MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

136. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1958

Inhalt des 136. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

KASCH, F. und VOLKMANN, B.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 442—453 (1958)

Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen

Von

FRIEDRICH KASCH in Heidelberg und BODO VOLKMANN in Mainz

1. Bei der Mahlerschen Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen betrachtet man bekanntlich[1]), wenn $\mathfrak{P}(n, H)$ die Menge aller Polynome $P(x)$ mit ganzrationalen Koeffizienten von einem Grad $\leqq n$ und einer Höhe $\leqq H$ ist, zu einer vorgegebenen Zahl ξ die Größen

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{P \in \mathfrak{P}(n, H) \\ P(\xi) \neq 0}} |P(\xi)| \quad \text{und} \quad w_n(\xi) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H} .$$

Setzt man ferner $\vartheta_n(\xi) = \frac{w_n(\xi)}{n}$, so ergibt sich in der Bezeichnungsweise von [8] der Typ einer (reellen oder komplexen) Zahl ξ als

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\xi) .$$

Unter S-Zahlen versteht man dann diejenigen, deren Typ positiv und endlich ist. Der kleinste Wert, den $\vartheta(\xi)$ für transzendente Zahlen ξ annehmen kann, ist $\vartheta(\xi) = 1$ für reelles und $\vartheta(\xi) = \frac{1}{2}$ für komplexes ξ, und eine Vermutung von K. MAHLER [7] besagt, daß dies für fast alle reellen bzw. fast alle transzendenten ξ auch wirklich eintritt. Diese Mahlersche Vermutung ist also, da für reelle transzendente ξ auch immer $\vartheta_n(\xi) \geqq 1$ ist, in ihrem reellen Teil mit der Aussage äquivalent, daß für fast alle reellen ξ die Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

gelten.

Bisher ist (1), von dem bekannten Fall $n = 1$ abgesehen, nur für $n = 2$ bewiesen worden, nämlich von J. F. KUBILYUS [5]. Einer der Verfasser [4] gab kürzlich für diesen Satz einen vereinfachten Beweis und erzielte zugleich das bestmögliche Ergebnis für den komplexen Fall, wonach für fast alle komplexen ξ

$$\vartheta_2(\xi) = \frac{1}{4} \tag{2}$$

gilt. Für allgemeines n dagegen besagt die bisher beste Vorstufe der Mahlerschen Vermutung, ein Satz von W. J. LEVEQUE [6], nur, daß für fast alle reellen bzw. fast alle komplexen ξ die Ungleichung

$$1 \leqq \vartheta(\xi) \leqq 2 , \text{ bzw. } \frac{1}{2} \leqq \vartheta(\xi) \leqq \frac{3}{2} \tag{3}$$

gilt. Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der folgende

[1]) Siehe TH. SCHNEIDER [8], 3. Kap.

Satz 1. *a) Für fast alle reellen ξ ist*

$$1 \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

b) Für fast alle komplexen ξ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Aussage a) ist offenbar für $n = 2$ mit dem Resultat von J. F. Kubilyus identisch; dieses wird jedoch hier nicht bewiesen, da die hier angewandte Methode von der in [5] und auch von der in [4] abweicht und nicht auf den Fall $n = 2$ übertragbar ist. Aussage b) würde sich mit unserer Methode zwar auch für den Fall $n = 2$ beweisen lassen, jedoch dann weniger scharf sein als (2). Satz 1, der offensichtlich das Ergebnis von W. J. LeVeque einschließt, wird sodann durch Einführung des Hausdorffschen Dimensionsbegriffs verschärft (Satz 2). Man erhält speziell die Aussage, daß die Menge aller T-Zahlen und die Menge aller U-Zahlen im Sinne der Mahlerschen Klasseneinteilung beide die Hausdorffsche Dimension Null haben.

2. Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir die folgenden Hilfssätze. Die darin auftretenden Größen $C_1, C_2, \ldots$ bedeuten von H unabhängige Konstanten, die jedoch von n abhängen dürfen.

Hilfssatz 1. *Für jede S-Zahl ξ und jedes natürliche n ist $\vartheta_n(\xi) \geqq 1$ bzw. $\vartheta_n(\xi) \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, je nachdem, ob ξ reell oder komplex ist.*

Beweis. Siehe Th. Schneider [8], Seite 69.

