Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 197

Heft 1/2

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1957

Band 197. Heft 1/2

Inhaltsverzeichnis

Einsendung von Druckmanuskripten erbeten an den Herausgeber:

Prof. Dr. H. Hasse, (24a) Ahrensburg bei Hamburg, Hamburger Str. 43

Die Schriftleitung bittet, die Manuskripte in leserlicher Schrift, möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben. Formeln sollten mit der Hand eingetragen sein. Es empfiehlt sich, den Manuskripten Anweisungen für den Setzer beizulegen, insbesondere die vorkommenden deutschen, griechischen, Antiqua- und sonstige besondere Typen durch farbige Unterstreichungen zu kennzeichnen, ebenso kursiven, gesperrten oder fetten Satz hervorzuheben. Für etwaige Figuren werden reproduktionsfähige Reinzeichnungen mit Tusche auf Pergamentpapier erbeten.

Die Herrn Autoren erhalten von Arbeiten bis zu 24 Druckseiten 75 Sonderdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderdrucke kostenlos, weitere gegen Berechnung.

Einzelheiten über den Korrekturgang sind aus den Laufzetteln zu ersehen, die den Korrektursendungen beigefügt werden.

Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen.

Von *Friedrich Kasch* in Mainz.

Fragestellung.

Für Dichteuntersuchungen in der additiven Zahlentheorie ist bekanntlich der folgende Zusammenhang von Bedeutung: *Jede die Null enthaltende Menge nichtnegativer ganzer Zahlen positiver Dichte bildet eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen, und jede die 0 enthaltende Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen stellt eine wesentliche Komponente dar.* Im ersten Teil dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß der entsprechende Zusammenhang bei sinngemäßer Verallgemeinerung der dabei benutzten Begriffe auch bei Mengen „nichtnegativer" Gitterpunkte aus einem endlichdimensionalen Raum gültig ist. Dabei sei ein nichtnegativer Gitterpunkt ein Punkt mit lauter nichtnegativen ganzrationalen Koordinaten. Die eigentliche Schwierigkeit beim Beweis betrifft die zweite Behauptung; hingegen kann die erste fast unmittelbar auf den linearen Fall zurückgeführt werden.

Bei den Definitionen und beim Beweis schließen wir an eine kürzlich erschienene Arbeit [4] an, in der eine unmittelbare Verallgemeinerung einer Schlußweise von P. Erdös und E. Landau [6] zur Abschätzung der Dichte einer Summenmenge auf Gitterpunktmengen enthalten ist.

Im zweiten Teil dieser Arbeit soll für Gitterpunktmengen der Ebene eine Verallgemeinerung der Schnirelmannschen Ungleichung

$$\gamma \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + (1 - \alpha)\,\beta$$

hergeleitet werden, nämlich die Abschätzung

$$(1) \qquad \gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}\,(1 - \alpha)\,\beta .$$

Dabei seien α bzw. β die Dichten beliebiger Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit $0 \in \mathfrak{B}$ und γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Aus (1) folgt erneut die in dem vorhergehenden Ergebnis enthaltene Tatsache, daß eine die 0 enthaltende Gitterpunktmenge der Ebene positiver Dichte eine wesentliche Komponente ist. Ob die formal genaue Verallgemeinerung der Schnirelmannschen Ungleichung in der Ebene richtig ist, kann hier nicht entschieden werden. Nach L. Cheo [2] ist lediglich bekannt, daß dies dann der Fall ist, wenn alle ganzzahligen Punkte einer der positiven Halbachsen zur fraglichen Menge gehören; unter dieser sehr einschränkenden Voraussetzung läßt sich der lineare Beweis fast unmittelbar übertragen. Jedenfalls ist eine genaue Verallgemeinerung des Satzes von H. B. Mann, d. h. der Abschätzung

$$\gamma \geqq \mathrm{Min}\,(1, \alpha + \beta)$$

auf die Ebene nicht möglich, wie L. Cheo [2] durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt hat.

