ARCHIVES OF MATHEMATICS

ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Begründet von W. Süss

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach

von R. BAER · H. KNESER

Beirat: G. Bol, E. Bompiani, J. Dieudonné, Ch. Ehresmann, W. Feller, H. Görtler, H. Hadwiger, H. Hopf, H. König, S. MacLane, W. Magnus, T. Nagell, Chr. Pauc, G. Pickert, D. Puppe, K. Reidemeister, P. Roquette, H. Salzmann, J. A. Schouten, H. Seifert, E. Sperner, E. Stiefel, P. Turán, K. Zeller

Schriftleitung: E. Lamprecht

VOL. 12 · 1961

BIRKHÄUSER VERLAG

BASEL UND STUTTGART

Universitäts-
Bibliothek
München

Inhalt - Contents - Sommaire

Baer, R.: Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe . . . 81
Banaschewski, B.: On the Components of Ideals in Commutative Rings . . . 22
Banaschewski, B.: Über Hausdorffsch-minimale Erweiterung von Räumen . . . 355
Bauer, F.-W.: Axiomatische Charakterisierung der singulären Homologietheorie . . 450
Bauer, H.: Supermartingale und Choquet-Rand . . . 210
Baumslag, G.: A Remark on Hyperabelian Groups . . . 321
Baumslag, G.: A Generalisation of a Theorem of Mal'cev . . . 405
Behrens, E.-A.: Über die Erweiterung des Idealverbandes einer Algebra bei Adjunktion eines Einselementes . . . 413
Bierlein, D.: Eine Bemerkung zur diskreten gemischten Erweiterung eines unendlichen Spieles . . . 224
Blair, R. L.: On a Theorem of Isbell Concerning Extremally Disconnected P-Spaces . 343
Böhm, W.: Die Konstruktion der Minimalfläche von Enneper . . . 238
Brainerd, B.: On a class of Φ-algebras with zero dimensional structure spaces . . . 290
Brenner, J. L.: Characteristic Polynomials of Special Matrices . . . 298
Bruns, G.: Distributivität und subdirekte Zerlegbarkeit vollständiger Verbände . . 61
Carlitz, L.: Some Arithmetic Sums Connected with the Greatest Integer Function . . 34
Carlitz, L.: Some Integrals Containing Products of Legendre Polynomials . . . 334
Degen, W. und Muny, H.: Über regelmäßige Sternfiguren mit extremalem Umfang und Inhalt . . . 390
Eberl, W.: Verbandstheoretische Verallgemeinerung der Poincaréschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 227
Effertz, F. H. und Meuffels, W.: Über das Koeffizientenproblem der rationalen Funktionen mit positivem Realteil . . . 51
Faith, C.: Rings with Minimum Condition on Principal Ideals II . . . 179
Faith, C.: On a Theorem of Tsen . . . 330
Fell, J. M. G. und Thoma, E.: Einige Bemerkungen über vollsymmetrische Banachsche Algebren . . . 69
Flachsmeyer, J.: Bemerkungen über die Banach-Algebra der stetigen, beschränkten Funktionen eines vollständig regulären Raumes . . . 366
Gillman, L.: A Note on F-Spaces . . . 67
Glock, E.: Ordnungsfunktionen, die auf Seiteneinteilungen besonderer Art führen . 71
Gorenflo, R.: Über die Zentralindices der Ableitungen einer ganzen transzendenten Funktion . . . 113
Gorenflo, R.: Über die singulären Stellen der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen . . . 188
Greendlinger, M.: An Analogue of a Theorem of Magnus . . . 94
Groemer, H.: Eine Bemerkung über Lagerungen konvexer Kegel . . . 78
Groemer, H.: Eine Ungleichung für die Dichte von Lagerungen konvexer Körper . . 477
Grün, O.: Beiträge zur Gruppentheorie VIII: Beziehungen zwischen isomorphen Untergruppen einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . 401

