MATHEMATISCHE NACHRICHTEN

IM AUFTRAGE DER

DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

ERHARD SCHMIDT

GEMEINSAM MIT

HEINRICH GRELL, GEORG HAMEL, HELMUT HASSE,

H. L. SCHMID UND KURT SCHRÖDER

10. BAND

1953

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

MATH. NACHR. · 10. BAND · NR. 1—6 · BERLIN · JULI/DEZEMBER 1953

Inhalt des 10. Bandes

Zur Annäherung algebraischer Zahlen durch arithmetisch charakterisierte rationale Zahlen

Von Friedrich Kasch in Göttingen

(Eingegangen am 5. 1. 1953)

Ergebnisse

Von C. L. Siegel stammt die Idee, bei der Annäherung algebraischer Zahlen durch rationale die arithmetischen Eigenschaften der Näherungszahlen zu berücksichtigen ([1], S. 736, Fußn.). In anderer Weise wurde diese Idee von Th. Schneider herangezogen ([3]) und von K. Mahler weiter ausgebaut ([1], [2]). Schließlich bewies Th. Schneider kürzlich einen Satz, der seine und die Mahlerschen Ergebnisse zusammenfaßt und verallgemeinert ([4]). Dieser Satz kann folgendermaßen formuliert werden:

Es sei $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ *eine Folge verschiedener rationaler Zahlen mit folgenden Eigenschaften*:

1. $q_i \leqq q_{i+1}$, $(p_i, q_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$;
2. *Die Zahlen* p_i *und* q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *besitzen Faktorzerlegungen in ganze Zahlen*:

$$p_i = p'_i p''_i, \qquad q_i = q'_i q''_i,$$

wobei die p''_i *und* q''_i *Potenzprodukte von nur endlich vielen, von i unabhängigen Primzahlen sind. Es werden bezeichnet*:

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log p'_i}{\log p_i} = \omega, \qquad \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log q'_i}{\log q_i} = \sigma;$$

3. *Die Zahlen* $\frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *sind Lösungen der Ungleichung*

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < q_i^{-\mu},$$

wobei α *eine reelle, irrationale algebraische Zahl und* $\mu > \omega + \sigma$ *ist.*

Dann gilt

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = \infty.$$

Dieser Satz, der ohne die arithmetischen Voraussetzungen für $\mu = 2$ bereits falsch ist ([5]), erlaubt im Spezialfall Exponentenwerte $\mu > 0$. Diese Tatsache ist insbesondere für die Anwendung zur Konstruktion transzendenter Zahlen von Interesse. Th. Schneider stellte in diesem Zusammenhang die Frage, ob es gelingt, eine ähnliche Aussage zu beweisen, wenn etwa die Näherungsnenner

„im wesentlichen" aus Fakultäten bestehen. Daß dies möglich ist, soll hier gezeigt werden.

Dabei wird zugleich eine Verschärfung der Behauptung

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = \infty$$

hergeleitet, die eine gewisse Aussage darüber macht, daß „große" Quotienten $\frac{\log q_{i+1}}{\log q_i}$ in der Folge aller dieser Quotienten nicht „weit" auseinanderliegen. Diese Verschärfung ergibt sich bereits aus der Beweismethode des vorstehenden Satzes und hat auch für diesen Gültigkeit.

Wir zeigen:

Satz 1. *Es sei* $\frac{p_1}{q_1} = \zeta_1$, $\frac{p_2}{q_2} = \zeta_2$, $\frac{p_3}{q_3} = \zeta_3, \ldots$ *eine Folge verschiedener rationaler Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

1. $q_i \leqq q_{i+1}$, $(p_i, q_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$;
2. *Die* q_i *besitzen eine Faktorzerlegung in ganze Zahlen* $q_i = q_i' q_i''$, *und es sei*

(1) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log q_i'}{\log q_i} = \omega_1;$$

3. *Es gibt ganze rationale Zahlen* f_i *mit* $q_i'' f_i = l_i!$, *und es sei*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log f_i}{\log q_i} = \omega_2;$$

4. *Die Zahlen* $\frac{p_i}{q_i}$ *genügen der Ungleichung*

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < q_i^{-\mu},$$

wobei α *eine reelle algebraische Zahl und*

$$\mu > 1 + \omega_1 + \omega_2 \left((1 - \omega_1)(2 + \omega_2) + \omega_1^2\right)$$

ist.

Dann ist

(2) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = \infty.$$

Darüber hinaus gilt: Für jede Teilfolge der gegebenen Folge mit der Bezeichnung

(3) $$\zeta_{a_1,0}, \zeta_{a_1,1}, \ldots, \zeta_{a_1,b_1}, \zeta_{a_2,0}, \ldots, \zeta_{a_2,b_2}, \zeta_{a_3,0}, \ldots$$

und

(4) $$\underline{\lim_{\substack{i\to\infty \\ 0\leqq n<b_i}}} \frac{\log q_{a_i,n+1}}{\log q_{a_i,n}} = \eta,$$

für die gilt:

(5) $$\lim_{i\to\infty} \frac{\log b_i}{\log q_{a_i,0}} = \infty, \quad \textit{falls } \eta = 1.$$
$$\lim_{i\to\infty} b_i = \infty, \quad \textit{falls } \eta > 1.$$

ist

(6) $$\overline{\lim_{\substack{i\to\infty \\ 0\leqq n<b_i}}} \frac{\log q_{a_i,n+1}}{\log q_{a_i,n}} = \infty.$$

Daß (2) aus der letzten Behauptung folgt, ist sofort einzusehen. Dazu hat man nur die ursprüngliche Folge so zu unterteilen, daß $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \frac{\log b_i}{\log q_{a_i,0}} = \infty$ gilt, was offenbar möglich ist.