Auch der hier mitgeteilte Beweis von (1) bedeutet eine Zurückführung auf lineare Eigenschaften; dies hat, wie sich aus dem Beweis ergibt, zur Folge, daß er sich nicht auf höhere Dimensionen übertragen läßt. Die Schnirelmannsche Ungleichung und die Abschätzung (1) legen jedoch die Vermutung nahe, daß in einem r-dimensionalen Raum zumindest die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{r-1} (1-\alpha)\,\beta$$

richtig ist.

I. Teil.

1. Unter *Gitterpunkten* des r-dimensionalen Raums verstehen wir r-Tupel von ganzrationalen Zahlen[1]). Wir bezeichnen sie mit kleinen deutschen Buchstaben oder durch Angabe ihres Komponentenvektors, d. h. in der Form

$$\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \qquad (n_i \text{ ganz}, \ i = 1, \ldots, r).$$

Gilt dabei $n_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, so nennen wir $\mathfrak{n}$ einen *nichtnegativen Gitterpunkt*; die von $0 = (0, \ldots, 0)$ verschiedenen nichtnegativen Gitterpunkte sollen *natürliche Gitterpunkte* heißen. Die Menge aller nichtnegativen Gitterpunkte bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}$ und die aller natürlichen Gitterpunkte mit $\mathfrak{N}$.

Ist $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ ein Gitterpunkt mit $m_i \leqq n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, so schreiben wir zur Abkürzung $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$. Wir merken an, daß bei dieser Größenbeziehung die Menge der nichtnegativen Gitterpunkte eine teilweise geordnete Halbgruppe bildet.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge nichtnegativer Gitterpunkte, so verstehen wir unter $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$ die Menge aller $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{n}$. Die Anzahlfunktion $A(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{A}$ sei gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \frown \mathfrak{N}$. Die untere Grenze aller Quotienten $A(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{n} \in \mathfrak{N})$ wird als (*finite*) *Dichte* α von $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

$$\operatorname*{fin}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha; \tag{2}$$

entsprechend sei

$$\operatorname*{lim}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha^{*}\,{}^{2)} \tag{3}$$

die *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$; es ist demnach $\alpha^* \geqq \alpha$. Aus $\alpha > 0$ folgt offenbar, daß die Einheitspunkte

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

in $\mathfrak{A}$ enthalten sind[3]).

2. Sei jetzt auch $\mathfrak{B}$ eine Menge nichtnegativer Gitterpunkte mit der Anzahlfunktion $B(\mathfrak{n})$ und der Dichte β, dann verstehen wir unter der Summenmenge

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

die Menge aller in der Gestalt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r)$$

mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ darstellbaren Gitterpunkte (Vektoraddition)[4]).

---

[1]) r betrachten wir im folgenden als fest.

[2]) d. h. α^* ist der kleinste Häufungspunkt der Menge $\left\{\frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\right\}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}}$.

[3]) Wie im linearen Fall gilt: Dann und nur dann ist $\alpha > 0$, wenn $\alpha^* > 0$ und die Einheitspunkte in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. (Auch die in den weiteren Fußnoten erwähnten Ergebnisse sind für $r = 1$ wohlbekannt, siehe etwa [8]; die Beweise lassen sich für $r > 1$ analog führen.)

[4]) Gilt $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$ und $\alpha + \beta \geqq 1$, dann folgt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$; gilt $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$ und $\alpha^* + \beta^* > 1$, dann folgt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$.

Wir setzen jetzt voraus, daß $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer Gitterpunkte mit der Eigenschaft sei, daß sich jeder Gitterpunkt $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$ in der Form

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{l(\mathfrak{n})} \qquad (\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{B})$$

darstellen lasse. Sei $l(\mathfrak{n})$ in dieser Darstellung minimal, dann wird

$$\overline{\text{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}}\, l(\mathfrak{n}) = h, \quad \overline{\text{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda, \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda^*$$

gesetzt, und es werden h als *Ordnung*, λ als *mittlere Ordnung* und λ^* als *asymptotische mittlere Ordnung* bezeichnet. Ist h endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Gitterpunkte genannt; offenbar ist dann $\lambda \leqq h$ [5]. Analog zum linearen Fall gilt

Satz 1. *Jede die 0 enthaltende Gitterpunktmenge positiver Dichte ist eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Gitterpunkte* [6].

