

ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach
von H. KNESER und W. SÜSS

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, P. TEN BRUGGENCATE, J. DIEUDONNÉ,
CH. EHRESMANN, H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, W. MAGNUS,
T. NAGELL, CHR. PAUC, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN,
H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL

Redaktion: H. BILHARZ

VOL. 4 · 1953



VERLAG BIRKHÄUSER
BASEL · STUTTGART

Inhalt — Contents — Sommaire

AIGNER, A.: Zur einfachen Bestimmung der Klassengruppe eines imaginär quadratischen Körpers	408
BAER, R.: Das Hyperzentrum einer Gruppe, II	86
BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen, I	346
BARTHEL, W.: Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen, II	355
BARTSCH, H.: Ein Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen allgemeiner Matrizen-Eigenwertaufgaben	133
BERGSTRÖM, H.: Eine Theorie der stabilen Verteilungsfunktionen	380
BIEBERBACH, L.: Über einen Satz Pólyascher Art	23
BOL, G.: Über die Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt und die Periode 8 hat	61
BURGER, E.: Bemerkungen zu einem Homotopieproblem.	470
DEICKE, A.: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$	45
DEICKE, A.: Über die Darstellung von Finsler-Räumen durch nichtholonome Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen	234
ECKMANN, B. und SCHOPF, A.: Über injektive Moduln	75
ELLIS, D.: Notes on the foundations of Lattice Theory, II	257
ERWE, F.: Über die Lücken bei Laurentreihen	28
ERWE, F., siehe PESCHL, E.	191
FÖLLINGER, O.: Diskontinuierliche Lösungen mit Spitzen in der Variationsrechnung	121
FÜRST, D.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Weyl	115
GERICKE, H.: Über den Begriff der algebraischen Struktur	163
GROTEMAYER, K.-P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen	52
GROTEMAYER, K.-P.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel	230
HADWIGER, H.: Additive Funktionale k -dimensionaler Eikörper, II	374
HAUPT, O. und PAUC, CHR.: Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen	107
HEFFTER, L.: Einfacher Beweis des Satzes von Looman-Menchoff	446
HOHEISEL, G. und SCHMIDT, J.: Über die Konstruktion einer gewissen totalen Ordnung in Bäumen	261
HORNICH, H.: Über lineare partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind	437

JURKAT, W. und PEYERIMHOFF, A.: Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz	285
KANOLD, H.-J.: Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen	399
KASCH, F.: Über die Riccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik p . . .	17
KASCH, F.: Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums	182
KASCH, F.: Halbleineare Abbildungen und die Rangrelation bei Galoisschen Erweiterungen	402
KNESER, M.: Die Norm einer Algebra	97
KNÖDEL, W.: Eine obere Schranke für die Anzahl der Carmichaelschen Zahlen kleiner als x	282
KOECHER, M.: Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel	316
KRAFFT, M.: Ein neuer Beweis des Vierscheitelsatzes	43
KRICKEBERG, K.: Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen	432
KÜNZI, H. P.: Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem	210
LAMPRECHT, E.: Über s -Differenzen und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen	412
LÄUGWITZ, D.: Über Normtopologien in linearen Räumen	455
LENZ, H.: Über endliche Automorphismengruppen unendlicher Körpererweiterungen . . .	100
LENZ, H.: Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalepunkte haben	327
LEVI, F. W.: Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze	222
MAYER-KALKSCHMIDT, J.: Singularitäten von Laplace-Integralen an der Summierbarkeitsabszisse	441
MÜLLER, H. R.: Zur Kinematik des Rollgleitens	239
MÜLLER, H. R.: Verallgemeinerung der Bresseschen Kreise für höhere Beschleunigungen	337
NEF, W.: Konvexe Räume	216
NEUMANN, B. H. und NEUMANN, HANNA: On a Class of Abelian Groups	79
NEUMANN, HANNA, siehe NEUMANN, B. H.	79
NITSCHKE, J.: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem	331
PAUC, CHR., siehe HAUPT, O.	107
PESCHL, E. und ERWE, F.: Über die Norm regulärer Funktionenspalten	191
PETERSSON, H.: Über einen einfachen Typus von Untergruppen der Modulgruppe	308
PEYERIMHOFF, A., siehe JURKAT, W.	285
PFETZER, W.: Die Wirkung der Modulsstitutionen auf mehrfache Thetareihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl	448
PINL, M.: Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen	369
PRACHAR, K.: Über höhere zahlengeometrische Minima	39
REMBES, E.: Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten	366
RICHTER, V.: Gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum	477
RIEGER, G. J.: Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$	275
RINGEL, G.: Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen	137

