

Erweiterungen zu
„Simplified Discounting Rules in Binomial Models“
von *Frank Richter*

Stephan Rosarius und Jörg Wiese*

Discussion Paper 2005 – 01

23. August 2005

- Version vom 30. Januar 2007 -

Munich School of Management
University of Munich

Fakultät für Betriebswirtschaft
Ludwig-Maximilians-Universität München

Online at <http://epub.ub.uni-muenchen.de/>

* Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Betriebswirtschaft, Seminar für Rechnungswesen und Prüfung, Ludwigstr. 28 RG, 80539 München.

Abstract

Bei der Bewertung von Unternehmen ist es üblich, die erwarteten Überschussverteilungen mit Kapitalkosten zu diskontieren, welche aus dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) abgeleitet werden. In diesem Zusammenhang hat *Richter* unter der Prämisse eines Binomialmodells für die Entwicklung der Cashflows und der Markttrendite unlängst Bedingungen formuliert, die eine Anwendung von konstanten Kapitalkosten erlauben. Die vorliegende Arbeit erweitert die Überlegungen von *Richter* dahingehend, dass neben dem Erwartungswert der Wachstumsrate der Cashflows auch deren Varianz für die Modellierung des Binomialprozesses verwendet wird. Dadurch kann sowohl für intertemporal abhängige als auch für unabhängige Überschussverteilungen gezeigt werden, dass sich die Kapitalkosten auf Basis der unterstellten Verteilungsparameter der Wachstumsraten und der Markttrendite sowie dem risikolosen Zins ermitteln lassen; auf die Spezifikation von subjektiven Wahrscheinlichkeiten kann dagegen verzichtet werden. Darüber hinaus wird nachgewiesen, dass das Binomialmodell auf die Überlegungen von *Fama* zur mehrperiodigen Anwendung des CAPM übertragen werden kann. Ein numerisches Beispiel auf Basis der in der Praxis beliebten Szenarioanalyse verdeutlicht den unmittelbaren Praxisbezug des Kalküls.

Keywords: Unternehmensbewertung; Kapitalkosten; Capital Asset Pricing Model (CAPM); Binomialmodell; Szenarioanalyse

JEL-Classification: G11, G31

Inhalt

1. Problemstellung	5
2. Binomialmodell	7
2.1 Abhängige Überschussverteilungen	7
2.2 Unabhängige Überschussverteilungen	13
2.3 Überleitung zu der Analyse von Fama (1977)	17
2.4 Numerisches Beispiel	19
3. Diskussion	27
4. Thesenförmige Zusammenfassung	30
Anhang	33
Literaturverzeichnis	36

1. Problemstellung

Theorie wie Praxis der Unternehmensbewertung greifen häufig auf das Capital Asset Pricing Model (CAPM) zurück. Die auf dessen Grundlage ermittelten Kapitalkosten werden sowohl durch die Marktparameter als auch durch die Charakteristika der unternehmensspezifischen Überschussverteilung geprägt. Obwohl die Zusammenhänge zwischen den aus dem CAPM gewonnenen Kapitalkosten und den prognostizierten Cashflowverteilungen bekannt sind, wird diesen üblicherweise – insbesondere in der praktischen Anwendung – nicht ausreichend Rechnung getragen.

So werden die zukünftigen Cashflows des Bewertungsobjekts auf der einen Seite auf Basis von betriebswirtschaftlichen Planungsüberlegungen abgeleitet, wobei jedoch häufig keinerlei Aussagen über die Eigenschaften der Verteilung getroffen werden.¹ Der Verzicht auf die explizite Formulierung der Verteilungen wird regelmäßig damit begründet, dass es sich bei den ermittelten Cashflows nicht um sichere Größen handelt, sondern um Erwartungswerte im mathematisch-statistischen Sinne, die entsprechend mit risikoadjustierten Kapitalkosten zu diskontieren sind. Auf der anderen Seite werden die – mit Verweis auf die konzeptionelle Basis des CAPM – konstruierten risikoadjustierten Kapitalkosten aus empirischen Daten abgeleitet und für alle zukünftigen Perioden als konstant unterstellt, ohne die Abhängigkeiten zwischen den Kapitalkosten und den zu diskontierenden Cashflows zu berücksichtigen² oder die Kapitalkosten auf ihre theoretische Konsistenz hin zu plausibilisieren.

Zur Beseitigung dieses Mangels hat *Richter* einen beachtenswerten Beitrag geleistet, in welchem er die Verteilungen der Cashflows vorgibt und die daraus resultierenden Kapitalkosten diskutiert.³ Der Verdienst von *Richter* besteht in der Ableitung von Bedingungen, unter denen die erwarteten Überschüsse theoretisch einwandfrei vereinfachend mit u.U. intertemporal konstanten, jedenfalls aber *zustandsunabhängigen* Kapitalkostensätzen diskontiert werden dürfen. Damit wird sowohl der in praxi wünschenswerten Vereinfachungsnotwendigkeit als auch der verlangten theoretischen Fundierung der Bewertungsmethodik Rechnung getragen.

¹ Vgl. *Kruschwitz/Löffler* (2005), S. 25.

² *Fama* (1996), S. 420-424, hat gezeigt, dass der wiederholte Ansatz konstanter Kapitalkosten aus dem einperiodigen CAPM die Zählergröße des Kalküls nicht unberührt lässt. Vielmehr implizieren normalverteilte einperiodige Renditen im Mehrperiodenfall eine rechtsschiefe Verteilung der Cashflows. Vgl. auch *Hachmeister* (1998), S. 27.

Allerdings verwendet *Richter* mit einem rekombinierenden Binomialmodell mit reziproken Wachstumsfaktoren einen sehr spezifischen Kalkül. Ziel des vorliegenden Beitrags ist es, Restriktionen zu beseitigen und vereinfachte Diskontierungsregeln in einem allgemeineren als dem von *Richter* herangezogenen Ansatz abzuleiten. Hierzu wird auf ein nicht rekombinierendes Binomialmodell zurückgegriffen, bei dem die Varianz der Wachstumsrate der Überschüsse – anders als bei *Richter* – exogen vorgegeben wird. Dieses Vorgehen bringt den Vorteil mit sich, dass man auf die Spezifikation von subjektiven Wahrscheinlichkeiten verzichten kann. Zugleich wird der Brückenschlag zu den Überlegungen von *Fama* über die wiederholte Verwendung des einperiodigen CAPM⁴ formal geleistet: Der hier vorgeschlagene Kalkül lässt sich als Spezialfall des *Famaschen* Modells begreifen und steht damit auf solidem theoretischen Grund.

Darüber hinaus wird gezeigt, dass durch die in der Praxis verbreitet Vorgabe dreier Szenarien sämtliche zur Berechnung der Kapitalkosten notwendigen Parameter bestimmt werden können. Dies wird sowohl für intertemporal stochastisch abhängige als auch für unabhängige Überschussverteilungen nachgewiesen. Die Geschlossenheit des Modells erlaubt es, die Auswirkungen einzelner varierender Inputgrößen auf die übrigen Modellparameter zu quantifizieren. Zugleich wird dem Bewerter ein Instrumentarium bereitgestellt, mit dessen Hilfe unbegründbare – aus den Charakteristika der Cashflowverteilung heraus nicht erklärbare – Kapitalkostensätze abgewehrt werden können.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Zunächst wird in den Abschnitten 2.1 und 2.2 das nicht rekombinierende Binomialmodell gekennzeichnet, das die Abzinsung unbedingter Erwartungswerte mit zustandsunabhängigen Kapitalkosten im Fall abhängiger und unabhängiger Überschussverteilungen gestattet. Anschließend wird in Kapitel 2.3 der Übergang zur Analyse von *Fama* geleistet. Abschnitt 2.4 verdeutlicht die zuvor abstrakt angestellten Überlegungen anhand eines numerischen Beispiels. In Kapitel 3 gilt es, die Vorzüge und Einschränkungen des vorgeschlagenen Verfahrens zu diskutieren. Das Papier schließt mit zusammenfassenden Thesen (Abschnitt 4).

³ Vgl. *Richter* (2001).

⁴ Vgl. *Fama* (1977), S. 7-20.

2. Binomialmodell

2.1 Abhängige Überschussverteilungen

Um der Prognoseunsicherheit Rechnung zu tragen, sind die künftigen Überschüsse des Unternehmens mehrwertig zu planen.⁵ Idealerweise gelingt es dem Bewerter, die periodischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Erträge vollständig zu charakterisieren. Dabei kann unterstellt werden, dass die Verteilungen im Zeitablauf stochastisch unabhängig oder abhängig miteinander verknüpft sind.⁶ Die Annahme abhängiger Verteilungen erscheint realitätsnäher. Anstatt explizit einen Zustandsbaum zu prognostizieren, aus dem sich die stochastische Verknüpfung der bedingten Verteilungen implizit ergibt, können die Cashflows auch mit Hilfe eines stochastischen Prozesses modelliert werden.⁷ Durch letzteren wird die (Un-)Abhängigkeitseigenschaft des Prozesses explizit vorgegeben, welche die Form der Cashflowverteilung impliziert. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, dass idealtypische Voraussetzungen geschaffen werden können, unter denen sich vereinfachte Diskontierungsregeln gewinnen lassen.

Dementsprechend soll im Folgenden zur Prognose der zukünftigen Cashflows des Unternehmens auf einen multiplikativen Binomialprozess abgestellt werden, welcher auf den Arbeiten von *Richter* aufbaut.⁸ In diesem Prozess können die freien Cashflows des unverschuldeten Unternehmens ausgehend von einem – im Zeitpunkt $t-1$ und im Umweltzustand i – realisierten Wert $FCF_{t-1,i}$ in der nächsten Periode t entweder mit der Wahrscheinlichkeit p mit dem Faktor u_t steigen oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$ mit dem Faktor d_t fallen.⁹

⁵ Vgl. *Ballwieser* (1993), S. 155; *Ballwieser* (2004), S. 49-50 und S. 66. Die Unsicherheit resultiert einerseits aus unbeeinflussbaren Umweltentwicklungen, die nicht mit Sicherheit vorausgesehen werden können, und andererseits aus der Unwissenheit des Bewerters, welche Zahlungsströme sich aus der Kombination einer bestimmten Geschäftspolitik und einer antizipierten Umweltentwicklung ergeben werden.

⁶ Im Fall der Abhängigkeit (Unabhängigkeit) wird angenommen, dass die Gestalt der bedingten Überschussverteilungen in einem Zeitpunkt davon abhängig (unabhängig) ist, welcher Umweltzustand in der Vorperiode eingetreten ist. Vgl. etwa *Schwetzler* (2002), S. 484; *Drukarczyk* (2003), S. 340; *Bamberg/Dorfleitner/Krapp* (2004), S. 101.

⁷ Vgl. *Richter* (2001), S. 177-182; *Schwetzler* (2002), S. 154-155; *Kruschwitz/Löffler* (2005), S. 31.

⁸ Vgl. hierzu und im Folgenden grundlegend *Richter* (2001), S. 178-182 und S. 185-194; auch *Richter* (2004a), S. 24-26; *Richter* (2004b), S. 370-372; *Richter* (2003), S. 62-63; *Richter/Drukarczyk* (2001), S. 628-629; *Richter/Helmis* (2001), S. 7-9; *Richter/Timmreck* (2002), S. 7-8 und S. 25-26; *Helmis/Timmreck/Richter* (2002), S. 306.