Beweis. Die Menge $\mathfrak{B}$ besitze die Dichte $\beta > 0$. Sei $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Menge der Elemente aus $\mathfrak{B}$, bei denen höchstens die i-te Komponente von 0 verschieden ist, und sei $\mathfrak{B}'_i$ die Menge der Komponenten der Elemente aus $\mathfrak{B}_i$. Dann ist $\mathfrak{B}'_i$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer Zahlen, und aus der Definition der Dichte von $\mathfrak{B}$ folgt, daß $\mathfrak{B}'_i$ eine im üblichen Sinne positive Dichte ($\geqq \beta$) besitzt. Dann ist bekanntlich $\mathfrak{B}'_i$ eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen. Sei h_i die Ordnung von $\mathfrak{B}'_i$, dann enthält offenbar mit $h = \sum_{i=1}^{r} h_i$ die h-fache Summe von $\mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{N}$ der natürlichen Gitterpunkte.

Bemerkung: Beim Beweis wird nur benutzt, daß $\mathfrak{B}$ auf den positiven Halbachsen eine positive Dichte besitzt. Es genügt daher, nur dies in Satz 1 vorauszusetzen.

3. Eine Menge $\mathfrak{B}$ nichtnegativer Gitterpunkte heiße analog zum linearen Fall eine *wesentliche Komponente*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jede Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer Gitterpunkte der Dichte α mit $0 < \alpha < 1$ ist die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ größer als α [7]. Die anfangs aufgestellte Behauptung, daß jede die 0 enthaltende Basis endlicher Ordnung eine wesentliche Komponente ist, ergibt sich dann unmittelbar aus

Satz 2. *Es gibt eine Zahl $c > 0$ so, daß für jede die 0 enthaltende Basis $\mathfrak{B}$ der mittleren Ordnung $\lambda < \infty$ und jede Menge nichtnegativer Gitterpunkte $\mathfrak{A}$ der Dichte α die Ungleichung*

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + c\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{4}$$

besteht, wobei γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist. Insbesondere kann

$$c = \{3(r+1)\}^{-r} \tag{5}$$

gewählt werden.

Beim Beweis stützen wir uns auf Ergebnisse aus [4], mit deren Hilfe dort die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2^r}\,\frac{1 - 2^{r-1}\alpha}{\lambda}\right) \tag{6}$$

---

[5]) Darüber hinaus besteht dann die Ungleichung $\lambda^* \leqq \lambda \leqq h < 2\lambda$.

[6]) Ein entsprechender Satz wie im linearen Fall gilt auch für die asymptotischen Größen.

[7]) Aus dem folgenden Satz ergibt sich, daß die in [4] vorgenommene Einschränkung des Begriffs der wesentlichen Komponente nicht erforderlich ist.

bewiesen wurde. Diese hat im Gegensatz zu (4) nur für $\alpha < 2^{-(r-1)}$ eine Bedeutung; für hinreichend kleine α ist sie allerdings besser als (4), jedenfalls für das hier angegebene c [8]).

Beweis. Wir gehen von der Ungleichung (5. 6) aus [4] aus [9]):

$$(7)\qquad \lambda N(\mathfrak{n})\,\{C(\mathfrak{n})-A(\mathfrak{n})\} \geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}) - \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{a}) + A(\mathfrak{n}) = \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} A(\bar{\mathfrak{a}});$$

dabei ist $\mathfrak{n}$ ein beliebiger natürlicher Gitterpunkt und $\bar{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}$. Nach Definition von α gilt $A(\mathfrak{m}) \geqq \alpha N(\mathfrak{m})$, daher folgt aus (7)

$$(8)\qquad \lambda N(\mathfrak{n})\,\{C(\mathfrak{n})-A(\mathfrak{n})\} \geqq \alpha \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}}).$$

Um nun die rechts stehende Summe abzuschätzen, unterscheiden wir zwei Fälle.

