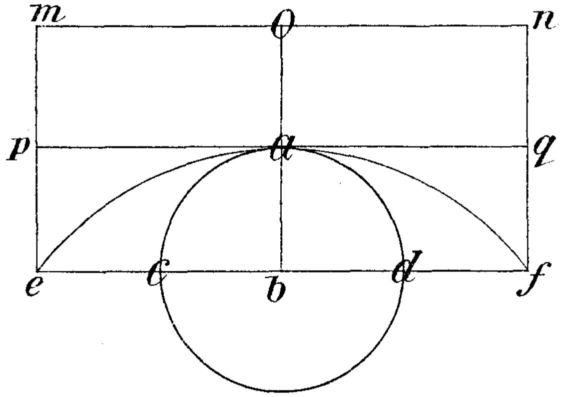
1.



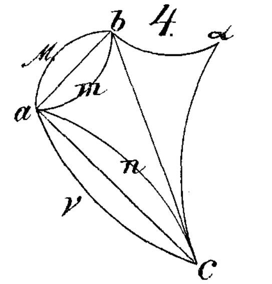
2.



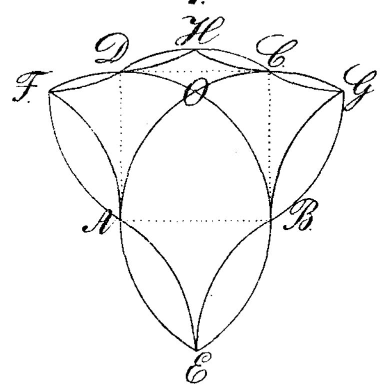
3.



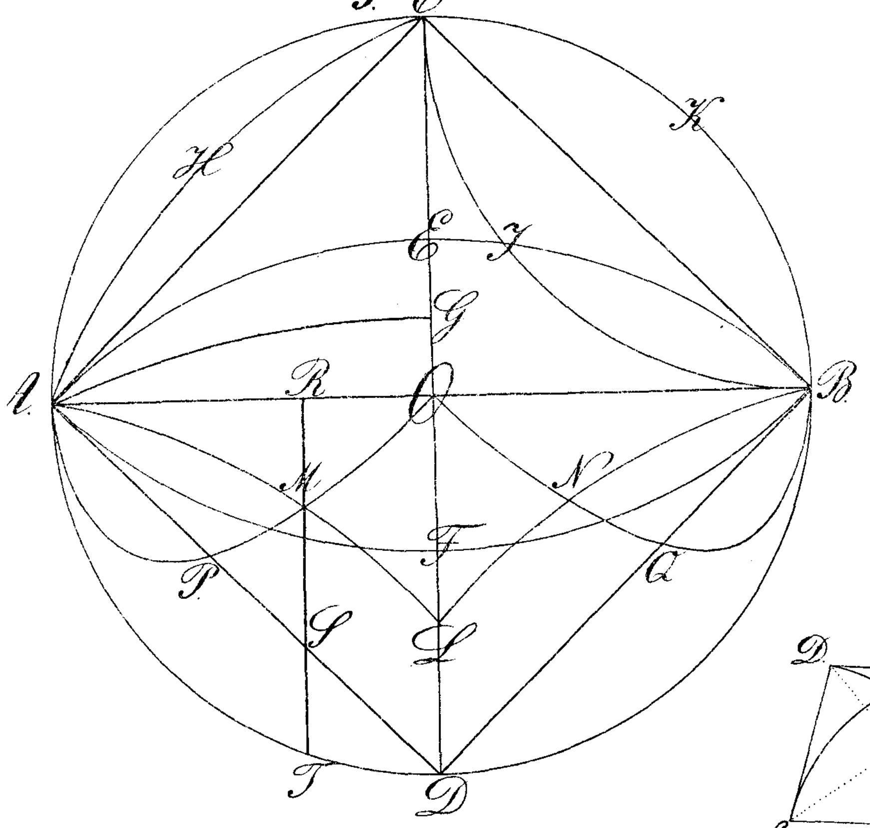
4.



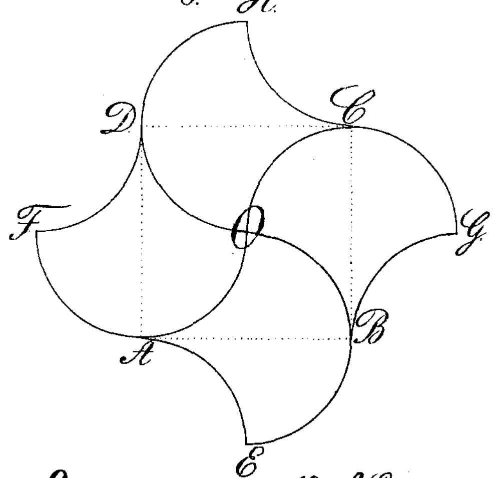
7.



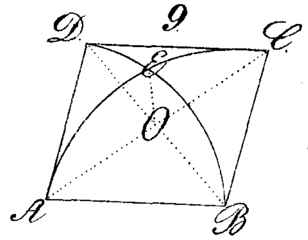
5.



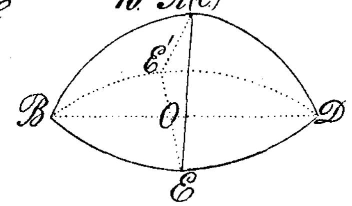
8.



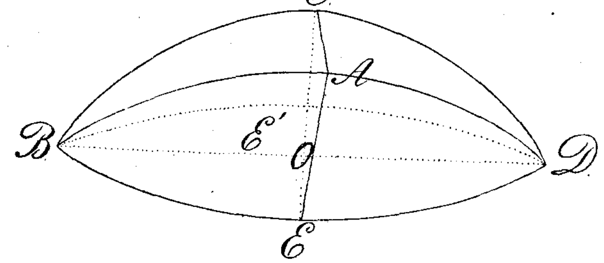
9



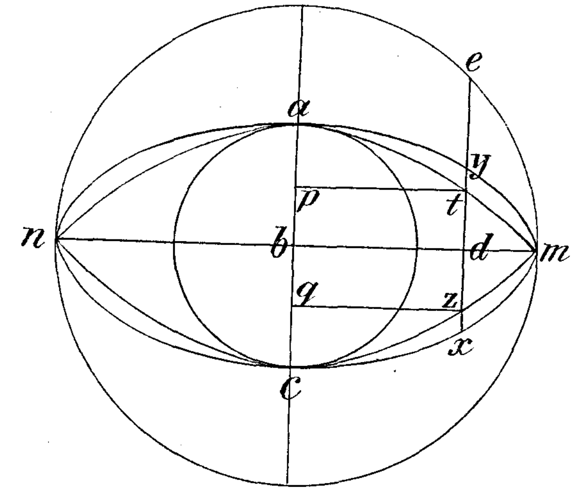
10.



11.



12.



6.