MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

77. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Inhalt des 77. Bandes

KASCH, F.
Math. Zeitschr. 77, 219—227 (1961)

Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
FRIEDRICH KASCH

1. Einleitung

Für die Kohomologietheorie der endlichen Gruppen ist bekanntlich die Tatsache von Bedeutung, daß eine Isomorphie zwischen der k-ten Homologie- und der $-(k+1)$-ten Kohomologiegruppe der gegebenen Gruppe G mit Koeffizienten in einem beliebigen G-Modul C besteht:

$$(1) \qquad H_k(G, C) \cong H^{-k-1}(G, C) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dieser Zusammenhang soll hier für eine beliebige Frobenius-Erweiterung Γ/Λ an Stelle des Gruppenrings untersucht werden.

Ein Ansatz in dieser Richtung liegt bereits durch T. NAKAYAMA [3, 4] vor, doch erfolgt dort (anderen Zielsetzungen entsprechend) eine Beschränkung auf die Homologie- und Kohomologiegruppen einer Frobenius-Algebra Γ/K; d.h. es wird Γ/K zentral vorausgesetzt und der aufzulösende Modul ist Γ selbst als zweiseitiger Γ-Modul.

Diese Beschränkungen werden hier fallen gelassen. Wir gehen von einer beliebigen Frobenius-Erweiterung Γ/Λ aus und zeigen zunächst, daß auch jetzt — wie bei einer Frobenius-Algebra — ein Nakayama-Automorphismus existiert; allerdings ist dies jetzt ein Automorphismus des Zentralisators P von Λ in Γ. Sei nun Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung, so daß eine Spurbildung (in der Kohomologie der Gruppen Norm genannt) existiert[1]), und sei A ein Γ-Linksmodul. Für $f \in \operatorname{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda A)$ ist dann $\operatorname{Spur} f \in \operatorname{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma \Gamma)$ und für $\varrho \in \mathsf{P}$ gilt

$$(2) \qquad \operatorname{Spur}(f\varrho)(x) = \operatorname{Spur} f(x)\,\varrho', \qquad x \in A,$$

wobei ϱ' das Bild von ϱ bei dem Nakayama-Automorphismus ist. Seien C ein Γ-Linksmodul und C^0 ein daraus mittels des Nakayama-Automorphismus gebildeter P-Linksmodul, dann folgt aus (2), daß die Abbildung

$$\operatorname{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda A) \underset{\mathsf{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \operatorname{Spur} f(x)\, c \in C) \in \operatorname{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C)$$

einen Homomorphismus liefert. Dieser Homomorphismus führt zu Aussagen, die als Spezialfall wieder (1) enthalten.

---

[1]) Siehe Zusatz bei der Korrektur am Ende der Arbeit.

2. Der Nakayama-Automorphismus einer Frobenius-Erweiterung

Wir wollen zuerst einige Bezeichnungen festsetzen. Sind Γ und Λ Ringe, so sei ${}_\Gamma A_\Lambda$ ein Γ-Λ-Modul. Hat man ferner einen Modul B_Λ, dann sei $\operatorname{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ der Modul der Λ-Homomorphismen von A in B (der sonst meist mit $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, B)$ bezeichnet wird). Gilt außerdem ${}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\operatorname{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ durch die Festsetzung

$$(\lambda f \gamma)(x) = \lambda f(\gamma x), \qquad (\lambda \in \Lambda,\ f \in \operatorname{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda),\ \gamma \in \Gamma,\ x \in A)$$

zu einem Λ-Γ-Modul, d.h. es ist ${}_\Lambda\operatorname{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)_\Gamma$. Hat man Modulen ${}_\Lambda A_\Gamma, {}_\Lambda B_\Lambda$, dann wird $\operatorname{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$ durch die Festsetzung

$$(\gamma f \lambda)(x) = f(x\gamma)\lambda$$

zu einem Γ-Λ-Modul, d.h. es ist ${}_\Gamma\operatorname{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)_\Lambda$. Sind die Modulen ${}_\Gamma A_\Lambda$ und ${}_\Gamma C_\Lambda$ Γ-Λ-isomorph, dann wird ${}_\Gamma A_\Lambda \cong {}_\Gamma C_\Lambda$ geschrieben. Analog sei die Bezeichnungsweise in anderen Fällen.

