ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von H. Kneser und W. Süss

VOL. 4 · 1953

VERLAG BIRKHÄUSER
BASEL · STUTTGART

Inhalt — Contents — Sommaire

AIGNER, A.: Zur einfachen Bestimmung der Klassengruppe eines imaginär quadratischen Körpers . . . 408

BAER, R.: Das Hyperzentrum einer Gruppe, II . . . 86

BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen, I . . . 346

BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen, II . . . 355

BARTSCH, H.: Ein Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen allgemeiner Matrizen-Eigenwertaufgaben . . . 133

BERGSTRÖM, H.: Eine Theorie der stabilen Verteilungsfunktionen . . . 380

BIEBERBACH, L.: Über einen Satz Pólyascher Art . . . 23

BOL, G.: Über die Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt und die Periode 8 hat . 61

BURGER, E.: Bemerkungen zu einem Homotopieproblem . . . 470

DEICKE, A.: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$ . . . 45

DEICKE, A.: Über die Darstellung von Finsler-Räumen durch nichtholonome Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen . . . 234

ECKMANN, B. und SCHOPF, A.: Über injektive Moduln . . . 75

ELLIS, D.: Notes on the foundations of Lattice Theory, II . . . 257

ERWE, F.: Über die Lücken bei Laurentreihen . . . 28

ERWE, F., siehe PESCHL, E. . . . 191

FÖLLINGER, O.: Diskontinuierliche Lösungen mit Spitzen in der Variationsrechnung . . . 121

FÜRST, D.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Weyl . . . 115

GERICKE, H.: Über den Begriff der algebraischen Struktur . . . 163

GROTEMEYER, K.-P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen . . 52

GROTEMEYER, K.-P.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel . . . 230

HADWIGER, H.: Additive Funktionale k-dimensionaler Eikörper, II . . . 374

HAUPT, O. und PAUC, CHR.: Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen . . . 107

HEFFTER, L.: Einfacher Beweis des Satzes von Looman-Menchoff . . . 446

HOHEISEL, G. und SCHMIDT, J.: Über die Konstruktion einer gewissen totalen Ordnung in Bäumen . . . 261

HORNICH, H.: Über lineare partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind . . . 437

JURKAT, W. und PEYERIMHOFF, A.: Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz 285

KANOLD, H.-J.: Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen 399

KASCH, F.: Über die Riccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik p . . . 17

KASCH, F.: Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums 182

KASCH, F.: Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei Galoisschen Erweiterungen 402

KNESER, M.: Die Norm einer Algebra 97

KNÖDEL, W.: Eine obere Schranke für die Anzahl der Carmichaelschen Zahlen kleiner als x 282

KOECHER, M.: Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel 316

KRAFFT, M.: Ein neuer Beweis des Vierscheitelsatzes 43

KRICKEBERG, K.: Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen 432

KÜNZI, H. P.: Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem 210

LAMPRECHT, E.: Über s-Differenten und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen 412

LAUGWITZ, D.: Über Normtopologien in linearen Räumen 455

LENZ, H.: Über endliche Automorphismengruppen unendlicher Körpererweiterungen . . . 100

LENZ, H.: Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben 327

LEVI, F. W.: Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze 222

MAYER-KALKSCHMIDT, J.: Singularitäten von Laplace-Integralen an der Summierbarkeitsabszisse 441

MÜLLER, H. R.: Zur Kinematik des Rollgleitens 239

MÜLLER, H. R.: Verallgemeinerung der Bresseschen Kreise für höhere Beschleunigungen 337

NEF, W.: Konvexe Räume 216

NEUMANN, B. H. und NEUMANN, HANNA: On a Class of Abelian Groups 79

NEUMANN, HANNA, siehe NEUMANN, B. H. 79

NITSCHE, J.: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem 331

PAUC, CHR., siehe HAUPT, O. 107

PESCHL, E. und ERWE, F.: Über die Norm regulärer Funktionenspalten 191

PETERSSON, H.: Über einen einfachen Typus von Untergruppen der Modulgruppe 308

PEYERIMHOFF, A., siehe JURKAT, W. 285

PFETZER, W.: Die Wirkung der Modulsubstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl 448