HABETHA, K.: Eine Bemerkung zur Werteverteilung meromorpher Funktionen in der Halbebene 43
HART, R.: A Note on Algebras of Nilpotent Matrices 324
HAUSNER, A.: On the Quadratic Reciprocity Theorem 182
HEINEKEN, H.: Über ein Levisches Nilpotenzkriterium 176
HEINRICH, H.: Ein Beitrag zur Lokalisierung von n-Tupeln von Elementen im euklidischen Raum, insbesondere in der komplexen Zahlenebene 193
HOFMANN, K. H. and WRIGHT, F. B.: The Automorphism Group of Certain Function Rings 420
HUPPERT, B.: Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen 161
JAENICKE, J.: Eine Beziehung zwischen Lösungen adjungierter Randwertprobleme bei elliptischen Differentialgleichungssystemen 118
JANKO, Z.: Verallgemeinerung eines Satzes von B. Huppert und J. G. Thompson . . 280
JOHNSON, D. G. and KIST, J. E.: Complemented Ideals and Extremally Disconnected Spaces 349
KASCH, F.: Ein Satz über Frobeniuserweiterungen 102
KEGEL, O. H.: Produkte nilpotenter Gruppen 90
KEGEL, O. H.: Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen 170
KEGEL, O. H.: Aufzählung der Partitionen endlicher Gruppen mit trivialer Fittingscher Untergruppe 409
KEGEL, O. H. und WALL, G. E.: Zur Struktur endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Partition 255
KELLERER, H. G.: Zur Konvexität des Wertebereichs normaler Maße 301
KIST, J. E., siehe JOHNSON, D. G. 349
KOHLS, C. W.: Hereditary Properties of some Special Spaces 129
KRULL, W.: Über die p-Untergruppen endlicher Gruppen 1
KULTZE, R.: Über das cap- und slant-Produkt spektraler Sequenzen I 445
LENHARD, H.-Ch.: Verallgemeinerung und Verschärfung der Erdös-Mordellschen Ungleichung für Polygone 311
LENZ, H.: Zur Axiomatik der absoluten Geometrie der Ebene 370
LINGENBERG, R.: Konstruktion der metrischen Form in der absoluten Geometrie . . 470
LIPSCHUTZ, S.: On a Finite Matrix Representation of the Braid Group 7
LIU, TENG-SUN and WANG, JU-KWEI: On the Lattice of Normal Functions on a Totally Disconnected Compact Space 202
LOONSTRA, F.: Das System aller Erweiterungen einer Gruppe 262
LÜNEBURG, H.: Zentrale Automorphismen von λ-Räumen 134
LÜNEBURG, H.: Über die kleine Reidemeisterbedingung 382
MEUFFELS, W., siehe EFFERTZ, F. H. 51
MÜLLER, P. H.: Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = o$ 307
MÜNZNER, H.-F.: Einfache Anwendungen der Poincaréschen Indexmethode 385
MUNY, H., siehe DEGEN, W. 390
MURTHY, M. P.: A Note on the 'Primbasissatz' 425
NASTOLD, H.-J.: Zum Primbasissatz in regulären lokalen Ringen 30
NASTOLD, H.-J.: Über die Assoziativformel und die Lechsche Formel in der Multiplizitätstheorie 105
NEUGEBAUER, C. J.: A Class of Functions Determined by Dense Sets 206
OSTROM, T. G.: Planar Half-Loops 151
OSTROM, T. G.: Homomorphisms of Finite Planar Half-Loops 462

PHILIPP, W.: Ein metrischer Satz über die Gleichverteilung mod 1 429
POMMERENKE, CHR.: Zwei Bemerkungen zur Kapazität ebener Kontinuen 122
POSNER, E. C.: Primitive Matrix Rings 97
RIEGER, G. J.: Das große Sieb von Linnik für algebraische Zahlen 184
RINGEL, G.: Über eine Klasseneinteilung der zweiecklosen Graphen 231
SCHEJA, G.: Eine Anwendung Riemannscher Hebbarkeitssätze für analytische Cohomologieklassen 341
STRÖHER, W.: Über Böschungslinien, deren Hauptnormalen eine feste Gerade treffen . 315
SUZUKI, M.: On a Finite Group with a Partition 241
SZÁSZ, F.: Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe 282
THOMA, E., siehe FELL, J. M. G. 69
THOMAS, E.: On Functional Cup-Products and the Transgression Operator 435
WALL, G. E., siehe KEGEL, O. H. 255
WANG, JU-KWEI, siehe LIU, TENG-SUN 202
WILKER, P.: Charakteristisches Polynom, Determinante und Spur als Abbildungsfunktionen 13
WITTE, P. DE: Bemerkungen zu einer Axiomatisierung der Euklidischen Planimetrie . 159
WRIGHT, F. B., siehe HOFMANN, K. H. 420
YAQUB, J. C. D. S.: On Projective Planes of Class III 146
YAQUB, J. C. D. S.: The Existence of Projective Planes of Class I 3 374

