

ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von H. KNESER und W. SÜSS

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, P. TEN BRUGGENCATE, J. DIEUDONNÉ,
CH. EHRESMANN, H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, W. MAGNUS,
T. NAGELL, CHR. PAUC, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN,
H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL

Redaktion: H. BILHARZ

VOL. 3 · 1952



VERLAG BIRKHÄUSER
BASEL/STUTT GART

Inhalt — Contents — Sommaire

ATKINSON, F. V.: Über die Nullstellen gewisser extremaler Polynome	83
AUMANN, G.: Integralerweiterungen mittels Normen	441
AUMANN, G.: Zur Spiegelungsinvarianz des LEBESGUESchen Maßes	360
BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der konjugierten Netze im vierdimensionalen Raum	409
BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven des n -dimensionalen Raumes	171
BILHARZ, H.: Bemerkung zur genäherten Quadratur	251
BOL, G.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven in der Ebene und im Raum	163
BOMPIANI, E.: Sulle connessioni affini non-posizionali	183
BUCERIUS, H.: Zur Theorie der linearen Gleichungen (Auszug)	103
BURAU, W.: Grundmannigfaltigkeiten, ihre Dualitätstheorie und Fundamentalkorrelationen	130
BURGER, E.: Über die Einzigkeit der CAYLEY-Zahlen. Bemerkung zu einer Arbeit von L. A. SKORNIAKOV	298
CASSELS, J. W. S.: Über einen PERRONSchen Satz	10
COLLATZ, L.: Aufgaben monotoner Art	366
DEBRUNNER, H.: Translative Zerlegungsgleichheit von Würfeln	479
DIEUDONNÉ, J.: Sur un Théorème de SMULIAN	436
DIXMIER, J.: Remarques sur les applications ^h	290
EHLERS, G.: Über schwach singuläre Stellen linearer Differentialgleichungssysteme . . .	266
EPHESER, H. und STALLMANN, F.: Konforme Abbildung eines Parallelstreifens mit Halbkreiskerbe	276
FABRICIUS-BJERRE, FR.: Note on a theorem of G. BOL	31
FUSA, C.: Alcune proprietà dei sistemi lineari di curve piane algebriche	465
GERICKE, H.: Äquivalenz des Satzes von HAJOS mit einer Vermutung von MINKOWSKI . . .	34
GERICKE, H.: Algebraische Betrachtungen zu den Aristotelischen Syllogismen	421
GÖRTLER, H.: Zur laminaren Grenzschicht am schiebenden Zylinder, Teil I	216
GRÖBNER, W.: Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit	351
GROTEMEYER, K.-P.: Die Integralsätze der affinen Flächentheorie	38
GROTEMEYER, K.-P.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären	307
HADWIGER, H.: Additive Funktionale k -dimensionaler Eikörper I	470
HADWIGER, H.: Translationsinvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale	387
HADWIGER, H.: Über zwei quadratische Distanzintegrale für Eikörper	142

HEFFTER, L.: Gleichmäßige, Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich	257
HEINHOLD, J.: Zur Konstruktion involutorischer Kerne	15
HOPF, H. und VOSS, K., Ein Satz aus der Flächentheorie im Großen	187
KANOLD, H.-J.: Einige Bemerkungen über befreundete Zahlen	282
KASCH, F.: Ein Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums	434
KLINGENBERG, W.: Über die 2-dimensionalen Flächen im 4-dimensionalen projektiven Raum	154
KNESER, H.: Konvexe Räume	198
KRULL, W.: Bemerkungen zur Theorie des HILBERTSchen Raumes	114
KRULL, W.: Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Größenordnung	1
KRUPPA, E.: Zum Dualitätsprinzip in der Differentialgeometrie dritter Ordnung	401
LEVI, F. W.: Über zwei Sätze von Herrn BESICOVITCH	125
LOCHER-ERNST, L.: Wie viele regelmäßige Polyeder gibt es?	193
LORENZEN, P.: Über den Mengenbegriff in der Topologie	377
NAGELL, T.: Bemerkung über die Diophantische Gleichung $u^2 - Dv^2 = C$	8
NITSCHKE, J.: Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier PFAFFScher Formen gegeben ist	50
NITSCHKE, JOHANNES und JOACHIM: Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung $Au = e^u$	460
OSTROWSKI, A.: Two Explicit Formulae for the Distribution Function of the Sums of n Uniformly Distributed Independent Variables	451
PEYERIMHOFF, A.: Über einen Satz von Herrn KOGEBLIANTZ aus der Theorie der absoluten CESÁROschen Summierbarkeit	262
PFLANZ, E.: Über die Beschleunigung der Konvergenz langsam konvergenter unendlicher Reihen	24
PICKERT, G.: Bemerkungen über GALOIS-Verbindungen	285
PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen	335
RAJAGOPAL, C. T.: Two One-Sided TAUBERIAN Theorems	108
REEB, G.: Remarques sur l'existence de mouvements périodiques de certains systèmes dynamiques	76
RITTER, R.: Über gewisse Zwischenintegrale der Biegungsgleichung spezieller Flächen	395
RÖHRL, H.: Zur Theorie der FABERSchen Entwicklungen auf geschlossenen RIEMANNschen Flächen.	93
ROQUETTE, P.: Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers	343
RUND, H.: Die HAMILTONSche Funktion bei allgemeinen dynamischen Systemen	207
RUND, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie der MINKOWSKISchen Räume	60
SCHERK, P.: Convex bodies off center	303
SCHNEIDT, M.: Über die endlichen Gleichungen einer Fläche, deren sphärisches Bild gegeben ist	70
SCHÖNHARDT, E.: Über die Projektion von Vektoren auf Kurven und eine gewisse Kurventransformation	314
SEIBERT, P.: Flächenbau und Wertverteilung einiger Funktionen, die aus harmonischen Maßen entspringen.	87