Wir kommen nun zur Definition einer Frobenius-Erweiterung Γ/Λ. Dies ist (nach [5] und [6][2]) eine unitäre Ringerweiterung mit folgenden Eigenschaften:

(r 1) $\qquad {}_\Lambda\Gamma_\Gamma \cong {}_\Lambda\operatorname{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)_\Gamma;$

(r 2) $\qquad \Gamma_\Lambda$ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ist außerdem Γ_Λ frei, dann heißt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung.

Diese rechtsseitigen Bedingungen sind äquivalent mit analogen linksseitigen Bedingungen:

(l 1) $\qquad {}_\Gamma\Gamma_\Lambda \cong {}_\Gamma\operatorname{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)_\Lambda;$

(l 2) $\qquad {}_\Lambda\Gamma$ ist endlich erzeugt und projektiv.

Ferner ist eine rechtsseitig freie Frobenius-Erweiterung auch linksseitig frei und umgekehrt.

Sei jetzt h das Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (r 1); wir nennen h einen Frobenius-Homomorphismus. Damit erhält man (r 1) explizit in der Form

$$\Gamma \ni \gamma \to h\gamma \in h\Gamma = \operatorname{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda). \tag{3}$$

Da (r 1) insbesondere Λ-linkszulässig ist, folgt $h \in \operatorname{Hom}({}_\Lambda\Gamma_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$. Es ist ferner klar, daß h durch (r 1) nur bis auf Multiplikation von rechts mit einem invertierbaren Element aus dem Zentralisator P von Λ in Γ eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun feststellen, daß dieses h auch als Bild von $1 \in \Gamma$ bei dem Isomorphismus (l 1) auftritt, so daß (l 1) mit dem gleichen h durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \gamma h \in \Gamma h = \operatorname{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda) \tag{4}$$

[2]) Diese Arbeiten stimmen in wesentlichen Teilen nahezu überein. Bei Veröffentlichung meiner Arbeit [6] war mir die kurz zuvor erschienene Arbeit [5] leider nicht bekannt. Der Begriff der Frobenius-Erweiterung ist in [5] etwas allgemeiner als in [6] gefaßt. Hier wird die Definition aus [6] zugrunde gelegt, doch lassen sich die folgenden Überlegungen auch für die allgemeinere Definition durchführen.

gegeben wird. Diese Behauptung wird bei dem Äquivalenzbeweis von (r 1), (r 2) und (l 1), (l 2) folgendermaßen mitgeliefert: Wegen (r 2) besteht die Isomorphie

(5) $$_\Gamma\Gamma_\Lambda \cong {_\Gamma}\mathrm{Hom}\,({_\Lambda}\mathrm{Hom}\,(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {_\Lambda}\Lambda)_\Lambda,$$

die explizit durch

$$\Gamma \ni \gamma \to \big(\mathrm{Hom}\,(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda) \ni f \to f(\gamma) \in \Lambda\big) \in \mathrm{Hom}\,({_\Lambda}\mathrm{Hom}\,(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {_\Lambda}\Lambda)$$

gegeben wird. Setzt man (r 1) auf der rechten Seite von (5) ein, so folgt (l 1). Berücksichtigt man dabei (3), so ergibt sich insbesondere für $1 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \Gamma \ni 1 &\to \big(\mathrm{Hom}\,(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda) \ni f \to f(1) \in \Lambda\big) \\ &= \big(h\,\Gamma \ni h\,\gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\big) \\ &\to \big(\Gamma \ni \gamma \to h(\gamma) \in \Lambda\big) = h \in \mathrm{Hom}\,({_\Lambda}\Gamma, {_\Lambda}\Lambda). \end{aligned}$$

Damit ist (4) bewiesen.

