

Postverlagsort Berlin ✓

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN VON

**H. WIELANDT**  
TÜBINGEN

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

**B. ECKMANN**   **E. HEINZ**   **R. NEVANLINNA**   **K. ZELLER**  
ZÜRICH                      STANFORD                      HELSINKI                      TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

**W. BLASCHKE**   **A. E. INGHAM**   **H. KNESER**  
**W. MAGNUS**   **O. PERRON**   **G. PICKERT**

**78. BAND, 1. HEFT**

(ABGESCHLOSSEN AM 9. JANUAR 1962)



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG  
1962

Math. Z.

H4369

214

274



## Inhalt des 78. Bandes

	Seite
ALPERIN, J. L., A $p$ -Group Counterexample . . . . .	141
ANTOSIEWICZ, H. A., An inequality for approximate solutions of ordinary differential equations . . . . .	44
BARNES, D. W., On $p$ -solubility and the projection into a Sylow $p$ -subgroup . . . . .	135
BAUMSLAG, G., On abelian hopfian groups I . . . . .	53
BAUMSLAG, G., On generalised free products . . . . .	423
BEHREND, F. A., A Characterization of Vector Spaces over Fields of Real Numbers	298
BERGER, R., Ausdehnung von Derivationen und Schachtelung der Differenten . . . . .	97
BERZ, E., Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen . . . . .	55
BETSCH, G., Ein Radikal für Fastringe . . . . .	86
CARTER, R. W., Normal complements of nilpotent self-normalizing subgroups . . . . .	149
CHATTERJEA, S. K., On an Associated Function of Hermite Polynomials . . . . .	116
CHAUDHURI, J., On Bateman-integral functions . . . . .	25
DRAZIN, M. P., and E. V. HAYNSWORTH, Criteria for the reality of matrix eigenvalues	449
FREUD, G., Über trigonometrische Approximation und Fouriersche Reihen . . . . .	252
GLOCK, E., Die Orientierungsfunktionen eines affinen Raumes . . . . .	319
GRAEB, W., Über die Integration einer invarianten Funktion über eine kompakte Liesche Gruppe . . . . .	235
GREENDLINGER, M., A Class of Groups All of Whose Elements Have Trivial Centralizers . . . . .	91
GREVE, W., Partial betweenness groups . . . . .	305
HELLWIG, G., Eine Bemerkung zum Ausstrahlungsproblem . . . . .	446
ITO, N., On transitive simple permutation groups of degree $2p$ . . . . .	453
JACOBS, K., Über die Struktur der mittleren Entropie . . . . .	33
JACOBS, K., Über Kanäle vom Dichtetypus . . . . .	151
KASCH, F., und B. VOLKMANN, Metrische Sätze über transzendente Zahlen in $P$ -adischen Körpern. II . . . . .	171
KEGEL, O. H., Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen . . . . .	205
KUREPA, S., On $n$ -th Roots of Normal Operators . . . . .	285
LENZ, H., Halbdrehungen im Raum . . . . .	410
LESKY, P., Über Polynomsysteme, die Sturm-Liouvilleschen Differenzgleichungen genügen . . . . .	439

	Seite
MACDONALD, I. D., On Certain Varieties of Groups. II . . . . .	175
MACROBERT, T. M., and F. M. RAGAB, <i>E</i> -Function Series whose Sums are Constants	231
MAGNUS, A., Certain continued fractions associated with the Padé table . . . . .	361
MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER, <i>FK</i> -Räume und Lückenperfektheit . . . . .	143
MÜLLER, B., Eine Verschärfung für Abschätzungen von Summenmengen in lokal-kompakten Gruppen . . . . .	199
MÜLLER, W., Über eine Ungleichung zwischen den Normen von $f$ , $f'$ und $f''$ . . . . .	420
MYHILL, J., Elementary Properties of the Group of Isolic Integers . . . . .	126
NASTOLD, H.-J., Zur Cohomologietheorie in der algebraischen Geometrie. II. Serres Dualitätssatz und der Satz von Riemann-Roch für Flächen . . . . .	375
PATI, T., Absolute Cesàro Summability Factors of Infinite Series . . . . .	293
POMMERENKE, CH., Über einige Klassen meromorpher schlichter Funktionen . . . . .	263
RAGAB, F. M., Reihen von Produkten MacRobertscher <i>E</i> -Funktionen . . . . .	222
RAGAB, F. M., s. MAC ROBERT, T. M. . . . .	231
RIEGER, G. J., Über die Anzahl der irreduziblen ganzrationalen primitiven Formen mit beschränkter Koeffizientennorm . . . . .	406
ROYDEN, H. L., The Boundary Values of Analytic and Harmonic Functions . . . . .	1
SOLOMON, L., On Schur's Index and the Solutions of $G^n = 1$ in a Finite Group . . . . .	122
STRUBECKER, K., Airysche Spannungsfunktion und isotrope Differentialgeometrie . . . . .	186
TSCHAUNER, J., Erzeugende Funktionen von zugeordneten Kugelfunktionen . . . . .	131
VOLKMANN, B., s. KASCH, F. . . . .	171
ZELLER, K., s. MEYER-KÖNIG, W. . . . .	143