Aus dem Beweis ergibt sich, daß man diesen Satz auch mit dem zuvor angegebenen Satz kombinieren und etwa über die p_i und q_i' noch die dort für die p_i und q_i angegebenen Voraussetzungen machen könnte, um damit μ weiter zu verkleinern. Darauf soll jedoch hier nicht eingegangen werden, ebensowenig auf eine mögliche Verallgemeinerung beider Sätze auf die Annäherung algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen, die für den Fall, daß über die Näherungswerte keine arithmetischen Voraussetzungen gemacht werden, bereits bekannt ist ([3]).

Satz 1 kann zur Konstruktion transzendenter Zahlen benutzt werden. Wir beweisen dazu den folgenden Satz.

Satz 2. *Die Reihe*

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r_\nu}{u_\nu!}$$

ist transzendent, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. *Die u_ν sind natürliche Zahlen mit* $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = c > 1$;
2. $r_\nu = \frac{s_\nu}{t_\nu}$, *wobei s_ν, t_ν ganze rationale Zahlen sind, die den Bedingungen $0 < t_\nu$ und $|s_\nu|, t_\nu \leqq B^{d^\nu}$ genügen, wobei $B > 0$ eine beliebige Konstante und $d < c$ ist;*
3. *Es gibt eine unendliche Teilfolge der Folge aller Reihenglieder, deren Elemente von 0 verschieden sind und für die mit der Bezeichnung*

(7) $$\varrho_{a_1,0},\ \varrho_{a_1,1},\ \ldots,\ \varrho_{a_1,b_1},\ \varrho_{a_2,0},\ \ldots,\ \varrho_{a_2,b_2},\ \varrho_{a_3,0},\ \ldots$$

gilt:

$$\text{a)}\ \lim_{i\to\infty} b_i = \infty,$$

$$\text{b)}\ \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{u_{a_i,n+1}}{u_{a_i,n}} < \infty.$$

In diesem Satz ist zum Beispiel die Aussage enthalten, daß bei sonst gleichen Voraussetzungen die Potenzreihe

$$\xi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu x^\nu$$

für rationale Argumente $\neq 0$ transzendente Funktionswerte besitzt.

Die Voraussetzungen 1. und 3. des Satzes sind etwa erfüllt, wenn $u_\nu = [c^\nu]$ mit beliebigem $c > 1$ und $r_\nu \neq 0$ gesetzt wird.

Zum Beweis von Satz 2 wird von Satz 1 sowohl die anfangs erwähnte Verschärfung von (2) als auch die Verkleinerung des Exponenten μ bis auf $\mu > 1$ für $\omega_1 = \omega_2 = 0$ tatsächlich gebraucht, so daß Satz 2 nicht aus den bisher bekannten Approximationssätzen folgen dürfte.

Beim Beweis beider Sätze wird von gewissen arithmetischen Eigenschaften der Fakultäten Gebrauch gemacht, die in den Hilfssätzen 4 und 5 hergeleitet werden.

Beweis von Satz 1

1. Der Beweis schließt sich an den des anfangs erwähnten Satzes an und benutzt die dort angegebenen Hilfssätze, die ohne Beweis übernommen werden[1]).

Hilfssatz 1. *$r_1, r_2, \ldots, r_k$ seien natürliche Zahlen. Man schneide den Quader*

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

mit der $(k-1)$-dimensionalen Ebene $\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} = t$. Der Quotient Q aus der Anzahl der Gitterpunkte, die in dem kleineren Quaderabschnitt (mit Einschluß seiner Oberfläche) liegen, und der Anzahl der Gitterpunkte des ganzen Quaders ist für $t = \varepsilon k$ ($\varepsilon > 0$, unabhängig von k) und hinreichend großes k beliebig klein.

Zusatz. *Daraus folgt sofort, daß auch der Quotient Q' aus der Anzahl der Gitterpunkte des Quaderabschnitts*

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \geqq t$$

und der Anzahl der Gitterpunkte des Quaderabschnitts

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \qquad \left| \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \right| < t$$

für $t = \varepsilon k$ und hinreichend großes k beliebig klein ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $\alpha \neq 0$ eine reelle algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$. Ferner sei $r = \max(r_1, \ldots, r_k)$. Setzt man $t = \varepsilon k$ ($\varepsilon > 0$, unabhängig von k) und wählt k derart, daß Hilfssatz 1 mit $Q' < \frac{1}{2n}$ erfüllt ist, so gilt: Es gibt ein nicht identisch verschwindendes Polynom $R(z_1, \ldots, z_k)$ mit ganzrationalen Koeffizienten und höchstens vom Grade $r_\varkappa$ in $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) so, daß*

1. *die Werte*

$$\left. \frac{\partial^{\tau_1 + \cdots + \tau_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\tau_1} \cdots \partial z_k^{\tau_k}} \right|_{z_1 = \cdots = z_k = 0} = \left. \frac{\partial^{\tau_1 + \cdots + \tau_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\tau_1} \cdots \partial z_k^{\tau_k}} \right|_{z_1 = \cdots = z_k = \alpha} = 0$$

sind, falls

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \quad \text{und} \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \geqq k\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$$

ist und $\tau_1, \ldots, \tau_k$ nichtnegative ganzrationale Zahlen bedeuten;

2. *die Ungleichung*

$$\left| \frac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_k! \, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_k^{\varrho_k}} \right| < \gamma_1^r \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + |z_\varkappa|)^{r_\varkappa}$$

---

[1]) Der Beweis könnte auch nach dem Mahlerschen Vorbild [1] geführt werden, wobei man insbesondere ohne den Schubfachschluß auskommt. Wir benutzen die Schneidersche Methode, da wir dann aus [4] außer den Hilfssätzen weitere Ergebnisse unmittelbar übernehmen können.

erfüllt ist, wobei die $\varrho_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ *ganzrationale Zahlen sind und die natürliche Zahl* γ_1 *nur von* k, ε, α *abhängt*[2]).

