ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von H. Kneser und W. Süss

VOL. 3 · 1952

VERLAG BIRKHÄUSER

BASEL/STUTTGART

Inhalt — Contents — Sommaire

BERICHTIGUNG

S. 92 Z. 10 v. o. lies Windungssorten statt Windungsorte

S. 312 Z. 17 v. o. lies $\binom{n}{k} p_k$ statt p_k

Titelbild:

Geh. Hofrat Professor Dr. LOTHAR HEFFTER, Freiburg i. Br.
(Geb. 11. VI. 1862, Köslin i. Pommern)

Redaktion: Prof. Dr. H. BILHARZ, Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 8

Ein Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums

Von Friedrich Kasch in Göttingen

Die Tatsache, daß ein Ring $\mathfrak{E}$ einfach ist, kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Betrachtet man $\mathfrak{E}$ als Modul mit sich selbst als Links- und als Rechtsoperatorenbereich, so ist $\mathfrak{E}$ irreduzibel. Durch diese Formulierung wird die Frage nahegelegt, ob $\mathfrak{E}$ irreduzibel bleibt, wenn man den Operatorenbereich etwa auf einer Seite einschränkt. Daß dies der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Bekanntlich ist jeder einfache Ring mit Minimal- oder Maximalbedingung zu einem dichten Ring — was das ist, wird unten erklärt — von linearen Abbildungen eines geeigneten Vektorraums isomorph. Wir werden daher einen Satz über den Endomorphismenring eines Vektorraums beweisen, der eine Antwort auf die anfangs gestellte Frage enthält.

Sei Ω ein Vektorraum nicht notwendig endlicher Dimension über einem beliebigen Schiefkörper H als Linksskalarenkörper und $\mathfrak{E}$ der volle Endomorphismenring von Ω/H. Ist $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$ und $\omega \in \Omega$, so sei $\omega\mathfrak{e}$ das Bild von ω bei der Abbildung $\mathfrak{e}$; die Abbildungen aus $\mathfrak{E}$ denken wir uns also durch Multiplikation von rechts auf die Elemente aus Ω ausgeübt.

Ein Unterring $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ heißt n-fach transitiv, wenn es zu je n beliebigen über H linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega$ und beliebigen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ in $\mathfrak{D}$ eine Abbildung $\mathfrak{d}$ gibt, für die $\omega_i\mathfrak{d} = \alpha_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Ist $\mathfrak{D}$ für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ n-fach transitiv, so heißt $\mathfrak{D}$ dicht; in der Tat ist $\mathfrak{D}$ dicht im Sinne der schwachen Topologie.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Satzes, daß jeder zweifach transitive Ring dicht ist.[1]) Der folgende Beweis schließt sich an den von Jacobson an, doch führt er, unserer Absicht entsprechend, unmittelbar zum Ziel.

Satz 1: *Ein einfach transitiver Modul $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E}$ mit einem zweifach transitiven Ring $\mathfrak{D}$ als Rechtsoperatorenbereich ist dicht.*

Der *Beweis* erfolgt durch Induktion, wobei der Induktionsbeginn nach Voraussetzung erfüllt ist. Der $\mathfrak{D}$-Rechtsmodul $\mathfrak{R}$ sei also bereits $(n-1)$-fach transitiv und es seien $\omega_1, \ldots, \omega_n$ über H linear unabhängige und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige Elemente aus Ω. Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung $\mathfrak{q} \in \mathfrak{R}$ mit

$$(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_{n-1})\, \mathfrak{q} = (0, \ldots, 0, \omega_{n-1})\,.$$

[1]) N. Jacobson, Structure theory of simple rings without finitesness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 288 (1945).