## Metrische Sätze über transzendente Zahlen in $P$ -adischen Körpern. II.

Von  
 FRIEDRICH KASCH und BODO VOLKMANN

Seit dem Erscheinen unserer ersten Arbeit [4] mit gleichem Titel, an die wir im folgenden anknüpfen, hat Herr H. DAVENPORT [3] eine Abschätzung über kubische Formen erhalten, die im reellen Fall zu einem Beweis der Mahlerschen Vermutung für  $n=3$  geführt hat (s. [6]). Es soll nun gezeigt werden, daß auch im  $P$ -adischen die analoge Vermutung, wie wir sie in [4], Gl. (24) aufgestellt haben, für  $n=3$  richtig ist, daß also folgender Satz gilt:

SATZ. Für fast alle Zahlen  $\xi \in K_P$  ist  $\vartheta_3(\xi) = \frac{4}{3}$ .

BEWEIS. Jedem Polynom  $p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  mit ganzrationalen Koeffizienten ordnen wir die binäre Form  $p(x, y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$  zu; ferner bezeichnen wir mit  $h(d)$  die Anzahl der Äquivalenzklassen<sup>1)</sup> solcher irreduziblen Formen, deren Diskriminante  $D(p) = d$  ist. Bezeichnet man die zu  $p$  äquivalente reduzierte<sup>1)</sup> Form jeweils mit  $p^*$  und mit  $N(p^*, H)$  die Anzahl aller Formen  $p$  mit Höhen  $\|p\| \leq H$ , die zu einer gegebenen reduzierten Form  $p^*$  äquivalent sind, so besagen ältere Ergebnisse von DAVENPORT ([1], [2]), daß<sup>2)</sup>

$$(1) \quad \sum_{0 < |d| \leq H} h(d) \ll H$$

gilt. Weiterhin wird in seiner neuen Arbeit ([3], Ungl. (5)) bewiesen, daß für alle reduzierten Formen  $p^*$  die Ungleichung

$$(2) \quad N(p^*, H) \ll H |D(p^*)|^{-1}$$

erfüllt ist.

Wir zeigen zunächst mit Hilfe von (1) und (2), daß die Summe

$$\Sigma(H) = \sum_{\|p\| \leq H} |D(p)|_P^{-1/3},$$

erstreckt über alle irreduziblen kubischen Polynome, die ja bei der Abschätzung des Turkstraschen Maßes  $T(S_3(\sigma))$  die entscheidende Rolle spielt, der Ungleichung

$$(3) \quad \Sigma(H) \ll H^4$$

genügt.

<sup>1)</sup> Definitionen dieser Begriffe findet man z. B. in [1] und [2].

<sup>2)</sup> Das Symbol  $\ll$  bedeutet durchweg, daß jeweils der Quotient beider Größen unterhalb einer von den auftretenden Höhen unabhängigen, positiven Schranke  $C$  liegt. Unter den Summenzeichen bedeutet also z. B.  $0 < d \ll H^4$ , daß  $d$  die Zahlen  $1, 2, \dots, CH^4$  durchläuft.