⁹ Der im Folgenden ausgewiesene Cashflow $FCF_{t-1,i}$ ist jeweils aus der Perspektive von $t-1$ sicher und trägt daher keine Tilde, für alle Perioden $t' < t-1$ stellt er ebenfalls eine Zufallsvariable dar. Die zweite Zeile von (2.1) enthält technische Details über die betrachteten Zeitpunkte, die Anzahl der möglichen Umweltzustände,

$$\widetilde{FCF}_t \in \{FCF_{t-1,i} \cdot u_t; FCF_{t-1,i} \cdot d_t\}, \quad (2.1)$$

$$t = 1, 2, \dots, T; i = 2^t; FCF_0 := FCF_{t-1=0, i=0} > 0; d_t \leq u_t; 0 < p < 1.$$

Der Erwartungswert der bedingten Cashflowverteilungen in der Periode t ergibt sich aus Sicht des Zeitpunkts $t-1$ in Abhängigkeit von der im Umweltzustand i der Periode $t-1$ realisierten Zahlung $FCF_{t-1,i}$:

$$E_{t-1,i} [\widetilde{FCF}_t] = p \cdot FCF_{t-1,i} \cdot u_t + (1-p) \cdot FCF_{t-1,i} \cdot d_t =$$

$$FCF_{t-1,i} \cdot (p \cdot u_t + (1-p) \cdot d_t). \quad (2.2)$$

Die erwartete Wachstumsrate der zustandsabhängigen Cashflows sei wie folgt definiert:¹⁰

$$E_{t-1,i} [\tilde{g}_t] = \frac{E_{t-1,i} [\widetilde{FCF}_t]}{FCF_{t-1,i}} - 1. \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen des Erwartungswertes der Cashflows aus (2.2) in (2.3) resultiert für den Erwartungswert der Wachstumsrate in Abhängigkeit von den Wahrscheinlichkeiten p und $(1-p)$ und den periodenspezifischen Wachstumsparametern u_t und d_t die Beziehung:¹¹

$$E[\tilde{g}_t] = (p \cdot u_t + (1-p) \cdot d_t) - 1 := \bar{g}_t. \quad (2.4)$$

Entsprechend gilt für die Varianz der Wachstumsrate:¹²

$$\text{var}[\tilde{g}_t] = p \cdot (u_t - \bar{g}_t)^2 + (1-p) \cdot (d_t - \bar{g}_t)^2. \quad (2.5)$$

Löst man Gleichung (2.4) nach u_t auf und setzt die resultierende Beziehung in (2.5) ein, lässt sich nach einigen Umformungen der folgende Ausdruck für den Wachstumsparameter d_t gewinnen:

den in $t = 0$ realisierten Cashflow FCF_0 als Startwert des Prozesses, das Verhältnis der Wachstumsparameter zueinander sowie das Intervall für die zulässige Wahrscheinlichkeiten.

¹⁰ Vgl. Richter (2001), S. 178.

¹¹ Die erwartete Wachstumsrate ist somit nicht zustandsabhängig, da diese nur von den zeitlich unabhängigen Wahrscheinlichkeiten p und $(1-p)$ und den für alle bedingten Verteilungen der Periode t geltenden Wachstumsparametern bestimmt wird.

¹² Vgl. auch Richter (2003), S. 71; Richter/Timmreck (2002), S. 25.

$$\text{var}[\tilde{g}_t] = p \cdot \left(\frac{(1 + \bar{g}_t) - (1 - p) \cdot d_t}{p} - 1 - \bar{g}_t \right)^2 + (1 - p) \cdot (d_t - 1 - \bar{g}_t)^2 \Leftrightarrow$$

$$d_t = (1 + \bar{g}_t) - \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1 - p)}}.$$
(2.6)

Für den Wachstumsparameter u_t folgt entsprechend:

$$u_t = (1 + \bar{g}_t) + \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \sqrt{\frac{(1 - p)}{p}}.$$
(2.7)

Die Bestimmungsgleichungen (2.6) und (2.7) für d_t und u_t bei vorgegebener Varianz der Wachstumsrate finden sich auch bei *Richter*¹³, der diese Ergebnisse jedoch nicht weiter nutzt. Stattdessen stellt *Richter* in seinen Arbeiten i.d.R. auf ein rekombinierendes Binomialmodell ab, bei dem hinsichtlich der Wachstumsparameter unterstellt wird, dass diese in einem reziproken Verhältnis zueinander stehen, mithin $d_t = 1/u_t$ gilt. In diesem Modell wird die Varianz der Wachstumsrate nur als *endogene* Variable verarbeitet, d.h. durch den Erwartungswert der Wachstumsrate und die Wahrscheinlichkeit p bestimmt.¹⁴ Diese Annahme erscheint eng: „However, a stochastic process is not well described by its first moment (the expected growth rate). At least incorporating the variance of dividends would be desirable.“¹⁵ Der hier zugrunde gelegte Binomialprozess mit der Varianz der Wachstumsrate als *exogene* Variable und der Rückgriff auf ein nicht rekombinierendes Binomialmodell stellt demnach eine Erweiterung des Grundmodells von *Richter* dar.

Durch die Vorgabe der Erwartungswerte und der Varianzen der Wachstumsraten kann – mit dem bekannten Startwert der Cashflows FCF_0 und der Spezifikation der Wahrscheinlichkeiten p bzw. $(1-p)$ – der Zustandsbaum des Binomialprozesses aufgespannt werden.¹⁶

Zur Barwertermittlung der auf diese Weise modellierten Cashflowverteilungen soll im Folgenden auf die in Gleichung (2.8) dargestellte vereinfachte Variante des mehrperiodigen CAPM zurückgegriffen werden, welche einen konsistenten Bezugsrahmen zur Bewertung

¹³ Vgl. *Richter* (2003), S. 71-72; auch *Richter/Timmreck* (2002), S. 25-26.

¹⁴ Vgl. *Richter/Timmreck* (2002), S. 26.

¹⁵ *Rapp/Schwertler* (2004), S. 4, mit direktem Bezug auf *Richter* (2004a).

¹⁶ Die erwarteten Wachstumsraten lassen sich beispielsweise aus dem Finanzplan des Unternehmens ableiten. Vgl. *Richter* (2003), S. 62, *Richter/Helmis* (2001), S. 8, sowie das Beispiel in Abschnitt 2.4.

unter Unsicherheit darstellt:¹⁷

$$V_{t-1,i}[\widetilde{FCF}_t] = \frac{E_{t-1,i}[\widetilde{FCF}_t] - Z_{t,i}}{1 + r_{f,t}} \quad (2.8)$$

mit

$$Z_{t,i} = \lambda_t \cdot \text{cov}_{t-1,i}[\widetilde{FCF}_t, \tilde{r}_{m,t}], \lambda_t = \frac{E[\tilde{r}_{m,t}] - r_{f,t}}{\text{var}[\tilde{r}_{m,t}]}.$$

Der Erwartungswert der bedingten Cashflowverteilung in der Periode t ist demzufolge um einen Risikoabschlag $Z_{t,i}$ zu reduzieren, der dem Produkt aus Marktpreis des Risikos λ_t und Kovarianz zwischen den Zahlungen und der Rendite des Marktportfolios $\tilde{r}_{m,t}$ entspricht. Das Ergebnis (2.8) ist als marktdeterminiertes Sicherheitsäquivalent zu interpretieren, welches mit dem risikolosen Zins $r_{f,t}$ zu diskontieren ist.

Die Überführung des als einperiodigen Kalkül konzipierten CAPM in den Mehrperiodenkontext setzt insbesondere voraus, dass die Erwartungswerte und die Varianzen der Marktrendite sowie der risikolose Zins für alle Perioden bekannt sind.¹⁸ Im Folgenden wird vereinfachend von der Konstanz der Marktparameter λ und r_f ausgegangen und unterstellt, dass sich die Marktrendite analog zu den freien Cashflows im Binomialmodell entwickelt.¹⁹ Die bedingten Verteilungen der Cashflows in der Periode t treffen dabei stets auf die gleiche, im Zeitablauf stationäre Verteilung der Marktrendite. Die Marktrendite besitzt mithin aus Sicht aller Umweltzustände der Periode $t-1$ in der nächsten Periode entweder mit der Wahrscheinlichkeit p die Ausprägung $r_{m,1}$ oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$ die Ausprägung $r_{m,2}$.²⁰

Demzufolge lassen sich der Erwartungswert und die Varianz der Marktrendite formulieren als

¹⁷ Vgl. analog *Richter* (2001), S. 179-182. Vgl. grundlegend zu dem hier im Mehrperiodenkontext wiederholt angewandten einperiodigen CAPM und den hierfür erforderlichen Annahmen *Fama* (1977), S. 7-17; auch *Drukarczyk* (1993), S. 280-285; *Kruschwitz* (2004), S. 300-305. Vgl. *Sharpe* (1964), S. 425-442, *Lintner* (1965), S. 13-37, *Mossin* (1966), S. 769-775, *Treynor* (1961), S. 15-21, zu den Grundlagen des einperiodigen CAPM. Eine Übersicht über verschiedene Varianten des mehrperiodigen CAPM mitsamt deren Annahmen findet sich bei *Röder/Müller* (2001), S. 227-232. Es soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden, inwieweit das CAPM mit seinen rigorosen Annahmen ein geeignetes Modell zur Bewertung von unsicheren Zahlungsansprüchen darstellt. Der Rückgriff auf das CAPM wird vielmehr damit begründet, dass das Modell eine verbreitete Alternative zur Erfassung der den Cashflows anhaftenden Unsicherheit ist, welche gleichzeitig eine einfache und plausible Darstellung der notwendigen Aggregations- und Diskontierungsschritte zulässt. Vgl. *Drukarczyk* (2003), S. 363-376; *Richter/Drukarczyk* (2001), S. 628-629. Zur Kritik am CAPM und den Schwierigkeiten in der praktischen Anwendung vgl. z.B. *Ballwieser* (2004), S. 93-97.

¹⁸ Zulässig sind lediglich deterministische Schwankungen der Parameter im Zeitablauf. Vgl. *Fama* (1977), S. 7-17.

¹⁹ Vgl. im Grundsatz auch *Richter* (2001), S. 179. Zur Diskussion des damit resultierenden linearen Zusammenhangs zwischen den Realisationen der Cashflows und der Marktrendite vgl. *Helmis/Timmreck/Richter* (2002), S. 305, und *Richter* (2001), S. 185-186.

$$E[\tilde{r}_m] = p \cdot r_{m,1} + (1-p) \cdot r_{m,2} := \bar{r}_m \quad (2.9)$$

und

$$\text{var}[\tilde{r}_m] = p \cdot (r_{m,1} - \bar{r}_m)^2 + (1-p) \cdot (r_{m,2} - \bar{r}_m)^2. \quad (2.10)$$

Auf Basis dieser Gleichungen können die Realisationen der Marktrendite bestimmt werden. Dazu ist Gleichung (2.9) nach $r_{m,1}$ umzustellen und die resultierende Beziehung in Gleichung (2.10) einzusetzen. Auflösen nach $r_{m,2}$ liefert:

$$r_{m,2} = \bar{r}_m - \text{std}[\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}}. \quad (2.11)$$

Entsprechend ergibt sich für die Realisation $r_{m,1}$:

$$r_{m,1} = \bar{r}_m + \text{std}[\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}}. \quad (2.12)$$

Die explizite Modellierung der Realisationen der Marktrendite auf Basis des Erwartungswertes und der Varianz stellt ebenfalls eine Erweiterung der Arbeiten von *Richter* dar. Zwar leitet *Richter* Faktoren ab, mit denen die Realisationen der Marktrendite bei einer Modifikation der Wahrscheinlichkeit p anzupassen wären²¹, die Ergebnisse werden jedoch nicht – wie im Folgenden – in das Gesamtmodell integriert.