Hilfssatz 2. *Sei $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n \in \mathfrak{P}(n, H)$ ein Polynom mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dann gilt, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_m$ voneinander verschieden sind,*

$$|\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m}| \leqq C_1 \frac{H}{|a_0|}.$$

Beweis[2]. Die Nullstellen von $P(x)$ seien dem absoluten Betrag nach geordnet:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_{n_1}| \leqq \frac{1}{2} < |\alpha_{n_1+1}| \leqq \cdots \leqq |\alpha_{n_2}| \leqq 1 < |\alpha_{n_2+1}| \leqq \cdots \leqq |\alpha_n|.$$

Für jedes $x = z$ mit $|z| = 1$ gilt offenbar

$$|P(z)| \leqq (n + 1) H.$$

Daraus folgt

$$\prod_{i=n_1+1}^{n} |z - \alpha_i| = \left| \frac{P(z)}{a_0} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{z - \alpha_i} \right| \leqq (n + 1)\, 2^{n_1} \frac{H}{|a_0|}.$$

Auf Grund des Satzes vom Maximum einer analytischen Funktion erhält man damit

$$\prod_{i=n_2+1}^{n} |\alpha_i| \leqq 2^{n_2 - n_1} \prod_{i=n_1+1}^{n} |\alpha_i| \leqq (n + 1)\, 2^{n_2} \frac{H}{|a_0|},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

[2]) Siehe N. I. Feldman [2]; der Beweis wird der Vollständigkeit halber hier angegeben.

Hilfssatz 3. *Sei $n \geqq 2$ und $P(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{P}(n, H)$ mit einer von Null verschiedenen Diskriminante $D(P)$. Dann gilt für jede seiner Nullstellen α_m:*

$$|P'(\alpha_m)| \geqq C_2 \frac{\sqrt{|D(P)|}}{H^{n-2}}.$$

Beweis. Offenbar ist

$$|D(P)| = \left|a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right| = \left|a_0^2 \prod_{\substack{j=1\\ j \neq m}}^{n} (\alpha_m - \alpha_j)^2\right| \cdot \left|a_0^{2n-4} \prod_{\substack{i<j\\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right|,$$

und wegen

$$\left|a_0^2 \prod_{\substack{j=1\\ j \neq m}}^{n} (\alpha_m - \alpha_j)^2\right| = |P'(\alpha_m)|^2$$

folgt somit

$$|P'(\alpha_m)| = \frac{\sqrt{|D(P)|}}{|a_0|^{n-2} \left|\prod\limits_{\substack{i<j\\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)\right|}. \tag{4}$$

Bei Ausmultiplikationen des Produktes im Nenner entsteht eine Summe von $2^{\binom{n-1}{2}}$ Summanden, von denen jeder seinerseits ein Produkt von $\binom{n-1}{2}$ Faktoren aus der Menge der $n-1$ Wurzeln α_i mit $i \neq m$ ist. In diesen Produkten kommt jedes α_i höchstens in der $(n-2)$-ten Potenz vor. Daher gilt nach Hilfssatz 2

$$\left|a_0^{n-2} \prod_{\substack{i<j\\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)\right| \leqq |a_0|^{n-2}\, 2^{\binom{n-1}{2}} (n+1)^{n-2}\, 2^{n(n-2)} \frac{H^{n-2}}{|a_0|^{n-2}} = C_3 H^{n-2},$$

so daß sich die Behauptung nach (4) ergibt.

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 3 gilt, wenn ξ eine beliebige reelle oder komplexe Zahl und*

$$|\xi - \alpha_m| = \min_{i=1,\ldots,n} |\xi - \alpha_i|$$

ist,

$$|\xi - \alpha_m| \leqq C_4 \frac{H^{n-2}}{\sqrt{|D(P)|}} |P(\xi)|.$$

Beweis. Da $|\alpha_m - \alpha_i| \leqq |\alpha_m - \xi| + |\xi - \alpha_i| \leqq 2\,|\xi - \alpha_i|$ ist, folgt

$$|P'(\alpha_m)| \leqq 2^{n-1} |a_0| \prod_{\substack{i=1\\ i \neq m}}^{n} |\xi - \alpha_i|.$$

Somit ist nach Hilfssatz 3

$$1 \leqq \frac{1}{C_2} 2^{n-1} \frac{H^{n-2}}{\sqrt{|D(P)|}} |a_0| \prod_{\substack{i=1\\ i \neq m}}^{n} |\xi - \alpha_i|,$$

und hieraus folgt die Behauptung durch Multiplikation mit $|\xi - \alpha_m|$.

Hilfssatz 5. *Seien $\tilde{w}_n(H, \xi)$, $\tilde{w}_n(\xi)$, $\tilde{\vartheta}_n(\xi)$ und $\tilde{\vartheta}(\xi)$ analog den Ausdrücken $w_n(H, \xi)$, $w_n(\xi)$, $\vartheta_n(\xi)$ und $\vartheta(\xi)$ definiert, jedoch unter Beschränkung auf irreduzible Polynome $P(x)$. Dann gibt es für jedes ξ und jedes n eine natürliche Zahl*

$\nu = \nu(n) \leqq n$ *so, daß*

(5) $$\tilde{\vartheta}_n(\xi) \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq \tilde{\vartheta}_\nu(\xi)$$

gilt.