Hilfssatz 3. *Es seien* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_k$ *ganzrationale Zahlen mit* $q_\varkappa > 0$ *und* $(p_\varkappa, q_\varkappa) = 1$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. *Ferner sei* $R(z_1, \ldots, z_k)$ *das in Hilfssatz 2 bestimmte Polynom. Dann gilt: Ist*

$$\log q_\varkappa > \gamma_2 r \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1)^2 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{8}$$

(*für* $\varkappa = k$ *bedeute* $\prod\limits_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1)^2$ *die Zahl* 1), *so existieren* $k-1$ *Zahlen*

$$\varrho_\varkappa < \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k-1) \tag{9}$$

so, daß

$$\left.\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}\right|_{z_1=\frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k=\frac{p_k}{q_k}} \neq 0$$

ist. Selbstverständlich folgt dann $\varrho_\varkappa \leqq r_\varkappa$.

2. Wir stellen zunächst fest, daß man ohne Einschränkung statt (1) auch

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log q_i'}{\log q_i} = \omega_1 \tag{1'}$$

voraussetzen kann. Wegen $l_i! \leqq q_i^{2+\omega_2}$ für fast alle i und auf Grund der Stirlingschen Formel gilt $l_i \leqq \log q_i$ für fast alle i. Demnach kann man von der angegebenen Zerlegung $q_i = q_i' q_i''$ zu einer Zerlegung $q_i = \bar{q}_i' \bar{q}_i''$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\log \bar{q}_i'}{\log q_i} = \omega_1$ und $\bar{q}_i'' \bar{f}_i = \bar{l}_i!$ übergehen, wobei $\bar{f}_i \leqq f_i$ und $\bar{l}_i \leqq l_i$ gilt. Dann ist $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \frac{\log \bar{f}_i}{\log q_i} = \bar{\omega}_2 \leqq \omega_2$. Gilt der Satz für ω_1 und $\bar{\omega}_2$, so auch für ω_1 und ω_2.

Ferner bemerken wir, daß $q_i < q_{i+1}$ für fast alle i gilt, so daß für jede wachsende Folge von Indizes die Folge der zugehörigen q_i gegen ∞ strebt.

3. Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen an, daß es eine Folge (3) gibt, für die

$$\underline{\lim_{\substack{i\to\infty \\ 0\leqq n<b_i}}} \frac{\log q_{a_i, n+1}}{\log q_{a_i, n}} = \sigma' < \infty$$

ist. Aus dieser Annahme kann zunächst gefolgert werden, daß es dann zu zwei beliebigen festen Zahlen B, C mit $0 < B < C$ eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ gibt und zu jedem u_i eine Zahl a_j, bezeichnet mit $a_j = a_{(i)}$, so daß mit $b_j = b_{(i)}$ gilt:

$$\frac{\log q_{a_{(i)}, 0}}{B} < u_i < \frac{\log q_{a_{(i)}, b_{(i)}}}{C}. \tag{10}$$

Um dies einzusehen, ordne man jeder Zahl a_j die ganze Zahl u_i zu, die der Ungleichung

$$\frac{\log q_{a_j, 0}}{u_i} < B \leqq \frac{\log q_{a_j, 0}}{u_i - 1}$$

[2]) Ebenso sollen alle noch auftretenden Zahlen $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots$ nur von k, ε, α und einer noch einzuführenden Zahl δ, nicht aber von $r_1, \ldots, r_k$ abhängen.

genügt. Dann ist

$$\frac{\log q_{a_j,0}}{B} < u_i \leqq \frac{1}{B}\,\frac{u_i}{u_i-1}\log q_{a_j,0} < \frac{2}{B}\log q_{a_j,0}.$$

Ist

$$\frac{2}{B}\log q_{a_j,0} < \frac{1}{C}\log q_{a_j,b_j} \tag{11}$$

erfüllt, so gilt (10). Ist $\eta = 1$, so folgt aus $q_i < q_{i+1}$ und (5)

$$q_{a_j,b_j} > q_{a_j,0} + b_j \geqq q_{a_j,0} + q^N_{a_i,0}$$

mit beliebig vorgegebenem N für hinreichend großes j. Folglich gilt (11) mit $N > \frac{2C}{B}$. Ist $\eta > 1$, so folgt aus (4) mit $\eta - 1 > \delta > 0$

$$q_{a_j,b_j} \geqq q_{a_j,0}^{(\eta-\delta)^{b_j}}.$$

Wegen $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = \infty$ und $\eta - \delta > 1$ ist dann für hinreichend großes j

$$\frac{2}{B}\log q_{a_j,0} \leqq \frac{(\eta-\delta)^{b_j}}{C}\log q_{a_j,0};$$

also gilt auch jetzt (11). Da mit $j \to \infty$ auch die zugeordneten u_i gegen ∞ wachsen, gibt es darunter eine unendliche Folge $u_1 < u_2 < \cdots$ der behaupteten Art.

Es seien im folgenden $k, r_1, \ldots, r_k$ die in den Hilfssätzen auftretenden natürlichen Zahlen, über die noch genauer verfügt wird. Wir setzen

$$B = r_k^{-3^{k-1}}, \quad C = (\sigma' + 1) r_k = \sigma r_k$$

und verstehen unter $u_1, u_2, \ldots$ und $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots$ die zugehörigen Folgen, die (10) genügen. Dann wird behauptet: Zu fast allen u_i dieser Folge und jeder der Zahlen $d_\varkappa = k - \varkappa$ mit $\varkappa = 1, \ldots, k$ gibt es ein $q_{a_{(i)},n}$ mit $0 \leqq n < b_{(i)}$, für das

$$u_i r_k^{-3^{d_\varkappa}} < \log q_{a_{(i)},n} < \sigma u_i r_k^{-3^{d_\varkappa}} \tag{12}$$

erfüllt ist. Auf Grund von (10) gilt zunächst

$$\log q_{a_{(i)},0} < u_i r_k^{-3^{k-1}}, \qquad \sigma u_i r_k < \log q_{a_{(i)},b_{(i)}}.$$

Ferner ist

$$\log q_{a_{(i)},n+1} < \sigma \log q_{a_{(i)},n} \qquad (0 \leqq n < b_{(i)}).$$

Aus beiden Beziehungen zusammen folgt aber (12).