Da im kubischen Fall aus  $\|\phi\| \leq H$  stets  $|D(\phi)| \ll H^4$  folgt und immer  $D(\phi^*) = D(\phi)$  ist, erhält man auf Grund von (2)

$$(4) \quad \Sigma(H) \ll \sum_{0 < |D(\phi^*)| \ll H^4}^* N(\phi^*, H) |D(\phi^*)|_P \ll H \sum_{0 < d \ll H^4} h(d) d^{-4} |d|_P^{-\frac{1}{2}}.$$

Nach (1) ist jedoch, wie man durch partielle Summation bestätigt, für jedes natürliche  $x$

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq x} h(d) d^{-4} &\ll \sum_{d=1}^x \left( \sum_{y=1}^d h(y) \right) (d^{-4} - (d+1)^{-4}) \\ &\ll \sum_{d=1}^x d \cdot d^{-4} \ll x^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

wobei wir auf den zweiten Faktor den Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet haben. Setzt man dies (mit  $x = CH^4$ ) in (4) ein, so ergibt sich — wiederum durch partielle Summation —

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(H) \ll H \sum_{0 < d \ll H^4} d^{\frac{3}{4}} (|d|_P^{-\frac{1}{2}} - |d+1|_P^{-\frac{1}{2}}) \\ \ll H \sum_{0 < d \ll H^4} (d^{\frac{3}{4}} - (d-1)^{\frac{3}{4}}) |d|_P^{-\frac{1}{2}} \ll H \sum_{0 < d \ll H^4} d^{-4} |d|_P^{-\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Durchläuft nun  $d_k$  jeweils die natürlichen Zahlen mit  $|d_k|_P = P^{-k}$  ( $k=0, 1, \dots$ ), so gilt

$$\sum_{0 < d_k \ll H^4} d_k^{-\frac{1}{4}} |d_k|_P^{-\frac{1}{2}} \leq P^{\frac{k}{2}} \sum_{0 < d_k \ll H^4} d_k^{-\frac{1}{4}} \ll P^{\frac{k}{4}} \sum_{i=1}^k [H^4 P^{-k}] i^{-4} \ll P^{\frac{k}{4}} H^3 P^{-\frac{3k}{4}} = H^3 P^{-\frac{k}{2}}.$$

Zusammen mit (5) ergibt dies

$$\Sigma(H) \ll H \sum_{0 < d \ll H^4} d^{-4} |d|_P^{-\frac{1}{2}} \ll H^4 \sum_{k=0}^{\infty} P^{-\frac{k}{2}} \ll H^4,$$

womit (3) bewiesen ist.

In der Schreibweise von [4] ist für jedes  $\sigma > \frac{4}{3}$  die Menge  $S_3(\sigma)$  in der Form  $S_3(\sigma) = S^0 \cup S^1 \cup S^3$  zu zerlegen, wobei sich wie dort beim Beweis von Satz 2 zeigen läßt, daß  $S^0$  und  $S^1$  das Maß Null haben. Bei der Berechnung von  $T(S_3(\sigma))$  kann man sich also auf die Teilmenge  $S^3$  beschränken, d.h. bei der Approximation der Elemente  $\xi \in K_P$  brauchen nur kubische Polynome mit lauter verschiedenen Nullstellen betrachtet zu werden, die sich über dem Ring der ganzrationalen Zahlen nicht in ein Produkt von drei Linearfaktoren zerlegen lassen. Jedes solche Polynom  $\phi$  ist entweder a) irreduzibel oder b) von der Form  $\phi = ql$  mit quadratischem, irreduziblem  $q$  und linearem  $l$ .

Es soll nun gezeigt werden, daß, nachdem die Mengen  $S^0$  und  $S^1$  bereits als vom Maß Null erkannt sind, nur der Fall a) zugelassen zu werden braucht. Wir können uns bei der Abschätzung des Turkstraschen Maßes  $T(S_3(\sigma))$  für ein  $\sigma > \frac{4}{3}$  von vorneherein auf  $P$ -adische Zahlen  $\xi$  mit  $\vartheta_1(\xi) = 2$  und  $\vartheta_2(\xi) = \frac{3}{2}$

beschränken, da alle übrigen nach [4], Sätze 1 und 2 eine Menge vom Maß Null bilden. Für jedes solche  $\xi \in S_3(\sigma)$  gibt es, wie man der Definition von  $\vartheta_3(\xi)$  leicht entnimmt, bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  unendlichviele kubische Polynome  $p$  mit