Beweis. Der linke Teil von (5) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Menge aller irreduziblen Polynome von einem Grad $\leqq n$ und einer Höhe $\leqq H$ eine Untermenge von $\mathfrak{P}(n, H)$ ist[3]). Zum Beweis des rechten Teils betrachten wir ein Polynom $P(x) \in \mathfrak{P}(n, H)$ mit $|P(\xi)| = w_n(H, \xi)$. Es sei $P = P_1 \ldots P_r$ mit irreduziblen Polynomen P_ϱ; ferner sei Grad $P_\varrho = n_\varrho$ und Höhe $P_\varrho = H_\varrho$. Dann ist wegen $|P(\xi)| = \prod_{\varrho=1}^{r} |P_\varrho(\xi)|$ und

$$|P_\varrho(\xi)| \geqq \tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho, \xi) \text{ offenbar } w_n(H, \xi) \geqq \prod_{\varrho=1}^{r} \tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho, \xi)\,,$$

also

$$\frac{\log \frac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H} \leqq \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\log \frac{1}{\tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho, \xi)}}{\log H} \leqq \sum_{\varrho=1}^{r} \left(1 + \frac{\log c_n}{\log H}\right) \frac{\log \frac{1}{\tilde{w}_{n_\varrho}(c_n H, \xi)}}{\log c_n H}\,,$$

wobei in der zweiten Ungleichung benutzt worden ist, daß es eine nur von n abhängende Konstante c_n mit $H_\varrho \leqq c_n H$ gibt[4]). Durch indirekte Schlußweise folgt daraus[5])

$$w_n(\xi) \leqq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \sum_{\varrho=1}^{r} \tilde{w}_{n_\varrho}(\xi)\,,$$

also

$$\vartheta_n(\xi) \leqq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \frac{\tilde{w}_{n_1}(\xi) + \cdots + \tilde{w}_{n_r}(\xi)}{n_1 + \cdots + n_r}$$

$$\leqq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \left(\frac{\tilde{w}_{n_1}(\xi)}{n_1}, \ldots, \frac{\tilde{w}_{n_r}(\xi)}{n_r}\right),$$

d. h. es ist $\vartheta_n(\xi) \leqq \tilde{\vartheta}_\nu(\xi)$ für ein gewisses $\nu \leqq n$, wie behauptet.

Ist also für eine Zahl ξ eine Abschätzung der Form

$$\tilde{\vartheta}_\nu(\xi) \leqq F(\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bewiesen, bei der $F(\nu)$ eine monoton wachsende Funktion ist, so gilt für jedes natürliche n auch

$$\vartheta_n(\xi) \leqq \tilde{\vartheta}_{\nu(n)}(\xi) \leqq F(\nu(n)) \leqq F(n)\,.$$

Daher werden wir uns beim Beweis von Satz 1 auf irreduzible Polynome beschränken können; doch wird davon nur in Form der Voraussetzung Gebrauch gemacht, daß keine mehrfachen Nullstellen auftreten sollen.

---

[3]) Vgl. auch Abschn. 6 dieser Arbeit.

[4]) Siehe z. B. [8], 3. Kap., Hilfssatz 16.

[5]) Zu beachten ist, daß die Zerlegung $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ von H abhängt.

Der folgende Hilfssatz erscheint uns auch unabhängig von dem hier vorliegenden Zusammenhang bemerkenswert; er wird daher etwas allgemeiner formuliert, als es für das Folgende notwendig ist.

Hilfssatz 6. *Zu jeder Zahl $\beta > 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, daß für jedes Polynom $V(x)$ vom Grad n mit ganzrationalen Koeffizienten und alle natürlichen Zahlen H gilt:*

$$\sum_{\substack{x=-H \\ V(x) \neq 0}}^{H} \frac{1}{|V(x)|^\beta} < \begin{cases} C\, H^{1-\beta n} & \text{für} \quad \beta n < 1\,, \\ C \log(H+1) & \text{für} \quad \beta n = 1\,, \\ C & \text{für} \quad \beta n > 1\,. \end{cases}$$

Beweis. Das Intervall $[-H, H]$ werde durch die Punkte

$$x_0 = -H,\, x_1, \ldots, x_q = H$$

so in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ zerlegt, daß in jedem von ihnen die Polynome[6] $V(x), \Delta V(x), \ldots, \Delta^{n-1} V(x)$ sämtlich monoton und im Innern von Null verschieden sind. Dies ist bei festem $V(x)$ offenbar mit einem $q \leqq n^2 + 1$ möglich. Dann genügt es, die Behauptung für ein einziges Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ an Stelle von $[-H, H]$ zu beweisen.