RÖHRL, H.: Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechts	298
ROGERS, C. A.: Almost periodic critical lattices	267
ROQUETTE, P.: Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern	6
SCHMIDT, J.: Über die Minimalbedingung	172
SCHMIDT, J., siehe HOHEISEL, G.	261
SCHOPF, A., siehe ECKMANN, B.	75
SCHRÖDER, J.: Eine Bemerkung zur Konvergenz der Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme.	322
SIGNORINI, A.: Stereodynamische Anwendungen einer Erweiterung der Culmannschen Ellipse	154
SONNER, H.: Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen	461
TEIXIDOR, J.: Über die Umkehrung des Theorems von Reiß	225
TIETZ, H.: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen	31
UNGER, G.: Ein Kriterium für die Kneser-Juelschen Kurven	143
VELTE, W.: Bemerkung zu einer Arbeit von H. Rund	343
WIRSING, E.: Ein metrischer Satz über Mengen ganzer Zahlen	392
WITTICH, H.: Bemerkung zur Wertverteilung von Exponentialsummen	202
WITTING, H.: Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschnitttheorie	247
ZELLER, K.: Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Einfolgenverfahren	1
ZELLER, K.: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren	125

Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei GALOISSCHEN ERWEITERUNGEN

VON FRIEDRICH KASCH in Göttingen

Fragestellung

Die Ausdehnung der GALOISSCHEN Theorie auf beliebige galoissche Schiefkörpererweiterungen durch N. JACOBSON [3] und H. CARTAN [1] stützt sich auf gewisse Ergebnisse über halblineare Abbildungen. Bei der Verallgemeinerung dieser Theorie auf einfache Ringe (im Sinne einer Automorphismentheorie), wie sie kürzlich T. NAKAYAMA angegeben hat [5], werden entsprechende Ergebnisse über halblineare Abbildungen aufgestellt, doch auf anderem Wege bewiesen. Hier soll gezeigt werden, daß man bereits mit dem ursprünglichen Ansatz zum Ziel kommt. Dies ist nicht nur methodisch von Interesse, sondern vor allem deshalb, weil sich dabei eine Verallgemeinerung eines der wesentlichen Ergebnisse der GALOISSCHEN Theorie, nämlich der Rangrelation ergibt. Wie aus einer Bemerkung von T. NAKAYAMA hervorgeht¹⁾, konnte diese Verallgemeinerung auf dem von ihm eingeschlagenen Weg bisher nicht bewiesen werden.

Die Verallgemeinerung der Rangrelation folgt fast unmittelbar aus einem Ergebnis, das ich kürzlich mitgeteilt habe ([4], Hilfssatz 1), und das hier unter etwas allgemeineren Voraussetzungen noch einmal hergeleitet werden soll, da die dabei benutzte Schlußweise auch bei einer weiteren Überlegung verwendet wird.

