Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 199

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1958

Inhaltsverzeichnis des Bandes 199

Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. II.

Von *Friedrich Kasch* in Heidelberg.

---

1. Es sollen hier eine Verschärfung von Satz 2 der im Titel genannten Note[1]) und zwei ergänzende Bemerkungen mitgeteilt werden. Der Beweis der Verschärfung wird ausführlich dargestellt, da der Beweis von Satz 2 in (I) durch Rechen- und Druckfehler entstellt ist. Die Verschärfung von Satz 2 besteht in folgender Aussage:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + c\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \tag{1}$$

wobei für c jeder Wert zulässig ist, der zu beliebigem $q > 1$ durch

$$c = c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1} q^r} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{(q-1)^k (r+1-k)\} \tag{2}$$

gegeben wird.

Da man für $r = 1$ bessere Abschätzungen hat, interessiert hier nur der Fall $r \geqq 2$, was im folgenden stets gelten soll. Ist dann bei festem r der Wert $q = q_m$ so, daß c in (2) maximal wird, so gilt $2 \leqq q_m \leqq 3$, wie anschließend gezeigt wird. Der genaue Wert von q_m soll nicht bestimmt werden. Bereits

$$c(3) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \cdot \frac{2r}{3^r}$$

ist größer als der in (I) angegebene Wert $c = \dfrac{1}{(3(r+1))^r}$; für $r \geqq 7$ gilt ferner $c(2) > c(3)$.

Entsprechend kann man den Faktor c an allen Stellen, wo er in (I) vorkommt[2]), durch einen durch (2) bestimmten Wert ersetzen.

Zum Beweis von (1) überlegen wir zunächst:

$$\begin{cases} c(2) \geqq c(q) \text{ für } 1 < q \leqq 2, \\ c(3) \geqq c(q) \text{ für } 3 \leqq q, \end{cases} \tag{3}$$

so daß wir uns im Beweis auf $2 \leqq q \leqq 3$ beschränken können. Das Minimum von $(q-1)^k(r+1-k)$ für $k = 1, \ldots, r$ wird für $1 < q \leqq 2$ bei $k = r$ und für $q \geqq 3$ bei $k = 1$ angenommen. Dann gilt also

$$c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^r \text{ für } 1 < q \leqq 2,$$
$$c(q) = \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \frac{(q-1)\,r}{q^r} \text{ für } 3 \leqq q,$$

woraus unmittelbar (3) folgt. Wir setzen jetzt (außer $r \geqq 2$) $2 \leqq q \leqq 3$ voraus.

---

[1]) Dieses Journal **197** (1957), 203—215, im folgenden mit (I) zitiert; wir übernehmen alle Definitionen, Bezeichnungen und Zitate aus (I).

[2]) Also insbesondere in (I 15), (I 16), (I 17).

Wie in (I) wird zunächst angenommen, daß mindestens eine der Komponenten von $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ größer oder gleich $q(r+1)$ sei. Die Indizierung sei so, daß

$$n_i + 1 > q(r+1) \text{ für } i = 1, \ldots, k \qquad (k \geqq 1),$$
$$n_i + 1 \leqq q(r+1) \text{ für } i = k+1, \ldots, r$$

gelte. Wir setzen

$$n_i' = \left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] \text{ für } i = 1, \ldots, k;$$
$$n_i' = 0 \qquad \text{für } i = k+1, \ldots, r;$$
$$\mathfrak{n}_i = (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i' - 1, n_{i+1}, \ldots, n_r) \text{ für } i = 1, \ldots, k;$$
$$\mathfrak{n}' = (n_1', \ldots, n_r').$$

Dann gibt es zu jedem Gitterpunkt $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}' \lneqq \mathfrak{m}$ mindestens ein i mit $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}_i$.

Die Anzahl der Gitterpunkte $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{n}' \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{n}$ bezeichnen wir mit $\bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n})$; dann gilt

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n}) &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - \sum_{i=1}^{k} \bar{A}(\mathfrak{n}_i) \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} N(\mathfrak{n}_i) \\ &= \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} \left\{(n_1+1)\cdots(n_{i-1}+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right](n_{i+1}+1)\cdots(n_r+1) - 1\right\} \\ &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n}). \end{aligned}$$