Auf Grund der Wahl der x_i sind auch die Funktionen

$$F_j(x) = |\Delta^{n-j} V(x)| \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

sämtlich in den Intervallen $[x_i, x_{i+1}]$ monoton. Daher gilt, wenn $x_i \leqq x \leqq x_{i+1} - 1$ ist,

$$(6) \quad \Delta F_{j+1}(x) = \begin{cases} F_j(x), & \text{falls } F_{j+1}(x) \text{ in } [x_i, x_{i+1}] \text{ monoton wächst,} \\ -F_j(x), & \text{falls } F_{j+1}(x) \text{ in } [x_i, x_{i+1}] \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Sei r_i die kleinste ganze Zahl $\geqq x_i$ und $s_i = [x_{i+1}]$. Im folgenden denken wir uns das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ festgehalten und betrachten nur ganze Zahlen $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Durch Induktion soll gezeigt werden:

$$(7) \qquad F_j(x) \geqq \begin{cases} \frac{1}{j!}(x - r_i - (j-1))^j & \text{für } r_i + j - 1 \leqq x \leqq s_i\,, \\ & \text{falls } F_j(x) \text{ monoton wächst,} \\ \frac{1}{j!}(s_i - x - (j-1))^j & \text{für } r_i \leqq x \leqq s_i - (j-1) \\ & \text{falls } F_j(x) \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Wir nehmen zuerst an, die Funktion $F_1(x)$ sei in $[x_i, x_{i+1}]$ monoton wachsend. Da sie auf Grund der Voraussetzungen linear und ganzwertig ist, folgt

$$F_1(r_i) \geqq 0 \;\text{ und }\; F_1(x) \geqq x - r_i \quad \text{für} \quad r_i \leqq x \leqq s_i.$$

Analog ergibt sich, falls $F_1(x)$ monoton fällt,

$$F_1(s_i) \geqq 0 \;\text{ und }\; F_1(x) \geqq s_i - x \quad \text{für} \quad r_i \leqq x \leqq s_i\,.$$

Die Behauptung (7) sei nun für ein j mit $1 \leqq j < n$ erfüllt. Ist $F_{j+1}(x)$ monoton

---

[6]) Dabei ist, wie üblich, $\Delta F(x)$ die Funktion $F(x+1) - F(x)$ und $\Delta^{j+1} = \Delta(\Delta^j)$.

wachsend bzw. fallend, so gilt[7])

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(r_i) + \sum_{\nu = r_i}^{x-1} \Delta F_{j+1}(\nu)$$

bzw.

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(s_i) - \sum_{\nu = x}^{s_i - 1} \Delta F_{j+1}(\nu)\,.$$

Wegen (6) und (7) erhält man daraus im ersten Falle[7a]) für $r_i + j \leqq x \leqq s_i$:

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(r_i) + \sum_{\nu = r_i}^{x-1} \Delta F_{j+1}(\nu) \geqq \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} F_j(\nu)$$

$$\geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} (\nu - r_i - (j-1))^j \geqq \frac{1}{j!} \int\limits_0^{x - r_i - j} t^j\,dt = \frac{1}{(j+1)!}(x - r_i - j)^{j+1}$$

Analog folgt im zweiten Fall[7a]) für $r_i \leqq x \leqq s_i - j$:

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(s_i) - \sum_{\nu = x}^{s_i - 1} \Delta F_{j+1}(\nu) \geqq \sum_{\nu = x + 1}^{s_i - j + 1} F_j(\nu)$$

$$\geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu = x+1}^{s_i - j + 1} (s_i - \nu - (j-1))^j \geqq \frac{1}{j!} \int\limits_0^{s_i - x - j} t^j\,dt = \frac{1}{(j+1)!}(s_i - x - j)^{j+1}.$$

Damit ist (7) bewiesen, und man erhält speziell:

$$F_n(x) = |V(x)| \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x - r_i - (n-1))^n & \text{für } r_i + n - 1 \leqq x \leqq s_i, \\ & \text{falls } |V(x)| \text{ monoton wächst,} \\ \dfrac{1}{n!}(s_i - x - (n-1))^n & \text{für } r_i \leqq x \leqq s_i - (n-1)\,, \\ & \text{falls } |V(x)| \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\sum_{x = r_i + n}^{s_i - n} \frac{1}{|V(x)|^\beta} \leqq (n!)^\beta \sum_{x = 1}^{s_i - r_i - 2n + 1} \frac{1}{x^{\beta n}}\,.$$

Schätzt man noch $|V(x)|$ für die restlichen Werte $r_i \leqq x < r_i + n$ und $s_i - n < x \leqq s_i$ trivial durch $|V(x)| \geqq 1$ ab, so folgt

$$\sum_{\substack{x = r_i \\ V(x) \neq 0}}^{s_i} \frac{1}{|V(x)|^\beta} \leqq 2n + (n!)^\beta \sum_{x=1}^{s_i - r_i - 2n + 1} \frac{1}{x^{\beta n}}$$

$$\leqq 2n + (n!)^\beta \int\limits_1^{s_i - r_i} t^{-\beta n}\,dt \leqq 2n + (n!)^\beta \int\limits_1^{2H} t^{-\beta n}\,dt\,,$$

---

[7]) Ist der obere Summationsindex einer Summe kleiner als der untere, so soll sie den Wert 0 haben.

