# MATHEMATICAL JOURNAL
OF
# OKAYAMA UNIVERSITY

EDITED BY

MIKAO MORIYA TAKESHI INAGAKI

MASARU OSIMA TOMINOSUKE ŌTSUKI

VOL. 6,

1956—1957



PUBLISHED BY THE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

OKAYAMA UNIVERSITY

OKAYAMA, JAPAN

# CONTENTS

# EINE BEMERKUNG ÜBER INNERE AUTOMORPHISMEN

FRIEDRICH KASCH

**1.** Kürzlich bewiesen T. Nagahara und H. Tominaga die folgenden Sätze.

**Satz 1**[1]**:** *Seien $D$ ein Schiefkörper, $L$ ein Unterschiefkörper von $D$ und $D/L$ galoissch mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$*[2]*. Besitzt jedes Element $a \in D$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte, dann folgt: Entweder ist der Zentralisator $V_D(L)$ von $L$ in $D$ gleich dem Zentrum von $D$ oder $V_D(L)$ ist ein endlicher Körper.*

**Satz 2**[3]**:** *Sei $R$ ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung und sei $R'$ ein einfacher, galoisscher Unterring von $R$, der das 1-Element von $R$ enthält. Gilt ferner, daß $V_R(R')$ ein einfacher Ring ist, jedes Element $a \in R$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte besitzt und jeder Unterring von $R$, der über $R'$ endlich erzeugbar ist, in einem über $R'$ endlichen und galoisschen Unterring von $R$ enthalten ist, dann folgt: Entweder ist $V_R(R')$ gleich dem Zentrum von $R$ oder $V_R(R')$ besitzt nur endlich viele Elemente.*

Diese Sätze sind enthalten in dem folgenden Satz, dessen Herleitung das Ziel dieser Note ist. Dabei ist der Beweis einfacher als der in [1] angegebene Beweis der Sätze 1 und 2. Allerdings finden sich die hier benutzten einfachen Schlüsse im wesentlichen schon in [1], wo sie nur durch die Berücksichtigung von überflüssigen Voraussetzungen zum Teil etwas verdeckt werden.

**Satz 3:** *Es seien $R$ ein beliebiger Ring mit 1-Element und $U$ ein einfacher Unterring von $R$ mit Minimalbedingung, der das 1-Element von $R$ enthält. Ist $U$ nicht im Zentrum von $R$ enthalten*

---

1) [1] Theorem; siehe auch [2] Theorem 1, (3).

2) $D/L$ heißt galoissch, falls $L$ Fixkörper einer Automorphismengruppe von $D$ ist; die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Automorphismen von $D/L$ heißt dann die Galoisgruppe von $D/L$.

3) [1] Remark 1.

*und besitzt $U$ unendlich viele Elemente, dann gibt es ein Element $a \in R$ mit der Eigenschaft, daß unendlich viele der Elemente $uau^{-1}$ untereinander verschieden sind, wenn $u$ alle invertierbaren Elemente aus $U$ durchläuft.*

**Bemerkung:** Aus Satz 3 erhält man unmittelbar Satz 1 bzw. Satz 2, wenn man $U = V_D(L)$ bzw. $U = V_R(R')$ setzt[1); die Existenz des in Satz 3 angegebenen Elementes $a$ steht dann Widerspruch zu der Voraussetzung, daß es nur endlich viele verschiedene Konjugierte eines jeden Elementes geben soll.

**2. Beweis.** Als einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung kann $U$ als Ring aller $n \times n$ Matrizen über einem Schiefkörper $D$ betrachtet werden. Da $U$ unendlich viele Elemente besitzt, gilt dies auch für $D$. Sei jetzt $n > 1$. Wie schon in [1] gezeigt, kann dann $a$ bereits in $U$ selbst gewählt werden: Bezeichnet man mit $e_{ij}$ die Matrixeinheiten, so hat $a = e_{22}$ die gewünschte Eigenschaft; wegen $(1+de_{12})(1-de_{12}) = 1$ mit beliebigem $d \in D$ gilt $(1+de_{12})e_{22}(1-de_{12}) = e_{22}+de_{12}$, womit für $n > 1$ die Behauptung bewiesen ist.

Wir setzen jetzt $n = 1$ voraus, d. h. $U$ sei ein Schiefkörper $K$ und zeigen sogleich den allgemeineren

**Satz 4:** *Seien $R$ ein beliebiger Ring mit 1-Element und $K$ ein in $R$ enthaltener Schiefkörper, der das 1-Element von $R$ enthält und unendlich viele Elemente besitzt; ist $a$ ein Element aus $R$, für das $K \subsetneqq V_R(a)$ gilt, dann gibt es unendlich viele verschiedene Elemente $kak^{-1}$ mit $k \in K$.*

**Bemerkung:** Ist $K$ ein Unterschiefkörper von $R$, der nicht im Zentrum von $R$ enthalten ist, dann gibt es selbstverständlich ein Element $a \in R$ mit $K \subsetneqq V_R(a)$. Mit Satz 4 ist also der Beweis von Satz 3 vollständig.

**Beweis von Satz 4:** Gilt für zwei beliebige in $R$ invertierbare Elemente $r$ und $s$: $rar^{-1} = sas^{-1}$, so folgt $s^{-1}r \in V_R(a)$, d. h. $r = sz$ mit $z \in V_R(a)$. Wir setzen $V_R(a) \cap K = Z$; wegen $K \subsetneqq V_R(a)$ gilt dann $Z \neq K$. Da mit einem invertierbaren Element $z \in V_R(a)$ auch $z^{-1} \in V_R(a)$ gilt, ist $Z$ ein Schiefkörper. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1) Für $U$ haben wir die Minimalbedingung vorausgesetzt; diese folgt für $V_R(R')$ aus der in Satz 2 gemachten Voraussetzung über $R$.

*1. Fall*: *$Z$ besitzt unendlich viele Elemente.*

Wegen $Z \subset K$, $Z \neq K$ gibt es zwei Elemente $h, k \in K$, die über $Z$ rechts linear unabhängig sind. Nimmt man an, daß die Elemente $h+kz_1$ und $h+kz_2$ mit $z_1$, $z_2 \in Z$ die gleichen Konjugierten von $a$ erzeugen, so folgt $h+kz_1=(h+kz_2)z$ mit $z \in Z$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $h$ und $k$ ist dies nur für $z=1$ und $z_1=z_2$ möglich. Also erzeugen die Elemente $h+kz$ für verschiedene $z \in Z$ verschiedene Konjugierte von $a$, also unendlich viele verschiedene.

*2. Fall*: *$Z$ besitzt nur endlich viele Elemente.*

Da $K$ unendlich viele Elemente enthält, muß jetzt der Rechtsrang von $K/Z$ unendlich sein. Nach der anfangs des Beweises gemachten Bemerkung die Elemente einer Rechtsbasis von $K/Z$ verschiedene Konjugierte von $a$, also auch jetzt unendlich viele verschiedene.

## LITERATUR


[1] T. NAGAHARA & H. TOMINAGA: A note on Galois theory of division rings of infinite degree. Proc. Jap. Ac. 31, (1955), 655—658.

[2] T. NAGAHARA & H. TOMINAGA: On Galois theory of division rings. Proc. Jap. Ac. 32, (1956) 153—156.



MATHEMATISCHES INSTITUT,
UNIVERSITÄT HEIDELBERG


(*Received January 15, 1957*)