Mit dem Zustandsbaum der Realisationen der freien Cashflows und der Marktrendite lässt sich nun der Unternehmenswert durch rekursive Anwendung der Bewertungsgleichung (2.8) ermitteln. Die resultierenden zustandsabhängigen Barwerte sind anschließend um die zustandszugehörigen Cashflows der Vorperiode zu erhöhen, um daraus neue bedingte Verteilungen zu erzeugen. Diese sind erneut auf Sicherheitsäquivalente zu aggregieren und um eine Periode abzuzinsen. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis der Bewertungszeitpunkt erreicht ist.

Wie angedeutet lässt das Binomialmodell eine Vereinfachung des rekursiven Bewertungsvor-

²⁰ Es wird $r_{m,2} \leq r_{m,1}$ vorausgesetzt.

²¹ Vgl. *Richter* (2001), S. 189.

gangs zu. Hierzu hat die Bewertung der freien Cashflows mit der Risikozuschlagsmethode zu erfolgen, bei der die Cashflowverteilungen auf *unbedingte* Erwartungswerte aggregiert und mit risikoadjustierten Kapitalkosten diskontiert werden. Der in der Periode t anzusetzende Risikozuschlag z_t auf den risikolosen Zins ergibt sich im CAPM-Kontext aus dem Produkt der Marktrisikoprämie $(E[\tilde{r}_m] - r_f)$ mit dem periodenspezifischen Betafaktor β_t :²²

$$z_t = \beta_t \cdot (E[\tilde{r}_m] - r_f) \text{ mit } \beta_t = \frac{\text{cov}[\tilde{r}_t, \tilde{r}_m]}{\text{var}[\tilde{r}_m]}. \quad (2.13)$$

Mit den Eigenschaften des Binomialmodells und der Annahme, dass nach der Periode T keine weiteren Zahlungen anfallen (Transversalität), kann nun gezeigt werden, dass die Kovarianz der Renditen in allen bedingten Verteilungen der Periode t einen identischen Wert besitzt, welcher allein durch die in Periode t unterstellten Verteilungsparameter der Cashflows und der Marktrendite sowie den risikolosen Zins bestimmt wird:²³

$$\text{cov}[\tilde{r}_t, \tilde{r}_m] = \frac{(1+r_f) \cdot \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1+\bar{g}_t) - \lambda \cdot \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}. \quad (2.14)$$

Infolge der Zustandsunabhängigkeit der Kovarianzen und somit auch der daraus resultierenden Betafaktoren lassen sich auf Basis der Gleichungen (2.13) und (2.14) für alle Perioden eindeutige risikoadjustierte Kapitalkostensätze $k_t^{u,e}$ ableiten, mit denen eine Diskontierung von unbedingten Erwartungswerten zulässig ist.²⁴ Für den Unternehmenswert V_0 gilt mithin:

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{\prod_{t=1}^T (1+k_t^{u,e})} \quad \text{mit} \quad (2.15)$$

$$k_t^{u,e} = r_f + z_t = r_f + \frac{(1+r_f) \cdot \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1+\bar{g}_t) - \lambda \cdot \text{std}[\tilde{g}_t] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]} \cdot \frac{(E[\tilde{r}_m] - r_f)}{\text{var}[\tilde{r}_m]}.$$

Betrachtet man Gleichung (2.15), so wird ersichtlich, dass die für die Bewertung benötigten Verteilungsparameter zwar nach wie vor *implizit* von der Wahrscheinlichkeit p bestimmt werden, durch die Vorgabe der einzelnen Größen jedoch auf eine *explizite* Spezifikation von p

²² Vgl. stellvertretend *Fama* (1977), S. 5 und S. 21, auch *Kruschwitz* (2004), S. 302. \tilde{r}_t stellt die Rendite des betrachteten Cashflows in der Periode t dar.

²³ Zum Beweis der Gleichung (2.14) vgl. den Anhang. Dieses Ergebnis wird in den in Fn. 8 genannten Arbeiten von *Richter* nicht explizit gemacht. Voraussetzung hierfür ist die Modellierung der Realisationen der Cashflows und der Marktrendite auf Basis der vorgegebenen Verteilungsparameter.

verzichtet werden kann. Diese Tatsache ist insofern von Bedeutung, als die Wahrscheinlichkeit p eine kritische Inputgröße in dem Grundmodell von *Richter* darstellt.²⁵

2.2 Unabhängige Überschussverteilungen

Standen bisher abhängige Überschussverteilungen im Mittelpunkt, so wird im Folgenden der Fall der stochastischen Unabhängigkeit untersucht. Unterstellt wird mithin, dass die Überschussverteilung der Periode t , \widetilde{FCF}_t , unabhängig davon auftritt, welche Umweltzustände sich in den Vorperioden realisiert haben. Im Rahmen des Binomialmodells stellt diese Annahme insoweit einen Spezialfall dar, als die freien Cashflows in jeder Periode t nur mehr zwei – für alle bedingten Verteilungen der Periode identische – Zustände einnehmen können. *Richter* verwendet für die Darstellung von stochastisch unabhängigen Überschussverteilungen einen *additiven* Binomialprozess ohne Wachstum, welcher über

$$\widetilde{FCF}_t \in \{FCF_0 + \text{std}[\widetilde{FCF}]; FCF_0 - \text{std}[\widetilde{FCF}]\} \quad (2.16)$$

definiert wird.²⁶ Davon abweichend soll im Folgenden ein *multiplikativer* Prozess unterstellt werden, bei dem ausschließlich der im Bewertungszeitpunkt bekannte Cashflow FCF_0 als Bezugspunkt für alle zukünftigen Cashflowrealisationen dienen soll. Demnach können die Cashflows einer Periode t entweder mit der Wahrscheinlichkeit p die Ausprägung $FCF_0 \cdot u_{0,t}$ oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$ die Ausprägung $FCF_0 \cdot d_{0,t}$ annehmen. Der Index $0,t$ bei den Wachstumsfaktoren drückt das Wachstum von FCF_0 im Zeitraum zwischen $t = 0$ und t aus. Formal lässt sich dieser modifizierte Binomialprozess mit

$$\widetilde{FCF}_t \in \{FCF_0 \cdot u_{0,t}; FCF_0 \cdot d_{0,t}\}, \quad (2.17)$$

$$t = 1, 2, \dots, T; FCF_0 > 0; d_{0,t} \leq u_{0,t}; 0 < p < 1$$

kennzeichnen. Der *unbedingte* Erwartungswert der Cashflowverteilungen aus Sicht des Bewertungszeitpunkts ergibt sich somit jeweils in Abhängigkeit von der bekannten Zahlung FCF_0 als:

²⁴ Vgl. im Ergebnis auch *Richter* (2001), S. 180-182.

²⁵ Vgl. die in Fn. 8 genannten Arbeiten.

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{FCF}_t] &= p \cdot FCF_0 \cdot u_{0,t} + (1-p) \cdot FCF_0 \cdot d_{0,t} = \\
&= FCF_0 \cdot (p \cdot u_{0,t} + (1-p) \cdot d_{0,t}).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Die erwartete Wachstumsrate der Cashflows muss dementsprechend – anders als in (2.3) – ebenfalls auf Basis von FCF_0 definiert werden, da das Wachstum der Cashflows aus den Vorperioden für die Periode t aufgrund der Unabhängigkeit irrelevant ist:

$$E[\tilde{g}_{0,t}] = \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0} - 1. \tag{2.19}$$

Aus Gleichung (2.19) wird ersichtlich, dass die erwartete Wachstumsrate nicht mit den periodenspezifischen Wachstumsraten des Unternehmens übereinstimmt, die bei der Berechnung des Unternehmenswerts bei intertemporal abhängigen Überschussverteilungen Verwendung finden. Es handelt sich vielmehr um Wachstumsraten, die jeweils den gesamten Zeitraum vom Bewertungszeitpunkt bis hin zur Periode t umfassen.²⁷ Durch Einsetzen von (2.18) in (2.19) lässt sich der Erwartungswert der Wachstumsrate jedoch weiterhin in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit p und den Wachstumsparametern darstellen:

$$E[\tilde{g}_{0,t}] = (p \cdot u_{0,t} + (1-p) \cdot d_{0,t}) - 1 := \bar{g}_{0,t}. \tag{2.20}$$

Für die Varianz der Wachstumsraten erhält man entsprechend:

$$\text{var}[\tilde{g}_{0,t}] = p \cdot (u_{0,t} - 1 - \bar{g}_{0,t})^2 + (1-p) \cdot (d_{0,t} - 1 - \bar{g}_{0,t})^2. \tag{2.21}$$

Analog zur Vorgehensweise im vorangegangenen Abschnitt lassen sich die Wachstumsparameter mit Hilfe der Gleichungen (2.20) und (2.21) ermitteln:

$$\begin{aligned}
u_{0,t} &= (1 + \bar{g}_{0,t}) + \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}}, \\
d_{0,t} &= (1 + \bar{g}_{0,t}) - \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

²⁶ Vgl. Richter (2001), S. 193-194.

²⁷ Eine Möglichkeit, wie diese Wachstumsraten aus der Planung des Unternehmens abgeleitet werden können, soll im Rahmen des numerischen Beispiels in Abschnitt 2.4 dargestellt werden.

Damit kann man ausgehend von FCF_0 durch Vorgabe der Verteilungsparameter und Spezifikation der Wahrscheinlichkeit p den Zustandsbaum des Binomialprozesses konstruieren.

Der Zusammenhang des hier verwandten multiplikativen Binomialmodells mit der von *Richter* gewählten additiven Struktur lässt sich verdeutlichen, indem die Varianz der Cashflows mit Hilfe der Gleichungen (2.17) und (2.18) formuliert wird:

$$\begin{aligned} \text{var}[\widetilde{FCF}_t] &= p \cdot (FCF_0 \cdot u_{0,t} - E[\widetilde{FCF}_t])^2 + (1-p) \cdot (FCF_0 \cdot d_{0,t} - E[\widetilde{FCF}_t])^2 = \\ &= FCF_0^2 \cdot \left[p \cdot (u_{0,t} - (1 + \bar{g}_{0,t}))^2 + (1-p) \cdot (d_{0,t} - (1 + \bar{g}_{0,t}))^2 \right] = \\ &= FCF_0^2 \cdot \text{var}[\tilde{g}_{0,t}]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Demnach gilt folgende Beziehung zwischen der Standardabweichung der Wachstumsrate und der Standardabweichung der Cashflows:

$$\text{std}[\tilde{g}_{0,t}] = \frac{\text{std}[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0}. \quad (2.24)$$

Ersetzt man nun in Gleichung (2.22) die Standardabweichung der Wachstumsrate mit (2.24), so resultiert

$$\widetilde{FCF}_t \in \left\{ \begin{array}{l} FCF_0 \cdot \left[(1 + \bar{g}_{0,t}) + \frac{\text{std}[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0} \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}} \right] \\ FCF_0 \cdot \left[(1 + \bar{g}_{0,t}) - \frac{\text{std}[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0} \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}} \right] \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

für den multiplikativen Binomialprozess. Für den von *Richter* unterstellten Fall $p = (1-p) = 0,5$ ohne Wachstum, d.h. $\bar{g}_{0,t} = 0$, und eine intertemporal konstante Standardabweichung der Cashflows reduziert sich (2.25) zu (2.16). Daran zeigt sich, dass der hier durch Vorgabe der Verteilungsparameter und die damit einhergehende explizite Modellierung der Wachstumsparameter gekennzeichnete multiplikative Binomialprozess allgemeiner als der von *Richter* verwandte additive Prozess ist.

