Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 203

In 4 Heften

Mit einem Bild von A. L. Crelle

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1960

Inhaltsverzeichnis des Bandes 203

Diesem Band ist, anläßlich des 180. Geburtstages des Gründers des Journals für reine und angewandte Mathematik am 11. März 1960, ein Bild von A. L. Crelle beigegeben, das nach einem erst jetzt durch Frau I. Tieurich, Berlin, bekannt gewordenen Ölgemälde im Besitz des Bezirksheimatarchivs Berlin-Schöneberg hergestellt wurde. Vgl. den Beitrag von K.-R. Biermann in diesem Band.

Ein metrischer Beitrag über Mahlersche S-Zahlen. II.

Von *Friedrich Kasch* in Heidelberg.

1. In der vorhergehenden Arbeit mit dem gleichen Titel [4][1]) hat B. Volkmann unter Verwendung der in [2] gemeinsam entwickelten Schlußweise das folgende Resultat erhalten:

Für fast alle komplexen Zahlen ξ gilt:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 1 - \frac{1}{2n} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Darüber hinaus wurde in [1] und [3] gezeigt:

Für fast alle komplexen Zahlen ξ gilt

$$\vartheta_2(\xi) = \frac{1}{4}, \quad \vartheta_3(\xi) \leqq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Hier soll die rechte Seite von (1) zu

$$\vartheta_n(\xi) \leqq 1 - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

verschärft werden. Außerdem wird bewiesen, daß

$$\vartheta_4(\xi) \leqq \frac{5}{8} \tag{4}$$

für fast alle komplexen Zahlen ξ gilt.

2. Zum Beweis von (3) schließen wir zunächst wie in (I) bis zur Ungleichung[2])

$$1 \leqq \sqrt{|D(p)|} \leqq |a_0|^{n-1} \, |D(q)| \, C \left(\frac{\|p\|}{|a_0|} \right)^{n-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$|D(q)| \geqq C \frac{\sqrt{|D(p)|}}{\|p\|^{n-1}},$$

und damit erhält man an Stelle von (10) in (I):

$$|\xi - \alpha_1| < C \frac{\|p\|^{\frac{n-1}{2} - n\sigma}}{|a_0| \, |D(p)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Daraus folgt jetzt analog zur Schlußweise in (I):

$$\mu(\widetilde{S}_n(\sigma, u, r)) \leqq C \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H = H_0}^{\infty} \sum_{\substack{p(x) \in \mathfrak{P}_n(u,r) \\ \|p\| = H}} \frac{H^{n-1-2n\sigma}}{|a_0|^2 \sqrt{|D(p)|}}. \tag{5}$$

---

[1]) Im folgenden zitiert mit (I); aus (I) übernehmen wir alle Definitionen und Bezeichnungen.

[2]) Hier wie im folgenden bezeichne C eine positive reelle Zahl, die nicht von $\|p\|$ abhängt. Wir lassen zu, daß C an verschiedenen Stellen, wo es auftritt, verschiedene Werte besitzt.

Hieraus ergibt sich nach dem Vorbild von (I) die Behauptung (3), wenn die zweite rechts stehende Summe durch $CH^{2n-3-2n\sigma}$ nach oben abgeschätzt werden kann. Dazu zerlegen wir die Summe in $n+1$ Teilsummen mit der zusätzlichen Nebenbedingung $|a_0| = H$ bzw. $|a_1| = H, \ldots, |a_n| = H$, und es ist dann jede dieser Summen einzeln durch $CH^{2n-3-2n\sigma}$ abzuschätzen. Für die Summe mit $|a_0| = H$ ist das unmittelbar klar. Für die restlichen folgt die Behauptung sofort, wenn

$$\sum_{\substack{p(x)\in\mathfrak{P}_n(u,v)\\ \|p\| = H,\ a_0 \neq 0 \text{ fest}\\ |a_i| = H,\ a_i \text{ fest } (i>0)}} \frac{1}{\sqrt{|D(p)|}} \leqq CH^{n-2} \tag{6}$$

gezeigt werden kann. Dazu wird die Schlußweise aus [2] benutzt. Diese läßt sich allerdings nur anwenden, wenn feststeht, daß $D(p)$ in einem von a_0 und a_i verschiedenen Koeffizienten a_j ein Polynom mindestens 2. Grades ist. Dazu überlegen wir in Ergänzung von Hilfssatz 7 aus [2]:

Hilfssatz. *$D(p)$ ist als Polynom in a_n vom Grad $n-1$ und der Koeffizient von a_n^{n-1} ist bis auf das Vorzeichen gleich $n^n a_0^{n-1}$. $D(p)$ ist als Polynom in a_{n-1} vom Grad n und der Koeffizient von a_{n-1}^n ist bis auf das Vorzeichen gleich $(n-1)^{n-1} a_0^{n-2}$.*

Beweis: Bekanntlich gilt (Resultantendarstellung)

$$(-1)^{\binom{n}{2}} a_0 D(p) = \left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1} & a_n & & 0 \\
 & & \cdot & & & \cdot & & \\
 & & & \cdot & & & \cdot & \\
0 & & & & \cdot & & & \cdot \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1} & a_n \\
na_0 & (n-1)a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1} & & & & \\
 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1} & & & 0 \\
 & & \cdot & & & \cdot & & \\
 & & & \cdot & & & \cdot & \\
0 & & & & \cdot & & & \cdot \\
 & & & & na_0 & (n-1)a_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n-1}
\end{array}\right|
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow (n-1)\text{-te} \\ \text{Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Daraus liest man die erste Behauptung unmittelbar ab. Um die zweite einzusehen, subtrahiere man von der $(n-1+i)$-ten Zeile die i-te Zeile für $i = 1, \ldots, n-1$. Danach tritt a_{n-1} nur noch in den $n-1$ ersten und in der letzten Zeile auf. Der Wert der Determinante hat sich dabei nicht geändert, und man liest nun unmittelbar die zweite Behauptung ab.

