MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

62. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Inhalt des 62. Bandes.

KASCH, F.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 368—387 (1955)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen.

Von
FRIEDRICH KASCH.

§ 1. Einleitung.

1. Fragestellung. Eine Menge $\mathfrak{B}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen heißt eine *wesentliche Komponente*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Menge $\mathfrak{A}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen mit positiver Dichte $\alpha < 1$ ist die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ größer als α. Während man auf Grund der SCHNIRELMANNschen Ungleichung bereits seit 1930 wußte, daß jede Menge $\mathfrak{B}$, die selbst eine positive Dichte besitzt, eine wesentliche Komponente ist, war es eines der überraschendsten Ergebnisse der additiven Zahlentheorie, als im Jahre 1933 A. J. CHINTSCHIN [2] feststellte, daß es auch wesentliche Komponenten der Dichte Null gibt; er zeigte nämlich, daß die Menge der Quadratzahlen eine wesentliche Komponente darstellt. Im Jahre 1936 machte dann P. ERDÖS die für die weitere Entwicklung grundlegende Entdeckung, daß dieses Ergebnis nicht an die Menge der Quadratzahlen gebunden ist, sondern für jede Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen zutrifft. Von E. LANDAU, A. BRAUER, S. SELBERG, A. STÖHR, H. E. RICHERT u.a. wurde der Grundgedanke von ERDÖS weiter ausgebaut und schärfere Ergebnisse, die im folgenden noch genauer angegeben werden, hergeleitet. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einheitliche Beweismethode für alle diese Resultate zu entwickeln. Die Tragfähigkeit der Methode erweist sich dadurch, daß sie sogleich eine Verbesserung aller bisherigen Abschätzungen liefert. Außerdem bietet sie die Möglichkeit, die gleiche Frage auch bei anderen Mengen zu untersuchen, z.B. bei den Mengen $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}$.

2. Voraussetzungen. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Unter $\mathfrak{A}(n)$ verstehen wir die Menge der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$ mit $a \leqq n$. Die Anzahlfunktion $A(n)$ der Menge $\mathfrak{A}$ gibt die Anzahl der natürlichen Zahlen aus $\mathfrak{A}(n)$ an. Die Zahl

$$\underset{n=1,2,\ldots}{\underline{\text{fin}}} \frac{A(n)}{n} = \alpha \tag{1.1}$$

wird als *(finite) Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Danach gilt also für jede natürliche Zahl n:

$$A(n) \geqq \alpha n.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen echt enthalten sei; dann gilt offenbar $0 \notin \mathfrak{A}$ und $\alpha < 1$[1]). Ferner wird $1 \in \mathfrak{A}$

[1]) Stimmt $\mathfrak{A}$ mit der Menge der natürlichen Zahlen überein, dann werden die hier behandelten Fragen gegenstandslos. Ist $0 \in A$, dann gelten die folgenden Ergebnisse selbstverständlich erst recht; aus formalen Gründen ist aber bei den Beweisen die Voraussetzung $0 \notin A$ zweckmäßig.

vorausgesetzt[2]). Sei $\bar{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen mit der Anzahlfunktion $\bar{A}(n)$, dann ist offenbar $\bar{A}(n) = n - A(n)$, und es gilt:

$$\bar{A}(n) \leq (1-\alpha)\, n.$$

Unter der *Summenmenge* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit der Dichte γ und der Anzahlfunktion $C(n)$ ist die Menge aller in der Gestalt $a + b$ darstellbaren Zahlen mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ zu verstehen. Wir setzen $0 \in \mathfrak{B}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ voraus; dann ist offenbar $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{C}$, und jede natürliche Zahl m läßt sich in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_l$$

mit Zahlen $b_1, \ldots, b_l \in \mathfrak{B}$ darstellen. Sei $l(m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die eine solche Darstellung möglich ist. Es werde

$$(1.2) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots}\, l(m) = h, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} l(m) = \lambda$$

gesetzt und h als *Ordnung*, λ als *mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet; offenbar gilt $\lambda \leq h$. Ist h endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Zahlen genannt. Dies sei im folgenden der Fall.

3. Ergebnisse. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach P. ERDÖS [*3*]:

$$(1.3) \qquad \gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{h}\right).$$

E. LANDAU [*6*] bewies die gleiche Abschätzung für λ an Stelle von h:

$$(1.4) \qquad \gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

A. BRAUER [*1*] verschärfte die Ungleichung zu:

$$(1.5) \qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}\right) = \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Der sehr umfangreiche Beweis von A. BRAUER wurde kürzlich von A. STÖHR [*11*] von allen technischen Schwierigkeiten befreit, so daß der Beweisgedanke besonders klar hervortritt.

Nach A. BRAUER bewies S. SELBERG [*9*]:

$$(1.6) \qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Dieses Ergebnis ist für $\alpha > \frac{1}{9}$ besser als das von A. BRAUER.

[2]) Ist $1 \notin \mathfrak{A}$, dann folgt $\alpha = 0$; die folgenden Abschätzungen sind dann trivialerweise richtig oder falsch. Genauer: Die Abschätzungen mit dem Zeichen $\geqq$ sind richtig, und die mit dem Zeichen $>$ sind dann und nur dann richtig, wenn $\mathfrak{A}(n)$ mindestens ein Element enthält.

Schließlich zeigte kürzlich H. E. RICHERT[3]), daß auch die folgende, in gewissem Sinne zu (1.5) symmetrische Aussage gilt:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.7}$$

Wir erhalten hier die neuen Abschätzungen:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{1.8}$$

und

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.9}$$

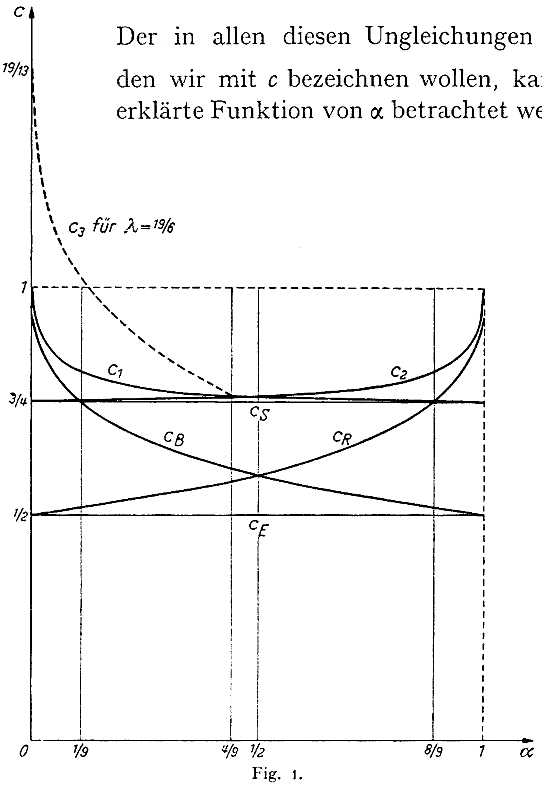

Fig. 1.