Unterstellt man weiterhin, dass sich die Marktrendite entsprechend dem Fall der intertemporal abhängigen Überschussverteilungen entwickelt und sich deren Realisationen somit auf Basis der Gleichungen (2.11) und (2.12) ermitteln lassen, kann der Unternehmenswert abermals

durch rekursive Anwendung der Bewertungsgleichung (2.8) berechnet werden.

Alternativ kann der Barwert der Cashflowverteilungen mit Hilfe der Risikozuschlagsmethode ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass durch die unterstellte Unabhängigkeit der Überschussverteilungen von den jeweiligen Zuständen der Vorperioden nur in Periode t Unsicherheit über die Realisationen herrscht, während deren Barwert in $t-1$ zustandsunabhängig und damit sicher realisierbar ist.²⁸ Verfolgt man das Ziel, die Risikoadjustierung „verursachungsgerecht“ vorzunehmen²⁹, so hat die Diskontierung mit den risikoangepassten Kapitalkosten $k_t^{u,e}$ nur einmalig, also von t auf $t-1$ zu erfolgen; für die weitere Abzinsung von $t-1$ auf den Bewertungszeitpunkt muss dagegen auf den risikolosen Zins r_f zurückgegriffen werden. Für den Unternehmenswert gilt mithin:³⁰

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{(1+r_f)^{t-1} \cdot (1+k_t^{u,e})}. \quad (2.26)$$

Die Bestimmung der risikoangepassten Kapitalkosten erfolgt analog zu den Überlegungen im vorangegangenen Kapitel. Die Kovarianz der Renditen in allen Verteilungen einer Periode t besitzt wiederum einen identischen Wert, welcher allein durch die in dieser Periode unterstellten Verteilungsparameter der Wachstumsrate und der Marktrendite sowie den risikolosen Zins bestimmt wird.³¹

$$\text{cov}[\tilde{r}_t; \tilde{r}_m] = \frac{(1+r_f) \cdot \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1+\bar{g}_{0,t}) - \lambda \cdot \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}. \quad (2.27)$$

Daraus folgt für die risikoadjustierten Kapitalkosten des unverschuldeten Unternehmens:

$$k_t^{u,e} = r_f + z_t = r_f + \frac{(1+r_f) \cdot \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{((1+\bar{g}_{0,t}) - \lambda \cdot \text{std}[\tilde{g}_{0,t}] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m])} \cdot \frac{(E[\tilde{r}_m] - r_f)}{\text{var}[\tilde{r}_m]}. \quad (2.28)$$

²⁸ Vgl. Fama (1977), S. 9; Schwetzer (2000), S. 474; Drukarczyk (2003), S. 341.

²⁹ Vgl. Wilhelm (2005), S. 641 und S. 642-645.

³⁰ Vgl. Fama (1977), S. 9; auch Ballwieser (2004), S. 79, Drukarczyk (2003), S. 373, Schwetzer (2000), S. 474, Hachmeister (1998), S. 26, sowie bereits Ballwieser (1993), S. 157, ohne die explizite Diskussion der zugrunde liegenden stochastischen Unabhängigkeit.

³¹ Die Ermittlung von Gleichung (2.27) erfolgt analog zu der im Anhang durchgeführten Ableitung von (2.14). Dabei ist zu beachten, dass die Barwerte der Verteilungen aus der Periode t in allen Verteilungen der Periode $t-1$ aufgrund der Identität der Überschussverteilungen ebenfalls identisch sind.

2.3 Überleitung zu der Analyse von *Fama* (1977)

Der in den Abschnitten 2.1 und 2.2 unterstellte Binomialprozess erlaubt es, die periodischen *unbedingten* Erwartungswerte mit einem periodenspezifischen, aber zustandsunabhängigem Kapitalkostensatz $k_t^{u,e}$ zu diskontieren. Einer ähnlichen Fragestellung hat sich *Fama* gewidmet, der untersucht hat, unter welchen Bedingungen sich das einperiodige CAPM wiederholt anwenden lässt.³² Da hier ebenfalls das CAPM mehrperiodig verwandt wird, soll im Folgenden geprüft werden, ob sich die in den Gleichungen (2.15) und (2.28) abgeleiteten Kapitalkosten $k_t^{u,e}$ in den analytischen Rahmen von *Fama* einpassen lassen.

Zur Übertragung der Kapitalkosten aus Gleichung (2.15) auf die Überlegungen von *Fama* sei von abhängigen Überschussverteilungen ausgegangen und zunächst unterstellt, dass nur in der letzten Periode T Zahlungen anfallen. Die Kapitalkosten des unverschuldeten Unternehmens in Periode T lassen sich unter Rückgriff auf Beziehung (2.15) als

$$1 + k_T^{u,e} = 1 + r_f + \frac{(1 + r_f) \cdot \text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{((1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot \text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m])} \cdot \frac{(E[\tilde{r}_m] - r_f)}{\text{var}[\tilde{r}_m]} = \frac{(1 + r_f)}{\left(1 - \lambda \cdot \frac{\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_T)}\right)} \quad (2.29)$$

formulieren. Ausdruck (2.29) stimmt in seiner Struktur mit den von *Fama* herangezogenen Kapitalkosten bei mehrperiodiger Anwendung des CAPM überein:³³

$$1 + k_T^{u,e} = \frac{(1 + r_f)}{\left(1 - \lambda \cdot \text{cov}\left[\frac{\widetilde{FCF}_T}{E_{T-1}[\widetilde{FCF}_T]}; \tilde{r}_m\right]\right)} \quad (2.30)$$

Um zu zeigen, dass die Kapitalkostensätze (2.29) und (2.30) auch in ihrer Höhe identisch sind, muss bewiesen werden, dass die Identität

$$\text{cov}\left[\frac{\widetilde{FCF}_T}{E_{T-1}[\widetilde{FCF}_T]}; \tilde{r}_m\right] = \frac{\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_T)} \quad (2.31)$$

³² Vgl. *Fama* (1977), S. 7-20.

gilt. Aufgrund der unterstellten Zustandsunabhängigkeit der Wahrscheinlichkeit p sowie der Wachstumsparameter u_T bzw. d_T und der Realisationen der Marktrendite $r_{m,1}$ bzw. $r_{m,2}$ ist es hinreichend, dass die Beziehung (2.31) für eine bedingte Verteilung der Periode hält, also die Gleichung

$$\text{cov}\left[\frac{\widetilde{FCF}_T | FCF_{T-1,i}}{E_{T-1,i}[\widetilde{FCF}_T]}; \tilde{r}_m\right] = \frac{\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_T)} \quad (2.32)$$

erfüllt ist. Setzt man die Gleichungen für die Realisationen der Cashflows und der Marktrendite sowie deren Erwartungswerte in (2.32) ein, so zeigt sich nach den Umformungen

$$\begin{aligned} \text{cov}\left[\frac{\widetilde{FCF}_T | FCF_{T-1,i}}{E_{T-1,i}[\widetilde{FCF}_T]}; \tilde{r}_m\right] &= \frac{1}{E_{T-1,i}[\widetilde{FCF}_T]} \cdot \text{cov}_{T-1,i}[\widetilde{FCF}_T; \tilde{r}_m] = \\ &= \frac{1}{(1 + \bar{g}_T) \cdot FCF_{T-1,i}} \cdot \left[p \cdot (FCF_{T-1,i} \cdot u_T - FCF_{T-1,i} \cdot (1 + \bar{g}_T)) \cdot (r_{m,1} - \bar{r}_m) + \right. \\ &\quad \left. (1 - p) \cdot (FCF_{T-1,i} \cdot d_T - FCF_{T-1,i} \cdot (1 + \bar{g}_T)) \cdot (r_{m,2} - \bar{r}_m) \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \bar{g}_T)} \cdot \left[p \cdot \left(\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}} \right) \cdot \left(\text{std}[\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}} \right) + \right. \\ &\quad \left. (1 - p) \cdot \left(-\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}} \right) \cdot \left(-\text{std}[\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}} \right) \right] = \\ &= \frac{(1 - p) \cdot \text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m] + p \cdot \text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_T)} = \\ &= \frac{\text{std}[\tilde{g}_T] \cdot \text{std}[\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_T)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

dass die geforderte Identität (2.32) gilt.

Der entsprechende Beweis lässt sich auf den Mehrperiodenfall ausweiten: Gemäß Gleichung (2.15) ist der unbedingte Erwartungswert der Cashflows $E_{T-2}[\widetilde{FCF}_T]$ über zwei Perioden mit

³³ Vgl. Fama (1977), S. 10-15.

den Sätzen $(1+k_T^{u,e}) \cdot (1+k_{T-1}^{u,e})$ zu diskontieren. Da für die Kapitalkosten der letzten Periode T , $k_T^{u,e}$, bereits über (2.33) die Äquivalenz zwischen der Rechnung mit dem Binomialprozess und jener *Famas* bewiesen wurde, muss lediglich für $k_{T-1}^{u,e}$ gezeigt werden, dass der hier untersuchte Binomialprozess mit dem Vorgehen von *Fama* übereinstimmt. Dass dies gilt, erkennt man unmittelbar, wenn man dieselben Schritte wie in (2.33) für die Periode $T-1$ durchgeht.

Nachdem die Standarabweichung und die erwartete Wachstumsrate der freien Cashflows für alle Perioden $t = 1, \dots, T$ als bekannt vorausgesetzt werden, sind die von *Fama* geforderten Bedingungen für die Anwendung des CAPM im Mehrperiodenkontext erfüllt.³⁴ Damit haben die Ergebnisse der Abschnitte 2.1 und 2.2 eine theoretisch robuste Basis.³⁵

2.4 Numerisches Beispiel

Im Folgenden sollen die in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Diskontierungsregeln anhand eines numerischen Beispiels illustriert werden, wobei zunächst von stochastisch unabhängigen Überschussverteilungen ausgegangen und der Betrachtungszeitraum auf zwei Perioden beschränkt bleiben soll. Die für die Entwicklung des Binomialprozesses zur Verfügung stehenden Informationen orientieren sich dabei an dem in der Praxis üblichen Vorgehen, die zukünftigen Cashflows zwar mehrwertig mithilfe von verschiedenen Szenarien zu prognostizieren, jedoch keine expliziten Annahmen über die Varianz der Cashflows bzw. die Varianz der Wachstumsraten zu treffen.³⁶ Gegeben sei ein Unternehmen, welches vollständig mit Eigenkapital finanziert ist und im abgelaufenen Geschäftsjahr einen freien Cashflow von $FCF_0 = 100$ generieren konnte. Die freien Cashflows der nächsten zwei Jahre werden auf Basis von drei verschiedenen Geschäftsverläufen entwickelt, wobei zwischen einer erwarteten (*base case*), einer positiven (*upside case*) sowie einer negativen (*downside case*) Geschäftsentwicklung differenziert werden soll. Die folgende Tabelle zeigt die in den drei Entwicklungen prognostizierten freien Cashflows:

Szenario	Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2
----------	--------	--------	--------

³⁴ Weitere Prämisse sind, dass der Marktpreis des Risikos und der risikolose Zins im Bewertungszeitpunkt sicher bekannt sind. Vgl. *Fama* (1977), S. 16. Diese Bedingungen wurden hier unterstellt. Vgl. hierzu die Ausführungen in Fn. 18.