Halblineare Abbildungen

Von den im folgenden als *einfach* oder *halbeinfach* bezeichneten Ringen setzen wir voraus, daß sie ein Einselement besitzen und der Minimalbedingung genügen. Sei nun A ein einfacher Ring, so betrachten wir A zunächst als Modul ohne Operatorbereich und bezeichnen mit \mathcal{E} den Ring aller Endomorphismen von A . Die Endomorphismen denken wir uns durch Multiplikation von rechts auf die Elemente von A ausgeübt: es sei also ae das Bild von $a \in A$ bei dem Endomorphismus $e \in \mathcal{E}$. Statt ae schreiben wir auch (ae) .

Jedes Element $a \in A$ erzeugt sowohl als Rechts- als auch als Linksmultiplikator von A einen Endomorphismus von A , den wir mit a^r bzw. a^l bezeichnen wollen. Dann gilt also mit beliebigem $x \in A$:

$$xa^r = xa, \quad xa^l = ax.$$

¹⁾ Vgl. Fußnote 3

Da A ein Einselement besitzt, sind A und der Ring der Rechtsmultiplikatoren A^r (ring-)isomorph und A und A^l inversisomorph.

Wir haben hier A^r -halblineare Abbildungen zu untersuchen, d. h. Abbildungen $v \in \mathfrak{E}$, die der *Vertauschungsregel*

$$(1) \quad a^r v = v(a g)^r, \quad a^r \in A^r$$

mit einem festen, zu v gehörenden Ringautomorphismus g von A^r (und damit auch von A) genügen. Ist a ein beliebiges Element aus A , so gilt auf Grund von (1):

$$a v = 1 \cdot a^r v = (1 v) (a g)^r = a \cdot g(1 v)^l.$$

Setzt man noch $1 v = t$, so ist also

$$v = g t^l.$$

Umgekehrt stellt auch jeder solche Ausdruck eine A^r -halblineare Abbildung von A dar, insbesondere sind also die Automorphismen von A A^r -halblineare Abbildungen.

Über halblineare Abbildungen beweisen wir nun den folgenden

Satz:²⁾ 1. Die A^r -halblinearen Abbildungen $v_i = g_i t_i^l$, $i = 1, \dots, n$ sind dann und nur dann linear abhängig über A^r , wenn es darunter Abbildungen v_1, \dots, v_m gibt (bei geeigneter Numerierung), so daß für die zugehörigen Automorphismen

$$g_j = g_1 a_j^l (a_j^{-1})^r, \quad a_j \in A, \quad j = 1, \dots, m$$

gilt und die Elemente $t_1 a_1, \dots, t_m a_m$ linear abhängig über dem Zentrum Z von A sind.

2. Ist \mathfrak{R} ein zweiseitiger A^r -Modul, der über A^r durch endlich viele A^r -halblineare Abbildungen erzeugt wird, dann besitzt jeder zweiseitige A^r -Untermodul \mathfrak{U} von \mathfrak{R} ebenfalls diese Eigenschaft.

Bevor wir den Beweis führen, wollen wir die erste Behauptung noch etwas anders formulieren. Sie besagt, daß A^r -halblineare Abbildungen, deren zugehörige Automorphismen in verschiedenen Klassen nach der Gruppe aller inneren Automorphismen von A liegen, über A^r linear unabhängig sind und daß A^r -halblineare Abbildungen v_1, \dots, v_m , deren zugehörige Automorphismen innere sind, für die also

$$g_j = a_j^l (a_j^{-1})^r, \quad j = 1, \dots, m$$

gilt, dann und nur dann linear abhängig über A^r sind, wenn die Elemente $t_1 a_1, \dots, t_m a_m$ linear abhängig über Z sind.