Zu jedem u_i von einem festen Index an und jedem $d_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) denke man sich nun ein $q_{a_{(i)},n}$, welches (12) genügt, ausgezeichnet. Für diese ausgezeichneten $q_{a_{(i)},n}$ kann man die Schreibweise $q_{a_{(i)},n} = q(u_i, d_\varkappa)$ einführen. Dann folgt aus (12)

$$\frac{1}{\sigma} r_k^{3^{d_{\varkappa'}} - 3^{d_{\varkappa''}}} < \frac{\log q(u, d_{\varkappa''})}{\log q(u, d_{\varkappa'})} < \sigma r_k^{3^{d_{\varkappa'}} - 3^{d_{\varkappa''}}}. \tag{13}$$

Aus der Folge der u_i wird nun eine solche unendliche Teilfolge ausgewählt, daß die k Grenzwerte

$$\lim \left[r_k \frac{\log q(u_i, d_k)}{\log q(u_i, d_\varkappa)} \right] = r_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{14}$$

für die u_i aus dieser Teilfolge existieren. Das ist möglich, denn bei festem r_k und veränderlichem u_i liegen die Ausdrücke $r_k \frac{\log q(u_i, d_k)}{\log q(u_i, d_\varkappa)}$ wegen (13) in einem endlichen Intervall.

Bei den weiteren Überlegungen wird die so gewonnene Teilfolge zugrunde gelegt, die wir der einfachen Schreibweise wegen wieder $u_1, u_2, \ldots$ nennen.

Das zu jedem u_i vermöge (12) gehörende k-tupel von Näherungsnennern werde mit

$$q(u_i, d_1) = q_1, \ldots, q(u_i, d_k) = q_k$$

bezeichnet. Dann erfüllen dieses k-tupel für fast alle u_i die Voraussetzung (8) von Hilfssatz 3.

Auf der rechten Seite der Ungleichung (8) steht nämlich ein von u_i unabhängiger Ausdruck, während die $q_\varkappa$ mit u_i wachsen. Zu jedem k-tupel von zugehörigen Näherungswerten $\frac{p_\varkappa}{q_\varkappa} = \zeta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ gibt es dann nichtnegative ganze Zahlen

$$\varrho_\varkappa < \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k-1),$$

so daß

$$\left. \frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_{k-1}! \, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}} \right|_{z_1=\zeta_1, \ldots, z_k=\zeta_k} \neq 0$$

ist. Für diesen Ausdruck führen wir die abkürzende Schreibweise $R_{(\varrho)}((\zeta))$ ein.

4. Es soll nun ein möglichst kleiner ganzrationaler Faktor $Q > 0$ so bestimmt werden, daß $Q R_{(\varrho)}((\zeta))$ ganzrational, also

$$|Q R_{(\varrho)}((\zeta))| \geqq 1$$

ist.

Um dabei die arithmetischen Voraussetzungen über die Näherungsnenner heranziehen zu können, zeigen wir zunächst:

Hilfssatz 4. *Sei mit natürlichen Zahlen m, s, t*

$$(s!)^m \leqq t!;$$

dann gibt es einen ganzrationalen Faktor $g = g(s, m, t)$ mit

$$(s!)^m \mid t! \, g,$$

der bei festem m und gleichmäßig in t

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log g}{\log (s!)} = 0$$

genügt.

Beweis. Offenbar gilt

$$(s!)^m \mid (ms)!.$$

Ist $ms \leqq t$, so gilt die Behauptung mit $g = 1$. Ist $t < ms$, so ist mit $g = \frac{(ms)!}{t!}$ die erste Bedingung erfüllt. Auf Grund der Voraussetzung ist

$$\frac{(ms)!}{t!} \leqq \frac{(ms)!}{(s!)^m}$$

und durch Anwendung der Stirlingschen Formel folgt hieraus mit einer geeigneten Konstanten $v = v(m)$

$$\frac{(ms)!}{(s!)^m} \leqq v^s.$$

Da andrerseits $s! \geqq s^{s(1-\delta)}$ mit $1 > \delta > 0$ für fast alle s ist, gilt wie behauptet bei festem m und gleichmäßig in t

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log g}{\log(s!)} \leqq \lim_{s\to\infty} \frac{s \log v}{(1-\delta)\, s \log s} = 0.$$

Auf Grund dieses Hilfssatzes können wir zur Bestimmung von Q die arithmetischen Voraussetzungen heranziehen.

Da für $\omega_1 = 1$ die Behauptung des Satzes bereits in der des anfangs erwähnten Satzes enthalten ist, können wir der einfachen Abschätzung halber im folgenden $\omega_1 < 1$, also $1 - \omega_1 > 0$ voraussetzen.

Zunächst folgt aus (14) zu vorgegebenem δ mit $1 - \omega_1 > \delta > 0$ und für hinreichend großes u_i

$$q_\varkappa^{\frac{r_\varkappa}{r_k}} \leqq q_k,$$

also auf Grund von (1)

$$q_\varkappa''^{(1-\omega_1-\delta)\frac{r_\varkappa}{r_k}} \leqq q_k''^{(1-\omega_1+\delta)};$$

ferner ist

$$f_\varkappa \leqq q_\varkappa^{\omega_2+\delta} \leqq q_\varkappa''^{(\omega_2+\delta)(1-\omega_1+\delta)} \leqq q_k''^{(\omega_2+\delta)\frac{(1-\omega_1+\delta)^2}{1-\omega_1-\delta}\frac{r_k}{r_\varkappa}}$$

und folglich

$$(q_\varkappa'' f_\varkappa)^{\frac{r_\varkappa}{r_k}} \leqq (q_k'' f_k)^\beta$$

mit

$$\beta = \frac{1-\omega_1+\delta}{1-\omega_1-\delta}\bigl(1 + (\omega_2+\delta)(1-\omega_1+\delta)\bigr). \tag{15}$$