PINL, M.: Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen 369

PRACHAR, K.: Über höhere zahlengeometrische Minima 39

REMBS, E.: Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten 366

RICHTER, V.: Gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum 477

RIEGER, G. J.: Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$ 275

RINGEL, G.: Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen 137

RÖHRL, H.: Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechts 298
ROGERS, C. A.: Almost periodic critical lattices 267
ROQUETTE, P.: Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern 6
SCHMIDT, J.: Über die Minimalbedingung 172
SCHMIDT, J., siehe HOHEISEL, G. 261
SCHOPF, A., siehe ECKMANN, B. 75
SCHRÖDER, J.: Eine Bemerkung zur Konvergenz der Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme 322
SIGNORINI, A.: Stereodynamische Anwendungen einer Erweiterung der Culmannschen Ellipse 154
SONNER, H.: Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen 461
TEIXIDOR, J.: Über die Umkehrung des Theorems von Reiß 225
TIETZ, H.: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen 31
UNGER, G.: Ein Kriterium für die Kneser-Juelschen Kurven 143
VELTE, W.: Bemerkung zu einer Arbeit von H. Rund 343
WIRSING, E.: Ein metrischer Satz über Mengen ganzer Zahlen 392
WITTICH, H.: Bemerkung zur Wertverteilung von Exponentialsummen 202
WITTING, H.: Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschichttheorie 247
ZELLER, K.: Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Einfolgenverfahren 1
ZELLER, K.: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren 425

Über die Riccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik p

Von Friedrich Kasch in Göttingen

1. Fragestellung. Die formale Übertragung der klassischen Differentiationstheorie auf Körper der Charakteristik $p > 0$ liefert nicht die entsprechenden Ergebnisse wie bei der Charakteristik 0. Sie versagt bereits bei der Bestimmung der Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms. Daher und aus anderen Gründen entwickelten mehrere Autoren ([1], [2], [3]) eine von der klassischen abweichende Differentiationstheorie, aus der man für Körper der Charakteristik 0 die klassischen Ergebnisse zurückgewinnen kann, die darüber hinaus aber auch in Körpern von Primzahlcharakteristik zu wesentlichen Ergebnissen führt.

Man kann nun fragen, ob es auf Grund einer derartigen Differentiationstheorie möglich ist, Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik zu behandeln[1]). Hier soll am Beispiel der Riccatischen Differentialgleichung gezeigt werden, daß diese Frage zu bejahen ist. Allerdings wird man nicht erwarten können zu analogen Ergebnissen wie im klassischen Fall zu gelangen, denn es handelt sich hier um rein algebraische Begriffe und Überlegungen. So wird sich hier im Gegensatz zum klassischen Fall herausstellen, daß die Riccatische Differentialgleichung mit Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik $p > 2$ stets in einer quadratischen Erweiterung von K lösbar ist.

2. Definition der Differentiation. Es sei K zunächst ein Körper beliebiger Charakteristik mit den Elementen $a, b, c, \ldots$. Wir nennen (im Anschluß an [2], Zusatz bei der Korrektur) D eine Differentiation in K, wenn es zu jedem Element $a \in K$ eine Folge von Elementen

$$a = D^0 a,\ D^1 a,\ D^2 a,\ \ldots \qquad \in K$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $\quad D^n(a+b) = D^n a + D^n b\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$ *Summenregel,*

(2) $\quad D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} D^{n-i} a\, D^i b\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$ *Produktregel,*

(3) $\quad D^m(D^n a) = \binom{m+n}{m} D^{m+n} a\,, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots,$ *Iterationsregel.*

[1]) *Zusatz bei der Korrektur:* Vergl. dazu die inzwischen erschienene Arbeit von A. Jäger, Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik, Monatshefte für Math. **56** (1952), 181. — Der im folgenden aufgestellte Satz ist darin nicht enthalten.

Ferner werde von der Differentiation vorausgesetzt, daß es ein Element $x \in K$ mit $D^1x = 1$ und $D^rx = 0$ für $r > 1$ gibt. Dies stellt nach [2] (Zusatz bei der Korrektur, Satz 4) keine wesentliche Einschränkung der zugelassenen Differentiationen dar. Daraus folgt auf Grund von (2) durch Induktion

$$D^nx^n = 1 \text{ und } D^rx^n = 0 \text{ für } r > n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Wo es zweckmäßig ist, benutzen wir im folgenden auch die Schreibweise

$$D^1a = Da = a'\,, \quad D^2a = a''\,, \ldots, \quad D^na = a^{(n)}\,, \ldots$$

Dabei ist jedoch zu beachten, daß diese nicht die vom klassischen Fall der Differentiation her geläufige Bedeutung besitzt.