Zum Beweis der ersten Behauptung des Satzes nehmen wir an, daß v_1, \dots, v_n linear unabhängig über A^r seien und es sei (bei geeigneter Numerierung)

$$(2) \quad v_1 a_1^r + \dots + v_m a_m^r = 0, \quad a_j \neq 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

eine kürzeste Darstellung der Null mit Hilfe dieser Abbildungen, d. h. es gebe keine solche Darstellung mit weniger von Null verschiedenen Koeffizienten. Zur Abkür-

²⁾ Vgl. [1], lemme 1, lemme 2; [3], lemma 1, lemma 2; [2], lemme 2; [4], Hilfssatz 1.

zung bezeichnen wir den Ausdruck auf der linken Seite von (2) mit u . Da A^r einfach ist, gibt es endlich viele Elemente $b_i^r, c_i^r \in A^r$, so daß $\sum_i b_i^r a_1^r c_i^r = 1$ ($1^r = 1$) gilt. Auf Grund der Vertauschungsregel ist auch $\sum_i (b_i g_1^{-1})^r u c_i^r$ eine Darstellung der Null mit Hilfe von v_1, \dots, v_m , bei der außerdem der Koeffizient von v_1 gleich 1 ist. Wir können daher annehmen, daß dies bereits für u zutrifft, d. h. daß $a_1^r = 1$ gilt. Dann kann keiner der Koeffizienten von u Nullteiler sein, denn dann wäre u keine kürzeste Darstellung der Null. Wegen $a_1^r = 1$ und der Vertauschungsregel besteht für beliebiges $a^r \in A^r$ die folgende Gleichung:

$$a^r u - u(a g_1)^r = v_2 [(a g_2)^r a_2^r - a_2^r (a g_1)^r] + \dots + v_m [(a g_m)^r a_m^r - a_m^r (a g_1)^r].$$

Dies ist wieder eine Darstellung der Null. Da sie weniger von Null verschiedene Koeffizienten als u aufweist, müssen darin alle Koeffizienten verschwinden:

$$(3) \quad (a g_j) a_j = a_j (a g_1), \quad j = 1, \dots, m.$$

Da, wie zuvor festgestellt, alle a_j regulär sind, folgt

$$(4) \quad g_j = g_1 a_j^l (a_j^{-1})^r, \quad j = 1, \dots, m.$$

Setzt man diese Gleichungen in (2) ein, so erhält man

$$g_1 (a_1^l t_1^l + \dots + a_m^l t_m^l) = 0,$$

also

$$t_1 a_1 + \dots + t_m a_m = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung notwendig ist. Um festzustellen, daß sie hinreichend ist, durchlaufe man den Schluß in umgekehrter Richtung, wobei zu berücksichtigen ist, daß Elemente, die innere Automorphismen erzeugen, nur bis auf Faktoren aus Z bestimmt sind und daß man ohne Einschränkung $a_1 = 1$ annehmen kann.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei v eine beliebige A^r -halblineare Abbildung aus \mathfrak{R} . Ist $v a^r$ ($a^r \neq 0$) von den halblinearen Abbildungen v_1, \dots, v_n linear abhängig, so folgt auf Grund der angegebenen Schlußweise, daß bereits v von v_1, \dots, v_n linear abhängig ist. Folglich bildet ein maximales System linear unabhängiger halblinearer Abbildungen aus dem endlichen Erzeugendensystem von \mathfrak{R} eine Basis von \mathfrak{R}/A^r .

Sei nun v_1, \dots, v_n eine feste Basis aus A^r -halblinearen Abbildungen von \mathfrak{R}/A^r . Den Beweis führen wir durch Induktion nach der Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten der Elemente aus \mathfrak{U} in der Darstellung durch diese Basis. Der Induktionsbeginn ist klar und die Behauptung sei richtig für alle Elemente aus \mathfrak{U} mit weniger als m von Null verschiedenen Koeffizienten. Das Element $u \in \mathfrak{U}$ besitze (bei geeigneter Numerierung der Basiselemente) die Darstellung

$$u = v_1 a_1^r + \dots + v_m a_m^r, \quad a_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Gibt es ein Element $u' \in \mathfrak{U}$