³⁵ Der hier geführte Nachweis muss für unabhängige Verteilungen nicht eigens erbracht werden, da diese in den hier unterstellten abhängigen Verteilungen als Spezialfall enthalten sind.

³⁶ Vgl. *Ballwieser* (2004), S. 50 und S. 66, m.w.N.; *Ballwieser* (1993), S. 155.

<i>upside case</i>		120	130
<i>base case</i>	100	105	115
<i>downside case</i>		95	100

Tabelle 1: Prognostizierte Überschüsse mit drei Szenarien

Die für den Binomialprozess erforderlichen Wachstumsparameter können bei unabhängigen Verteilungen direkt aus der bekannten Zahlung FCF_0 sowie den Cashflowrealisationen im positiven Umweltzustand $FCF_{t,1}$ und im negativen Umweltzustand $FCF_{t,2}$ gewonnen werden:

$$\begin{aligned} FCF_{t,1} = u_{0,t} \cdot FCF_0 &\Leftrightarrow u_{0,t} = \frac{FCF_{t,1}}{FCF_0}, \\ FCF_{t,2} = d_{0,t} \cdot FCF_0 &\Leftrightarrow d_{0,t} = \frac{FCF_{t,2}}{FCF_0}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Setzt man die in der *Tabelle 1* gegebenen Werte in (2.34) ein, ergeben sich die folgenden Wachstumsparameter für die beiden Perioden:

Wachstumsparameter		Jahr 1	Jahr 2
$u_{0,t}$		1,20	1,30
$d_{0,t}$		0,95	1,00

Tabelle 2: Wachstumsfaktoren bei unabhängigen Verteilungen

Entsprechend können aus den im *base case* geplanten freien Cashflows und der bekannten Zahlung FCF_0 auch die in der Planung unterstellten *erwarteten* Wachstumsraten durch Einsetzen der Werte in die Gleichung (2.3) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{0,1} &= \frac{E[FCF_1]}{FCF_0} - 1 = \frac{105}{100} - 1 = 5,0\%, \\ \bar{g}_{0,2} &= \frac{E[FCF_2]}{FCF_0} - 1 = \frac{115}{100} - 1 = 15,0\%. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die im *base case* anfallenden Cashflows müssen hier folglich als Erwartungswerte im mathematisch-statistischen Sinne interpretiert werden, um die in der Planung implizit unterstellte Verteilung vollständig charakterisieren zu können. Aus den erwarteten Wachstumsraten las-

sen sich nun auf Basis der zuvor berechneten Wachstumsparameter die in der Planung implizit unterstellen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Perioden ableiten:³⁷

$$p_1 = \frac{(1 + \bar{g}_{0,1}) - d_{0,1}}{u_{0,1} - d_{0,1}} = \frac{1,05 - 0,95}{1,20 - 0,95} = 0,4, \quad (2.36)$$

$$p_2 = \frac{(1 + \bar{g}_{0,2}) - d_{0,2}}{u_{0,2} - d_{0,2}} = \frac{1,15 - 1,00}{1,30 - 1,00} = 0,5.$$

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten kann schließlich die in der Planung nicht explizit ausgewiesene, jedoch für die Ermittlung der risikoangepassten Kapitalkosten erforderliche Varianz der Wachstumsraten berechnet werden:

$$\text{var}[\tilde{g}_{0,1}] = p_1 \cdot (u_{0,1} - 1 - \bar{g}_{0,1})^2 + (1 - p_1) \cdot (d_{0,1} - 1 - \bar{g}_{0,1})^2 =$$

$$0,4 \cdot (1,20 - 1 - 0,05)^2 + 0,6 \cdot (0,95 - 1 - 0,05)^2 =$$

$$0,0150, \quad (2.37)$$

$$\text{var}[\tilde{g}_{0,2}] = p_2 \cdot (u_{0,2} - 1 - \bar{g}_{0,2})^2 + (1 - p_2) \cdot (d_{0,2} - 1 - \bar{g}_{0,2})^2 =$$

$$0,5 \cdot (1,30 - 1 - 0,15)^2 + 0,5 \cdot (1,00 - 1 - 0,15)^2 =$$

$$0,0225.$$

Neben der Prognose der zukünftigen Cashflows ist für die Bewertung eine Einschätzung über die Entwicklung der Marktparameter erforderlich. Bezüglich der Entwicklung des Marktpportfolios soll dabei für beide Perioden von einer erwarteten Rendite $E[\tilde{r}_m]$ i.H.v. 14,00% sowie von einer Standardabweichung $\text{std}[\tilde{r}_m] = 28,28\%$ ausgegangen werden.³⁸ Ferner wird ein konstanter risikoloser Zins $r_f = 6,00\%$ unterstellt, womit sich der Marktpreis des Risikos für beide Perioden berechnen lässt:

$$\lambda = \frac{0,14 - 0,06}{0,2828^2} = 1,0003 \approx 1. \quad (2.38)$$

³⁷ Die Wahrscheinlichkeit p stellt indes keine exogene Größe dar, welche für alle Perioden als konstant unterstellt wird, sondern muss auf Basis der in der Planung prognostizierten Cashflows ermittelt werden. Obgleich aufgrund der Eigenschaften des Binomialmodells auf die Spezifikation der Wahrscheinlichkeiten eigentlich verzichtet werden kann, ist deren Berechnung in diesem Zusammenhang als Zwischenschritt unabdingbar, da in dem hier unterstellten – und in der Praxis üblichen – Vorgehen der Szenarienbildung keine explizite Spezifikation der Varianzen erfolgt. Werden alternativ die Varianzen der Wachstumsraten oder der Cashflows für alle Perioden vorgegeben, kann – wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt – auf die Wahrscheinlichkeiten verzichtet werden.

³⁸ Vgl. hierzu Richter (2001), S. 180, mit Verweis auf die von Bimberg (1991) ermittelten Daten.

Setzt man nun die zuvor ermittelten Wahrscheinlichkeiten sowie die Verteilungsparameter der Marktrendite in die Gleichungen (2.11) und (2.12) ein, folgt für die Ausprägungen der Marktrendite $r_{m,1,1} = 48,64\%$ und $r_{m,1,2} = -9,09\%$ bzw. $r_{m,2,1} = 42,28\%$ und $r_{m,2,2} = -14,28\%$.³⁹

Mit den berechneten Wachstumsparametern sowie den Realisationen der Marktrendite kann der Zustandsbaum des Binomialprozesses konstruiert werden und die Barwertermittlung der Cashflows durch rekursive Anwendung der Bewertungsgleichung (2.8) erfolgen. *Abbildung 1* zeigt den Binomialbaum und die Ergebnisse des Bewertungsvorgangs:⁴⁰

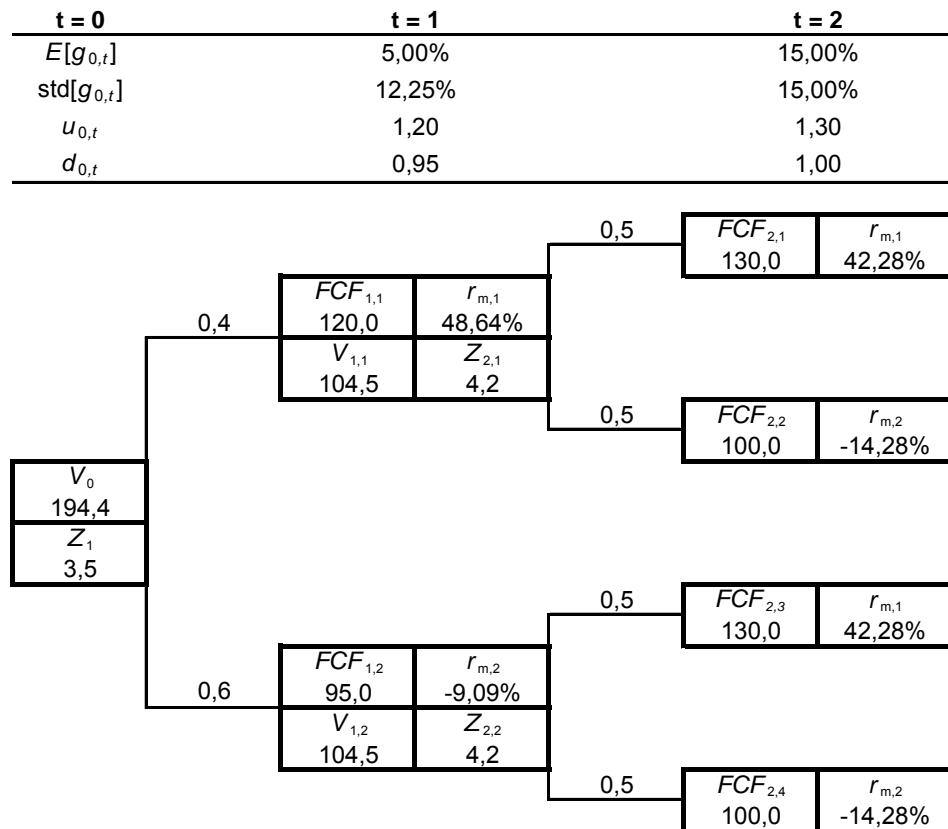


Abbildung 1: Zustandsbaum bei unabhängigen Cashflowverteilungen

³⁹ Anders als in den Abschnitten 2.1 und 2.2 ist hier mit periodenspezifischen Verteilungen der Marktrendite zu rechnen. Hintergrund dessen ist, dass mit der Planung der Cashflows implizit zeitlich veränderliche Wahrscheinlichkeiten unterstellt wurden.

⁴⁰ $Z_{2,1} = Z_{2,2} = 4,2 = 1 \cdot [0,5 \cdot (130,0 - 115,0) \cdot (0,4228 - 0,14) + 0,5 \cdot (100,0 - 115,0) \cdot (-0,1428 - 0,14)]$

$$V_{1,1} = V_{1,2} = 104,5 = \frac{0,5 \cdot (130,0 + 100,0) - 4,2}{1,06}$$

$$Z_1 = 3,5 = 1 \cdot [0,4 \cdot (224,5 - 209,5) \cdot (0,4864 - 0,14) + 0,6 \cdot (199,5 - 209,5) \cdot (-0,0909 - 0,14)]$$

$$V_0 = 194,4 = \frac{(0,4 \cdot (120,0 + 104,5) + 0,6 \cdot (95,0 + 104,5)) - 3,5}{1,06}.$$

Die alternative Barwertermittlung mit Hilfe der Risikozuschlagsmethode setzt die Bestimmung der Betafaktoren der beiden Perioden voraus. Letztere ergeben sich durch Einsetzen der entsprechenden Werte in die Gleichungen (2.27) und (2.28):

$$\beta_1 = \frac{(1+0,06) \cdot 0,1225 \cdot 0,2828}{(1+0,05) - 1 \cdot 0,1225 \cdot 0,2828} \cdot \frac{1}{0,2828^2} = 0,4521, \quad (2.39)$$

$$\beta_2 = \frac{(1+0,06) \cdot 0,15 \cdot 0,2828}{(1+0,15) - 1 \cdot 0,15 \cdot 0,2828} \cdot \frac{1}{0,2828^2} = 0,5076.$$