Der in allen diesen Ungleichungen auftretende Faktor von $\frac{1-\alpha}{\lambda}$, den wir mit c bezeichnen wollen, kann als eine im Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$ erklärte Funktion von α betrachtet werden (siehe Abb.). Man hat dann:

ERDÖS-LANDAU: $c_E = \frac{1}{2}$;

A. BRAUER: $c_B = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$;

H. E. RICHERT: $c_R = \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}$;

S. SELBERG: $c_S = \frac{3}{4}$;

und die neuen Faktoren, die in dieser Arbeit hergeleitet werden:

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2},$$

$$c_2 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}.$$

Eine Vermutung von P. ERDÖS (siehe [*10*], S. *7*) besagt, daß der Wert $c = 1$ zulässig ist.[3a])

4. Asymptotische Abschätzungen. Eine Übertragung einer Ungleichung aus diesem Problemkreis auf asymptotische Dichten wurde bereits von P. ERDÖS [*4*] vorgenommen. Von H. ROHRBACH [*10*], H. KLÖTER und A. STÖHR [*5*] konnten weitere Abschätzungen für die asymptotische Dichte angegeben werden. Auch unsere Ergebnisse lassen sich auf den asymptotischen Fall übertragen. Dabei werden folgende Voraussetzungen gemacht.

---

3) Nach einer mündlichen Mitteilung.

3a) *Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen habe ich bemerkt, daß man durch eine Verallgemeinerung der hier dargestellten Überlegungen (insbesondere der aus § 2) zu dem

Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, dann wird analog zu (1.1)

$$\underline{\lim}_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n)}{n} = \alpha^*$$

als *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. $\mathfrak{B}$ sei eine Menge nichtnegativer Zahlen, die die Null enthält, und für die jetzt vorausgesetzt wird, daß sich jede natürliche Zahl $m > n_0$ (n_0 fest) in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B}) \tag{1.10}$$

darstellen lasse; sei $l(m)$ in dieser Darstellung minimal, dann wird

$$\overline{\lim}_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m) = \lambda^* \tag{1.11}$$

als *asymptotische mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Für die asymptotische Dichte γ^* von $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gilt nun in Analogie zu c_1 und c_2:

$$\gamma^* \geqq \alpha^* \left(1 + c_i^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.12}$$

mit

$$c_1^* = \frac{1 + \sqrt{\alpha^*} + \alpha^*}{(1 + \sqrt{\alpha^*})^2} \tag{1.13}$$

und

$$c_2^* = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^*} + (1-\alpha^*)}{(1 + \sqrt{1-\alpha^*})^2}. \tag{1.14}$$

Fast unmittelbar folgt ferner aus unseren Formeln, daß in (1.12) sogar $c_i^* = 1$ gilt, falls der Grenzwert von $\frac{A(n)}{n}$ (der dann notwendig mit α^* übereinstimmt) existiert[4]).

---

folgenden Ergebnis gelangt: Zu jedem λ gibt es ein $\alpha_\lambda > 0$, so daß für $0 \leqq \alpha < \alpha_\lambda$ die Erdössche Vermutung übertroffen wird. Insbesondere gilt für $\lambda \geqq \frac{3}{2}$:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha \left(1 + c_3 \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

mit

$$c_3 = c_3(\alpha, \lambda) = c_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}} = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \, \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}}.$$

Ein analoges Ergebnis erhält man auch im asymptotischen Fall.

Für die mittlere Ordnung der Menge der Quadratzahlen $\lambda = \frac{19}{6}$ ist c_3 in vorstehender Abbildung eingetragen.

Die Beweise dieser Ergebnisse sollen in einer in Kürze unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit dargestellt werden.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Abbildung für c_B und c_R eine Ungenauigkeit aufweist; diese Größen streben für α gegen 0 bzw. 1 selbst gegen 1.

[4]) Dieses Ergebnis wurde bereits von F. Krückeberg mitgeteilt (Seminar Göttingen, Dez. 1954). Dessen Beweis stützt sich auf die Schlußweise von S. Selberg [9].

§ 2. Die komplementären Grundformeln.

1. Wir beginnen damit, die bereits von ERDÖS und LANDAU benutzten Funktionen $D(m)$ und $E(m)$ einzuführen. Dabei seien n eine fest vorgegebene natürliche Zahl und m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m \leq n$.

Definition 1. *$D(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a \in \mathfrak{A} \quad \textit{mit} \quad a + m \in \overline{\mathfrak{A}}(n);$$

$E(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a \in \mathfrak{A} \quad \textit{mit} \quad a + m \in \mathfrak{A}(n).$$

Offenbar gilt dann

$$D(m) + E(m) = A(n - m),$$

also

$$D(m) = A(n - m) - E(m). \tag{2.1}$$

Hilfssatz 1. *Ist t eine natürliche Zahl mit $1 \leq t < m$, dann gilt*

$$D(m) \leq D(t) + D(m - t). \tag{2.2}$$

Beweis. Sei a eine Zahl, die in $D(m)$ gezählt wird, d.h. $a + m = \bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$. Ist bereits $a + t \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$, dann wird a in $D(t)$ gezählt, ist jedoch $a + t = a' \in \mathfrak{A}(n)$, dann gilt $a' + m - t = \bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$, und a' wird in $D(m-t)$ gezählt. Für zwei verschiedene Zahlen a und a_1, die in $D(m)$ gezählt werden, sind die zugeordneten Zahlen $a' = a + t$ und $a_1' = a_1 + t$ offenbar voneinander verschieden. Folglich gilt (2.2).