$$u' = v_1 b_1^r + \dots + v_m b_m^r \neq 0,$$

bei dem nicht alle Koeffizienten von Null verschieden sind, so gibt es nach der angegebenen Schlußweise auch ein solches Element, bei dem ein Koeffizient gleich 1 ist; sei etwa $b_1^r = 1$. Dann sind $u - u' a_1^r$ und $u' a_1^r$ beides Elemente mit weniger als m von Null verschiedenen Koeffizienten, die sich also nach Induktionsannahme linear durch \mathcal{A}^r -halblineare Abbildungen aus \mathfrak{U} darstellen lassen. Folglich gilt dies auch für u selbst. Gibt es kein Element u' mit der angegebenen Eigenschaft, so sei u^* ein Element aus dem durch u erzeugten zweiseitigen \mathcal{A}^r -Modul mit dem ersten Koeffizienten 1:

$$u^* = v_1 c_1^r + \dots + v_m c_m^r, \quad c_1^r = 1.$$

Zunächst gilt $u = u^* a_1^r$. Zum Beweis bleibt daher nur festzustellen, daß u^* bereits eine \mathcal{A}^r -halblineare Abbildung ist. Das ergibt sich aber sofort nach der Schlußweise im Beweis der ersten Behauptung. Auch jetzt gilt, daß alle Koeffizienten von u^* reguläre Elemente aus \mathcal{A}^r sind. Ferner ist $a^r u^* - u^*(a \mathfrak{G}_1)^r$ ein Element aus \mathfrak{U} mit weniger von Null verschiedenen Koeffizienten als u^* und folglich müssen darin alle Koeffizienten verschwinden. Dann gelten die Gleichungen (3) und (4) sinngemäß für u^* und man erhält schließlich

$$u^* = \mathfrak{G}_1(c_1^l t_1^l + \dots + c_m^l t_m^l).$$

Setzt man noch $t_1 c_1 + \dots + t_m c_m = t$, so folgt $u^* = \mathfrak{G}_1 t^l$ und dies ist eine halblineare Abbildung.

Folgerungen

1. Eine Automorphismengruppe \mathfrak{G} von A heißt (im Sinne von T. NAKAYAMA) *regulär*, wenn sie den folgenden Voraussetzungen genügt: Ist T der durch diejenigen Elemente aus A erzeugte Ring, die in \mathfrak{G} enthaltene innere Automorphismen von A hervorrufen, so sei T einfach und von endlichem Rang über dem Zentrum Z von A ; die in \mathfrak{G} enthaltene Gruppe \mathfrak{G}_0 von inneren Automorphismen bestehe aus allen inneren Automorphismen, die durch Elemente aus T erzeugt werden und schließlich sei der Index von \mathfrak{G}_0 in \mathfrak{G} , $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_0)$, endlich. Bezeichnet C den Fixring von \mathfrak{G} , d. h. die Gesamtheit der Elemente aus A , die bei allen Automorphismen aus \mathfrak{G} ungeändert bleiben, so ist mit T auch C einfach und es gilt die Rangrelation

$$(5) \quad (A : C) = (\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_0) (T : Z),$$

wobei unter $(A : C)$ sowohl der Links- als auch der Rechtsrang verstanden werden kann, da diese übereinstimmen. Bei nur äußeren Automorphismen, also im Falle $(T : Z) = 1$ ist dies die vom klassischen Fall her bekannte Gleichung zwischen dem Rang einer galoisschen Erweiterung und der Ordnung der GALOISgruppe.

Die Rangrelation (5) soll nun bei sonst gleichen Voraussetzungen für den Fall hergeleitet werden, daß T (und damit auch C) halbeinfach sind. \mathfrak{G} soll dann als *halbregulär* bezeichnet werden [5].