Zunächst setzen wir voraus, daß mindestens eine der Komponenten von $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ größer oder gleich $3(r+1)$ sei. Die Indizierung sei so, daß

$$n_i \geqq 3(r+1) \quad \text{für } i = 1, \ldots, k$$

und

$$n_i < 3(r+1) \quad \text{für } i = k+1, \ldots, r$$

gelte. Wir setzen

$$\begin{aligned} n_i' &= \left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] - 1 \quad &&\text{für } i = 1, \ldots, k;\\ n_i' &= 0 &&\text{für } i = k+1, \ldots, r;\\ \mathfrak{n}_i' &= (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i', n_{i+1}, \ldots, n_r) \quad &&\text{für } i = 1, \ldots, k;\\ \mathfrak{n}' &= (n_1', \ldots, n_r'). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Gitterpunkte $\mathfrak{a} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ mit

$$(9)\qquad \mathfrak{n}' \leqq \bar{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{n}$$

bezeichnen wir mit $\bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n})$; dann gilt

$$\begin{aligned} (10)\quad \bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n}) &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - \sum_{i=1}^{k} \bar{A}(\mathfrak{n}_i') \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} N(\mathfrak{n}_i')\\ &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} \Big\{(n_1+1)\cdots(n_{i-1}+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right](n_{i+1}+1)\cdots\\ &\qquad\qquad (n_r+1) - 1\Big\}\\ &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1}\left\{\prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 1\right\}\\ &= \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n}) \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{r}{r+1} N(\mathfrak{n}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun $N(\bar{\mathfrak{a}})$ für die Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{a}}$, die (9) genügen, abschätzen. Nach Definition von $\mathfrak{n}'$ gilt

$$\begin{aligned} (11)\qquad N(\bar{\mathfrak{a}}) &\geqq N(\mathfrak{n}') = \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] - 1 \geqq \frac{1}{(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}(n_i - r) - 1\\ &= \frac{1}{(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}\frac{n_i - r}{n_i+1}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1 \geqq \frac{2^k}{3^k(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1\\ &\geqq \frac{1}{3^k(r+1)^k}\left\{\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1\right\}. \end{aligned}$$

---

[8]) Siehe dazu auch die Bemerkung im Anschluß an den Beweis. Im Falle $r = 1$ wurde eine Abschätzung dieser Art bekanntlich zuerst von *P. Erdös* angegeben [3].

[9]) Formel (5. 6) aus [4] lautet tatsächlich $\lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\} \geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}) - \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} E(\mathfrak{m})$; dabei ist $E(\mathfrak{m})$ definiert als Anzahl der verschiedenen Paare $\mathfrak{a}', \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$. Daraus folgt unmittelbar die Ungleichung (7).

Wegen $n_i \leqq 3(r+1) - 1$ für $i = k+1, \ldots, r$ gilt ferner

$$\prod_{i=1}^{k} (n_i + 1) - 1 \geqq \frac{1}{3^{r-k+1}(r+1)^{r-k}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (n_i + 1) - 1 \right\};$$

damit erhält man aus (11)

$$(12) \qquad N(\mathfrak{a}) \geqq \frac{1}{3^r (r+1)^{r-1}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (n_i + 1) - 1 \right\} = \frac{N(\mathfrak{n})}{3^r (r+1)^{r-1}}.$$

Da für die (9) genügenden Gitterpunkte aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ die Anzahlen $N(\mathfrak{a})$ in der in (8) rechts stehenden Summe $\sum\limits_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}})$ vorkommen, erhält man aus (10) und (12)

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq \frac{1}{3^r (r+1)^{r-1}} \left\{ \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \frac{r}{r+1} N(\mathfrak{n}) \right\} N(\mathfrak{n}).$$

Damit folgt aus (8)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + c_1 \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - c_2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda},$$

wobei

$$c_1 = \frac{1}{3^r (r+1)^{r-1}} \quad \text{und} \quad c_2 = c_1 \frac{r}{r+1}$$

gesetzt ist. Wegen $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n}) - \bar{A}(\mathfrak{n})$ folgt

$$(13) \qquad \begin{aligned} \frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} &\geqq 1 - \left(1 - c_1 \frac{\alpha}{\lambda}\right) \frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - c_2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \\ &\geqq 1 - \left(1 - c_1 \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha) - c_2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \\ &= \alpha + (c_1 - c_2) \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} = \alpha \left(1 + c \frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

wobei $c = c_1 - c_2 = \{3(r+1)\}^{-r}$ ist.