3. Der Ring der Differentialpolynome. Die linke Seite der linearen Differentialgleichung

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_0y = 0$$

mit Koeffizienten aus K kann als Anwendung des Differentialpolynoms

$$A(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$$

auf das unbestimmte Element y aufgefaßt werden. Die Gesamtheit aller derartigen Differentialpolynome mit Koeffizienten aus K kann man in bekannter Weise zu einem Operatorenring $\mathfrak{R}$ von K machen. So erhält man die Summe zweier Differentialpolynome durch Addition entsprechender Koeffizienten. Sind $B(D)$ und $C(D)$ weitere Differentialpolynome und ist

$$A(D)\,(B(D)\,y) = C(D)\,y\,,$$

so sei durch

$$A(D) \times B(D) = C(D)$$

die Multiplikation in $\mathfrak{R}$ definiert. $C(D)$ ist dadurch eindeutig bestimmt und diese Multiplikation ist assoziativ. Ist $a \in K$, so schreiben wir statt $a \times D$ auch kurz aD, denn hier bedeuten beide Schreibweisen das gleiche. Wegen (3) gilt insbesondere

$$D^m \times D^n = \binom{m+n}{m} D^{m+n} \tag{5}$$

Zwei Differentialpolynome $A(D)$ und $B(D)$ aus $\mathfrak{R}$ seien gleich, wenn für alle $a \in K$

$$A(D)\,a = B(D)\,a$$

gilt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen oder, was das gleiche besagt, wenn nur das Differentialpolynom mit lauter verschwindenden Koeffizienten Nulloperator von K ist. Ist nämlich ein Koeffizient von $A(D)$ ungleich 0 und bezeichnet $a_n \neq 0$ denjenigen mit kleinstem Index, so ist wegen (4)

$$A(D)\,x^n = a_n \neq 0\,.$$

Es sind folglich die Elemente $1, D, D^2, \ldots$ links linear unabhängig über K.

Wegen

$$D^n \times a = aD^n + a'D^{n-1} + \ldots + a^{(n)}, \quad a \in K$$

kann jedes Differentialpolynom $A(D) = \sum_{i=0}^{n} D^i \times a_i$ auch in der Form $A(D) = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i$ mit $a_n = b_n$ dargestellt werden. Das bedeutet aber, daß die Elemente $1, D, D^2, \ldots$ auch rechts linear unabhängig über K sind.

Das Einselement von K ist offenbar auch Einselement von $\mathfrak{R}$.

Es sollen nun einige Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ angegeben werden, die bei den weiteren Überlegungen Verwendung finden. Von jetzt ab wird vorausgesetzt, daß K eine Primzahlcharakteristik p besitzt.

Hilfssatz 1: *Die Differentialpolynome aus $\mathfrak{R}$ mit einem Grad $< p^t (t = 0, 1, 2, \ldots)$ bilden einen Ring $\mathfrak{R}_t$ mit Einselement vom Links- und Rechtsrang p^t über K* [1]).

Beweis: Es ist lediglich die multiplikative Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}_t$ nachzuweisen. Sind $m, n < p^t$, aber $m + n \geq p^t$, so ist offenbar $\binom{m+n}{m} \equiv 0 \pmod{p}$. Folglich gilt wegen (5) in diesem Falle $D^m \times D^n = 0$. Das Produkt zweier Polynome mit einem Grad $< p^t$ hat daher wieder einen Grad $< p^t$.

Es wird ferner behauptet, daß jedes Element aus $\mathfrak{R}$ beidseitig Nullteiler oder Einheit ist. Das ist in dem folgenden allgemeineren Ergebnis enthalten, wenn man berücksichtigt, daß jedes Element aus $\mathfrak{R}$ in einem der Ringe $\mathfrak{R}_t$ liegt.