Sei nun

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B})$$

eine nach Voraussetzung existierende Darstellung von m, so besteht auf Grund von (2.2) die Ungleichung

$$D(m) \leq D(b_1) + \cdots + D(b_{l(m)}). \tag{2.3}$$

Wird $a \in \mathfrak{A}$ in $D(b_i)$ gezählt, dann gilt $a + b_i \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$; $a + b_i$ ist also ein Element aus $\mathfrak{C}(n)$, welches nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Daraus folgt

$$D(b_i) \leq C(n) - A(n) = R(n).$$

Wegen (2.3) hat man daher die bekannte Ungleichung

$$D(m) \leq l(m)\, R(n),$$

aus der man durch Summation von 1 bis $k \leq n$ zufolge (1.2) erhält:

$$\sum_{m=1}^{k} D(m) \leq \left\{ \sum_{m=1}^{k} l(m) \right\} R(n) \leq \lambda\, k\, R(n). \tag{2.4}$$

Hilfssatz 2. *Sei $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann gilt:*

$$\sum_{m=1}^{k} E(m) = \binom{A(n)}{2} - \Gamma(k) \tag{2.5}$$

mit

$$(2.6)\quad\begin{cases}\Gamma(k) &= \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1)-A(m+k)\} \qquad \text{für} \qquad k\leqq n-2,\\ \Gamma(n-1) &= \Gamma(n)=0.\end{cases}$$

Beweis. Offenbar ist $\sum\limits_{m=1}^{n} E(m)=\sum\limits_{m=1}^{n-1} E(m)=\binom{A(n)}{2}$, womit die zweite Gleichung von (2.6) bewiesen ist. Sei jetzt $k\leqq n-2$; dann betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{k} E(m)=\sum_{m=1}^{n} E(m)-\sum_{m=k+1}^{n} E(m)=\binom{A(n)}{2}-\sum_{m=k+1}^{n} E(m).$$

In der Summe $\sum\limits_{m=k+1}^{n} E(m)$ werden nach Definition von $E(m)$ alle Paare a, a' mit $a'-a>k\,(a', a\in\mathfrak{A}(n))$ gezählt. Die Anzahl dieser Paare ist bei festem a' offenbar gleich $A(a'-k-1)$, und durch Summation über alle $a'\in\mathfrak{A}(n)$ mit $a'>k+1$ erhält man

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m)=\sum_{m=k+2}^{n} A(m-k-1)\{A(m)-A(m-1)\},$$

denn $A(m)-A(m-1)$ ist gleich 0 oder 1, je nachdem, ob $m\notin\mathfrak{A}$ oder $m\in\mathfrak{A}$. Durch Änderung der Summationsgrenze folgt unmittelbar die erste Gleichung von (2.6).

Auf Grund von (2.1), (2.4) und (2.5) gilt jetzt

$$(2.7)\qquad \lambda\, k\, R(n)\geqq\sum_{m=1}^{k} A(n-m)-\binom{A(n)}{2}+\Gamma(k).$$

Diese Beziehung nennen wir die *erste Grundformel* (1. GF.).

2. Zur Gewinnung der zweiten, dazu komplementären Grundformel, führen wir neue Funktionen $D'(m)$ und $E'(m)$ ein. Dabei sei auch jetzt n fest und $1\leqq m\leqq n$.

Definition 2. *$D'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar a\in\bar{\mathfrak{A}}(n) \qquad \textit{mit} \qquad \bar a-m\in\mathfrak{A};$$

$E'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar a\in\bar{\mathfrak{A}}(n) \qquad \textit{mit} \qquad \bar a-m\in\bar{\mathfrak{A}}.$$

Offenbar gilt dann:

$$(2.8)\qquad D'(m)+E'(m)=\bar A(n)-\bar A(m).$$

Wesentlich ist nun die Gleichung

$$(2.9)\qquad D'(m)=D(m),$$

die unmittelbar aus den Definitionen von $D(m)$ und $D'(m)$ folgt. Daher hat man jetzt

$$(2.10)\qquad D(m) = \bar{A}(n) - \bar{A}(m) - E'(m).$$

Ebenso wie $E(m)$ die Anzahl der Paare a, a' mit $a' - a = m\,(a', a \in \mathfrak{A}(n))$ angibt, gibt $E'(m)$ die Anzahl der Paare $\bar{a}$, $\bar{a}'$ mit $\bar{a}' - \bar{a} = m\,(\bar{a}', \bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}(n))$ an. Daher gilt Hilfssatz 2 auch für $E'(m)$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $E(m)$ und $\mathfrak{A}$. Mit der Bezeichnung

$$(2.11)\qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}(k) = \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \bar{A}(m)\,\{\bar{A}(m+k+1) - \bar{A}(m+k)\} & \text{für} \quad k \leqq n-2, \\ \bar{\Gamma}(n-1) = \bar{\Gamma}(n) = 0. \end{cases}$$

besteht dann wegen (2.10) die folgende *zweite Grundformel* (2. GF.):

$$(2.12)\qquad \lambda\, k\, R(n) \geqq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k} \bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \bar{\Gamma}(k).$$

3. Es soll jetzt angedeutet werden, unter welchen Voraussetzungen die in der Einleitung angegebenen Ergebnisse aus den beiden Grundformeln folgen.

ERDÖS-LANDAU: Folgt aus beiden Grundformeln für $k = n$. In der Literatur wird dazu die aus der 1. GF. für $k = n$ folgende Formel benutzt, die in dieser Form von E. LANDAU [*6*] aufgestellt wurde. Hier soll der Beweis unter Verwendung der 2. GF. angegeben werden. Dabei kann $\bar{A}(n) \geqq 1$ vorausgesetzt werden, denn sonst ist $A(n) = n$ und folglich die Behauptung erfüllt. Wegen

$$\bar{A}(m) \leqq (1-\alpha)\, m$$

erhält man dann aus (2.12) [unter Beachtung von $\bar{\Gamma}(n) = 0$]:

$$\lambda\, n\, R(n) \geqq n^2 - n A(n) - (1-\alpha)\frac{n(n+1)}{2} - (1-\alpha)^2\frac{n^2}{2} + (1-\alpha)\frac{n}{2},$$

also

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\frac{A(n)}{n} + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda}$$

$$\geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\alpha + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda} = \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Einen Vorteil gegenüber der üblichen Schlußweise kann man darin sehen, daß jetzt nur ein linearer und nicht wie dort ein quadratischer Ausdruck in $A(n)$ nach unten abzuschätzen ist.

BRAUER-RICHERT: c_B folgt aus der 1. GF. für $k \sim \sqrt{\alpha}\, n$, wenn $\Gamma(k)$ trivial durch 0 abgeschätzt wird[5]; entsprechend ergibt sich c_R aus der 2. GF. für $k \sim \sqrt{1-\alpha}\, n$, wenn $\bar{\Gamma}(k)$ durch 0 abgeschätzt wird[6].