Um den Nakayama-Automorphismus zu definieren, haben wir $\mathrm{Hom}\,({_\Lambda}\Gamma_\Lambda, {_\Lambda}\Lambda_\Lambda)$ zu betrachten. Wegen (3) und (4) gilt offenbar

(6) $$h\,\mathsf{P} = \mathsf{P}\,h = \mathrm{Hom}\,({_\Lambda}\Gamma_\Lambda, {_\Lambda}\Lambda_\Lambda); \qquad h\,\mathsf{P}_\mathsf{P} \cong \mathsf{P}_\mathsf{P}, \qquad {_\mathsf{P}}\mathsf{P}\,h \cong {_\mathsf{P}}\mathsf{P}.$$

Folglich gibt es zu jedem $\varrho \in \mathsf{P}$ bzw. $\varrho' \in \mathsf{P}$ ein eindeutig bestimmtes ϱ' bzw. ϱ so, daß $h\varrho = \varrho' h$ gilt. Man stellt nun sofort fest, daß die Zuordnung

$$\mathsf{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathsf{P}$$

ein Automorphismus von P ist, der, wie bisher in der Literatur bei Frobenius-Algebren, wo $\mathsf{P} = \Gamma$ ist, als Nakayama-Automorphismus bezeichnet werden soll. Da h bis auf Multiplikation mit invertierbaren Elementen aus P eindeutig bestimmt ist, ist der Nakayama-Automorphismus von P durch Γ/Λ bis auf innere Automorphismen von P eindeutig bestimmt.

Ist der Nalayama-Automorphismus von P bereits selbst ein innerer Automorphismus, dann soll die Frobenius-Erweiterung Γ/Λ symmetrisch heißen. In diesem Falle kann man h so wählen, daß der Nakayama-Automorphismus zum identischen Automorphismus wird.

Sei jetzt Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung. Dann gibt es zu dem Frobenius-Homomorphismus h duale Basen von Γ/Λ, d.h. es existieren eine Linksbasis $l_1, \ldots, l_n$ und eine Rechtsbasis $r_1, \ldots, r_n$ von Γ/Λ mit $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$. Das bedeutet, daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ aus

(7) $$l_i\gamma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n$$

die Gleichungen

(8) $$\gamma\, r_j = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n$$

folgen und umgekehrt.

Sei nun $\varrho \in \mathsf{P}$ und ϱ' das Bild von ϱ bei dem zu h gehörenden Nakayama-Automorphismus. Dann ergibt sich aus

$$h(\varrho\, l_i\, r_j) = h(l_i\, r_j\, \varrho'),$$

daß aus

$$\varrho\, l_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\, l_j, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

die Gleichungen

$$r_j\, \varrho' = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{10}$$

folgen und umgekehrt. Diese Tatsache soll nun benutzt werden, um eine Aussage über die Spur eines Λ-Homomorphismus zu machen.

3. Eigenschaften der Spur

Für einen Modul ${}_\Gamma A$ sei $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda \Lambda)$; die durch

$$A \ni x \to \sum_{i=1}^{n} r_i\, f(l_i\, x) \in \Gamma$$

gegebene Abbildung wird Spur f genannt. Wegen (7) und (8) gilt

$$\mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma \Gamma). \tag{11}$$

Ist $A = {}_\Gamma A_\Lambda$ und $f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda)$, dann folgt Spur $f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$. Aus (9) und (10) ergibt sich für beliebiges $\varrho \in \mathrm{P}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{Spur}(f\varrho)\,(x) &= \sum_{i=1}^{n} r_i\, f(\varrho\, l_i\, x) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varrho'\, f(l_i\, x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i\, f(l_i\, x)\, \varrho' = \mathrm{Spur}\, f(x)\, \varrho'. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

HILFSSATZ 1. *Die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda \Gamma_\Lambda, {}_\Lambda \Lambda_\Lambda) = h\,\mathrm{P} \ni h\,\varrho \to \mathrm{Spur}(h\,\varrho) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Wegen $h(l_i r_j) = \delta_{ij}$ gilt

$$\mathrm{Spur}\, h(r_j) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, h(l_i\, r_j) = r_j,$$

woraus

$$\mathrm{Spur}\, h = 1_\Gamma \quad (= \text{identische Abbildung von } \Gamma) \tag{13}$$

folgt. Aus (12) und (13) ergibt sich dann

$$\mathrm{Spur}(h\,\varrho)\,(x) = x\,\varrho',$$

d.h. Spur$(h\varrho)$ ist die Rechtsmultiplikation von Γ mit $\varrho' \in \mathrm{P}$. Da die Rechtsmultiplikationen mit Elementen aus P genau alle Elemente aus $\mathrm{Hom}({}_\Gamma \Gamma_\Lambda, {}_\Gamma \Gamma_\Lambda)$ liefern, ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Gegeben sei jetzt ein Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ mit

$$A = \bigoplus_{j=1}^{m} \Gamma\, x_j, \qquad {}_\Gamma \Gamma\, x_{j\Lambda} \cong {}_\Gamma \Gamma_\Lambda, \qquad \lambda\, x_j = x_j\, \lambda \quad (\lambda \in \Lambda;\ j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