[7a]) Siehe „Zusatz bei der Korrektur“ am Ende der Arbeit.

wobei die Ungleichung jetzt für alle Intervalle gilt. Wegen

$$\int_1^{2H} t^{-\beta n}\,dt \leqq \begin{cases} \dfrac{2^{1-\beta}}{1-\beta n} H^{1-\beta n} & \text{für} \quad \beta n < 1\,, \\ \log 2H & \text{für} \quad \beta n = 1\,, \\ \dfrac{1}{\beta n - 1} & \text{für} \quad \beta n > 1 \end{cases}$$

folgt die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Ist $n \geqq 3$, so treten in dem Polynom*

$$D(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \text{Diskriminante von } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

wenigstens zwei der $n+1$ Veränderlichen a_i in höherer als erster Potenz auf.

Beweis. Aus der Resultantendarstellung der Diskriminante folgt unmittelbar, daß in ihr das Glied $n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}$ auftritt.

3. Wir beweisen nun Satz 1, wobei wir uns im Hinblick auf Hilfssatz 1 auf den rechten Teil beider Behauptungen beschränken können. Zum Beweis von a) betrachten wir bei festem $\sigma > 0$ und natürlichem n die Menge $\mathfrak{R}_n(\sigma)$ der reellen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) > 1 + \sigma$. Wie aus der Definition von $\vartheta_n(\xi)$ folgt, gehört eine Zahl ξ genau dann zu $\mathfrak{R}_n(\sigma)$, wenn zu unendlich vielen H ein Polynom P aus der Komplementärmenge $\mathfrak{P}_0(n, H)$ von $\mathfrak{P}(n, H-1)$ in $\mathfrak{P}(n, H)$ mit

$$0 < |P(\xi)| < H^{-n(1+\sigma)} \tag{8}$$

existiert. Wir ordnen jeder Nullstelle α_i eines Polynoms $P \in \mathfrak{P}(n, H)$ das Intervall

$$\mathfrak{i}(\alpha_i) = \left[\operatorname{Re}\alpha_i - C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\,,\ \operatorname{Re}\alpha_i + C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\right]$$

zu. Dann gilt für jedes reelle ξ mit (8), wenn α_i die nächstliegende Nullstelle von $P(x)$ ist, nach Hilfssatz 4

$$|\xi - \operatorname{Re}\alpha_i| \leqq |\xi - \alpha_i| < C_4 \frac{H^{n-2}|P(\xi)|}{\sqrt{|D(P)|}} < C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\,,$$

d. h. $\xi \in \mathfrak{i}(\alpha_i)$. Folglich wird $\mathfrak{R}_n(\sigma)$ für jedes H_0 durch die Gesamtheit dieser Intervalle $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ mit zugehörigen Polynomen $P \in \mathfrak{P}_0(n, H)$, $H \geqq H_0$, überdeckt. Also ist, wenn man mit μ_1 das lineare Lebesguesche Maß bezeichnet[8]),

$$\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \ \sideset{}{'}\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n, H)} C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\,. \tag{9}$$

Zur Abschätzung der Summe

$$\Sigma = \sideset{}{'}\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n, H)} \frac{1}{\sqrt{|D(P)|}}$$

haben wir zu berücksichtigen, daß wenigstens ein Koeffizient, etwa a_i, den Betrag H hat. Hält man dann alle Koeffizienten bis auf einen, etwa a_j mit $j \neq i$, fest, so wird $D(P)$ ein Polynom $V(a_j)$ in a_j, dessen Grad nach Hilfssatz 7 bei geeigneter Wahl von j sicher $\geqq 2$ ist. Daher wird nach Hilfssatz 6

[8]) Der Strich am Summenzeichen soll andeuten, daß nur Polynome P ohne mehrfache Nullstellen betrachtet werden, für die also $D(P) \neq 0$ ist.

für $\varepsilon > 0$ bei genügend großem H

$$\Sigma < C_8 H^{n-1} \sum_{\substack{a_j = -H \\ V(a_j) \neq 0}}^{H} \frac{1}{\sqrt{|V(a_j)|}} < C_9 H^{n-1+\varepsilon}.$$

Folglich ergibt sich auf Grund von (9)

$$\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) \leqq C_{10} \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-2-\sigma n+n-1+\varepsilon}. \tag{10}$$

Ist nun $\sigma > 1 - \frac{2-\varepsilon}{n}$, so wird in der letzten Reihe der Exponent < -1, so daß Konvergenz eintritt und $\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) = 0$ folgt. Läßt man σ eine Folge von Werten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ mit $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ und $\lim\limits_{i \to \infty} \sigma_i = 1 - \frac{2}{n}$ durchlaufen, so erhält man

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma_i) = \mathfrak{R}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

und daher

$$\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma_i)\right) = \mu_1\left(\mathfrak{R}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) = 0.$$

Also hat die Menge aller reellen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{2}{n}$, wie behauptet, das Lebesguesche Maß Eins.