[5]) $k \sim \sqrt{\alpha}\, n$ bedeute, daß zwischen den Werten $[\sqrt{\alpha}\, n]$ und $[\sqrt{\alpha}\, n] + 1$ gemittelt wird.

[6]) Der mir von H. E. RICHERT mitgeteilte Beweis erfolgt in anderer Weise. Die 1. GF. wird bis n summiert, jedoch wird $D(m)$ für $m > k \sim \sqrt{1-\alpha}\, n$ nicht durch $l(m)\, R(m)$, sondern $\bar{A}(n) - \bar{A}(m)$ nach oben abgeschätzt.

S. SELBERG: c_S folgt aus beiden Grundformeln für $k=[n/2]$ bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$ bzw. $\bar{\Gamma}(k)$. Besonders kurz wird der Beweis, wenn man von der zweiten Grundformel ausgeht, da man dann — ebenso wie bei dem vorstehenden Beweis von c_E — nur einen linearen Ausdruck in $A(n)$ [(bzw. $\bar{A}(n)$)] abzuschätzen hat.

Die Faktoren c_1, c_1^* und c_2, c_2^*:
c_1 folgt aus der 1. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}\, n \qquad \text{und} \qquad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$. Entsprechend erhält man c_2 aus der 2. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{1-\alpha}(1-\sqrt{1-\alpha})}{\alpha}\, n \qquad \text{und} \qquad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\bar{\Gamma}(k)$. Die Beweise werden im finiten Fall vollständig ausgeführt. Im asymptotischen Fall, in dem die Beweise ganz analog verlaufen, werden wir nur den Beweis von c_1^* ausführen. Nach dem Vorhergehenden ist dann der Beweis von c_2^* fast unmittelbar klar.

§ 3. Beweise von c_1 und c_1^*.

1. Beweis von c_1. Beim Beweis der Ungleichungen (1.8) und (1.9) kann $0<\alpha<1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt bereits $\alpha<1$. Für $\alpha=0$ sind (1.8) und (1.9) offenbar erfüllt, denn wegen $1\in\mathfrak{A}$ hat man stets $\frac{C(n)}{n}>0$. Sei also im folgenden $0<\alpha<1$.

Zum Beweis der Ungleichung (1.8) gehen wir von der 1. GF. (2.7) aus; für $1\leq k\leq n-2$ gilt danach:

$$(3.1)\quad \begin{cases} \lambda\, k\, R(n) \geq \sum\limits_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\,\{A(m+k+1) - A(m+k)\} \\ \qquad\geq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} m\,\{A(m+k+1) - A(m+k)\}. \end{cases}$$

Durch ABELsche Summation kann die letzte Summe umgeformt werden; man erhält so

$$(3.2)\qquad \lambda\, k\, R(n) \geq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{(n-k-1)\,A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Wegen $1\leq k\leq n-2$ gilt auch $1\leq n-k-1\leq n-2$, und man darf daher in (3.2) k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$(3.3)\qquad \lambda(n-k-1)\,R(n) \geq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{k\,A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Diese Ungleichung wird mit α multipliziert und zu (3.2) addiert, wobei noch $-\lambda\alpha R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \lambda\{k+\alpha(n-k)\}R(n) \\ \geqq (1-\alpha^2)\sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \alpha\{n-k-1+\alpha k\}A(n) \\ \geqq \alpha\{n-1-(1-\alpha)k\}A(n) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}k(2n-k-1). \end{cases}$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leqq k\leqq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$(3.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho = \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}.$$

Zur Vereinfachung der Abschätzungen wollen wir im weiteren Beweis $\alpha\leqq 1/2$ und $n\geqq 4$ voraussetzen, was keine Einschränkung bedeutet[7]). Aus $\alpha<1$ folgt bereits $\varrho<1/2$, und wegen $n\geqq 4$ gilt dann $[\varrho n]+1\leqq n-2$. Schließlich können wir $1\leqq\varrho n$ annehmen; ist nämlich $\varrho n<1$, d.h. $n<\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$, so folgt wegen $n\geqq 4$ die Schranke $\alpha<1/9$, und wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt dann

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \frac{2}{n} > \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} > \frac{3}{2}\sqrt{\alpha} > 2\alpha > \alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

also ist (1.8) erfüllt. Insgesamt können wir jetzt $1\leqq[\varrho n]$ und $[\varrho n]+1\leqq n-2$ annehmen und dürfen daher

$$k=[z]=z-\eta \qquad \text{bzw.} \qquad k=[z]+1=z+\delta$$

in (3.4) einsetzen[8]):

$$\begin{aligned} &\lambda\{(1-\alpha)(z-\eta)+\alpha n\}R(n) \\ &\qquad \geqq \alpha\{n-1-(1-\alpha)(z-\eta)\}A(n) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \\ &\qquad + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z-\eta)(2n-z+\eta-1), \\ &\lambda\{(1-\alpha)(z+\delta)+\alpha n\}R(n) \\ &\qquad \geqq \alpha\{n-1-(1-\alpha)(z+\delta)\}A(n) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \\ &\qquad + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta)(2n-z-\delta-1). \end{aligned}$$

[7]) Für $\alpha>\frac{1}{2}$ ist (1.9) besser als (1.8). Die Fälle $n=1, 2, 3$ ergeben sich folgendermaßen: Wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt $C(1)=1$, $C(2)=2$ sowie $C(3)=3$, falls $\mathfrak{A}(3)=\{1, 2, 3\}$ oder $=\{1, 2\}$ oder $=\{1, 3\}$ ist; ist aber $\mathfrak{A}(3)=\{1\}$, so ist $\alpha\leqq\frac{1}{3}$ und $\frac{C(3)}{3}\geqq\frac{2}{3}\geqq 2\alpha > \alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$.

[8]) Die folgende Schlußweise wurde zuerst von A. STÖHR [*13*] zur Vereinfachung des Beweises von (1.5) benutzt; Herr STÖHR stellte mir freundlicherweise sein Manuskript vor Erscheinen der Arbeit zur Verfügung.