Wir schreiben zur Abkürzung $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ und bezeichnen mit h_i die durch

$$h_i\Big(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j x_j\Big) = h(\gamma_i) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

definierte Abbildung aus A^*.

Hilfssatz 2. *Es gilt*

$$A^* = \bigoplus_{j=1}^{m} h_j \mathrm{P}, \qquad h_j \mathrm{P}_\mathrm{P} \cong \mathrm{P}_\mathrm{P} \tag{16}$$

und die Zuordnung

$$A^* \ni f \to \mathrm{Spur}\, f \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A_\Lambda, {}_\Gamma\Gamma_\Lambda) \tag{17}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Folgt wegen (14) sofort aus (6) und Hilfssatz 1.

4. Dualitätseigenschaften

Zu dem beliebigen Modul ${}_\mathrm{P}C$ definieren wir mit Hilfe des Nakayama-Automorphismus $\mathrm{P} \ni \varrho \to \varrho' \in \mathrm{P}$ einen neuen Modul C^0. Sei C^0 eine zu C isomorphe additive Gruppe mit dem Isomorphismus

$$C^0 \ni c^0 \to c \in C.$$

Die Multiplikation $\circ$ mit Elementen aus P wird nun durch

$$\varrho \circ c^0 = (\varrho' c)^0$$

festgesetzt, wodurch C^0 zu einem P-Linksmodul wird.

Seien nun beliebige Modulen ${}_\Gamma A$ und ${}_\Gamma C$ gegeben. Dann ist $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda)$ ein P-Rechtsmodul und wegen (11) und (12) wird durch

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda) \otimes_\mathrm{P} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \mathrm{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \tag{18}$$

ein Homomorphismus φ geliefert[3]). Dieser Homomorphismus soll weiterhin untersucht werden. Dazu setzen wir jetzt einen Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ voraus und beschränken uns auf der linken Seite von (18) auf den Untermodul $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ von $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda)$.

Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann fallen diese Modulen zusammen. Im allgemeinen aber ist es gerade wesentlich, daß wir den Modul A^* zugrunde legen, da dieser die gewünschten Dualitätsaussagen ermöglicht.

Wir bemerken zuerst, daß φ in ${}_\Gamma A_\Lambda$ und ${}_\Gamma C$ funktoriell ist. Für C ist das unmittelbar klar. Seien nun ${}_\Gamma B_\Lambda$ und ein Homomorphismus $\beta\colon {}_\Gamma A_\Lambda \to {}_\Gamma B_\Lambda$ gegeben, dann ist das Diagramm

$$\left\{\begin{array}{ccc} B^* \otimes_\mathrm{P} C^0 & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_\Lambda) \otimes 1_{C^0}} & A^* \otimes_\mathrm{P} C^0 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathrm{Hom}({}_\Gamma B, {}_\Gamma C) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, 1_C)} & \mathrm{Hom}({}_\Gamma A, {}_\Gamma C) \end{array}\right. \tag{19}$$

[3]) Im Spezialfall der Kohomologie der Gruppen vgl. [1], S. 240, (5).

wegen Spur $(f\beta) = \text{Spur}\, f \cdot \beta$ kommutativ, wie man unmittelbar nachprüft. Also ist φ auch in A funktoriell.

Die grundlegende Eigenschaft von φ formulieren wir in folgendem

SATZ 1. *Gegeben seien ein Modul $_\Gamma A_\Lambda$, der* (14) *genügt, und ein beliebiger Modul $_\Gamma C$. Dann ist*

$$\varphi\colon\ A^* \underset{\mathrm{P}}{\otimes} C^0 \ni f \otimes c^0 \to (A \ni x \to \text{Spur}\, f(x)\, c \in C) \in \mathrm{Hom}\,(_\Gamma A, {_\Gamma C}) \tag{20}$$

ein in A und C funktorieller Isomorphismus.