Daraus ergeben sich folgende risikoadjustierte Kapitalkosten für die beiden Perioden:

$$\begin{aligned} k_1^{u,e} &= 0,06 + 0,4521 \cdot (0,14 - 0,06) = 0,0962, \\ k_2^{u,e} &= 0,06 + 0,5076 \cdot (0,14 - 0,06) = 0,1006. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Mit diesen lässt sich nun der Barwert der Überschussverteilungen direkt durch Diskontierung der erwarteten Cashflows gemäß Gleichung (2.26) gewinnen:

$$V_0 = \frac{105}{(1,0962)} + \frac{115}{(1,06) \cdot (1,1006)} = 95,8 + 98,6 = 194,4. \quad (2.41)$$

Wird nun alternativ davon ausgegangen, dass die Cashflowverteilungen nicht intertemporal unabhängig sind, sondern jeweils durch die in der Vorperiode realisierten Cashflows bedingt werden, ist zunächst der funktionale Zusammenhang zwischen der bisher verwandten, alle Perioden bis t umfassenden Wachstumsrate $\bar{g}_{0,t}$ und den nunmehr maßgeblichen *periodenspezifischen* Wachstumsraten \bar{g}_t zu klären. Aufgrund der in Abschnitt 2.1 dargestellten Zustandsunabhängigkeit der erwarteten Wachstumsrate lässt sich deren Definitionsgleichung in folgenden, für alle bedingten Verteilungen der Periode t gültigen, Ausdruck umformulieren:

$$(1 + \bar{g}_t) = \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_{t-1}} = \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0 \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1 + \bar{g}_{t'})}, \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow (1 + \bar{g}_t) \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1 + \bar{g}_{t'}) = \frac{E[\widetilde{FCF}_t]}{FCF_0} = (1 + \bar{g}_{0,t}).$$

Setzt man die zuvor berechneten erwarteten Wachstumsraten $\bar{g}_{0,t}$ in die Gleichung (2.42) ein, lassen sich Werte für die periodenspezifischen Wachstumsraten gewinnen:

$$\begin{aligned} (1+\bar{g}_1) &= (1+\bar{g}_{0,1}) = 1,05 & \Rightarrow \quad \bar{g}_1 = 5,00\%, \\ (1+\bar{g}_2) &= \frac{(1+\bar{g}_{0,2})}{(1+\bar{g}_{0,1})} = \frac{1,15}{1,05} = 1,0952 \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_2 = 9,52\%. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.42) kann man die in die Ermittlung von $\bar{g}_{0,t}$ eingehenden Wachstumsfaktoren $u_{0,t}$ bzw. $d_{0,t}$ in periodenspezifische Wachstumsparameter überleiten:

$$\begin{aligned} (1+\bar{g}_{0,t}) &= (1+\bar{g}_t) \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'}) \\ &= (p \cdot u_t + (1-p) \cdot d_t) \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'}) \\ &= (p \cdot u_t \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'}) + (1-p) \cdot d_t \cdot \prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'})) \\ &= (p \cdot u_{0,t} + (1-p) \cdot d_{0,t}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow \quad u_t = \frac{u_{0,t}}{\prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'})},$$

$$\Rightarrow \quad d_t = \frac{d_{0,t}}{\prod_{t'=1}^{t-1} (1+\bar{g}_{t'})}.$$

Für das numerische Beispiel gilt damit:

Wachstumsparameter		Jahr 1	Jahr 2
u_t		1,20	1,24
d_t		0,95	0,95

Tabelle 3: Wachstumsfaktoren bei abhängigen Verteilungen

Für die Wahrscheinlichkeiten erhält man mit

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(1+\bar{g}_1)-d_1}{u_1-d_1} = \frac{1,05-0,95}{1,20-0,95} = 0,4, \\ p_2 &= \frac{(1+\bar{g}_2)-d_2}{u_2-d_2} = \frac{1,0952-0,952}{1,238-0,952} = 0,5 \end{aligned} \quad (2.45)$$

dieselben Werte wie im Fall unabhängiger Verteilungen.⁴¹ Über die Wahrscheinlichkeiten können schließlich die in der Planung nicht explizit ausgewiesenen, jedoch für die Ermittlung

⁴¹ Die Identität ist zwingend, was sich daran zeigt, dass die Gleichungen (2.36) und (2.44) ineinander überführen lassen.

der risikoangepassten Kapitalkosten erforderlichen Varianzen der Wachstumsraten berechnet werden:

$$\begin{aligned}\text{var}[\tilde{g}_1] &= p_1 \cdot (u_1 - 1 - \bar{g}_1)^2 + (1 - p_1) \cdot (d_1 - 1 - \bar{g}_1)^2 = \\ &0,4 \cdot (1,20 - 1 - 0,05)^2 + 0,6 \cdot (0,95 - 1 - 0,05)^2 = \\ &0,0150,\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\text{var}[\tilde{g}_2] &= p_2 \cdot (u_2 - 1 - \bar{g}_2)^2 + (1 - p_2) \cdot (d_2 - 1 - \bar{g}_2)^2 = \\ &0,5 \cdot (1,238 - 1 - 0,0952)^2 + 0,5 \cdot (0,952 - 1 - 0,0952)^2 = \\ &0,0204.\end{aligned}$$

Da die vorausgesetzte Entwicklung der Marktrendite nicht von der Annahme über die intertemporalen Abhängigkeiten der Überschussverteilungen beeinflusst wird, können die zuvor berechneten Werte für die Realisationen der Marktrendite unverändert übernommen werden. Demzufolge lässt sich nunmehr der Zustandsbaum des Binomialprozesses aufbauen und der Barwert des Cashflows durch die rekursive Anwendung von Bewertungsgleichung (2.8) berechnen. *Abbildung 2* zeigt den Binomialbaum sowie die Ergebnisse des rekursiven Bewertungsvorgangs.⁴²

⁴² $Z_{2,1} = 4,8 = 1 \cdot [0,5 \cdot (148,6 - 131,4) \cdot (0,4228 - 0,14) + 0,5 \cdot (114,3 - 131,4) \cdot (-0,1428 - 0,14)]$

$$V_{1,1} = 119,4 = \frac{0,5 \cdot (148,6 + 114,3) - 4,8}{1,06}$$

$$Z_{2,2} = 3,8 = 1 \cdot [0,5 \cdot (117,6 - 104,0) \cdot (0,4228 - 0,14) + 0,5 \cdot (90,5 - 104,0) \cdot (-0,1428 - 0,14)]$$

$$V_{1,2} = 94,5 = \frac{0,5 \cdot (117,6 + 90,5) - 3,8}{1,06}$$

$$Z_1 = 6,9 = 1 \cdot [0,4 \cdot (239,4 - 209,5) \cdot (0,4864 - 0,14) + 0,6 \cdot (189,5 - 209,5) \cdot (-0,0909 - 0,14)]$$

$$V_0 = 191,1 = \frac{(0,4 \cdot (120,0 + 119,4) + 0,6 \cdot (95,0 + 94,5)) - 6,9}{1,06}.$$

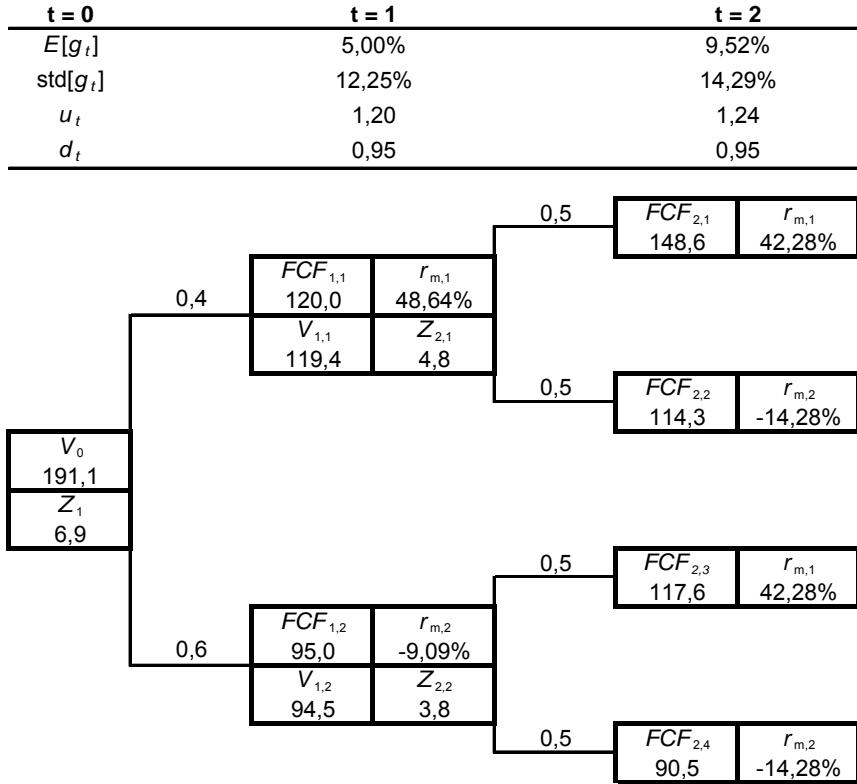


Abbildung 2: Zustandsbaum bei abhängigen Cashflowverteilungen

Die alternative Barwertermittlung mit Hilfe der Risikozuschlagsmethode setzt wiederum die Bestimmung der Betafaktoren für beide Perioden auf Grundlage der Gleichungen (2.14) und (2.15) voraus:

$$\beta_1 = \frac{(1+0,06) \cdot 0,1225 \cdot 0,2828}{(1+0,05) - 1 \cdot 0,1225 \cdot 0,2828} \cdot \frac{1}{0,2828^2} = 0,4521, \quad (2.47)$$

$$\beta_2 = \frac{(1+0,06) \cdot 0,1429 \cdot 0,2828}{(1+0,095) - 1 \cdot 0,1429 \cdot 0,2828} \cdot \frac{1}{0,2828^2} = 0,5076.$$

Daraus ergeben sich die risikoadjustierten Kapitalkostensätze für die beiden Perioden:

$$\begin{aligned} k_1^{u,e} &= 0,06 + 0,4521 \cdot (0,14 - 0,06) = 0,0962, \\ k_2^{u,e} &= 0,06 + 0,5076 \cdot (0,14 - 0,06) = 0,1006. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Mit diesen lässt sich nun der Barwert der Überschussverteilungen direkt durch die Diskontierung der erwarteten Cashflows gemäß Gleichung (2.15) ermitteln:

$$V_0 = \frac{105}{(1,0962)} + \frac{115}{(1,0962) \cdot (1,1006)} = 95,8 + 95,3 = 191,1. \quad (2.49)$$

3. Diskussion

Die von *Richter* formulierten vereinfachten Diskontierungsregeln haben in beachtlichem Umfang zu einem besseren Verständnis der Zusammenhänge zwischen der Gestalt sowie dem intertemporalen stochastischen Verbund der Überschussverteilungen einerseits und den zu deren Diskontierung anzusetzenden Kapitalkosten andererseits beigetragen.