Multipliziert man die erste dieser Ungleichungen mit δ, die zweite mit η und addiert sie, so folgt unter Beachtung von $\eta+\delta=1$:

$$(3.6)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)z+\alpha n\}R(n) \\ \geqq \alpha\{n-(1-\alpha)z\}A(n)-\frac{1+\alpha}{2}A^2(n)+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}z(2n-z)+ \\ \qquad +\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta). \end{cases}$$

Nun gilt wegen $n\geqq 4$, $\alpha\leqq 1/2$ und $\varrho<1/2$:

$$\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta)>\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}n-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)$$
$$\geqq\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(n-\frac{3}{4}n-\frac{3}{8}\right)=\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(\frac{n}{4}-\frac{3}{8}\right)>0;$$

daher erhält man aus (3.6)

$$\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{R(n)}{n}>\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\frac{A(n)}{n}-\frac{(1+\alpha)}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+$$
$$+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho),$$

also

$$(3.7)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{C(n)}{n} \\ >\big(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\big)\frac{A(n)}{n}-\frac{1+\alpha}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+ \\ \qquad +\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho). \end{cases}$$

Wir wollen jetzt das Minimum des von $\frac{A(n)}{n}$ abhängenden Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Ungleichung für

$$\alpha\leqq\frac{A(n)}{n}\leqq\alpha(2-\alpha)$$

bestimmen, d.h. das Minimum der Funktion

$$f(\xi)=\big(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\big)\xi-\frac{1+\alpha}{2}\xi^2$$

für $\alpha\leqq\xi\leqq\alpha(2-\alpha)$. Die Berücksichtigung dieses Intervalls reicht für den Beweis aus; ist nämlich $\frac{A(n)}{n}=\xi>\alpha(2-\alpha)$, so auch

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha(2-\alpha)\geqq\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

und (1.8) ist erfüllt. Das Minimum der quadratischen Funktion $f(\xi)$ wird an einem Endpunkt des Intervalls angenommen, und zwar, wie jetzt gezeigt werden soll, für $\xi=\alpha$. Bei Beachtung des unter (3.5) angegebenen Wertes für ϱ hat man

$$\begin{aligned} f(2\alpha-\alpha^2)-f(\alpha) &= \left\{\lambda\sqrt{\alpha}+\alpha\left(1-\sqrt{\alpha}+\alpha\right)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &\geqq \left\{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)+\alpha(1+\alpha)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &= \left\{\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\right\}\alpha(1-\alpha)^2 \\ &> \left\{\sqrt{\alpha}-\alpha\right\}\alpha(1-\alpha)^2>0. \end{aligned}$$

Folglich kann man in (3.7) $\frac{A(n)}{n}$ durch α ersetzen:

$$(3.8)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\sqrt{\alpha}\,\frac{C(n)}{n} &> \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{1-(1-\alpha)\,\varrho\}\,\alpha^2-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2+\frac{(1-\alpha^2)\,\alpha}{2}\,\varrho(2-\varrho) \\ &= \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{\alpha+2\varrho-(1+\alpha)\,\varrho^2\}\,\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\ &= \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}\,(1+\sqrt{\alpha}+\alpha)}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\alpha(1-\alpha). \end{aligned}\right.$$

Daraus erhält man unmittelbar die behauptete Abschätzung (1.8).

2. Beweis von c_1^*. Mit der gleichen Schlußweise, die zum Beweis der Ungleichung (1.8) führte, kann nun auch die Abschätzung (1.12) mit dem Faktor c_1^* bewiesen werden. Für $\alpha^*=0$ und $\alpha^*=1$ ist die Behauptung klar, ebenso für $\lambda^*=\infty$. Es sei daher $0<\alpha^*<1$ und $\lambda^*<\infty$. Zu jedem $\varepsilon>0$ mit $0<\varepsilon<\alpha^*$ gibt es dann ein n_ε so, daß

$$A(n)\geqq(\alpha^*-\varepsilon)\,n \quad \text{für} \quad n>n_\varepsilon$$

gilt; wir setzen $\alpha^*-\varepsilon=\alpha'$. Ferner gibt es zu jedem $\mu>0$ ein n_μ $(>n_0)$ so, daß

$$(3.9)\qquad \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m)\leqq n(\lambda^*+\mu) \quad \text{für} \quad n>n_\mu$$

gilt; wir setzen $\lambda^*+\mu=\lambda'$. Sei jetzt

$$k=[\varrho n] \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{\alpha'}}{1+\sqrt{\alpha'}};$$

wegen $0<\alpha'<1$ ist dann $0<\varrho<\frac{1}{2}$. Folglich gibt es eine feste natürliche Zahl N so, daß für alle $n>N$ gilt:

$$k>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \qquad n-k-1>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \qquad 1\leqq k\leqq n-2.$$

Im folgenden sei stets $n>N$, so daß wir für k und $n-k-1$ als obere Summationsgrenzen von (3.9) die Gültigkeit von (3.9) voraussetzen können. Ferner bezeichne K geeignet zu wählende, von n unabhängige Konstanten, deren genauer Wert nicht interessiert. Die 1. GF. nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \lambda' k R(n) &\geqq \sum_{m=n_0+1}^{k} D(m) \geqq \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\sum_{m=1}^{k} E(m) \\ &= \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\binom{A(n)}{2}+\sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\,\{A(m+k+1)-A(m+k)\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(3.10)\begin{cases} \lambda' k R(n) \geqq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \\ \qquad\qquad + \alpha' \sum_{m=1}^{n-k-1} m\{A(m+k+1) - A(m+k)\} + Kn \\ = \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha'\left\{(n-k-1)A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\} + Kn. \end{cases}$$

Auf Grund der angegebenen Voraussetzungen können wir in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$\lambda'(n-k-1) R(n) \geqq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha'\left\{k A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\} + Kn.$$

Diese Ungleichung wird mit α' multipliziert und zu (3.10) addiert:

$$\lambda'\{k + \alpha'(n-k)\} R(n)$$

$$\geqq (1-\alpha'^2) \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha')\binom{A(n)}{2} + \alpha'(n-k+\alpha' k) A(n) + Kn$$

$$\geqq \alpha'\{n - (1-\alpha')k\} A(n) - \frac{1+\alpha'}{2} A^2(n) + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} k(2n-k) + Kn.$$

Daraus folgt:

$$(3.11)\begin{cases} \lambda'\{\varrho + \alpha'(1-\varrho)\} \frac{R(n)}{n} \geqq \alpha'\{1 - (1-\alpha')\varrho\} \frac{A(n)}{n} - \\ \qquad - \frac{1+\alpha'}{2} \frac{A^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} \varrho(2-\varrho) + K\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Die gleiche Minimumbetrachtung wie im finiten Fall zeigt, daß entweder bereits

$$(3.12)\qquad \frac{C(n)}{n} \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right)$$

gilt oder in (3.11) $\frac{A(n)}{n}$ durch α' ersetzt werden darf. Dann folgt aus (3.11) analog zur Abschätzung (3.8):

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha'}+\alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right) + K\frac{1}{n}.$$

Diese Abschätzung gilt also wegen (3.12) in jedem Falle.