Ein Satz über Frobeniuserweiterungen

Von

FRIEDRICH KASCH

1. In einer früheren Arbeit [1] habe ich den Begriff der Frobeniuserweiterung eingeführt und u. a. den besonders im Hinblick auf die Galoissche Theorie der Ringe interessierenden folgenden Satz bewiesen: Unter gewissen Voraussetzungen über den Ring S ist eine freie Ringerweiterung R/S dann und nur dann Frobeniuserweiterung, wenn der Ring aller Endomorphismen von R als S-Rechtsmodul Frobeniuserweiterung des Ringes R^l der Linksmultiplikatoren von R ist. Kürzlich konnten T. NAKAYAMA und T. TSUZUKU [2] beweisen, daß die dabei von mir über S gemachten Voraussetzungen überflüssig sind. In dieser Note möchte ich zeigen, daß man einen besonders übersichtlichen und kurzen Beweis dieses Satzes in der in [2] angegebenen allgemeinen Fassung führen kann, wenn man sich von meinem ursprünglichen Beweis in [1] völlig frei macht und nicht, wie das auch noch in [2] geschieht, duale Basen benutzt.

2. Wir stellen im Anschluß an [2] einige Voraussetzungen zusammen. Es sei R ein Ring mit 1-Element und S ein Unterring mit dem gleichen 1-Element. Betrachtet man R als S-Rechtsmodul, dann ist $H_r = \mathrm{Hom}_S(R_S, R_S)$ ein Ring, der den Ring R^l der Linksmultiplikatoren von R als Unterring enthält. Wegen $R^l \cong R$ wollen wir für R^l wieder R schreiben, was hier nicht zu Irrtümern führen kann. In H_r ist der Modul $F_r = \mathrm{Hom}_S(R_S, S_S)$ enthalten. Schreibt man die Anwendung von $h \in H_r$ auf $x \in R$ als $h(x)$, dann ist H_r ein R-R-Modul und F_r ein S-R-Modul. Analog seien $H_l = \mathrm{Hom}_S({}_SR, {}_SR)$, $F_l = \mathrm{Hom}_S({}_SR, {}_SS)$ erklärt. Die Anwendung von $h \in H_l$ auf $x \in R$ schreiben wir in der Form $(x)h$; dann ist F_l ein R-S-Modul.

Die beiden folgenden Bedingungen $(\mathfrak{F}_r)$ und $(\mathfrak{H}_l)$ sind äquivalent und definieren R/S als Frobeniuserweiterung:

$(\mathfrak{F}_r)$ a) R besitzt eine endliche Rechtsbasis (= freies Erzeugendensystem) über S;
b) es gibt einen Isomorphismus φ der S-R-Moduln F_r und R.

$(\mathfrak{H}_l)$ a) R besitzt eine endliche Linksbasis über S;
b) es gibt einen S-S-Homomorphismus ψ von R in S mit den folgenden Eigenschaften:
1) Zu jedem $f \in F_l$ gibt es ein $r \in R$ mit $f = r\psi$, d. h. $F_l = R\psi$ (bei dieser Schreibweise wird ψ als Element aus F_l betrachtet);
2) aus $(Rr)\psi = 0$ folgt $r = 0$ für $r \in R$.

Damit äquivalent sind auch zu $(\mathfrak{F}_r)$ und $(\mathfrak{H}_l)$ analoge Bedingungen $(\mathfrak{F}_l)$ und $(\mathfrak{H}_r)$, die wir hier jedoch nicht brauchen.

Den Isomorphismus φ in $(\mathfrak{J}_r)$ nennen wir einen rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus und den Homomorphismus ψ in $(\mathfrak{H}_l)$ einen linksseitigen Frobeniushomomorphismus.

3. Sei jetzt $w_1, \ldots, w_n$ eine Rechtsbasis von R/S, dann stellen die durch

$$d_i(w_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

definierten Abbildungen $d_1, \ldots, d_n \in H_r$ eine Linksbasis von H_r über R und ebenso eine Linksbasis von F_r über S dar. Zur Vorbereitung des Satzes beweisen wir die folgenden Eigenschaften von H_r und F_r:

(1) *Für jedes $f \in F_r$ gilt: $H_r f = R f$.*

(2) *Zu beliebigen Elementen $f_1, \ldots, f_n \in F_r$ gibt es ein $h \in H_r$ mit $d_i h = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Beweis.

(1): Wegen $f \in F_r$ gilt $f(x) \in S$ für jedes $x \in R$; daraus folgt für beliebiges $h \in H_r$: $hf(x) = h(1f(x)) = h(1)f(x)$, also $hf = h(1)f$.

(2): Das Element $r_i \in R$ habe die Basisdarstellung $r_i = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{ji}$, dann folgt aus der Definition der d_i unmittelbar

$$d_j \sum_{i=1}^{n} r_i d_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} d_i;$$

da man die $s_{ji} \in S$ beliebig vorgeben kann, folgt die Behauptung.