Es erscheint jedoch vorteilhaft, das von ihm zugrunde gelegte Binomialmodell in der hier vorgeschlagenen Weise zu verallgemeinern. So wurde in Abschnitt 2 die von *Richter* getroffene Annahme eines rekombinierenden Binomialbaums aufgegeben. Die diesem Modell immanenten reziproken Wachstumsfaktoren implizieren unrealistisch große Varianzen der Cashflowverteilungen.⁴³ Dies ist insofern von Bedeutung, als – wie oben deutlich wurde – die Varianz der Wachstumsraten der Überschüsse einen signifikanten Einfluss auf die Höhe der Kapitalkosten und damit auf den Wert des Unternehmens ausübt. Diesem Nachteil kann, wie gezeigt, durch die Vorgabe der Varianz der Wachstumsraten der Cashflows begegnet werden. Zusammen mit der analogen Verarbeitung der Verteilungsparameter des Marktportfolios wird eine konsistente und alle entscheidenden Parameter umfassende Modellierung des Binomialprozesses ermöglicht. Die Geschlossenheit des Modells erlaubt es entsprechend, eine vom Bewerter unterstellte Modifikation einer Inputvariable in ihren Auswirkungen auf die anderen im Modell verarbeiteten Parameter zu quantifizieren.⁴⁴ Weiterhin lässt die vorgeschlagene Vorgehensweise den Ansatz von erwarteten negativen Wachstumsraten zu. Letztere sind aufgrund der von *Richter* modellierten Struktur eines rekombinierenden Modells nicht darstellbar.⁴⁵

⁴³ Für den von *Richter* typischerweise unterstellten Fall $p = (1-p) = 0,5$ resultiert für die endogen verarbeitete Varianz der Wachstumsraten bei reziproken Wachstumsparametern und abhängigen Überschussverteilungen $\text{var}[\tilde{g}_t] = (1 + E[\tilde{g}_t])^2 - 1$. Vgl. *Richter/Timmreck* (2002), S. 26. Somit impliziert bereits ein 1%-iges Wachstum eine Standardabweichung der Wachstumsrate von 14,2%, d.h. ein Wachstum von 15,2% (-13,2%) im positiven (negativen) Umweltzustand.

⁴⁴ *Richter* zeigt zwar auch die Konsequenzen sich ändernder Parameter, jedoch werden jeweils nur ad hoc-Modifikationen des von ihm unterstellten Grundmodells gezeigt.

⁴⁵ Vgl. hierzu die Modellierung der Wachstumsparameter in Gleichung (8) bei *Richter* (2001), S. 179.

Der vielleicht entscheidende Vorteil einer Vorgabe der Varianzen und der damit möglichen Modellierung der Wachstumsparameter liegt in der nachgewiesenen Tatsache, dass auf eine Spezifikation der subjektiven Wahrscheinlichkeit p verzichtet werden kann. Während *Richter* neben der erwarteten Wachstumsrate der Cashflows sowohl ein Wahrscheinlichkeitsmaß als auch ein rekombinierendes Modell benötigt, braucht man für den in Kapitel 2 erarbeiteten Kalkül die erwartete Wachstumsrate der Überschüsse sowie deren Standardabweichung, muss sich dabei aber nicht im engen Korsett eines rekombinierenden Modells bewegen. Mit Blick auf die in der Praxis verbreitete Szenarioplanung erscheint die fehlende Notwendigkeit, Eintrittswahrscheinlichkeiten zu prognostizieren, als vorteilhaft: Wie mit dem numerischen Beispiel in Kapitel 2.4 deutlich wurde, ist es durch die Prognose dreier Szenarien möglich, sämtliche zur Berechnung der Kapitalkosten notwendigen Eingangsgrößen zu bestimmen. Die sich implizit aus der Planung ergebenden Wahrscheinlichkeiten sind nur in einem Zwischenschritt erforderlich, falls der Bewerter keine Einschätzung bezüglich der Varianz der Cashflows treffen kann.

Die vorstehende Analyse unterstreicht die von *Richter* gezogene Schlussfolgerung: „It is not consistent to discount cash flow streams with time-varying growth rates with a single risk-adjusted discount rate.“⁴⁶ Zugleich wurde ein konsistentes Modell entwickelt, das die Kapitalkosten bei intertemporal veränderlichen Parametern der Überschussverteilungen sowie unterschiedlichen Annahmen über die intertemporalen Abhängigkeiten der Verteilungen explizit rechenbar macht.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass die Vorgabe eines Binomialprozesses einschränkend ist, da die Cashflows ausgehend von einem Zustand lediglich zwei Ausprägungen annehmen können. Dieser Nachteil relativiert sich indes, wenn man bedenkt, dass in praxi häufig direkt „Erwartungswerte“ geplant werden.⁴⁷ Im Gegensatz zu diesem Vorgehen wird mit Hilfe des Binomialprozesses zumindest der die Überschüsse prägende stochastische Prozess und damit die Verteilung vollständig charakterisiert, d.h. es werden die der Bewertung zugrunde liegenden Annahmen expliziert.

Die Annahme, dass sich die Marktrendite entsprechend dem Binomialmodell entwickelt, ist zwar angreifbar, aber durchaus plausibel: Durch diese Prämisse wird ein linearer Zusammenhang zwischen den Ausprägungen der Cashflows und der Marktrendite impliziert. Dies lässt

⁴⁶ *Richter* (2001), S. 194.

sich mit einer gewissen Abhängigkeit der Unternehmensüberschüsse von der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung begründen.⁴⁸

Man mag dem in Kapitel 2 vorgeschlagenen Modell vorwerfen, dass es zwar eine zeit-, nicht aber eine zustandsabhängige Varianz der Wachstumsraten voraussetzt. Gerade dadurch werden jedoch periodenspezifische, zustandsunabhängige Kapitalkosten erst ableitbar.⁴⁹ Obwohl dies die Realitätsnähe des Modells beschneidet, ist diese Annahme unumgänglich, wenn auf die – eher umständliche – Barwertermittlung mit Hilfe der Konstruktion von Zustandsbäumen und anschließender rekursiver Bewertung verzichtet und stattdessen das Bewertungsergebnis über eine explizite Bewertungsgleichung erzielt werden soll.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das im Rahmen des numerischen Beispiels beschriebene Verfahren eine Möglichkeit eröffnet, zum einen die in der Szenarioplanung implizit unterstellten Verteilungsparameter der Cashflowverteilung offen zu legen. Zum anderen wird dem Bewerter ein Verfahren an die Hand gegeben, mit dem herangezogene Diskontierungssätze anhand der Charakteristika der Cashflowverteilungen plausibilisiert werden können. Dies dient zur Abwehr unbegründbar hoher oder niedriger Kapitalkostensätze, was aus Sicht der Bewertungspraxis wünschenswert erscheint.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die persönliche Besteuerung vergleichsweise einfach in die oben abgeleiteten Kapitalkosten eingepasst werden kann. Dabei leistet das hier unterstellte Binomialmodell einen Beitrag zur Lösung eines Problems, das bei mehrperiodiger Anwendung des Nachsteuer-CAPM auftritt. In diesem in IDW ES 1 n.F. zur Anwendung vorgeschlagenen Modell übt die Dividendenrendite steuerlich bedingt einen Einfluss auf die gleichgewichtige Nettorendite aus.⁵⁰ Während die Dividendenrendite im einperiodigen Modell als deterministisch unterstellt wird, muss sie im Mehrperiodenfall stochastisch werden.⁵¹ Die hierdurch notwendige Abbildung stochastischer Dividendenrenditen ist mit dem vorliegenden Binomialprozess möglich. Dies soll in einer späteren Ausarbeitung gezeigt werden.

⁴⁷ Vgl. Kruschwitz/Löffler (2005), S. 25.

⁴⁸ Vgl. Richter (2001), S. 185.

⁴⁹ Vgl. auch Richter (2005), S. 71.

⁵⁰ Vgl. IDW (2005), Tz. 102-103; Wagner/Jonas/Ballwieser/Tschöpel (2004), S. 890-896; Jonas/Löffler/Wiese (2004), S. 900-904.

⁵¹ Vgl. Jonas/Löffler/Wiese (2004), S. 904.

4. Thesenförmige Zusammenfassung

- (1) Um der Prognoseunsicherheit Rechnung zu tragen, sind die künftigen Überschüsse mehrwertig zu planen. Idealerweise gelingt es dem Bewerter, die periodischen Cashflowverteilungen vollständig zu definieren, wobei diese intertemporal unabhängig oder abhängig miteinander verknüpft seien können. Anstatt explizit einen Zustandsbaum zu prognostizieren, aus dem sich die stochastische Verknüpfung der bedingten Verteilungen implizit ergibt, lassen sich die zukünftigen Cashflows auch mit Hilfe der Momente der Verteilung modellieren.
- (2) Der Barwert der prognostizierten Cashflowverteilungen kann im Kontext des CAPM sowohl durch die rekursive Anwendung einer Sicherheitsäquivalentgleichung als auch durch die Diskontierung von unbedingten Erwartungswerten mit risikoadjustierten Kapitalkosten ermittelt werden. Durch die Annahme eines Binomialmodells für die Entwicklung der zukünftigen Cashflows und der Marktrenditen lassen sich idealtypische Voraussetzungen schaffen, unter denen sich vereinfachte Diskontierungsregeln bei Anwendung der Risikozuschlagsmethode formuliert werden können.
- (3) In dem hier unterstellten Binomialmodell werden die Verteilungsparameter der Wachstumsrate der Cashflows und der Marktrendite exogen vorgegeben, um auf deren Basis die Ausprägungen der Cashflows und der Marktrendite in den einzelnen Umweltzuständen ermitteln zu können. Dieses Vorgehen stellt insoweit eine Erweiterung zu den Arbeiten von *Richter* dar, als dass dieser die Varianz der Wachstumsrate nur als endogene Variable verarbeitet, d.h. durch den Erwartungswert der Wachstumsrate und die subjektive Wahrscheinlichkeit p bestimmt. Auch die explizite Modellierung der Realisationen der Marktrendite geht über die Überlegungen von *Richter* hinaus. Zwar leitet auch *Richter* Faktoren ab, mit denen die Realisationen der Marktrendite bei einer Modifikation der Wahrscheinlichkeit p anzupassen wären, eine Integration dieser Ergebnisse in das Gesamtmodell unterbleibt jedoch.
- (4) Die Eigenschaften des zugrunde gelegten Binomialprozesses implizieren sowohl bei unabhängigen als auch bei abhängigen Überschussverteilungen die Zustandsunabhängigkeit der Kovarianzen zwischen den Cashflows des Unternehmens und der Marktrendite. Infolge der daraus resultierenden zustandsunabhängigen Betafaktoren lassen sich für alle Perioden eindeutige risikoadjustierte Kapitalkostensätze ableiten, mit denen eine

Diskontierung von unbedingten Erwartungswerten zulässig ist. Für die theoretische Robustheit des entwickelten Modells spricht, dass die Kapitalkostensätze den von *Fama* formulierten Bedingungen für die wiederholte Anwendung des einperiodigen CAPM genügen.