Also gilt

$$(q_\varkappa'' f_\varkappa)^{\left[\frac{r_\varkappa}{r_k\beta}\right]} \leqq q_k'' f_k \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k-1)$$

und auf Grund von Hilfssatz 4 folgt daraus

$$(q_\varkappa'' f_\varkappa)^{\left[\frac{r_\varkappa}{r_k\beta}\right]} \,\Big|\, q_k'' f_k g_\varkappa$$

mit

$$\lim_{u_i\to\infty} \frac{\log g_\varkappa}{\log(q_\varkappa'' f_\varkappa)} = 0.$$

Dann gilt

$$q_\varkappa^{\tau_\varkappa} \mid (q_k f_k g_\varkappa)^{\beta'_\varkappa}$$

mit

$$\beta'_\varkappa = \left[\frac{\tau_\varkappa}{\left[\frac{r_\varkappa}{r_k\beta}\right]} + 1\right] \leqq \left[\frac{\tau_\varkappa r_k\beta + r_\varkappa - r_k\beta}{r_\varkappa - r_k\beta}\right] = \beta_\varkappa$$

für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ und $\beta_k = \tau_k$. Folglich gilt dann auch

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa''^{\tau_\varkappa} \,\Bigg|\, (q_k'' f_k)^{\sum_{\varkappa=1}^{k}\beta_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{k} g_\varkappa^{\beta_\varkappa}$$

mit

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa \leqq \left[r_k \beta \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa - r_k \beta} + \frac{\tau_k}{r_k} + k \right]. \tag{16}$$

Um diesen Ausdruck weiter abzuschätzen, zeigen wir, daß $\sqrt{r_\varkappa} > r_k$ ($\varkappa = 1, \ldots, k-1$) ist, also für die Nenner in der Summe von (16)

$$r_\varkappa - r_k \beta > (1-\delta) r_\varkappa \tag{17}$$

für hinreichend großes r_k gilt. Aus (13) und (14) folgt

$$\frac{1}{\sigma} r_k^{3^{d_\varkappa} - 3^{d_k} + 1} - 1 < r_\varkappa < \sigma r_k^{3^{d_\varkappa} - 3^{d_k} + 1}.$$

Da außerdem offenbar die Ungleichung

$$3^{d_\varkappa} - 3^{d_k} + 1 > 3(3^{d_{\varkappa+1}} - 3^{d_k} + 1)$$

besteht, ergibt sich

$$r_\varkappa > \frac{1}{\sigma} r_k^{3(3^{d_{\varkappa+1}} - 3^{d_k} + 1)} - 1 > \frac{1}{\sigma} \left(\frac{r_{\varkappa+1}}{\sigma} \right)^3 - 1.$$

Für hinreichend großes r_k folgt dann

$$r_\varkappa > (r_{\varkappa+1} + 1)^2, \tag{18}$$

also wie behauptet $\sqrt{r_\varkappa} > r_k$ für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$. Damit wird aus (16)

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa \leqq \left[k + \frac{r_k \beta}{1-\delta} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \right] \leqq \left[k + \frac{r_k \beta}{1-\delta} k \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right],$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil auf Grund von Hilfssatz 1 für alle in $R(z_1, \ldots, z_k)$ und damit erst recht für alle in $\dfrac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_{k-1}! \, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}$ tatsächlich auftretenden Potenzprodukte $z_1^{\tau_1} \ldots z_k^{\tau_k}$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq k \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)$$

ist. Da wegen (18) offenbar $\beta_\varkappa \leqq r_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) ist, gilt ferner

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} g_\varkappa^{\beta_\varkappa} \,\Big|\, \prod_{\varkappa=1}^{k} g_\varkappa^{r_\varkappa}.$$

Damit haben wir in

$$Q = \prod_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa'^{\,r_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{k} g_\varkappa^{r_\varkappa} (q_k'' f_k)^{\left[k + \frac{r_k \beta}{1-\delta} k \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\right]}$$

den gesuchten Faktor, für den

$$\left| Q R_{(\varrho)}((\zeta)) \right| \geqq 1 \tag{19}$$

ist.

5. Es soll nun $\left| Q R_{(\varrho)}((\zeta)) \right|$ nach oben abgeschätzt werden, und zwar zunächst Q. Für hinreichend großes $q_\varkappa = q_\varkappa(u_i, d_\varkappa)$ gilt auf Grund von (1) und (14)

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa'^{\,r_\varkappa} \leqq \prod_{\varkappa=1}^{k} q_\varkappa'^{(\omega_1 + \delta) r_\varkappa} \leqq q_k^{k r_k (\omega_1 + \delta)}.$$

Auf Grund von Hilfssatz 4 ist

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} g_{\varkappa}^{r_\varkappa} \leqq q_k^{\delta k r_k}.$$

Schließlich gilt wegen der 2. und 3. Voraussetzung des Satzes 1 für $\frac{1}{r_k} < \delta$

$$(q_k'' f_k)^{\left[k + k r_k \frac{\beta}{1-\delta}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right]} \leqq q_k^{(1-\omega_1+\omega_2+2\delta) k r_k \left(\frac{\beta}{1-\delta}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)+\delta\right)}.$$

Dann ist insgesamt

$$|Q| \leqq q_k^{k r_k \psi}$$

mit

$$\psi = \omega_1 + 2\delta + (1 - \omega_1 + \omega_2 + 2\delta)\left(\frac{\beta}{1-\delta}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) + \delta\right).$$

Die Abschätzung von $R_{(\varrho)}((\zeta))$ nach oben, die auf Grund von Hilfssatz 2, der Voraussetzung, daß die $\frac{p_i}{q_i}$ Lösungen von $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < q_i^{-\mu}$ sind, und (18) erfolgt, übernehmen wir aus dem Beweis des anfangs erwähnten Satzes ([4], Formel (18)). Sie lautet

$$|R_{(\varrho)}((\zeta))| < \gamma_3^r q_k^{-k r_k \mu \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(1-\delta)^2}$$

mit $r = \max(r_1, \ldots, r_k)$ und einer geeigneten Konstante γ_3. Damit ist

$$|Q R_{(\varrho)}((\zeta))| \leqq \gamma_3^r q_k^{k r_k \chi} \tag{20}$$

mit

$$\chi = -\mu\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(1-\delta)^2 + \omega_1 + 2\delta + (1 - \omega_1 + \omega_2 + 2\delta)\left(\frac{\beta}{1-\delta}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) + \delta\right),$$

wobei β durch (15) gegeben ist.