Sei also \mathfrak{G} halbregulär und \mathfrak{R} bezeichne den durch \mathfrak{G} und A^r erzeugten Endomorphismenring von A . Dieser besitzt auf Grund unseres Satzes den (beidseitigen) Rang $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_0)(T : Z)$ über A^r . Nach J. DIEUDONNÉ ([2], Théorème 2) stimmt dieser Rang mit dem von A/C überein. Wir haben damit

Folgerung 1: *Ist \mathfrak{G} eine halbreguläre Automorphismengruppe des einfachen Ringes A und C der Fixring von \mathfrak{G} , so gilt die Rangrelation (5)³⁾.*

2. Nach T. NAKAYAMA nennt man einen Unterring C von A *schwach normal* unter A , wenn der Zentralisator $\mathfrak{Z}(C^l)$ von C^l in \mathfrak{G} über A^r durch endlich viele A^r -halblinare Abbildungen erzeugt wird. Behält man die Bezeichnung „schwach normal“ bei sonst gleichen Voraussetzungen auch für den Fall eines beliebigen, nicht notwendig einfachen Unterringes C von A bei, so gilt

Folgerung 2: *Ist C ein schwach normaler Unterring von A und B ein Ring mit $C \subseteq B \subseteq A$, so ist auch B schwach normal unter A .*

Dies folgt sofort aus der zweiten Behauptung des Satzes, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{Z}(B^l) \subseteq \mathfrak{Z}(C^l)$ gilt und $\mathfrak{Z}(B^l)$ zweiseitiger A^r -Modul ist.

Wir haben damit einen neuen Beweis eines Ergebnisses von T. NAKAYAMA erhalten ([5], Lemma 1.5).

Schließlich erwähnen wir noch

Folgerung 3: *Ist C ein schwach normaler Unterring von A und ist B ein Ring mit $C \subseteq B \subseteq A$, über dem A eine Linksbasis besitzt, dann gibt es zu jedem Ringisomorphismus q von B in A , bei dem C elementweise fest bleibt, eine A^r -halblinare Abbildung $v \in \mathfrak{Z}(C^l)$ mit*

$$b^l v = v(bq)^l \text{ für alle } b \in B.$$

Die Voraussetzung, daß A/B eine Linksbasis besitzt, ist z. B. erfüllt, wenn B ein halbeinfacher Ring ist.

Zum Beweis sei w_1, \dots, w_n eine Linksbasis von A/B . Dann stellt die Zuordnung:

$$\sum_{i=1}^n b_i w_i \rightarrow \sum_{i=1}^n (b_i q) w_i, \quad (b_i \in B)$$

eine der Bedingung $b^l v = v(bq)^l$ für alle $b \in B$ genügende Abbildung $v \in \mathfrak{G}$ dar. Alle Abbildungen aus \mathfrak{G} mit dieser Eigenschaft bilden nun einen zweiseitigen A^r -Untermodul von $\mathfrak{Z}(C^l)$. Da dieser nach unserem Satz durch A^r -halblinare Abbildungen erzeugt wird, gibt es also jedenfalls eine Abbildung der behaupteten Eigenschaft.

³⁾ T. NAKAYAMA schreibt in [5], Seite 288 über die Verallgemeinerungsmöglichkeit von (5) auf halbreguläre Automorphismengruppen: "It is also possible to obtain some statements which may be considered as a generalization of our rank relation, but they are rather complicated and clumsy".

Literaturverzeichnis

- [1] H. CARTAN, Théorie de Galois pour les corps non-commutatifs, Ann. École Norm. **65**, 60–77 (1948).
- [2] J. DIEUDONNÉ, La théorie de Galois des anneaux simples et semi-simples. Commentarii Math. Helvet., **21**, 154–184 (1948).
- [3] N. JACOBSON, A note on division rings. Amer. J. Math. **69**, 27–36 (1947).
- [4] F. KASCH, Über den Endomorphismenring eines Vektorraums und den Satz von der Normalbasis. Math. Ann. (Im Druck.)
- [5] T. NAKAYAMA, Galois theory of simple rings. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 276–292 (1952).

Eingegangen am 16. 6. 1953