Wir können nun den Beweis zu Ende führen. Zunächst kann $n \geqq 4$ angenommen werden, da für $n = 2$ und $n = 3$ die besseren Abschätzungen (2) gelten. Ferner folgt aus $p(x) \in \mathfrak{P}_n(u, v)$, daß $a_0 \neq 0$ ist. Dann läßt sich nach dem Hilfssatz stets ein a_j mit $j \neq 0$, $j \neq i$ so wählen, daß $D(p)$ als Polynom in a_j einen Grad > 2 besitzt. Seien nun in $D(p)$ alle a_k bis auf a_j fest gewählt. Summation über a_j liefert dann nach [2], Hilfssatz 6[3]) die Abschätzung

$$\sum_{\substack{a_j = -H\\ D(p) \neq 0}}^{H} \frac{1}{\sqrt{|D(p)|}} < C.$$

Da die von a_0, a_i, a_j verschiedenen $n-2$ Koeffizienten im Intervall $[-H, H]$ frei gewählt werden können, folgt (6).

---

[3]) *H.-E. Richert* verdanken wir einen sehr kurzen und einfachen Beweis von Hilfssatz 6, der auf der Hölderschen Ungleichung beruht.

3. Zum Beweis von (4) unterscheiden wir zwei Fälle, wobei wir auch jetzt die Bezeichnungen aus (I) zugrunde legen.

1. Fall. Nur eine Nullstelle α von $p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v)$ liegt in $Q^*(u, v)$. Dann gilt für $\xi \in Q(u, v)$ und die von α verschiedenen Nullstellen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ von $p(x)$

$$\frac{v}{2} < |\xi - \alpha_i|.$$

Damit folgt

$$|\xi - \alpha| \left(\frac{v}{2}\right)^3 < \frac{|P(\xi)|}{|a_0|} \leqq \|p\|^{-4\sigma},$$

also

$$(7) \qquad |\xi - \alpha| < C \|p\|^{-4\sigma}.$$

2. Fall. Zwei Nullstellen $\alpha = \alpha_1$ und α_2 von $p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v)$ liegen in $Q^*(u, v)$. Dann liefert die Schlußweise aus (I) (für $k = 2$, wobei keine β_i auftreten) die Abschätzung

$$\sqrt{|D(p)|} < C |a_0|^3 |D(q)|.$$

Daraus folgt

$$(8) \qquad |\xi - \alpha| < C \frac{|a_0|^{\frac{1}{2}} \|p\|^{-4\sigma}}{|D(p)|^{\frac{1}{4}}} \leqq C \frac{\|p\|^{\frac{1}{2} - 4\sigma}}{|D(p)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Man gelangt nun zu einer zu (5) analogen Abschätzung

$$\mu\big(\widetilde{S}_4(\sigma, u, v)\big) \leqq C \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H = H_0}^{\infty} \sum_{\substack{p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v) \\ \|p\| = H}} R(p),$$

wobei nach (7) und (8)

$$R(p) = \begin{cases} H^{-8\sigma} & \text{im 1. Fall} \\ \dfrac{H^{1-8\sigma}}{\sqrt{|D(p)|}} & \text{im 2. Fall} \end{cases}$$

zu setzen ist. Dann folgt unter Berücksichtigung von (6)

$$\sum_{\substack{p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v) \\ \|p\| = H}} R(p) \leqq \sum_{\substack{p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v) \\ \|p\| = H}} H^{-8\sigma} + \sum_{\substack{p(x) \in \mathfrak{P}_4(u, v) \\ \|p\| = H}} \frac{H^{1-8\sigma}}{\sqrt{|D(p)|}} \leqq C H^{4-8\sigma} + C H^{4-8\sigma} \leqq C H^{4-8\sigma}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung (4) analog zum allgemeinen Fall.

Literatur.

[1] *F. Kasch*, Über eine metrische Eigenschaft der *S*-Zahlen. Math. Z. **70**, 263—270 (1958).
[2] *F. Kasch* und *B. Volkmann*, Zur Mahlerschen Vermutung über *S*-Zahlen. Math. Ann. **136**, 442—453 (1958).
[3] *B. Volkmann*, Zum kubischen Fall der Mahlerschen Vermutung. Math. Ann. **139**, (1959), 87—90.
[4] *B. Volkmann*, Ein metrischer Beitrag über Mahlersche *S*-Zahlen. I. Journ. f. d. r. u. angew. Math. **203** (1959), 154—156.

Eingegangen 28. Juli 1959.