6. Es kann nun gezeigt werden, daß für

$$\mu = 1 + \omega_1 + \omega_2\left((1 - \omega_1)(2 + \omega_2) + \omega_1^2\right) + \nu$$

mit $\nu > 0$ und hinreichend kleine $\delta, \varepsilon > 0$ der Exponent χ negativ wird.

Da zwischen ε und δ bisher keine Beziehung hergestellt wurde, kann $\varepsilon = \delta$ gesetzt werden. Dann gelten für hinreichend kleines δ folgende Ungleichungen

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(1-\delta)^2 > \frac{1}{2} - \delta, \qquad \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \leqq \frac{1}{2} + 2\delta.$$

Aus $\omega_2 \geqq 1$ folgt $\mu > 2$; weil dafür die Behauptung des Satzes bekannt ist, können wir, um die folgende Abschätzung zu vereinfachen, $\omega_2 < 1$, $\mu \leqq 2$ und damit auch $1 - \omega_1 + \omega_2 < 2$ und $1 + \omega_2(1 - \omega_1) < 2$ voraussetzen. Sei ferner $d = \frac{1-\omega_1}{\delta}$; wegen $1 - \omega_1 > 0$ ist dann $d \neq 0$, und es gilt

$$\beta \leqq \left(1 + \frac{3}{d}\right)\left(1 + \omega_2(1 - \omega_1) + 3\delta\right),$$

also für hinreichend kleines δ

$$\begin{aligned}
&(1 - \omega_1 + \omega_2 + 2\delta)\left(\frac{\beta}{1-\delta}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) + \delta\right) \\
&\leqq (1 - \omega_1 + \omega_2 + 2\delta)\left(\left(1 + \frac{3}{d}\right)\left(1 + \omega_2(1 - \omega_1) + 3\delta\right)\left(\frac{1}{2} + 2\delta\right) + \delta\right) \\
&\leqq \frac{1}{2}(1 - \omega_1 + \omega_2)\left(1 + \omega_2(1 - \omega_1)\right) + \frac{10}{d} + 16\delta.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\chi \leqq -\frac{\mu}{2} + \omega_1 + \frac{1}{2}(1 - \omega_1 + \omega_2)\left(1 + \omega_2(1 - \omega_1)\right) + \frac{10}{d} + 20\delta \leqq -\frac{\nu}{2} + \frac{50}{d}.$$

Es ist also $\chi < 0$ für $d > \frac{100}{\nu}$ oder $\delta < \frac{(1 - \omega_1)\,\nu}{100}$.

Es sei nun δ in dieser Weise gewählt. k und r_k sind durch die Hilfssätze und im Beweis nur untere Schranken auferlegt worden, die durch geeignete Wahl erfüllt werden können. Dann wird wegen $\chi < 0$ die rechte Seite von (20) für hinreichend großes $q_k = q_k(u_i, d_k)$ kleiner als 1, im Widerspruch zu (19). Damit ist auch die Annahme, der Satz sei falsch, zum Widerspruch geführt.

Beweis von Satz 2

Den Beweis von Satz 2 beginnen wir mit dem folgenden

Hilfssatz 5. *Für die natürlichen Zahlen $u_{\nu-1}$, u_ν sei $\frac{u_\nu}{u_{\nu-1}} \geqq d > 1$. Ist e_ν der größte Exponent, mit dem die Primzahl p in $u_\nu!$ aufgeht, und e'_ν der größte Exponent, mit dem p in $\frac{u_\nu!}{u_{\nu-1}!}$ aufgeht, so ist*

$$e_\nu \leqq \frac{2d}{d-1}(e'_\nu + 1),$$

also für $e'_\nu > 0$

$$e_\nu \leqq \frac{4d}{d-1}\, e'_\nu.$$

Beweis. Aus der bekannten Beziehung

$$e_\nu = \left[\frac{u_\nu}{p}\right] + \left[\frac{u_\nu}{p^2}\right] + \cdots$$

folgt einerseits

$$e_\nu \leqq \frac{u_\nu}{p-1}.$$

Andrerseits gilt wegen $\frac{u_\nu}{u_{\nu-1}} \geqq d > 1$

$$e'_\nu \geqq \left[\frac{u_\nu}{p}\right] - \left[\frac{u_\nu}{dp}\right] \geqq \frac{u_\nu}{p}\left(1 - \frac{1}{d}\right) - 1.$$

Beide Beziehungen liefern zusammen

$$e'_\nu \geqq e_\nu \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{1}{d}\right) - 1 \geqq \frac{e_\nu}{2}\left(1 - \frac{1}{d}\right) - 1,$$

also die Behauptung.

Der Beweis von Satz 2 wird wieder indirekt geführt. Unter der Annahme, daß ξ algebraisch sei, können wir die Voraussetzungen von Satz 1 als erfüllt nachweisen, jedoch zeigen, daß dessen Behauptung nicht gilt.

Zunächst folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen von Satz 2, daß die angegebene Reihe konvergiert. Ferner kann in der 2. Voraussetzung wegen $c > 1$ und $c > d$ auch $d > 1$ vorausgesetzt werden. Dann gilt für fast alle ν

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \geqq d > 1, \tag{21}$$

so daß dies ohne Einschränkung der Allgemeinheit sogleich für alle derartigen Quotienten der gegebenen Reihe vorausgesetzt werden kann.

Die Folge der in Satz 1 vorkommenden Näherungswerte $\frac{p_i}{q_i} = \zeta_i$ setzen wir jetzt gleich mit der Folge der Partialsummen $\sum_{\nu=0}^{\varkappa} \varrho_\nu$, die zu $\varrho_\varkappa \neq 0$ gehören.