BEMERKUNGEN. 1. Der Satz gilt auch für jeden Γ-Λ-direkten Summanden von A.

2. Der Isomorphismus (20) kann wegen (17) folgendermaßen zerlegt werden:

$$A^* \underset{\mathrm{P}}{\otimes} C^0 \to \text{Spur}\, A^* \underset{\mathrm{P}}{\otimes} C = \mathrm{Hom}\,(_\Gamma A_\Lambda, {_\Gamma \Gamma_\Lambda}) \underset{\mathrm{P}}{\otimes} C \to \mathrm{Hom}\,(_\Gamma A, {_\Gamma C}).$$

Zum Beweis des Satzes benutzen wir die durch (16) gegebene eindeutige Darstellung der Elemente aus $A^* \underset{\mathrm{P}}{\otimes} C^0$ in der Form $\sum_{j=1}^{m} h_j \otimes c_j^0$. Wegen (15) und (13) folgt für die Elemente x_i aus (14)

$$\sum_{j=1}^{m} \text{Spur}\, h_j(x_i)\, c_j = \text{Spur}\, h(1)\, c_i = c_i, \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{21}$$

Folglich ist φ ein Monomorphismus. Sei nun $f \in \mathrm{Hom}\,(_\Gamma A, {_\Gamma C})$, dann gilt nach (21)

$$\varphi\colon\ \sum_{j=1}^{m} h_j \otimes f(x_j) \to f,$$

d.h. φ ist auch ein Epimorphismus. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Anwendung in der homologischen Algebra

Eine vollständige projektive Auflösung eines Moduls A_Γ bzw. $_\Gamma A$ ist eine exakte Folge von projektiven Moduln $A_{i\,\Gamma}$ bzw. $_\Gamma A_i$:

$$\mathfrak{A}\colon\ \cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} A_{-2} \to \cdots$$

mit

$$\mathrm{Bild}\,(\alpha_0) = \mathrm{Kern}\,(\alpha_{-1}) \cong A.$$

Mit einem beliebigen Modul $_\Gamma C$ bilde man dann im Falle A_Γ den Komplex $\mathfrak{A} \underset{\Gamma}{\otimes} C$ und im Falle $_\Gamma A$ den Komplex $\mathrm{Hom}\,(_\Gamma \mathfrak{A}, {_\Gamma C})$. Die Faktoren des ersten Komplexes bezeichnen wir mit $H_k^\Gamma(A, C)$ die des zweiten mit $H_\Gamma^k(A, C)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dann gilt offenbar

$$\left.\begin{aligned} H_k^\Gamma(A, C) &= \mathrm{Tor}_k^\Gamma(A, C) \\ H_\Gamma^k(A, C) &= \mathrm{Ext}_\Gamma^k(A, C) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

SATZ 2. *Es sei Γ/Λ eine freie Frobenius-Erweiterung, und es besitze der Modul ${}_\Gamma A_\Lambda$ als Γ-Modul eine vollständige projektive Auflösung durch Modulen A_k, die alle* (14) *genügen und wobei die Kerne jeweils als Λ-Λ-Modulen direkte Summanden sind. Dann gilt für jeden Modul ${}_\Gamma C$:*

$$H_k^{\mathsf{P}}(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

BEWEIS. Sei $\mathfrak{A}$ die gegebene vollständige Auflösung von A, dann ist die Folge

$$\mathfrak{A}^*: \quad \cdots \to A_{-2}^* \to A_{-1}^* \to A_0^* \to A_1^* \to A_2^* \to \cdots$$

wieder exakt und die Moduln der Folge sind nach (16) freie P-Rechtsmoduln. Folglich ist dies eine vollständige projektive Auflösung des P-Rechtsmoduls A^*. Nach Satz 1 folgt dann die Behauptung.

Es erhebt sich nun die Frage, wann die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Dazu beschränken wir uns auf zentrale Frobenius-Erweiterungen, da eine entsprechende Aussage dann einfach zu formulieren ist und die erwähnten Beispiele bereits durch diesen Fall erfaßt werden. Ist Γ/Λ eine zentrale Frobenius-Erweiterung, dann ist $\mathsf{P} = \Gamma$ und jeder Modul ${}_\Gamma A$ ist zufolge der Festsetzung $a\lambda = \lambda a$ auch ein Λ-Rechtsmodul; z.B. ist dann $A^* = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda) = \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda\Lambda)$, d.h. A^* ist der im üblichen Sinne duale Modul.