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß mindestens eine Komponente von $\mathfrak{n}$ größer oder gleich $3(r+1)$ sei. Jetzt wird der Fall betrachtet, daß alle Komponenten kleiner als $3(r+1)$ sind. Ist $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})$, so gilt

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = 1 \geqq \alpha \left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

d. h. unsere Behauptung ist mit $c = 1$ erfüllt. Ist jedoch $A(\mathfrak{n}) < N(\mathfrak{n})$, dann enthält $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$ mindestens einen Gitterpunkt mehr als $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, da bereits durch Addition der in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Einheitspunkte zu $\mathfrak{A}$ mindestens ein neuer Punkt in $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$ entsteht. Es gilt dann also

$$(14) \qquad \frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha + \frac{1}{N(\mathfrak{n})}.$$

Wegen $N(\mathfrak{n}) = \prod\limits_{i=1}^{r} (n_i + 1) - 1 \leqq 3^r (r+1)^r$ folgt aus (14)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha + \{3(r+1)\}^{-r} \geqq \alpha \left(1 + c \frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Die Ungleichung

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha \left(1 + c \frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r+1)\}^{-r}$$

gilt also jetzt für jeden Punkt $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$; daraus folgt dann sofort die Behauptung des Satzes.

Bemerkungen: 1. Wie man an Hand des Beweises feststellt, könnte man durch Verfeinerung der Abschätzungen die Konstante c noch vergrößern. Man überzeugt sich aber leicht, daß man auf dem hier eingeschlagenen Weg jedenfalls nicht über $c = (r + 1)^{-r}$ hinauskommen wird. Die unmittelbare Übertragung der Schlußweise von Erdös-Landau auf den Raum, die in [4] durchgeführt wurde, liefert die Abschätzung (6), die für hinreichend kleine α besser als (4) ist. Es wäre wünschenswert, eine Schlußweise zu finden, die sogleich eine (4) und (6) enthaltende Abschätzung liefert.

2. Eine entsprechende Überlegung wie im Beweis von Satz 2 kann auch für die asymptotischen Größen durchgeführt werden und liefert die Abschätzung

$$\gamma^* \geqq \alpha^* \left(1 + c \frac{1 - \alpha^*}{\lambda^*}\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r + 1)\}^{-r}. \tag{15}$$

4. Aus Satz 2 folgt fast unmittelbar eine Abschätzung für die Dichte einer Summenmenge, wenn beide Summanden eine positive Dichte besitzen.

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte mit den Dichten α bzw. β, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Dann gilt für die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$*

$$\gamma \geqq \alpha \left(1 + \frac{c}{2r} (1 - \alpha) \beta\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r + 1)\}^{-r}. \tag{16}$$

Beweis. Für $\beta = 0$ ist die Behauptung klar; sei also $\beta > 0$. Nach Satz 1 ist dann $\mathfrak{B}$ eine Basis endlicher Ordnung. Wir betrachten $\mathfrak{B}$ nur auf den positiven Halbachsen. Seien h die Ordnung von $\mathfrak{B}$, h_0 die Ordnung von $\mathfrak{B}$ auf der Halbachse maximaler Ordnung, und sei β_0 die Dichte auf dieser Halbachse. Für die mittlere Ordnung λ von $\mathfrak{B}$ gilt dann offenbar $\lambda \leqq h \leqq r h_0$. Zufolge des Satzes von H. B. Mann hat man ferner $r h_0 \leqq r \left(\frac{1}{\beta_0} + 1\right)$, also gilt $\lambda \leqq \frac{2r}{\beta_0} \leqq \frac{2r}{\beta}$; damit folgt (16) aus (4).