Nun sind wir in der Lage, den fraglichen Satz sehr einfach zu beweisen.

Satz. *Ist R ein Ring mit 1-Element, S ein Unterring mit dem gleichen 1-Element und besitzt R/S eine endliche Rechtsbasis, so gilt: Dann und nur dann ist R/S Frobeniuserweiterung, wenn* $\mathrm{Hom}_S(R_S, R_S)/R$ *Frobeniuserweiterung ist.*

Zum Beweis des ersten Teils zeigen wir, daß man den rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus φ von F_r und R zu einem linksseitigen Frobeniushomomorphismus ψ von H_r auf R fortsetzen kann. Definiert man ψ durch

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i d_i\right)\psi = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(d_i) \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i d_i \in H_r,$$

dann ist ψ offenbar ein zweiseitiger R-Homomorphismus von H_r auf R. Dafür haben wir die in $(\mathfrak{H}_l)$ angegebenen Eigenschaften zu beweisen, wobei jetzt H_r bzw. R an Stelle von R bzw. S zu treten hat. Ein R-Linkshomomorphismus von H_r in R ist eindeutig durch die Bilder der Linksbasis $d_1, \ldots, d_n$ bestimmt. Wegen (2) gibt es zu vorgegebenen $f_1, \ldots, f_n \in F_r$ ein $h \in H_r$ mit $d_i h = f_i$. Daher gilt $(d_i h)\psi = (f_i)\psi = \varphi(f_i)$; da φ ein Isomorphismus von F_r und R ist, folgt die erste Eigenschaft eines Frobeniushomomorphismus. Sei jetzt $h \in H_r$, $h \neq 0$, dann gibt es ein $x \in R$ mit $h(x) \neq 0$, und folglich existiert ein d_i mit $d_i h = 0$. Wegen $d_i h \in F_r$ und da φ ein Isomorphismus ist, folgt $(d_i h)\psi = \varphi(d_i h) \neq 0$, womit auch die zweite Eigenschaft eines Frobeniushomomorphismus bewiesen ist.

Zum Beweis des zweiten Teils des Satzes zeigen wir umgekehrt, daß der nach Voraussetzung vorhandene linksseitige Frobeniushomomorphismus ψ von H_r auf R eingeschränkt auf F_r einen rechtsseitigen Frobeniusisomorphismus von F_r und R liefert. Für diese Einschränkung schreiben wir φ, so daß also $\varphi(f) = (f)\psi$ für $f \in F_r$ gilt. Da ψ ein zweiseitiger R-Homomorphismus ist, ist zunächst φ ein S-R-Homomorphismus von F_r in R.

Behauptung: φ ist ein Monomorphismus. Für $f \in F_r$ folgt aus $\varphi(f) = (f)\psi = 0$ zunächst $(Rf)\psi = 0$ und wegen (1) sogar $(H_r f)\psi = 0$, also nach Voraussetzung $f = 0$.

Behauptung: φ ist ein Epimorphismus. Für beliebiges $r \in R$ wird durch

$$(d_1)\,\sigma = r\,, \qquad (d_i)\,\sigma = 0 \quad \text{für} \quad i > 1$$

ein R-Linkshomomorphismus σ von H_r in R definiert. Dazu gibt es nach Voraussetzung ein $h \in H_r$ mit $\sigma = h\psi$. Dann folgt $\varphi(d_1 h) = (d_1 h)\psi = r$, d. h. φ ist ein Epimorphismus. Damit ist der Beweis beendet.

Wir weisen noch darauf hin, daß wir beim zweiten Teil von der Voraussetzung, daß eine Rechtsbasis von R/S existiert, nur in der Form Gebrauch gemacht haben, daß eines der Basiselemente von H_r über R bereits in F_r liegt. Für den Nachweis, daß die Einschränkung von ψ ein Monomorphismus ist, haben wir sie nicht benutzt. Es erhebt sich die Frage, ob diese Voraussetzung überhaupt zu vermeiden ist.

Literaturverzeichnis

[1] F. KASCH, Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Math. Ann. **127**, 453—474 (1954).

[2] T. NAKAYAMA and T. TSUZUKU, A remark on Frobenius extensions and endomorphism rings. Nagoya Math. J. **15**, 9—16 (1959).

Eingegangen am 15. 10. 1960

Anschrift des Autors:
Friedrich Kasch
Mathematisches Institut der Universität
Heidelberg, Tiergartenstraße