Wir bezeichnen:

$$\frac{p_i}{q_i} = \zeta_i = \sum_{\nu=0}^{\varkappa_i} \frac{r_\nu}{u_\nu!},$$

und es sei

$$q_i' \Big| \prod_{\nu=0}^{\varkappa_i} t_\nu, \qquad q_i'' \Big| u_{\varkappa_i}!$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß $\omega_2 = 0$ ist, wozu die Faktoren f_i mit $q_i'' f_i = u_{\varkappa_i}!$ abzuschätzen sind. Im allgemeinen gilt $q_{i-1} \Big| \prod_{\nu=0}^{\varkappa_i - 1} t_\nu u_{\varkappa_i - 1}!$, und wir nehmen zunächst an, es sei $q_{i-1} = \prod_{\nu=0}^{\varkappa_i} t_\nu u_{\varkappa_i-1}!$. Dann ist mit der Bezeichnung $\prod_{\nu=0}^{\varkappa_i} t_\nu = T_{\varkappa_i}$

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{s_{\varkappa_i}}{t_{\varkappa_i} u_{\varkappa_i}!} = \frac{p_{i-1} t_{\varkappa_i} u'_{\varkappa_i} + T_{\varkappa_i - 1} s_{\varkappa_i}}{T_{\varkappa_i} u_{\varkappa_i - 1}!\, u'_{\varkappa_i}},$$

wobei also $u'_{\varkappa_i} = \frac{u_{\varkappa_i}!}{u_{\varkappa_i - 1}!}$ ist. Zunächst denken wir diesen Bruch durch $(u'_{\varkappa_i}, T_{\varkappa_i - 1} s_{\varkappa_i}) = v_{\varkappa_i}$ gekürzt und kennzeichnen die gekürzten Größen durch einen Querstrich:

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1} t_{\varkappa_i} \overline{u'_{\varkappa_i}} + \overline{T_{\varkappa_i - 1}}\, \overline{s_{\varkappa_i}}}{T_{\varkappa_i} u_{\varkappa_i - 1}!\, \overline{u'_{\varkappa_i}}}. \tag{22}$$

Dann kann ein Primfaktor des Nenners, der in $\overline{u'_{\varkappa_i}}$ enthalten ist, nicht im Zähler aufgehen. Als gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner kommen also nur die höchsten Primzahlpotenzen des Nenners in Frage von Primzahlen, die $\overline{u'_{\varkappa_i}}$ nicht teilen. Diese sollen jetzt bestimmt werden, und zwar die höchsten derartigen Primzahlpotenzen von $u_{\varkappa_i - 1}!$. Offenbar gilt für diese Primzahlen zunächst $p \leqq u_{\varkappa_i - 1}$, und ihre Anzahl $\sigma'_{\varkappa_i - 1}$ kann mit Hilfe des Primzahlsatzes abgeschätzt werden:

$$\sigma'_{\varkappa_i - 1} \leqq (1 + \delta) \frac{u_{\varkappa_i - 1}}{\log u_{\varkappa_i - 1}} \leqq \frac{u_{\varkappa_i}}{\log u_{\varkappa_i - 1}} \leqq \frac{u_{\varkappa_i}}{(\varkappa_i - 1) \log d} = \sigma_{\varkappa_i} \quad \text{für } 1 + \delta < d\ ^{3)}.$$

Nimmt man zunächst an, daß $\overline{u'_{\varkappa_i}} = u'_{\varkappa_i}$ ist, so gilt für die Primfaktoren von $u_{\varkappa_i - 1}!$, die in $u'_{\varkappa_i}$ nicht aufgehen, mit der Bezeichnung von Hilfssatz 5 $e'_{\varkappa_i} = 0$, also $e_{\varkappa_i} \leqq \frac{2d}{d-1}$, und folglich geht eine solche Primzahl p in $u_{\varkappa_i - 1}!$ auch nur mit einer Potenz $\leqq \frac{2d}{d-1}$ auf. Für das größte Potenzprodukt $f'_{\varkappa_i}$ aller dieser Primfaktoren von $u_{\varkappa_i - 1}!$ besteht daher die Abschätzung

$$f'_{\varkappa_i} \leqq u_{\varkappa_i}^{\sigma_{\varkappa_i} \frac{2d}{d-1}}.$$

[3]) Diese und alle folgenden Abschätzungen gelten stets nur für hinreichend großes i bzw. $\varkappa_i$ bzw. ν, ohne daß dies jeweils erwähnt wird.

Damit haben wir bisher gezeigt: Ist $\overline{u'_{\varkappa_i}} = u'_{\varkappa_i}$, so kann in (22) der Zähler und im Nenner der Ausdruck $u_{\varkappa_i}!$ nur durch den Faktor $f'_{\varkappa_i}$ gekürzt werden.

Nun ist $u'_{\varkappa_i} = \overline{u'_{\varkappa_i}} v_{\varkappa_i}$, und $\overline{u'_{\varkappa_i}}$ kann weniger Primteiler enthalten als $u'_{\varkappa_i}$, falls $v_{\varkappa_i}$ größte Primzahlpotenzprodukte von $u'_{\varkappa_i}$ enthält. Dann kann der Zähler durch weitere Primzahlpotenzprodukte von $u_{\varkappa_i}!$ teilbar werden. Das Produkte $f''_{\varkappa_i}$ aller dieser Primzahlpotenzprodukte kann jedoch auf Grund von Hilfssatz 5 abgeschätzt werden:

$$f''_{\varkappa_i} \leqq v_{\varkappa_i}^{\frac{4d}{d-1}}.$$

Insgesamt haben wir damit

$$f_{\varkappa_i} = f'_{\varkappa_i} f''_{\varkappa_i} \leqq u_{\varkappa_i}^{\sigma_{\varkappa_i}\frac{2d}{d-1}} v_{\varkappa_i}^{\frac{4d}{d-1}}. \tag{23}$$

Dabei hatten wir die Voraussetzung $q_{i-1} = \prod_{\nu=0}^{\varkappa_i - 1} t_\nu u_{\varkappa_i - 1}!$ gemacht. Im Falle, daß q_{i-1} nur ein Teiler dieses Produkts ist, ist diese Abschätzung offenbar ebenfalls gültig, so daß (23) in jedem Falle gilt.