SATZ 3. *Es seien Γ ein Noetherscher Ring und Γ/Λ eine unitäre zentrale, endlich erzeugte, freie Ringerweiterung. Ist der Modul ${}_\Gamma A$ als Λ-Linksmodul endlich erzeugt und projektiv, dann existiert eine (Γ, Λ)-exakte*[4]) *vollständige Auflösung von A aus endlich erzeugten freien Γ-Moduln.*

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich nach bekannten Schlüssen, doch soll er der Vollständigkeit halber angegeben werden. Zu A gibt es einen endlich erzeugten freien Γ-Modul A_0 so, daß $A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$ exakt ist. Da ${}_\Lambda A$ projektiv ist, ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ Λ-direkter Summand in A_0. Da ${}_\Gamma A_0$ Γ-frei und ${}_\Lambda\Gamma$ Λ-frei sind, ist ${}_\Lambda A_0$ Λ-projektiv; dann ist auch $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ als direkter Summand Λ-projektiv. Als Untermodul des Moduls A_0 mit Maximalbedingung ist $\mathrm{Kern}(\alpha_0)$ ein endlich erzeugter Λ-Modul. Nun folgt durch Induktion, daß eine (Γ, Λ)-exakte Auflösung von A durch endlich erzeugte freie Γ-Moduln existiert. Das gleiche gilt für A_Γ^*. Wegen ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ erhält man die gesuchte vollständige Auflösung von A, indem man an die angegebene Auflösung von A die durch Dualisieren der entsprechenden Auflösung von A^* entstehende Folge anhängt[5]). Damit ist Satz 3 bewiesen.

Nach Satz 2 gilt dann also unter den Voraussetzungen von Satz 3

$$H_k^\Gamma(A^*, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Da unter den Voraussetzungen von Satz 3 ${}_\Gamma A^{**} \cong {}_\Gamma A$ gilt und A^* die gleichen Voraussetzungen für die rechte Seite wie A für die linke Seite erfüllt, folgt

---

[4]) Im Sinne der relativen homologischen Algebra; s. dazu [2].

[5]) Siehe dazu auch die Schlußbemerkung über vollständige Auflösungen.

für A_Γ unter den entsprechenden Voraussetzungen

$$H_k^\Gamma(A, C^0) \cong H_\Gamma^{-k-1}(A^*, C), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Im Falle der Kohomologie einer endlichen Gruppe G ist $\Lambda = \mathsf{Z}$ (= Ring der ganzen Zahlen), $\Gamma = \mathsf{Z}[G]$ und $A = \mathsf{Z}$ als trivialer G-Modul. Da $\mathsf{Z}[G]/\mathsf{Z}$ symmetrisch ist, folgt $C = C^0$ und wegen ${}_G\mathsf{Z} \cong {}_G\mathsf{Z}^*$ ergibt sich schließlich wieder (1).

Aber auch der Fall der Kohomologie von Frobenius-Algebren ist in unseren Überlegungen enthalten. Sei Γ/K eine Frobenius-Algebra (d.h. eine zentrale Frobenius-Erweiterung) über einem Körper K, dann ist auch $\Gamma^e = \Gamma \underset{\mathsf{K}}{\otimes} \Gamma^{\cdot}$, wobei $\Gamma^{\cdot}$ die zu Γ invers-isomorphe Algebra ist, eine Frobenius-Algebra über K. Dann wird Γ als Γ^e-Linksmodul betrachtet, und dafür sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt.

6. Vollständige projektive Auflösungen bei Frobenius-Erweiterungen

Wir wollen mit einer Bemerkung über vollständige projektive Auflösungen schließen. Eine solche Auflösung eines Moduls etwa über einer Algebra gewinnt man üblicher Weise so, wie das im Beweis von Satz 3 durchgeführt worden ist. Für die projektiven Auflösungen, von denen man ausgeht, nimmt man meist die Standardauflösungen. Bei einer Frobenius-Erweiterung bietet sich jedoch noch eine andere Möglichkeit, die jetzt angegeben werden soll.