Aus (15) kann man eine analoge Abschätzung für die asymptotischen Größen herleiten, wobei man an Stelle des Satzes von H. B. Mann den Dichtesatz von M. Kneser[10]) heranzuziehen hat. Man erhält dann die folgende Aussage:

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte mit den asymptotischen Dichten α^* bzw. β^*, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Menge der Punkte aus $\mathfrak{B}$, bei denen höchstens die i-te Komponente von Null verschieden ist, mit $\mathfrak{B}_i'$ die Menge der Komponenten von $\mathfrak{B}_i$, und ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen aus $\mathfrak{B}_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ gleich 1, dann gilt die Abschätzung

$$\gamma^* \geqq \alpha^* \left(1 + \frac{c}{2r} (1 - \alpha^*) \beta^*\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r + 1)\}^{-r}. \tag{17}$$

5. Ohne im einzelnen darauf einzugehen, soll schließlich noch erwähnt werden, daß sich unsere bisherigen Überlegungen auf beliebige Punktmengen im r-dimensionalen Raum übertragen lassen, wenn dort die Begriffe wie Dichte, Basis usw. im Sinne von D. Raikov [7] und L. Chatrowsky [1] zugrunde gelegt werden[11]). Von D. Raikov wurde die Schlußweise von Erdös-Landau auf reelle Punktmengen übertragen und L. Chatrowsky stellte eine zu (6) analoge Formel für beliebige Punktmengen aus dem r-dimensionalen

---

[10]) Siehe [5], Satz 5.

[11]) Insbesondere wird die Anzahlfunktion durch das innere Lebesguesche Maß ersetzt.

Raum auf. Die Übertragung unserer Ergebnisse auf derartige Punktmengen liefert eine zu (4) analoge Abschätzung und bedeutet daher eine Verbesserung der Abschätzung von L. Chatrowsky. Auch die Abschätzungen (15), (16) und (17) lassen sich ohne Schwierigkeit übertragen, wobei noch in der Voraussetzung zu (17) die arithmetische Bedingung wegfällt.

II. Teil.

Wir kommen nun zum Beweis der Ungleichung (1), die eine Verbesserung der Ungleichung (16) für den Fall $r = 2$ darstellt. Wir formulieren die Behauptung als

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte der Ebene mit den Dichten α bzw. β, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Dann genügt die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ der Abschätzung*

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}(1 - \alpha)\,\beta.$$

Beweis. Wir können $0 \in \mathfrak{A}$ und $\alpha > 0$ annehmen, was keine Einschränkung bedeutet. Es sei $\mathfrak{n} = (n', n'') \in \mathfrak{N}$ ein beliebiger, aber fester Gitterpunkt. Zu jedem ganzzahligen i mit $0 \leqq i \leqq n'$ seien

$$(18)\qquad (i, a''_{i1}), (i, a''_{i2}), \ldots, (i, a''_{it_i})$$

alle Elemente aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, deren erste Komponente gleich i ist; die zweiten Komponenten seien nach wachsender Größe geordnet. Wir setzen

$$a''_{i\nu+1} - a''_{i\nu} - 1 = u_{i\nu}, \quad (0, u_{i\nu}) = \mathfrak{u}_{i\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, t_i - 1);$$

ist $a''_{it_i} < n''$, so wird noch

$$n'' - a''_{it_i} = u_{it_i}, \quad (0, u_{it_i}) = \mathfrak{u}_{it_i}$$

gesetzt.

Sinngemäß wird mit den zweiten Komponenten verfahren; wir erhalten so zu gegebenem j mit $0 \leqq j \leqq n''$ an Stelle von (18)

$$(a'_{j1}, j), (a'_{j2}, j), \ldots, (a'_{js_j}, j);$$

jetzt setzen wir

$$a'_{j\mu+1} - a'_{j\mu} - 1 = v_{j\mu}, \quad (v_{j\mu}, 0) = \mathfrak{v}_{j\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, s_j - 1);$$

ist $a'_{js_j} < n'$, so wird noch

$$n' - a'_{js_j} = v_{js_j}, \quad (v_{js_j}, 0) = \mathfrak{v}_{js_j}$$

gesetzt.