Hilfssatz 2: *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring mit Einselement von endlichem Links- und Rechtsrang über einem Körper K, so ist jedes Element aus $\mathfrak{S}$ Links- und Rechtsnullteiler oder Links- und Rechtseinheit.*

Beweis: Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Linksbasis von $\mathfrak{S}$ über K, sodaß sich jedes Element von $\alpha \in \mathfrak{S}$ in der Form $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \omega_j$, $a_j \in K$ darstellen läßt. Ist

$$\omega_i \alpha = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \omega_k,$$

so folgt mit einem unbestimmten Element $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i$

$$\xi \alpha = \sum_{i,k=1}^{n} x_i b_{ik} \omega_k$$

Je nachdem, ob $\det(b_{ik})$ gleich oder ungleich 0 ist, ist α Linksnullteiler oder Linkseinheit. Die gleiche Überlegung gilt für rechts. Ist α Linksnullteiler, so gibt es ein Element $\beta \neq 0$, sodaß $\beta\alpha = 0$ ist. Angenommen, α wäre Rechtseinheit, so existierte

[1]) Diese Eigenschaft ist mir aus mündlichen Mitteilungen von F. K. SCHMIDT bekannt.

ein Element γ mit $1 = \alpha\gamma$. Dann folgt $\beta = \beta\alpha\gamma = 0$. Also ist jeder Linksnullteiler auch Rechtsnullteiler und umgekehrt und folglich gilt das gleiche auch für die Einheiten.

Es wird im folgenden darauf ankommen nachzuweisen, daß ein gewisses Element aus $\mathfrak{R}$ Rechtsnullteiler ist. Auf Grund von Hilfssatz 2 genügt es zu beweisen, daß dieses Element Linksnullteiler ist.

Hilfssatz 3: *Ist $A(D) \in \mathfrak{R}$ Nullteiler, so hat die lineare homogene Differentialgleichung*

$$A(D)\, y = 0 \tag{6}$$

eine nichttriviale Lösung in K.

Beweis: Da $A(D)$ Nullteiler ist, gibt es ein Element $B(D) \neq 0$ mit $A(D) \times B(D) = 0$. Dann gilt aber bei beliebigem $a \in K$

$$A(D)\,(B(D)\,a) = (A(D) \times B(D))\,a = 0,$$

also ist $B(D)a$ eine Lösung von (6). Wegen $B(D) \neq 0$ gibt es, wie zuvor festgestellt, ein Element $a \in K$ mit $B(D)\,a \neq 0$.

Ein Kriterium dafür, ob ein Differentialpolynom $A(D)$ mit einem Grad $< p^t$ Nullteiler oder Einheit ist, liefert die Determinante einer regulären Darstellung von $\mathfrak{R}_t$. Sei $\mathfrak{d}_t$ der aus den Basiselementen $1, D, \ldots, D^{p^t-1}$ gebildete Spaltenvektor und sei

$$\mathfrak{d}_t\, A(D) = \mathfrak{M}_t(A)\, \mathfrak{d}_t$$

die reguläre Linksdarstellung von $\mathfrak{R}_t$, durch die jedem Element $A(D) \in \mathfrak{R}_t$ eine p^t-reihige, quadratische Matrix $\mathfrak{M}_t(A)$ mit Elementen aus K zugeordnet wird. Die Determinante dieser Matrix werde mit $\Delta_t(A)$ bezeichnet. Je nachdem, ob $\Delta_t(A)$ gleich oder ungleich Null ist, ist $A(D)$ Nullteiler oder Einheit.

4. Die Riccatische Differentialgleichung. Es sei jetzt K ein Körper der Charakteristik $p > 2$. Die allgemeine Riccatische Differentialgleichung

$$Dy = ay^2 + by + c\,, \quad a \neq 0$$

mit beliebigen Koeffizienten $a, b, c \in K$, läßt sich durch die lineare Substitution

$$y = \frac{1}{a}\left(z - \frac{a' + ab}{2a}\right)$$

auf den Typ

$$Dy = y^2 + d \tag{7}$$

zurückführen, so daß wir uns auf dessen Behandlung beschränken können. Wir erhalten das folgende Ergebnis:

Satz: *Jede Nullstelle des Polynoms*

$$P(y) = ky^2 + k'y + dk + k''$$

ist Lösung der Differentialgleichung (7). *Dabei ist k eine beliebige nichttriviale Lösung der linearen Differentialgleichung*

$$(3\,D^3 + 2\,dD + d')\,y = A(D)\,y = 0\,, \tag{8}$$

die bei beliebigem d eine nichttriviale Lösung besitzt.