Für $n \to \infty$ ergibt sich daraus:

$$\gamma^* \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha'}+\alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right);$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ und $\mu > 0$ gilt, folgt schließlich wie behauptet

$$\gamma^* \geqq \alpha^*\left(1 + c_1^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right).$$

§ 4. Beweise von c_2 und c_2^*.

1. Beweis von c_2. Wie beim Beweis von c_1 in § 3 kann auch jetzt $0<\alpha<1$ vorausgesetzt werden. Ferner können wir $\bar{A}(n)\geqq 1$ annehmen, denn andernfalls ist $A(n)=n$ und somit die behauptete Ungleichung (1.9) erfüllt.

Zum Beweis der Ungleichung (1.9) gehen wir von der 2. GF. (2.12) aus. Für $1\leqq k\leqq n-2$ gilt danach:

$$
(4.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geqq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\{\bar{A}(m+k+1)-\bar{A}(m+k)\} \\
&= k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n) - \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\} \\
&\geqq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n) - \\
&\qquad - (1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\} \\
&= k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n) - \\
&\qquad - (1-\alpha)\left\{n\bar{A}(n-k-1) - \sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Wegen $(1-\alpha)\,n-\bar{A}(n)\geqq 0$ kann man fortfahren:

$$
(4.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geqq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} - \\
&\qquad - \{(1-\alpha)n-\bar{A}(n)\}\,(1-\alpha)\,(n-k-1) + (1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m) \\
&= \{k+(1-\alpha)\,(n-k-1)\}\bar{A}(n) - \binom{\bar{A}(n)}{2} - \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) + (1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m) - (1-\alpha)^2 n\,(n-k-1).
\end{aligned}
\right.
$$

Wegen $1\leqq k\leqq n-2$ gilt auch $1\leqq n-k-1\leqq n-2$, und daher darf man in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$
(4.3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda(n-k-1)\,R(n) &\geqq \{n-k-1+(1-\alpha)\,k\}\bar{A}(n) - \binom{\bar{A}(n)}{2} - \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m) + (1-\alpha)\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m) - (1-\alpha)^2 n k.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Ungleichung wird mit $(1-\alpha)$ multipliziert und zu (4.2) addiert, wobei noch $-\lambda(1-\alpha)R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$(4.4)\begin{cases}\lambda\{k+(1-\alpha)(n-k)\}R(n)\\ \geqq\{k+2(1-\alpha)(n-k-1)+(1-\alpha)^2k\}\bar{A}(n)-(2-\alpha)\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\ \quad-\{1-(1-\alpha)^2\}\sum\limits_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2n\{n-k-1+(1-\alpha)k\}\\ \geqq\{2(1-\alpha)(n-1)+\alpha^2k\}\bar{A}(n)-\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n\bar{A}(n)+\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n-\\ \quad-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k(k+1)-(1-\alpha)^2n\{n-k-1+(1-\alpha)k\}\\ =\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2k\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2-(1-\alpha)^2n(n-\alpha k)-\\ \quad-2(1-\alpha)\bar{A}(n)+\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k+(1-\alpha)^2n\\ \geqq\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2k\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2-(1-\alpha)^2n(n-\alpha k)+\\ \qquad\qquad+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k.\end{cases}$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leqq k\leqq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$(4.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\alpha}-(1-\alpha)}{\alpha};$$

Da für $\alpha<1/2$ die Konstante c_1 besser als c_2 ist, können wir im folgenden $\alpha\geqq 1/2$ voraussetzen und außerdem wieder $n\geqq 4$[9]). Wegen $\varrho<1/2$ folgt dann $[\varrho n]+1=[z]+1\leqq n-2$. Wir betrachten nun zunächst den Fall $1\leqq z$ und dürfen jetzt

$$k=[z]=z-\eta \quad \text{bzw.} \quad k=[z]+1=z+\delta$$

in (4.4) einsetzen. Man erhält so zwei Ungleichungen, von denen die erste mit δ und die zweite mit η multipliziert wird; Addition beider Ungleichungen liefert dann [analog zu (3.6)]:

$$(4.6)\begin{cases}\lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n)\\ \geqq\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2-(1-\alpha)^2n(n-\alpha z)+\\ \quad+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+\eta\delta).\end{cases}$$

Wegen

$$n-(2-\alpha)(z+\eta\delta)>n-\frac{3}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{n}{4}-\frac{3}{8}>0$$

---

[9]) Die Fälle $n=1, 2, 3$ wurden in Fußnote 7), S. 376 erledigt.

hat man schließlich

$$(4.7)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ >\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2-(1-\alpha)^2 n(n-\alpha z). \end{cases}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Ungleichung auch im Falle $0<z<1$ gilt. Aus der 2. GF. folgt für $k=n$:

$$\begin{aligned} \lambda n R(n) &\geq n\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{n}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2} \\ &\geq n\bar{A}(n)-\frac{1-\alpha}{2}n(n+1)-\frac{1-\alpha}{2}n\bar{A}(n)+\frac{1-\alpha}{2}n \\ &=\frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n)-\frac{1-\alpha}{2}n^2-\frac{1}{2}n\bar{A}(n) \\ &\geq \frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n)-(1-\alpha)n^2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man für $z-\eta=0$:

$$(4.8)\quad \begin{cases} \lambda\{z-\eta+(1-\alpha)\left(n-(z-\eta)\right)\}R(n) \\ \geq\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2(z-\eta)\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z-\eta)^2- \\ -(1-\alpha)^2 n\{n-\alpha(z-\eta)\}. \end{cases}$$

Setzt man in (4.4) $k=z+\delta$ ein, multipliziert (4.4) mit η, (4.8) mit δ und addiert beide Ungleichungen, so folgt

$$(4.9)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ \geq\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2- \\ -(1-\alpha)^2 n(n-\alpha z)+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n\eta-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+2\delta)\eta. \end{cases}$$