STALLMANN, F., s. EPHESE, H.	276
STRUBECKER, K.: Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene	145
SÜSS, W.: Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum	137
SÜSS, W.: Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. GROTE-MEYER	311
TAUTZ, G. L.: Bemerkungen zu meiner Arbeit: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen I, II	361
TAUTZ, G. L.: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen, I	232
TAUTZ, G. L.: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen, II	239
VIETORIS, L.: Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven	304
VOSS, K.: s. HOPF, H.	187
WAGNER, K.: Bemerkungen zur Dimension des Durchschnitts von Punktmengen	79
WITT, E.: Über einen Satz von OSTROWSKI	334
WUNDERLICH, W.: Über die L -Torsen der Flächen 2. Klasse	44
ZULAUF, A.: Zur additiven Zerfällung natürlicher Zahlen in Primzahlen und Quadrate	327

BERICHTIGUNG

S. 92 Z. 10 v. o. lies Windungsorten statt Windungsorte

S. 312 Z. 17 v. o. lies $\binom{n}{k} p_k$ statt p_k

Titelbild:

Geh. Hofrat Professor Dr. LOTHAR HEFFTER, Freiburg i. Br.
(Geb. 11. VI. 1862, Köslin i. Pommern)

Redaktion: Prof. Dr. H. BILHARZ, Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 8

Ein Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums

VON FRIEDRICH KASCH in Göttingen

Die Tatsache, daß ein Ring \mathfrak{E} einfach ist, kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Betrachtet man \mathfrak{E} als Modul mit sich selbst als Links- und als Rechtsoperatorenbereich, so ist \mathfrak{E} irreduzibel. Durch diese Formulierung wird die Frage nahegelegt, ob \mathfrak{E} irreduzibel bleibt, wenn man den Operatorenbereich etwa auf einer Seite einschränkt. Daß dies der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Bekanntlich ist jeder einfache Ring mit Minimal- oder Maximalbedingung zu einem dichten Ring — was das ist, wird unten erklärt — von linearen Abbildungen eines geeigneten Vektorraums isomorph. Wir werden daher einen Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums beweisen, der eine Antwort auf die anfangs gestellte Frage enthält.

Sei Ω ein Vektorraum nicht notwendig endlicher Dimension über einem beliebigen Schiefkörper H als Linkskalarkörper und \mathfrak{E} der volle Endomorphismenring von Ω/H . Ist $e \in \mathfrak{E}$ und $\omega \in \Omega$, so sei ωe das Bild von ω bei der Abbildung e ; die Abbildungen aus \mathfrak{E} denken wir uns also durch Multiplikation von rechts auf die Elemente aus Ω ausgeübt.

Ein Unterring \mathfrak{D} von \mathfrak{E} heißt n -fach transitiv, wenn es zu je n beliebigen über H linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega$ und beliebigen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Omega$ in \mathfrak{D} eine Abbildung δ gibt, für die $\omega_i \delta = \alpha_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ist. Ist \mathfrak{D} für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$ n -fach transitiv, so heißt \mathfrak{D} dicht; in der Tat ist \mathfrak{D} dicht im Sinne der schwachen Topologie.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Satzes, daß jeder zweifach transitive Ring dicht ist.¹⁾ Der folgende Beweis schließt sich an den von JACOBSON an, doch führt er, unserer Absicht entsprechend, unmittelbar zum Ziel.