Der Beweis der Aussage b) verläuft analog. Man betrachtet für festes $\sigma > 0$ die Menge $\mathfrak{K}_n(\sigma)$ der komplexen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) > \frac{1}{2} + \sigma$. An Stelle des Intervalls $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ verwenden wir jeweils den Kreis $\mathfrak{k}(\alpha_i)$ der Zahlen z mit $|z - \alpha_i| \leqq C_4 \frac{H^{n(\frac{1}{2}-\sigma)-2}}{\sqrt{|D(P)|}}$. Dann erkennt man wie oben, daß jedes $\xi \in \mathfrak{K}_n(\sigma)$ von einem solchen Kreis überdeckt wird. Statt (10) erhält man, wenn man die Summe $\sum\limits_{P \in \mathfrak{P}(n,H)}' \frac{1}{|D(P)|}$ mit Hilfssatz 6 abschätzt und mit μ_2 das zweidimensionale Lebeguesche Maß bezeichnet, die Ungleichung

$$\mu_2(\mathfrak{K}_n(\sigma)) \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' C_{11} \frac{H^{n(1-2\sigma)-4}}{|D(P)|} \leqq C_{12} \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{n(1-2\sigma)+n-5}.$$

Daraus ergibt sich ähnlich wie oben $\mu_2\left(\mathfrak{K}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) = 0$, womit alles bewiesen ist.

4. Die Aussagen von Satz 1 lassen sich verallgemeinern, wenn man statt des Lebesgueschen Maßes den Hausdorffschen Maß- und Dimensionsbegriff[9]) heranzieht. Man erhält so den

Satz 2. *Für jedes $\sigma \geqq 0$ und $n \geqq 3$ ist*

$$\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) \leqq \frac{n+1}{\sigma n + 3} \tag{11}$$

[9]) Definitionen und hier verwendete Schreibweise findet man z. B. bei B. Volkmann [9].

und

$$(12) \qquad \dim \mathfrak{K}_n(\sigma) \leqq \begin{cases} \dfrac{n}{(\sigma-\frac{1}{2})n+2}\,, & \textit{falls } \dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{n} \leqq \sigma \leqq \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n}\,, \\ \dfrac{n+1}{(\sigma-\frac{1}{2})n+3}\,, & \textit{falls } \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n} \leqq \sigma. \end{cases}$$

Es sei bemerkt, daß man, um aus diesem Satz nichttriviale Abschätzungen, also solche von der Form $\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) < 1$ bzw. $\dim \mathfrak{K}_n(\sigma) < 2$ zu erhalten, die Ungleichungen (11) und (12) auf den Bereich $\sigma > 1 - \frac{2}{n}$ beschränken muß, wie dies gemäß Satz 1 zu erwarten ist.

Beweis. a) Für jedes H_0 bildet die Menge der Intervalle $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ mit zugehörigem $H \geqq H_0$ eine $(2\,C_4\,H_0^{-2-\sigma n})$-Überdeckung von $\mathfrak{R}_n(\sigma)$. Daher gilt bei gegebenem δ mit $0 < \delta < 1$ für das δ-dimensionale Hausdorffsche Maß

$$\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} C_{10} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' \left(\frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\right)^\delta.$$

Für die Summe $\sum'_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)} |D(P)|^{-\delta/2} = \Sigma$ erhält man nach Hilfssatz 6 die Abschätzung $\Sigma \leqq C_{11} H^{1-\delta+n-1} = C_{11} H^{n-\delta}$, so daß sich schließlich

$$\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} C_{11} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-\delta(\sigma n+3)+n}$$

ergibt. Somit gilt $\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta = 0$ für alle $\delta > \dfrac{n+1}{\sigma n+3}$, woraus der erste Teil der Behauptung folgt.

b) Der Beweis für den komplexen Fall verläuft analog; nur muß man Werte δ mit $0 < \delta < 2$ zulassen, so daß sich — unter Verwendung von Hilfssatz 6 — die Abschätzung

$$\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' |D(P)|^{-\frac{\delta}{2}} < \begin{cases} C_{12}\,H^{n-\delta} & \text{für } \delta < 1\,, \\ C_{12}\,H^{n-1}\log H & \text{für } \delta = 1\,, \\ C_{12}\,H^{n-1} & \text{für } \delta > 1 \end{cases}$$

ergibt, die dann zur Unterscheidung der beiden in der Behauptung (12) auftretenden Fälle führt.

5. Der Vollständigkeit halber führen wir auch Dimensionsabschätzungen für die beiden in Satz 3 nicht erwähnten Fälle $n = 1$ und $n = 2$ an. Für $n = 1$ ist nach V. JARNÍK [3]

$$(13) \qquad \dim \mathfrak{R}_1(\sigma) = \frac{2}{\sigma+1} \quad (\sigma \geqq 1)\,.$$

Ferner bestätigt man leicht, daß

$$(14) \qquad \mathfrak{K}_1(\sigma) = \mathfrak{R}_1\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)$$

gilt.