Nun gilt wegen $z+\delta=1$ und $n\geq 4$:

$$n-(2-\alpha)(z+2\delta)\geq n-4+2\alpha>0,$$

und daher folgt wegen $\eta>0$ aus (4.9) ebenfalls (4.7); diese Ungleichung gilt also jetzt allgemein unter der Voraussetzung (4.5). Setzt man in (4.7) $z=\varrho n$, so folgt wegen $A(n)=n-\bar{A}(n)$:

$$(4.10)\quad \begin{cases} \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)C(n)> \\ >-\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)-\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}-\alpha^2\varrho\right\}\bar{A}(n)+\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)n- \\ -\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 n-(1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho)n. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt feststellen, daß der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ negativ ist, um dann $\bar{A}(n)$ durch $(1-\alpha)n$ abschätzen zu können. Für die Dichte β von $\mathfrak{B}$ kann im folgenden

$$\beta \leqq c_2 \alpha \tag{4.11}$$

vorausgesetzt werden, da unsere Behauptung (1.9) sonst bereits aus der bekannten SCHNIRELMANNschen Ungleichung[10])

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + \beta(1-\alpha) \tag{4.12}$$

folgt (mit $\lambda = 1$). Zwischen β und λ besteht die Beziehung[11])

$$\lambda \geqq 2 - \beta,$$

so daß wegen (4.11)

$$\lambda \geqq 2 - c_2 \alpha$$

angenommen werden kann. Damit folgt unter Beachtung von (4.5) und

$$c_2 = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2} = \frac{2 - 2\alpha + \alpha^2 - (2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\alpha^2}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) &- \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho \\
&\geqq (2 - c_2\alpha)\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha\left\{\sqrt{1-\alpha} - (1-\alpha)\right\} \\
&= \{2 - (c_2+1)\alpha\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left\{(2-\alpha)\sqrt{1-\alpha} - 2(1-\alpha)^2\right\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left\{4(1-\alpha)\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right) + \alpha^2\right\} > 0.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ in (4.10) ist also tatsächlich negativ; man erhält daher aus (4.10):

$$\begin{aligned}
\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\frac{C(n)}{n} &> -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho\right\}(1-\alpha) + \\
&\quad + \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 - (1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho) \\
= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\alpha &+ \\
&+ \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} + 2\alpha\varrho + 2(1-\alpha)\varrho - (2-\alpha)\varrho^2\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\
= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) &+ \{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2},
\end{aligned}$$

---

[10]) Siehe z.B. A. J. CHINTSCHIN: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akad.-Verlag 1951.

[11]) Siehe [9], S. 7, Fußnote. Der Vollständigkeit halber soll der Beweis im folgenden ausgeführt werden.

also

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha + \frac{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2}{2(1-\alpha+\alpha\varrho)} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2}\left\{\sqrt{1-\alpha}\left(2-\alpha+2\sqrt{1-\alpha}\right)+2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)-\right.$$
$$\left.-(2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+1-\alpha}{\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2}\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} = \alpha\left(1+c_2\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Damit ist (1.9) bewiesen.

2. Beweis von c_2^*. Der Beweis der Ungleichung (1.12) mit der Konstanten c_2^* erfolgt analog zum finiten Fall. Die Voraussetzungen und die Grundformel werden in entsprechender Weise modifiziert, wie das beim Beweis von c_1^* im Bezug auf den Beweis von c_1 geschehen ist. Wir wollen daher den Beweis hier nicht im einzelnen ausführen, sondern lediglich darauf hinweisen, daß auch jetzt die im finiten Fall benutzten Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Das ist einmal die SCHNIRELMANNsche Ungleichung, die bekanntlich auch im asymptotischen Fall richtig ist, und ferner die Abschätzung $\lambda^* \geqq 2-\beta^*$, deren Beweis wir auch noch für den finiten Fall nachzuholen haben.

Hilfssatz 3. *Unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen gilt:*

$$\lambda \geqq 2-\beta, \tag{4.14}$$

$$\lambda^* \geqq 2-\beta^*. \tag{4.15}$$

Beweis[12]). Für $m \in \mathfrak{B}$ gilt $l(m)=1$, sonst $l(m) \geqq 2$. Daraus folgt

$$\lambda \geqq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} l(m) \geqq \frac{1}{n}\left\{B(n)+2\left(n-B(n)\right)\right\} = 2-\frac{B(n)}{n},$$

also gilt (4.14). Da es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_ε gibt, so daß für alle $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\lambda^* + \varepsilon \geqq 2 - \frac{B(n)}{n}$$

besteht, erhält man durch geeigneten Grenzübergang

$$\lambda^* + \varepsilon \geqq 2-\beta^*;$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt schließlich (4.15).

§ 5. Differenzenmengen.

Es soll hier auf eine Verallgemeinerung der vorstehenden Überlegungen auf Differenzenmengen hingewiesen werden.

---

[12]) Im Anschluß an [9], S. 7, Fußnote.

Die bisher als $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ genannte Menge und die sich auf sie beziehenden Funktionen kennzeichnen wir durch ein hochgestelltes $+$, also: $\mathfrak{C}^+$, $C^+(n)$, $D^+(n)$, $E^+(n)$, ... Neben $\mathfrak{C}^+$ betrachten wir jetzt die Mengen

$$\mathfrak{C}^- = \{a-b\}_{a>b} \quad (a\in\mathfrak{A},\ b\in\mathfrak{B}),$$

also die positiven Zahlen aus $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$. Mit $C^-(n)$ werde die Anzahlfunktion von $\mathfrak{C}^-$ bezeichnet. Wir wollen nun auch zu $D^+(m)$, $E^+(m)$ bzw. $D'^+(m)$, $E'^+(m)$ analoge Funktionen einführen.