Sind ω_{n-1} und $\omega_n \mathfrak{q}$ linear unabhängig, so sei $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ mit

$$\omega_{n-1}\,\mathfrak{c} = \omega_{n-1}\,, \qquad \omega_n\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{c} = 0\,.$$

Wir setzen dann $\mathfrak{q}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{q}^*$, $\omega_n = \omega^*$ und $\alpha_n = \alpha^*$. Ist hingegen $\omega_n\,\mathfrak{q} = h\,\omega_{n-1}$ mit $h \in H$, so sei $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$, $\omega_n - h\,\omega_{n-1} = \omega^*$ und $\alpha_n - h\,\alpha_{n-1} = \alpha^*$. Dann ist in beiden Fällen

$$(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_{n-1}, \omega^*)\,\mathfrak{q}^* = (0, \ldots, 0, \omega_{n-1}, 0)\,.$$

Ferner seien $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$ mit

$$(\omega_1 \ldots, \omega_{n-2}, \omega^*)\,\mathfrak{r} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha^*)\,, \qquad \omega_{n-1}\,\mathfrak{d} = \alpha_{n-1} - \omega_{n-1}\,\mathfrak{r}\,.$$

Dann ist

$$(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega^*)\,(\mathfrak{q}^*\,\mathfrak{d} + \mathfrak{r}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha^*)$$

und folglich wie behauptet

$$(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n)\,(\mathfrak{q}^*\,\mathfrak{d} + \mathfrak{r}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)\,.$$

Wir kommen nun zur Formulierung des angekündigten Satzes.

Satz 2: *Seien $\mathfrak{A}$ ein einfach und $\mathfrak{D}$ ein zweifach transitiver Ring von linearen Abbildungen des Vektorraums Ω/H. Dann ist jeder von Null verschiedene $\mathfrak{A}$-Links- und $\mathfrak{D}$-Rechtsmodul aus dem vollen Endomorphismenring $\mathfrak{E}$ von Ω/H dicht.*

Zum *Beweis* von Satz 2 genügt es auf Grund von Satz 1 nur zu zeigen, daß der durch eine von Null verschiedene Abbildung $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$ erzeugte $\mathfrak{A}$-Links- und $\mathfrak{D}$-Rechtsmodul $\mathfrak{R}$ einfach transitiv ist. Wegen $\mathfrak{e} \neq 0$ gibt es ein Element $\eta \in \Omega$ mit $\eta\,\mathfrak{e} = \gamma \neq 0$. Ist $\omega \neq 0$ ein beliebiges Element aus Ω, so gibt es, da $\mathfrak{A}$ einfach transitiv ist, eine Abbildung $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ mit $\omega\,\mathfrak{a} = \eta$. Dann ist $\omega\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{e} = \gamma$ und hieraus folgt wegen der einfachen Transitivität von $\mathfrak{D}$ die von $\mathfrak{R}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Es sollen nun noch einige Folgerungen aus Satz 2 angegeben werden.

Ist Ω ein Vektorraum endlicher Dimension über H, so stimmt jeder dichte Modul von linearen Abbildungen mit dem vollen Endomorphismenring von Ω/H überein. Daher erhält man aus Satz 1

Folgerung 1: *Ist Ω ein Vektorraum endlicher Dimension über H, $\mathfrak{E}$ der volle Endomorphismenring von Ω/H und $\mathfrak{A}$ ein einfach transitiver Unterring von $\mathfrak{E}$, dann ist $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{A}$-Links- und $\mathfrak{E}$-Rechtsmodul irreduzibel.*

Sei nun $\Omega = K$ insbesondere ein Schiefkörper, dann ist der durch die Elemente von K selbst als Rechtsmultiplikatoren von K erzeugte Endomorphismenring K_r offenbar einfach transitiv. Man erhält dann also

Folgerung 2: *Ist K ein Schiefkörper endlichen Ranges über H und betrachtet man K als Vektorraum mit H als Linksskalarenkörper, so ist der volle Endomorphismenring $\mathfrak{E}$ von K/H als K_r-Links- und $\mathfrak{E}$-Rechtsmodul irreduzibel.*

Eingegangen am 7. 12. 1952