Sei Γ/Λ zunächst eine beliebige unitäre Ringerweiterung, dann erhält man zu einem Modul ${}_\Gamma A$ die (Γ, Λ)-projektive Standardauflösung in der Form

$$\cdots \to A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A \to 0$$

mit

$$A_k = \underbrace{\Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \cdots \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma}_{(k+1)\text{-mal}} \underset{\Lambda}{\otimes} A, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

schreibt man für ein beliebiges Element aus A_k

$$\gamma_{k+1} \otimes \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_0,$$

wobei also $\gamma_0 \in A$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1} \in \Gamma$, dann ist der Homomorphismus α_k durch

$$\alpha_k(\gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \gamma_{k+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1}\gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben. In dualer Weise erhält man eine (Γ, Λ)-injektive Auflösung von A in der Form

(22) $$0 \to A \xrightarrow{\alpha^0} A^0 \xrightarrow{\alpha^1} A^1 \xrightarrow{\alpha^2} A^2 \to \cdots$$

mit

$$A^k = \underbrace{\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, \ldots, {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma}_{(k+1)\text{-mal}}, {}_\Lambda A) \ldots))$$

wobei die Abbildungen α^k in dualer Weise zu den α_k definiert werden. Ist nun Γ/Λ eine Frobenius-Erweiterung, dann gilt ${}_\Gamma A_k \cong {}_\Gamma A^k$. Ist Γ/Λ außerdem frei mit den dualen Basen $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$, so ergibt sich aus (22)

$$0 \to A \xrightarrow{\beta_0} A_0 \xrightarrow{\beta_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2} A_2 \to \cdots,$$

wobei β_k durch

$$\beta_k(\gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_0) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-i} \gamma_k \otimes \cdots \otimes \gamma_{i+1} \otimes r_j \otimes l_j \gamma_i \otimes \cdots \otimes \gamma_0$$

gegeben wird. Eine vollständige (Γ, Λ)-projektive (und (Γ, Λ)-injektive) Auflösung von A erhält man dann durch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A_0 \arrow[rr, dashed, "\beta_0\alpha_0"] \arrow[dr, "\alpha_0"'] & & A_0 \arrow[r, "\beta_1"] & A_1 \arrow[r, "\beta_2"] & A_2 \arrow[r] & \cdots . \\
& & & & A \arrow[ur, "\beta_0"'] \arrow[dr] & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Ist ${}_\Lambda A$ endlich erzeugt und Λ-projektiv bzw. Λ-frei, dann ist jeder der Moduln ${}_\Gamma A_k$ endlich erzeugt und Γ-projektiv bzw. Γ-frei. Letzteres ist in Kohomologie der Gruppen und der Frobenius-Algebren der Fall.

Zusatz bei der Korrektur am 7. September 1961. Nach einer brieflichen Mitteilung von K. Gruenberg, London, existiert auch bei einer projektiven Frobenius-Erweiterung eine Spur mit den gleichen Eigenschaften wie bei einer freien Frobenius-Erweiterung. Daher gelten die hier gewonnenen Resultate z.T. auch für projektive Frobenius-Erweiterungen. — Die Spur erhält man folgendermaßen: Sei τ der zu (3) inverse Isomorphismus, dann bezeichne $\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes l_j$ das Bild von τ bei dem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Gamma) \to \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma;$$

die Elemente $l_1, \ldots, l_n$ und $r_1, \ldots, r_n$ treten dann zur Spurbildung an die Stelle der dualen Basen bei einer freien Frobenius-Erweiterung.

Literatur

[1] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton Press 1956.

[2] Hochschild, G.: Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 246—269 (1956).

[3] Nakayama, T.: On the complete cohomology theory of Frobenius algebras. Osaka Math. J. **9**, 165—187 (1957).

[4] — Note on complete cohomology of a quasi-Frobenius algebra. Nagoya Math. J. **13**, 115—121 (1958).

[5] —, and T. Tsuzuku: On Frobenius Extensions. I. Nagoya Math. J. **17**, 89—110 (1960).

[6] Kasch, F.: Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. **1960/61**, 89—109.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. Mai 1961)