Beweis: Zunächst soll festgestellt werden, daß die Differentialgleichung (8) bei beliebigem d nichttrivial lösbar ist. Dazu genügt es nach dem Hilfssatz 3 festzustellen, daß das Differentialpolynom $A(D)$ Nullteiler in $\mathfrak{R}_1$ ist, d. h. daß die Determinante $\Delta_1(A)$ verschwindet. Es ist

$$\Delta_1(A) = \begin{vmatrix} d' & 2\,d & 0 & 3\binom{3}{3} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 2\,d'' & 3\,d' & 4\,d & 0 & 3\binom{4}{3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3\binom{p-1}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ (p-1)\,d^{(p-1)} & pd^{(p-2)} & (p+1)\,d^{(p-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (2p-2)\,d \\ pd^{(p)} & (p+1)\,d^{(p-1)} & (p+2)\,d^{(p-2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (2p-1)\,d' \end{vmatrix}$$

Betrachtet man diese Determinante mod p, so sind alle Elemente der Nebendiagonalen gleich 0. Außerdem ist sie mod p schiefsymmetrisch zur Nebendiagonalen. Für Glieder, in denen $d', d'', \ldots, d^{(p)}$ vorkommt, folgt dies unmittelbar aus dem Bildungsgesetz der Determinante. Für die Binomialkoeffizienten ergibt sich die Behauptung aus der Beziehung

$$3\left(\binom{3+n}{3} + \binom{p-1-n}{3}\right) = \frac{1}{2}\,((3+n)\,(2+n)\,(1+n) +$$
$$+ (p-1-n)\,(p-2-n)\,(p-3-n)) \equiv 0 \pmod{p} \text{ für } p > 2\,.$$

$\Delta_1(A)$ ist also mod p schiefsymmetrisch zur Nebendiagonalen. Eine solche Determinante mit ungerader Ordnung ist aber bekanntlich gleich 0. Damit hat sich ergeben, daß $A(D)$ Nullteiler ist und daher eine nichttriviale Lösung k besitzt.

Sei nun y eine Nullstelle von $P(y)$. Dann läßt sich nach [2] die Differentiation eindeutig auf y fortsetzen und es folgt aus $P(y) = 0$ durch Differentiation

$$(2ky + k')\,y' + k'y^2 + 2\,k''y + d'k + dk' + 3\,k''' = 0$$

Für $2ky + k' \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit

$$y' = -\,\frac{k'y^2 + 2\,k''y + h'}{2ky + k'}\,,$$

wobei zur Abkürzung $dk + k'' = h$ gesetzt ist. Notwendig und hinreichend dafür, daß y Lösung von (7) ist, ist folglich die Beziehung

$$-\frac{k'y^2 + 2k''y + h'}{2ky + k'} = y^2 + d$$

bzw.

$$2ky^3 + 2k'y^2 + 2(dk + k)y + dk' + h' = Q(y) = 0 .$$

Nun ist aber

$$dk' + h' = A(D)k = 0 .$$

Damit gilt

$$Q(y) = 2yP(y) ,$$

und wegen $P(y) = 0$ ist tatsächlich $Q(y) = 0$. Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall $2ky + k' \neq 0$ erwiesen.

Ist jedoch $2ky + k' = 0$, so folgt hieraus, weil $k \neq 0$ ist

$$y' = -\frac{k'y + k''}{k} .$$

Dann muß

$$-\frac{k'y + k''}{k} = y^2 + d$$

sein. Dies ist aber wegen

$$(ky^2 + k'y + dk + k'') = P(y) = 0$$

tatsächlich der Fall, und unsere Behauptung ist auch jetzt nachgewiesen.

Als *Folgerung* aus diesem Satz erwähnen wir noch, daß jedes Differentialpolynom 2. Grades über einer geeigneten quadratischen Erweiterung von K in das Produkt von zwei Linearfaktoren zerfällt. Das ergibt sich aus dem, vom klassischen Fall her bekannten Zusammenhang zwischen den linearen, homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung und den RICCATIschen Differentialgleichungen.

[1] H. HASSE, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik. J. reine angew. Math. **175**, 50—54 (1936).

[2] H. HASSE und F. K. SCHMIDT, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, J. reine angew. Math. **177**, 215—237 (1937).

[3] O. TEICHMÜLLER, Differentialrechnung bei Charakteristik p, J. reine angew. Math. **175**, 89 bis 99 (1936).

Eingegangen am 19. 12. 1952

(Unveränderter Abdruck eines, am 29. Januar 1952 bei der Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik eingereichten und zum Druck angenommenen Manuskriptes.)