Es ist nun die rechte Seite von (23) weiter zu majorisieren. Da $v_{\varkappa_i}$ Teiler von $\prod_{\nu=0}^{\varkappa_i-1} t_\nu |s_{\varkappa_i}|$ ist und wegen $|s_\nu|,\, t_\nu < B^{d^\nu}$ gilt

$$v_{\varkappa_i} \leqq \prod_{\nu=0}^{\varkappa_i-1} t_\nu \,|s_{\varkappa_i}| \leqq B^{\sum\limits_{\nu=0}^{\varkappa_i} d^\nu} = B^{\frac{d^{\varkappa_i+1}-1}{d-1}}, \tag{24}$$

also

$$f_i \leqq e^{\frac{2d}{d-1}\frac{u_{\varkappa_i}\log u_{\varkappa_i}}{(\varkappa_i-1)\log d} + \frac{d^{\varkappa_i+1}-1}{d-1}\log B}.$$

Folglich ist

$$\omega_2 = \lim_{i\to\infty} \frac{\log f_i}{\log q_i} \leqq \lim_{i\to\infty} \frac{\log f_i}{(1-\delta)\, u_{\varkappa_i} \log u_{\varkappa_i} - \log f_i} = 0.$$

Aus (24) folgt ebenso, daß $\omega_1 = 0$, und wegen $\frac{u_{\varkappa_i}}{u_{\varkappa_i - 1}} \geqq d > 1$ erhält man schließlich für $\delta < \frac{d-1}{d+1}$

$$q_{i-1} < u_{\varkappa_i-1}^{u_{\varkappa_i-1}(1+\delta)} < u_{\varkappa_i}^{u_{\varkappa_i}(1-\delta)} < q_i.$$

Um unter der Annahme, daß ξ algebraisch ist, auch die 4. Voraussetzung des Satzes als erfüllt nachzuweisen, schätzen wir $\left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right|$ ab. Es ist wegen $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \geqq d$

$$\left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \sum_{\nu=\varkappa_i+1}^{\infty} \frac{|r_\nu|}{u_\nu!} \leqq \sum_{\nu=\varkappa_i+1}^{\infty} \frac{B^{d^\nu}}{(u_{\varkappa_i+1} d^{\nu-\varkappa_i+1})!} \leqq \sum_{\nu=\varkappa_i+1}^{\infty} \frac{B^{d^\nu}}{(u_{\varkappa_i+1} d^{\nu-\varkappa_i+1})^{u_{\varkappa_i+1} d^{\nu-\varkappa_i+1}(1-\delta}}$$

$$\leqq \frac{1}{u_{\varkappa_i+1}^{u_{\varkappa_i+1}(1-\delta)}} \sum_{\nu=\varkappa_i+1}^{\infty} e^{d^\nu(\log B - (\nu-\varkappa_i+1)u_0 \log d\cdot(1-\delta))} \leqq \frac{\gamma^{d^{\varkappa_i+1}}}{u_{\varkappa_i+1}^{u_{\varkappa_i+1}(1-\delta)}},$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil der Klammerausdruck im Exponenten nur für endlich viele ν, unabhängig von $\varkappa_i$, positiv ist. γ ist dabei eine geeignete Konstante, die nicht von $\varkappa_i$ abhängt. Dieser Ausdruck kann weiter abgeschätzt werden; er ist für hinreichend großes $\varkappa_i$ kleiner oder gleich

$$\frac{1}{u_{\varkappa_i+1}^{u_{\varkappa_i+1}(1-\delta)^2}} \frac{\gamma^{d^{\varkappa_i+1}}}{d^{(\varkappa_i+1)d^{\varkappa_i+1}(1-\delta)\delta}},$$

also insgesamt

$$\left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \frac{1}{u_{\varkappa_i}^{u_{\varkappa_i}d(1-\delta)^2}}.$$

Wählt man nun $1 < \mu < d$ und $0 < \delta \leqq \frac{d-\mu}{2(d+\mu)}$, so ist $d(1-\delta)^2 > \mu(1+\delta)$, also

$$\frac{1}{u_{\varkappa_i}^{u_{\varkappa_i}d(1-\delta)^2}} \leqq \frac{1}{u_{\varkappa_i}^{u_{\varkappa_i}\mu(1+\delta)}} \leqq \frac{1}{(u_{\varkappa_i}!)^\mu}$$

und damit die 4. Voraussetzung von Satz 1 erfüllt.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Behauptung von Satz 1 nicht zutrifft. Um Satz 1 mit $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = \infty$ anwenden zu können, muß gezeigt werden, daß $\eta > 1$ ist. Wegen $\omega_1 = \omega_2 = 0$ gilt mit $\delta > 0$

$$\frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} \geqq \frac{q_i d \log(q_i d)\,(1-\delta)}{q_i \log q_i (1+\delta)} \geqq d\,\frac{1-\delta}{1+\delta},$$

also

$$\eta = \lim_{i\to\infty} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} \geqq d > 1.$$

Wegen $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = \infty$ müßte für die Partialsummen, die mit den in (7) gegebenen Reihengliedern enden, (6) gelten. Offenbar steht das im Widerspruch zur Voraussetzung 3b von Satz 2. Damit ist ξ als transzendent erkannt.

Literatur

[1] K. Mahler, Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **39**, 653—640, 729—737 (1936).
[2] ———, Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **40**, 421—428 (1937).
[3] Th. Schneider, Über die Approximation algebraischer Zahlen. J. reine angew. Math. **175**, 182—192 (1936).
[4] ———, Zur Annäherung der algebraischen Zahlen durch rationale. J. reine angew. Math. **188**, 115—128 (1950).
[5] C. L. Siegel, Über Näherungswerte algebraischer Zahlen. Math. Ann. **84**, 80—99 (1921).