Definition 3. *$D^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}} \quad \textit{mit} \quad \bar{a}+m\in\mathfrak{A}(n);$$

$E^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}} \quad \textit{mit} \quad \bar{a}+m\in\bar{\mathfrak{A}}(n).$$

Definition 4. *$D'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a\in\mathfrak{A}(n) \quad \textit{mit} \quad a-m\in\bar{\mathfrak{A}};$$

$E'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a\in\mathfrak{A}(n) \quad \textit{mit} \quad a-m\in\mathfrak{A}.$$

Ein Vergleich zeigt, daß Definition 3 aus Definition 1 und Definition 4 aus Definition 2 durch Vertauschen von $\mathfrak{A}$ mit $\bar{\mathfrak{A}}$ und a mit $\bar{a}$ hervorgeht. Daraus folgt dann bereits, daß alle für $D^+(m)$ und $D'^+(m)$ hergeleiteten Beziehungen durch entsprechendes Vertauschen in solche für $D^-(m)$ und $D'^-(m)$ übergehen. Wie man sofort sieht, bleibt auch Hilfssatz 1 gültig. Schließlich gilt jetzt

$$D^-(b)\leqq C^-(n)-A(n) \quad (b\in\mathfrak{B}),$$

denn in $D^-(b)$ werden die Elemente $\bar{a}\in\bar{\mathfrak{A}}$ mit $\bar{a}+b=a'\in\mathfrak{A}(n)$, d.h. mit $\bar{a}=a'-b$ gezählt; diese sind offenbar Elemente aus $\mathfrak{C}^-(n)$, die nicht in $\mathfrak{A}(n)$ liegen. Aus diesen Angaben folgt bereits, daß auch jetzt zwei komplementäre Grundformeln gelten und daß man diese aus (2.7) und (2.12) dadurch erhält, daß man darin $A(n)$ durch $\bar{A}(n)$ und $C^+(n)$ durch $C^-(n)$ ersetzt:

$$(5.1) \qquad \text{1. GF.}^-: \quad \lambda k\{C^-(n)-A(n)\}\geqq \sum_{m=1}^{k}\bar{A}(n-m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\Gamma(k);$$

$$(5.2) \qquad \text{2. GF.}^-: \quad \lambda k\{C^-(n)-A(n)\}\geqq kA(n)-\sum_{m=1}^{k}A(m)-\binom{A(n)}{2}+\Gamma(k).$$

Aus diesen Formeln können nun ebenfalls verschiedene Folgerungen gezogen werden. Wir wollen uns hier auf zwei Bemerkungen beschränken. Zunächst soll eine Abschätzung bewiesen werden, die P. ERDÖS [3] ohne Beweis angegeben hat.

Sei $$\mathfrak{C}' = \{|a \pm b|\} \quad (a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B})$$
mit der Anzahlfunktion $C'(n)$, dann lautet die Ungleichung von P. ERDÖS[13]):
$$C'(n) \geqq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2hn}.$$
Wir beweisen sogleich die entsprechende Ungleichung für die in $\mathfrak{C}'$ enthaltene Menge
$$\mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^- \equiv \mathfrak{C}^\pm$$
mit der Anzahlfunktion $C^\pm(n)$ und mit λ an Stelle von h. Addiert man zur 1. GF.$^+$ (2.7) die 2. GF.$^-$ (5.2), beide für $k = n - 1$, dann folgt
$$\begin{aligned}\lambda(n-1)\{C^+(n) + C^-(n) - 2A(n)\} &\geqq (n-1)A(n) - 2\binom{A(n)}{2}\\ &= (n-1)A(n) - A^2(n) + A(n)\\ &= A(n)\{n - A(n)\}.\end{aligned}$$
Wegen
$$C^+(n) + C^-(n) \leqq 2C^\pm(n)$$
erhält man daraus wie behauptet:
$$C^\pm(n) \geqq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2\lambda n}.$$

Diese Abschätzung kann noch verbessert werden; wir wollen uns darauf beschränken, eine Verbesserung für gerade n und $A(n) = n/2$ anzugeben. Dazu werden die 1. GF.$^+$ (2.7) und die 1. GF.$^-$ (5.1) addiert, wobei $\Gamma(k)$ und $\bar{\Gamma}(k)$ vernachlässigt werden und auf der linken Seite der Ungleichungen die vor der Berücksichtigung von $\mathfrak{B}$ vorhandenen Summen stehen bleiben; setzt man noch
$$\operatorname*{Max}_{m=1,\ldots,n}\big(D^+(m), D^-(m)\big) = D(m_0),$$
dann folgt
$$2kD(m_0) \geqq \sum_{m=1}^{k}\{D^+(m) + D^-(m)\} \geqq \frac{n^2}{4} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$
Mit den Werten
$$k_1 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \frac{n}{\sqrt{2}} - \eta, \qquad k_2 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] + 1 = \frac{n}{\sqrt{2}} + \delta,$$
wird nun vorstehende Ungleichung nach dem Schema aus § 3 gemittelt, d.h. sie wird einmal für $k = k_1$ und zum andern für $k = k_2$ genommen, im ersten Falle mit δ, im zweiten mit η multipliziert, und die so erhaltenen Ungleichungen werden addiert; man erhält dann
$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,nD(m_0) &\geqq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}n - \frac{\delta\eta}{2}\\ &\geqq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}n^2\end{aligned}$$

[13]) Die in [3] tatsächlich angegebene Formel enthält offensichtlich einen Druckfehler.

also
$$D(m_0) > \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, n.$$

Auf Grund der Bedeutung von $D^+(m)$ bzw. $D^-(m)$ ergibt sich aus dieser Abschätzung sofort die folgende Aussage:

Sind $a_1, \ldots, a_t$ beliebige natürliche Zahlen $\leqq 2t$ $(t = 1, 2, \ldots,)$ und $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ die restlichen natürlichen Zahlen $\leqq 2t$, dann gibt es eine ganze (nicht notwendig positive) Zahl m_0, so daß die Anzahl der $\bar{a}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ in der Folge der Zahlen $a_i + m_0$ $(i = 1, \ldots, t)$ größer als $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\, t$ ist[14].

Literatur.

[*1*] Brauer, A.: Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Z. **44**, 212—232 (1939). — [*2*] Chintschin, A. J.: Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40**, 180—189 (1933). — [*3*] Erdös, P.: On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithmetica **1**, 197—200 (1936). — [*4*] Erdös, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. II. (Engl. mit russ. Auszug.) Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 217—224 (1938). — [*5*] Klöter, H., u. A. Stöhr: Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. J. reine angew. Math. (im Druck). — [*6*] Landau, E.: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35, Cambridge 1937. — [*7*] Ostmann, H. H.: Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summen zweier Zahlmengen. Dtsch. Math. **6**, 213—247 (1941/42). — [*8*] Rohrbach, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Ver.igg **48**, 201—236 (1938). — [*9*] Selberg, S.: Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvidensk. **47**, 11—118 (1944). — [*10*] Selberg, S.: A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. A **1949**, 1—15. — [*11*] Stöhr, A.: Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. III. Neuer Beweis eines Satzes von A. Brauer. J. reine angew. Math. (im Druck).

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 25. Februar 1955.)

[14] Nach einer Mitteilung von P. Erdös, dem ich auch den Hinweis auf diese Frage verdanke, wurde dieses Ergebnis zuerst von P. Scherk aufgestellt.