Aus $n_i + 1 > q(r+1)$ $(i = 1, \ldots, k)$ folgt

$$n_i + 1 \leqq \frac{q}{q-1}(r+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] \qquad (i = 1, \ldots, k);$$

unter Beachtung von $n_i + 1 \leqq q(r+1)$ $(i = k+1, \ldots, r)$ erhält man daher

$$N(\mathfrak{n}) = \prod_{i=1}^{r} (n_i + 1) - 1 \leqq \frac{1}{(q-1)^k} (q(r+1))^r \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{n_i+1}{r+1}\right].$$

Wegen

$$N(\mathfrak{n}') = \prod_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] + 1\right) - 1 \geqq \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right]$$

folgt

$$(5) \qquad \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r} N(\mathfrak{n}) \leqq N(\mathfrak{n}').$$

Für die Gitterpunkte $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{n}' \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{n}$ gilt $N(\mathfrak{a}) \geqq N(\mathfrak{n}')$; also erhält man aus (4) und (5)

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\mathfrak{a}) \geqq \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r} \left\{\bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n})\right\} N(\mathfrak{n}).$$

Damit folgt aus (I 8)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + c_1 \frac{\alpha}{\lambda}\left\{\frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - \frac{k}{r+1}(1-\alpha)\right\} \text{ mit } c_1 = \frac{(q-1)^k}{(q(r+1))^r}.$$

Wie in (I 13) erhält man nun

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha\left(1 + c_1 \frac{r+1-k}{r+1} \frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

so daß (1) für $k = 1, \ldots, r$ mit dem durch (2) gegebenen Faktor folgt.

Für den noch zu behandelnden Fall $n_i + 1 \leqq q(r+1)$ $(i = 1, \ldots, r)$ bemerken wir, daß es wegen

$$\frac{1}{r+1} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{(q-1)^k (r+1-k)\} \leqq \frac{1}{r+1} \operatorname*{Min}_{k=1,\ldots,r} \{q^k (r+1-k)\} \leqq 3$$

für $2 \leqq q \leqq 3$ genügt,

$$\gamma \geqq \alpha \left(1 + \frac{3}{(q(r+1))^r} \frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{6}$$

nachzuweisen. Für $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})$ bleibt der Schluß aus (I) richtig. Ist $A(\mathfrak{n}) < N(\mathfrak{n})$, so gilt (I 14); wegen $N(\mathfrak{n}) \leqq (q(r+1))^r$ und $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$ folgt daraus (6), womit auch jetzt unsere Behauptung erfüllt ist.

2. In (I) hatten wir die asymptotische Dichte durch

$$\alpha^* = \lim_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}$$

definiert. Dieser Dichtebegriff ist nicht translationsinvariant und dürfte daher ungeeignet für Überlegungen sein, die etwa darauf abzielen, eine zum asymptotischen Dichtesatz von M. Kneser [5] analoge Abschätzung zu gewinnen. Translationsinvariante Begriffe erhält man durch die folgenden

Definitionen: 1. $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mathfrak{A})$ sei die größte Zahl mit der Eigenschaft, daß es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Gitterpunkt $\mathfrak{n}_\varepsilon$ gibt mit $\frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \tilde{\alpha} - \varepsilon$ für alle $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$.

2. $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\mathfrak{B})$ sei die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Gitterpunkt $\mathfrak{n}_\varepsilon$ gibt mit

$$\frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) \leqq \tilde{\lambda} + \varepsilon$$

für alle $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$.

Die Begriffe α^* und λ^* erhält man aus diesen Definitionen, wenn man darin $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_\varepsilon$ durch $\mathfrak{n} \nless \mathfrak{n}_\varepsilon$ ersetzt.

Wir haben diese Definitionen hier angegeben, weil für die dadurch gegebenen Größen die Abschätzung

$$\tilde{\gamma} \geqq \tilde{\alpha} \left(1 + \frac{1}{(r+1)^{r+1}} \frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}}\right) \tag{7}$$

gilt, die besser als (1) ist. Der Beweis, der auf dem gleichen Ansatz wie der von (1) beruht, soll nicht ausgeführt werden.

3. In (I) wird darauf hingewiesen, daß man Basisabschätzungen der hier betrachteten Art auf beliebige Punktmengen im r-dimensionalen Raum übertragen kann, wenn man dafür die Begriffe Dichte, Basis usw. im Sinne von L. Chatrowsky [1] einführt. Es soll hier noch bemerkt werden, daß man für diese Begriffe eine zu (7) analoge Abschätzung beweisen kann.

Eingegangen 22. März 1957.