Im Fall $n = 2$ gilt der

Hilfssatz 8. *Zu jedem β mit $0 < \beta < 1$ gibt es von H unabhängige positive Zahlen c und τ so, daß gilt:*

$$\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(2,H)}' |D(P)|^{-\beta} < c\, H^{\frac{\tau}{\log\log H} + 2(1-\beta)}.$$

Beweis. Wir übernehmen aus [4] die Abschätzung[10])

$$\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(2,H)}' |D(P)|^{-\beta} \leqq C_{13}\, H^{\frac{4}{\log\log H}} \left(H^{2(1-\beta)} + \sum_{m=1}^{5H^2} \frac{r(m)}{m^\beta} \right),$$

wobei $r^2(m)$ der größte gemeinsame quadratische Teiler von m und $4H$ ist. In der rechts stehenden Summe kommen zu vorgegebenem $r(m) = k$ höchstens die folgenden Glieder vor:

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{5H^2}{k}\right]} \frac{k}{(k\,i)^\beta} \leqq \frac{1}{1-\beta}\, k^{1-\beta} \left(\frac{5H^2}{k}\right)^{1-\beta} = C_{14}\, H^{2(1-\beta)} .$$

Die Anzahl der möglichen k ist jedenfalls kleiner oder gleich der Anzahl $d(4H)$ der Teiler von $4\,H$, und dafür gilt bekanntlich

$$d(4\,H) \leqq C_{15}\, H^{\frac{2}{\log\log H}} .$$

Die vorstehenden Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung.

Auf Grund von Hilfssatz 8 erhält man, ähnlich wie beim Beweis von Satz 2, die Abschätzungen

$$\dim \mathfrak{R}_2(\sigma) \leqq \frac{3}{2\sigma+3} \qquad (\sigma \geqq 0) \tag{15}$$

und

$$\dim \mathfrak{K}_2(\sigma) \leqq \frac{2}{2\sigma+2} \qquad \left(\sigma \geqq -\frac{1}{4}\right). \tag{16}$$

Aus Satz 2 und den obigen Betrachtungen ergeben sich zwei Folgerungen.

Folgerung 1. Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}(\sigma)$ bzw. $\mathfrak{K}(\sigma)$ die Menge der reellen bzw. komplexen ξ mit $\vartheta(\xi) > 1 + \sigma$ bzw. $\vartheta(\xi) > \frac{1}{2} + \sigma$, so ist für $\sigma \geqq 1$

$$\dim \mathfrak{R}(\sigma) \leqq \frac{2}{\sigma+1}$$

und

$$\dim \mathfrak{K}(\sigma) \leqq \frac{2}{\sigma+\frac{1}{2}} .$$

Beweis. Ist $\xi \in \mathfrak{R}(\sigma)$, so gibt es ein n mit $\vartheta_n(\xi) > 1 + \sigma$. Somit ist

$$\mathfrak{R}(\sigma) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma)$$

und folglich

$$\dim \mathfrak{R}(\sigma) \leqq \sup_{n=1}^{\infty} \dim \mathfrak{R}_n(\sigma) = \tau ,$$

also nach (13), (15) und (11)

$$\tau \leqq \max\left(\frac{2}{\sigma+1}, \frac{3}{2\sigma+3}, \sup_{n=3,4,\ldots} \frac{n+1}{\sigma n+3} \right) = \frac{2}{\sigma+1} .$$

[10]) [4], Seite 267, Formeln (12) und (14).

Ähnlich erhält man nach (14), (16), (12) und (11) die Abschätzungen

$$\dim \mathfrak{R}(\sigma) \leqq \begin{cases} \max\left(\dfrac{2}{\sigma+\frac{1}{2}}, \dfrac{3}{2\sigma+2}, \sup\limits_{n=3,4,\ldots} \dfrac{n}{(\sigma-\frac{1}{2})n+2}\right) \text{ für } 1 \leqq \sigma < \dfrac{3}{2}. \\ \max\left(\dfrac{2}{\sigma+\frac{1}{2}}, \dfrac{3}{2\sigma+2}, \sup\limits_{n=3,4,\ldots} \dfrac{n+1}{(\sigma-\frac{1}{2})n+3}\right) \text{ für } \dfrac{3}{2} \leqq \sigma, \end{cases}$$

und daraus ergibt sich die zweite obige Behauptung.

Folgerung 2. Für die Mengen T und U aller T- bzw. U-Zahlen[11]) gilt

$$\dim T = \dim U = 0 .$$

Beweis. Für jedes (noch so große) σ gilt $T \subseteq \mathfrak{R}(\sigma)$ und $U \subseteq \mathfrak{R}(\sigma)$.

6. Die Definition des Typs ϑ einer transzendenten Zahl ξ läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Sei $\mathfrak{Q}$ eine beliebige Menge von Polynomen mit ganzrationalen Koeffizienten und $\mathfrak{Q}(n, H)$ die Menge der $Q \in \mathfrak{Q}$ mit Grad $Q \leqq n$ und Höhe $Q \leqq H$. Dann setzt man für jede transzendente Zahl ξ

$$w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}) = \min_{Q \in \mathfrak{Q}(n,H)} |Q(\xi)|$$

und definiert $w_n(\xi, \mathfrak{Q})$, $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q})$ und $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q})$ entsprechend den Größen $w_n(\xi)$, $\vartheta_n(\xi)$ und $\vartheta(\xi)$. Für zwei solche Mengen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ mit $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}_2$ gelten dann trivialerweise die Ungleichungen

$$w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}_1) \geqq w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}_2), \quad \vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leqq \vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}_2)$$
$$w_n(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leqq w_n(\xi, \mathfrak{Q}_2), \quad \vartheta(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leqq \vartheta(\xi, \mathfrak{Q}_2)$$

für jedes ξ und jedes natürliche n. Man kann nun die Frage aufwerfen, unter welchen Voraussetzungen über $\mathfrak{Q}$ das Analogon der Mahlerschen Vermutung bewiesen werden kann. Wir geben dazu den folgenden Satz an, dessen Beweis wie der von Satz 1 verläuft.