$$(6) \quad |p(\xi)|_P < \frac{1}{\|p\|^{3\sigma-\varepsilon}},$$

während für alle quadratischen Polynome  $q$  mit  $\|q\| > H_2(\xi)$

$$(7) \quad |q(\xi)|_P > \frac{1}{\|q\|^{3+\varepsilon}}$$

und für alle linearen Polynome  $l$  mit  $\|l\| > H_1(\xi)$

$$(8) \quad |l(\xi)|_P > \frac{1}{\|l\|^{2+\varepsilon}}$$

ist. Gäbe es nun unter den unendlichvielen  $p$  mit (6) nur endlichviele irreduzible, so gäbe es unendlichviele, die sich in der Form  $p = ql$  darstellen ließen, also bei diesen Darstellungen auch unendlichviele  $q$  mit (7) und unendlichviele  $l$  mit (8). Für jedes solche Tripel von Polynomen  $p, q, l$  gilt jedoch nach einem bekannten Satz die Ungleichung

$$\|l\| \cdot \|q\| \ll \|p\|,$$

also auch

$$\|l\|^{2+\varepsilon} \|q\|^{3+\varepsilon} \ll \|p\|^{3+\varepsilon},$$

wie eine leichte Rechnung zeigt<sup>3)</sup>. Daher folgt aus (7) und (8) die Beziehung

$$|p(\xi)|_P = |q(\xi)|_P |l(\xi)|_P > \frac{1}{\|q\|^{3+\varepsilon} \|l\|^{2+\varepsilon}} \gg \frac{1}{\|p\|^{3+\varepsilon}}.$$

Danach wäre (unter den gemachten Annahmen)  $\vartheta_3(\xi) \leq 1$ , während trivialerweise (s. [4], Hilfssatz 3)  $\vartheta_3(\xi) \geq \frac{1}{3}$  sein muß. Also gilt, wie oben behauptet, wenn das Symbol  $\sim$  die Beschränkung auf irreduzible kubische Polynome ausdrückt,  $T(\tilde{S}_3(\sigma)) = T(S_3(\sigma))$ , und daher folgt nach [4], Ungl. (12) sowie der obigen Ungl. (3) die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{T}(S_3(\sigma)) &\leq \lim_{H_0 \rightarrow \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-3\sigma} (\Sigma(H) - \Sigma(H-1)) \\ &\ll \lim_{H_0 \rightarrow \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} (H^{-3\sigma} - (H+1)^{-3\sigma}) \Sigma(H) \\ &\ll \lim_{H_0 \rightarrow \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-3\sigma-1} H^4 = 0, \end{aligned}$$

also  $T(S_3(\sigma)) = 0$  für alle  $\sigma > \frac{4}{3}$ . Daraus folgt nach der üblichen, auch in [4] angewandten Schlußweise die Behauptung.

<sup>3)</sup> Man setze  $\|l\| = \|p\|^\lambda, \|q\| = \|p\|^\mu$  und berechne das Maximum von  $\lambda(2+\varepsilon) + \mu(3+\varepsilon)$  unter den Nebenbedingungen  $0 \leq \lambda, 0 \leq \mu, \lambda + \mu \leq 1$ .

Die Verfasser möchten bei dieser Gelegenheit die historische Bemerkung nachholen, daß vor dem Beweis der Ungleichung

$$\vartheta_n(\xi) \leq 2 - \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 3) \text{ für fast alle } \xi \in K_P$$

in [4] die beste bekannte Schranke dieser Art nicht mehr, wie dort angegeben,  $\vartheta(\xi) \leq 7$ , sondern eine auf LOCK [5], Satz 14 zurückgehende Abschätzung war, die in unserer Schreibweise die Gestalt

$$\vartheta_n(\xi) \leq 3 + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \text{ für fast alle } \xi \in K_P$$

annimmt.

### Literatur

- [1] DAVENPORT, H.: On the class-number of binary cubic forms I. J. London Math. Soc. **26**, 183–192 (1951).
- [2] — On the class-number of binary cubic forms II. J. London Math. Soc. **26**, 192–198 (1951).
- [3] — A note on binary cubic forms. Mathematika **8**, 58–62 (1961).
- [4] KASCH, F., u. B. VOLKMANN: Metrische Sätze über transzendente Zahlen in  $P$ -adischen Körpern. Math. Z. **72**, 367–378 (1960).
- [5] LOCK, D. J.: Metrisch-diophantische onderzoekingen in  $K(P)$  en  $K^{(w)}(P)$ . Vrije Universiteit te Amsterdam, Diss. 1947.
- [6] VOLKMANN, B.: The real cubic case of Mahler's conjecture. Mathematika **8**, 55–57 (1961).

*Mathematisches Institut der Universität Heidelberg*

*Mathematisches Institut der Universität Mainz*

*(Eingegangen am 2. Mai 1961)*