Satz 1: *Ein einfach transitiver Modul $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E}$ mit einem zweifach transitiven Ring \mathfrak{D} als Rechtsoperatorenbereich ist dicht.*

Der Beweis erfolgt durch Induktion, wobei der Induktionsbeginn nach Voraussetzung erfüllt ist. Der \mathfrak{D} -Rechtsmodul \mathfrak{R} sei also bereits $(n-1)$ -fach transitiv und es seien $\omega_1, \dots, \omega_n$ über H linear unabhängige und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beliebige Elemente aus Ω . Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung $q \in \mathfrak{R}$ mit

$$(\omega_1, \dots, \omega_{n-2}, \omega_{n-1}) q = (0, \dots, 0, \omega_{n-1}).$$

¹⁾ N. JACOBSON, Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. 57, 288 (1945).

Sind ω_{n-1} und $\omega_n q$ linear unabhängig, so sei $c \in \mathfrak{D}$ mit

$$\omega_{n-1} c = \omega_{n-1}, \quad \omega_n q c = 0.$$

Wir setzen dann $q c = q^*$, $\omega_n = \omega^*$ und $\alpha_n = \alpha^*$. Ist hingegen $\omega_n q = h \omega_{n-1}$ mit $h \in H$, so sei $q = q^*$, $\omega_n - h \omega_{n-1} = \omega^*$ und $\alpha_n - h \alpha_{n-1} = \alpha^*$. Dann ist in beiden Fällen

$$(\omega_1, \dots, \omega_{n-2}, \omega_{n-1}, \omega^*) q^* = (0, \dots, 0, \omega_{n-1}, 0).$$

Ferner seien $r \in \mathfrak{R}$ und $b \in \mathfrak{D}$ mit

$$(\omega_1, \dots, \omega_{n-2}, \omega^*) r = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha^*), \quad \omega_{n-1} b = \alpha_{n-1} - \omega_{n-1} r.$$

Dann ist

$$(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega^*) (q^* b + r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha^*)$$

und folglich wie behauptet

$$(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) (q^* b + r) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Wir kommen nun zur Formulierung des angekündigten Satzes.

Satz 2: *Seien \mathfrak{A} ein einfach und \mathfrak{D} ein zweifach transitiver Ring von linearen Abbildungen des Vektorraums Ω/H . Dann ist jeder von Null verschiedene \mathfrak{A} -Links- und \mathfrak{D} -Rechtsmodul aus dem vollen Endomorphismenring \mathfrak{E} von Ω/H dicht.*

Zum Beweis von Satz 2 genügt es auf Grund von Satz 1 nur zu zeigen, daß der durch eine von Null verschiedene Abbildung $e \in \mathfrak{E}$ erzeugte \mathfrak{A} -Links- und \mathfrak{D} -Rechtsmodul \mathfrak{R} einfach transitiv ist. Wegen $e \neq 0$ gibt es ein Element $\eta \in \Omega$ mit $\eta e = \gamma \neq 0$. Ist $\omega \neq 0$ ein beliebiges Element aus Ω , so gibt es, da \mathfrak{A} einfach transitiv ist, eine Abbildung $a \in \mathfrak{A}$ mit $\omega a = \eta$. Dann ist $\omega a e = \gamma$ und hieraus folgt wegen der einfachen Transitivität von \mathfrak{D} die von \mathfrak{R} . Damit ist Satz 2 bewiesen.

Es sollen nun noch einige Folgerungen aus Satz 2 angegeben werden.

Ist Ω ein Vektorraum endlicher Dimension über H , so stimmt jeder dichte Modul von linearen Abbildungen mit dem vollen Endomorphismenring von Ω/H überein. Daher erhält man aus Satz 1

Folgerung 1: *Ist Ω ein Vektorraum endlicher Dimension über H , \mathfrak{E} der volle Endomorphismenring von Ω/H und \mathfrak{A} ein einfach transitiver Unterring von \mathfrak{E} , dann ist \mathfrak{E} als \mathfrak{A} -Links- und \mathfrak{E} -Rechtsmodul irreduzibel.*

Sei nun $\Omega = K$ insbesondere ein Schiefkörper, dann ist der durch die Elemente von K selbst als Rechtsmultiplikatoren von K erzeugte Endomorphismenring K_r offenbar einfach transitiv. Man erhält dann also

Folgerung 2: *Ist K ein Schiefkörper endlichen Ranges über H und betrachtet man K als Vektorraum mit H als Linksskalarenkörper, so ist der volle Endomorphismenring \mathfrak{E} von K/H als K_r -Links- und \mathfrak{E} -Rechtsmodul irreduzibel.*