Mit $\mathfrak{a} = (i, a''_{i\nu}) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegt die Menge $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$; dabei läuft ν von 1 bis $t_i - 1$ oder bis t_i, je nachdem, ob $a''_{it_i} = n''$ oder $a''_{it_i} < n''$ ist. Wegen $0 \in \mathfrak{B}$ liegt $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$, und $\mathfrak{a}$ ist nach Konstruktion von $\mathfrak{u}_{i\nu}$ auch der einzige Punkt aus $\mathfrak{A}$, der in $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ liegt. Die Anzahl der natürlichen Gitterpunkte aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ ist (wegen $\mathfrak{a} \neq 0$) gleich $1 + B(\mathfrak{u}_{i\nu})$. Daraus folgt

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \sum_{i,\nu} B(\mathfrak{u}_{i\nu}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \beta \sum_{i,\nu} u_{i\nu},$$

wobei die Summation über alle zuvor angegebenen i und ν läuft. Entsprechend gilt

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \sum_{j,\mu} B(\mathfrak{v}_{j\mu}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \beta \sum_{j,\mu} v_{j\mu}.$$

Diese beiden Ungleichungen zusammen ergeben

$$(19)\qquad C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \frac{\beta}{2}\Big(\sum_{i,\nu} u_{i\nu} + \sum_{j,\mu} v_{j\mu}\Big).$$

Nach Definition der $u_{i\nu}$ werden in $\sum\limits_{i,\nu} u_{i\nu}$ alle Punkte $(a', a'') \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ gezählt, die „senkrecht“ über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegen, d. h. zu denen es einen Punkt $(a', a'') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit

$$a' = \bar{a}', \quad a'' < \bar{a}''$$

gibt. Wir betrachten jetzt mit festem $\bar{a}'$ die Punkte $(\bar{a}', \bar{a}'') \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$, zu denen es *keinen* solchen Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ gibt; ist $(\bar{a}', m)$ derjenige unter ihnen mit der größten zweiten Komponente, so sind es genau die Punkte

$$(\bar{a}', 0),\ (\bar{a}', 1), \ldots, (\bar{a}', m). \tag{20}$$

Wieviele dieser Punkte liegen „waagerecht“ über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ und werden daher in $\sum\limits_{j,\mu} v_{j\mu}$ gezählt? Wegen $\alpha > 0$ gilt $(1, 0), (0, 1) \in \mathfrak{A}$ und folglich $\bar{a}' > 1$; $(\bar{a}', 0)$ liegt daher waagerecht über $(1, 0)$. Sei $\mathfrak{m} = (0, m)$, dann ist $A(\mathfrak{m}) \geqq \alpha N(\mathfrak{m}) = \alpha m$; daraus folgt, daß auch noch mindestens αm der von $(\bar{a}', 0)$ verschiedenen Punkte aus (20) waagerecht über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegen. Aus dieser Überlegung ergibt sich insgesamt

$$\sum_{i,\nu} u_{i\nu} + \sum_{j,\mu} v_{j\mu} \geqq \alpha \bar{A}(\mathfrak{n}).$$

Damit erhält man aus (19)

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \frac{\alpha\beta}{2}\bar{A}(\mathfrak{n}) = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right) A(\mathfrak{n}) + \frac{\alpha\beta}{2} N(\mathfrak{n}) \geqq \left(\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\beta\right) N(\mathfrak{n}),$$

also gilt wie behauptet

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\beta.$$

Wir weisen noch darauf hin, daß wir bei diesem Beweis von der Menge $\mathfrak{B}$ nur benutzt haben, daß ihre Dichte auf den positiven Halbachsen gleich β ist; man kann sich daher im Satz auf diese Voraussetzung beschränken. Die volle Voraussetzung über $\mathfrak{B}$ für eine derartige Abschätzung tatsächlich auszunutzen, wie es bei der vorhergehenden Basisabschätzung der Fall war, scheint schwierig zu sein, wäre aber von großem Interesse für diese Fragen.

Literatur.

[1] *L. Chatrowsky*, Sur le Théorème de Erdös-Raikov. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] **9**, 301—310 (1945).

[2] *L. Cheo*, On the density of sets of Gaussian integers. Amer. Math. Monthly **58**, 618—620 (1951).

[3] *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithm. **1**, 197—200 (1936).

[4] *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen (Zweite Mitteilung). Math. Zeitschr. **64**, 243—257 (1956).

[5] *M. Kneser*, Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Zeitschr. **58**, 459—484 (1953).

[6] *E. Landau*, Über einige neue Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. **35**, Cambridge (1937).

[7] *D. Raikov*, On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann. Mat. Sbornik **5** (= **47**), 425—440 (1939).

[8] *H. Rohrbach*, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Vereinig. **48**, 201—236 (1938).

Eingegangen 12. Dezember 1955.