Satz 3. *Sei $\mathfrak{Q}$ eine Menge von Polynomen mit ganzrationalen Koeffizienten, die mit jedem Polynom Q auch alle seine Teiler als Elemente enthält, und $\tilde{\mathfrak{Q}}$ die Teilmenge der Elemente von $\mathfrak{Q}$ ohne mehrfache Nullstellen. Gilt dann für ein natürliches n beim Grenzübergang $H \to \infty$ die Aussage*

$$\text{(17)} \qquad \sum_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}_0(n,H)}' \frac{1}{\sqrt{|D(Q)|}} = O(H^{\sigma n}) \qquad (\sigma > 0,\ \textit{fest})$$

oder

$$\text{(18)} \qquad \sum_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}_0(n,H)}' \frac{1}{|D(Q)|} = O(H^{\sigma n}),$$

so ist für fast alle reellen ξ die Ungleichung $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}) \leqq 1 + \sigma - \frac{1}{n}$ bzw. für fast alle komplexen ξ die Ungleichung $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}) \leqq \frac{1+\sigma}{2} - \frac{3}{2n}$ erfüllt.

Folgerung. Gilt (17) oder (18) für alle natürlichen n (oder auch nur für unendlich viele), so gilt für fast alle reellen ξ die Ungleichung $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q}) \leqq 1 + \sigma$ bzw. für fast alle komplexen ξ die Ungleichung $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q}) \leqq \frac{1+\sigma}{2}$.

---

[11]) Siehe TH. SCHNEIDER, a. a. O.[1])

Für Satz 3 lassen sich leicht Beispiele bilden, wenn man bedenkt, daß die Voraussetzungen (17) und (18) immer erfüllt sind, wenn die Anzahl $A_n(H)$ der Elemente von $\mathfrak{Q}_0(n, H)$ der Bedingung $A_n(H) = O(H^{\sigma n})$ genügt. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn man verlangt, daß die auftretenden Grade n oder auch die Koeffizienten a_i gewissen Mengen angehören sollen, über die man geeignete Dichtevoraussetzungen macht.

Zusatz bei der Korrektur. Im Beweis von Hilfssatz 6 sind nur die Fälle behandelt, daß $F_{j-1}(x)$ und $F_j(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ entweder beide monoton wachsen oder beide monoton fallen. Nimmt man nun an, daß $F_{j+1}(x)$ monoton wächst, aber $F_j(x)$ monoton fällt, so erhält man

$$F_{j+1}(x) \geqq \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} F_j(\nu) \geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} (s_i - \nu - (j-1))^j$$

$$\geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu = 1}^{x - r_i - j + 1} \nu^j \geqq \frac{1}{j!} \int_0^{x - r_i - j} t^j \, dt ,$$

womit auch in diesem Falle der Induktionsschluß durchgeführt ist. Analog schließt man, wenn $F_{j+1}(x)$ monoton fällt, aber $F_j(x)$ monoton wächst.

Schließlich möchten wir erwähnen, daß Hilfssatz 6 einfacher und kürzer dadurch zu beweisen ist, daß man von der Intervalleinteilung $-H, \beta_1, \ldots, \beta_n, H$ ausgeht, wobei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die nach wachsender Größe geordneten Realteile der Nullstellen von $V(x)$ sind, und die Summation über $|V(x)|^{-\beta}$ in diesen Intervallen einzeln ausführt.

Literatur

[1] Chintschin, A. J.: Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Perron. Math. Z. **22**, 274—284 (1925). — [2] Feldman, N. I.: Approximation einiger transzendenter Zahlen. I. (russ.). Iswestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **15**, 53—74 (1951). — [3] Jarník, V.: Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß. Mat. Sbornik **36**, 371—382 (1929). — [4] Kasch, F.: Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Math. Z. **70**, 263—270 (1958). — [5] Kubilyus, J. F.: Über die Anwendung einer Winogradowschen Methode auf die Lösung eines Problems aus der metrischen Zahlentheorie (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. **67**, 783—786 (1949). — [6] LeVeque, W. J.: Note on S-numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 189—190 (1950). — [7] Mahler, K.: Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann. **106**, 131—139 (1932). — [8] Schneider, Th.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [9] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. **58**, 284—287 (1953).

(Eingegangen am 20. Juni 1958)