- (5) Die Höhe der risikoadjustierten Kapitalkosten wird nur durch die Vorgabe der Verteilungsparameter der Wachstumsrate der Cashflows sowie der Marktparameter bestimmt; auf eine Spezifikation der Wahrscheinlichkeit p kann verzichtet werden. Dies ist ein entscheidender Vorteil des erweiterten Binomialmodells, da die Wahrscheinlichkeit p eine kritische Inputgröße in dem Grundmodell von *Richter* darstellt.
- (6) Das erweiterte Binomialprozess geht in einigen entscheidenden Aspekten über die Überlegungen von *Richter* hinaus. So kann die von *Richter* getroffene Annahme eines rekombinierenden Binomialbaums aufgegeben werden, wodurch die in diesem Modell implizit unterstellten großen Varianzen der Cashflowverteilungen abgewehrt werden können. Außerdem wird durch die Vorgabe der Varianz der Wachstumsraten der Cashflows in Kombination mit der analogen Verarbeitung der Verteilungsparameter des Marktportfolios eine konsistente und alle entscheidenden Parameter umfassende Modellierung des Prozesses ermöglicht. Die Geschlossenheit des Modells erlaubt es dementsprechend, die Auswirkungen von Modifikationen einer Inputvariablen auf die anderen im Modell verarbeiteten Parameter zu quantifizieren. Weiterhin lässt das Modell den Ansatz von erwarteten negativen Wachstumsraten zu, welche in der von *Richter* gewählten rekombinierenden Struktur nicht darstellbar sind.
- (7) Der Rückgriff auf einen Binomialprozess für die Entwicklung der Cashflows ist einschränkend, da diese ausgehend von einem Zustand nur zwei Ausprägungen annehmen können. Blickt man auf das in praxi verbreitete Vorgehen, nur auf geplante „erwartete Größen“ abzustellen, ohne dass es zu einer Spezifikation der zugrunde liegenden Verteilungen kommt, so relativiert sich dieser Nachteil. So können mit Hilfe des Binomialprozesses zumindest der die Überschüsse prägende stochastische Prozess und die dadurch implizierte Verteilung vollständig charakterisiert und somit die der Bewertung zugrunde liegenden Annahmen expliziert werden.
- (8) In der Praxis ist es üblich, die zukünftigen Cashflows des zu bewertenden Unternehmens mehrwertig mithilfe von drei verschiedenen Szenarien zu prognostizieren; explizite Aussagen über die Varianz der Cashflows bzw. die Varianz der Wachstumsraten un-

terbleiben üblicherweise. Ausgehend von den Eigenschaften des Binomialmodells kann gezeigt werden, dass die in der Szenarioplanung implizit unterstellten Verteilungsparameter der Cashflowverteilung offen gelegt und auf diese Weise die Eingangsgrößen für die Bestimmung der risikoadjustierten Kapitalkosten ermittelt werden können. Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell wird dem Bewerter somit ein Verfahren an die Hand gegeben, mit dem theoretisch robuste, den Charakteristika der Cashflowverteilungen entsprechende risikoadjustierte Kapitalkosten bestimmt oder zumindest verwandte Diskontierungssätze auf ihre Plausibilität hin überprüft werden können.

Anhang

Beweis von Beziehung (2.14)

Für die zustandsabhängigen Renditen der freien Cashflows gilt im Mehrperiodenkontext:

$$\tilde{r}_t | \widetilde{FCF}_{t-1,i} = \frac{\left[\widetilde{FCF}_t + \tilde{V}_t | \widetilde{FCF}_{t-1,i} \right]}{V_{t-1,i} \left[\widetilde{FCF}_t + \tilde{V}_t | \widetilde{FCF}_{t-1,i} \right]} - 1. \quad (4.1)$$

Hiermit lassen sich die in die Berechnung des Betafaktors eingehenden zustandsabhängigen Kovarianzen zwischen der Rendite der Cashflows und der Marktrendite formulieren als:

$$\text{cov} \left[\tilde{r}_t | \widetilde{FCF}_{t-1,i}; \tilde{r}_m \right] = \frac{\text{cov}_{t-1,i} \left[\widetilde{FCF}_t + \tilde{V}_t, \tilde{r}_m \right]}{V_{t-1,i} \left[\widetilde{FCF}_t + \tilde{V}_t \right]}. \quad (4.2)$$

Zum Beweis der Gleichung (2.14) soll zunächst die Kovarianz der Renditen für die Periode T abgeleitet werden. Es wird unterstellt, dass jenseits der Periode T keine Cashflows mehr fließen, mithin $\tilde{V}_T = 0$ gilt (Transversalität).⁵² Für die Kovarianz zwischen den Cashflows und der Marktrendite in der Periode T ergibt sich im Binomialmodell:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{T-1,i} \left[\widetilde{FCF}_T; \tilde{r}_m \right] = \\ p \cdot (FCF_{T-1,i} \cdot u_T - E_{T-1,i} [\widetilde{FCF}_T]) \cdot (r_{m,1} - \bar{r}_m) + \\ (1-p) \cdot (FCF_{T-1,i} \cdot d_T - E_{T-1,i} [\widetilde{FCF}_T]) \cdot (r_{m,2} - \bar{r}_m). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ersetzt man in (4.3) den Erwartungswert der Cashflows mit den Gleichungen (2.2) und (2.4), resultiert nach Ausklammern von $\widetilde{FCF}_{T-1,i}$:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{T-1,i} \left[\widetilde{FCF}_T; \tilde{r}_m \right] = FCF_{T-1,i} \cdot \kappa_T \\ \text{mit} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\kappa_T = \left[p \cdot (u_T - (1 + \bar{g}_T)) \cdot (r_{m,1} - \bar{r}_m) + (1-p) \cdot (d_T - (1 + \bar{g}_T)) \cdot (r_{m,2} - \bar{r}_m) \right].$$

Da die in den Parameter κ_T eingehenden Größen allesamt nicht von den in der Periode T-1 realisierten Umweltzuständen abhängen, erhält man für κ_T in allen bedingten Verteilungen der

⁵² Eine analoge Beweisführung findet sich beispielsweise bei *Myers/Turnbull* (1977), S. 323-324.

Periode T die gleichen Werte. Dementsprechend lässt sich der zustandsabhängige Barwert der Cashflows aus der Periode T wie folgt formulieren:

$$V_{T-1,i} [\widetilde{FCF}_T] = \frac{E_{T-1,i} [\widetilde{FCF}_T] - \lambda \cdot \text{cov}_{T-1,i} [\widetilde{FCF}_T; \tilde{r}_m]}{1 + r_f} =$$

$$\frac{FCF_{T-1,i} \cdot (1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot FCF_{T-1,i} \cdot \kappa_T}{1 + r_f} \quad (4.5)$$

Für die Kovarianz der Renditen in T gilt somit:

$$\text{cov}_{T-1,i} [\tilde{r}_T; \tilde{r}_m] = \frac{(1 + r_f) \cdot FCF_{T-1,i} \cdot \kappa_T}{FCF_{T-1,i} \cdot (1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot FCF_{T-1,i} \cdot \kappa_T} = \frac{(1 + r_f) \cdot \kappa_T}{(1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot \kappa_T}. \quad (4.6)$$

Im nächsten Schritt wird die Kovarianz der Renditen für die Periode T-1 berechnet. Dazu sind die Cashflowrealisationen in allen Umweltzuständen der Periode T-1 um den zustandszugehörigen Barwert der freien Cashflows aus der Periode T zu erhöhen, um daraus neue bedingte Verteilungen zu generieren:⁵³

$$\widetilde{FCF}_{T-1,i} + \widetilde{V}_{T-1,i} = \widetilde{FCF}_{T-1,i} + \frac{\widetilde{FCF}_{T-1,i} \cdot (1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot \widetilde{FCF}_{T-1,i} \cdot \kappa_T}{1 + r_f} =$$

$$\widetilde{FCF}_{T-1,i} \cdot \left(1 + \frac{(1 + \bar{g}_T) - \lambda \cdot \kappa_T}{1 + r_f} \right) = \widetilde{FCF}_{T-1,i} \cdot (1 + \psi_T). \quad (4.7)$$

Man erkennt aus (4.7), dass der Parameter ψ_T ebenfalls nur periodenspezifisch ist, nicht jedoch von dem in T-1 realisierten Umweltzustand i abhängt. Somit lässt sich die zustandsabhängige Kovarianz zwischen den Cashflows und der Marktrendite der Periode T-1 unter Anwendung von Gleichung (4.4) wie folgt bestimmen:

$$\text{cov}_{T-2,i} \left[(\widetilde{FCF}_{T-1} + \widetilde{V}_{T-1}); \tilde{r}_m \right] = \text{cov}_{T-2,i} \left[\widetilde{FCF}_{T-1} \cdot (1 + \psi_T); \tilde{r}_m \right] = \widetilde{FCF}_{T-2,i} \cdot (1 + \psi_T) \cdot \kappa_{T-1}. \quad (4.8)$$

Aus Gleichung (4.5) folgt entsprechend für den zustandsabhängigen Barwert der Cashflows aus der Periode T-1:

⁵³ Da Gleichung (4.7) aus Sicht von T-2 formuliert ist, tragen die Cashflows in T-1 eine Tilde.

$$\begin{aligned}
V_{T-2,i} [\widetilde{FCF}_{T-1} + \widetilde{V}_{T-1}] &= V_{T-2,i} [\widetilde{FCF}_{T-1} \cdot (1 + \psi_T)] = \\
\frac{(1 + \psi_T) \cdot [E_{T-2,i} [\widetilde{FCF}_{T-1}] - \lambda \cdot \text{cov}_{T-2,i} [\widetilde{FCF}_{T-1}; \tilde{r}_m]]}{1 + r_f} &= \\
\frac{FCF_{T-2,i} \cdot (1 + \psi_T) \cdot [(1 + \bar{g}_{T-1}) - \lambda \cdot \kappa_{T-1}]}{1 + r_f}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Der Quotient aus (4.8) und (4.9) liefert die relative Kovarianz, mithin die Kovarianz der Renditen in T-1:

$$\text{cov}_{T-2,i} [\tilde{r}_{T-1}; \tilde{r}_m] = \frac{(1 + r_f) \cdot \widetilde{FCF}_{T-2,i} \cdot (1 + \psi_T) \cdot \kappa_{T-1}}{\widetilde{FCF}_{T-2,i} \cdot (1 + \psi_T) \cdot ((1 + \bar{g}_{T-1}) - \lambda \cdot \kappa_{T-1})} = \frac{(1 + r_f) \cdot \kappa_{T-1}}{(1 + \bar{g}_{T-1}) - \lambda \cdot \kappa_{T-1}}. \tag{4.10}$$

Mit Hilfe der gleichen Rechenschritte lassen sich im Anschluss daran auch die Kovarianzen für die Perioden T-2, T-3, etc. bis hin zur ersten Periode ermitteln. Ergebnis ist die folgende Beziehung für alle bedingten Verteilungen einer betrachteten Periode t:

$$\text{cov} [\tilde{r}_t; \tilde{r}_m] = \frac{(1 + r_f) \cdot \kappa_t}{(1 + \bar{g}_t) - \lambda \cdot \kappa_t}. \tag{4.11}$$

Setzt man nun die Gleichungen für die Wachstumsparameter u_t bzw. d_t und die Realisationen der Marktrendite $r_{m,1}$ bzw. $r_{m,2}$ in den Ausdruck κ_t ein, folgt

$$\begin{aligned}
\kappa_t &= p \cdot \left((1 + \bar{g}_t) + \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}} - (1 + \bar{g}_t) \right) \cdot \left(\bar{r}_m + \text{std} [\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{(1-p)}{p}} - \bar{r}_m \right) + \\
(1-p) \cdot \left((1 + \bar{g}_t) - \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}} - (1 + \bar{g}_t) \right) \cdot \left(\bar{r}_m - \text{std} [\tilde{r}_m] \cdot \sqrt{\frac{p}{(1-p)}} - \bar{r}_m \right) = \\
(1-p) \cdot \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \text{std} [\tilde{r}_m] + p \cdot \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \text{std} [\tilde{r}_m] &= \\
\text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \text{std} [\tilde{r}_m]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

und damit Resultat (2.14) für die Kovarianz der Renditen:

$$\text{cov} [\tilde{r}_t; \tilde{r}_m] = \frac{(1 + r_f) \cdot \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \text{std} [\tilde{r}_m]}{(1 + \bar{g}_t) - \lambda \cdot \text{std} [\tilde{g}_t] \cdot \text{std} [\tilde{r}_m]}. \tag{4.13}$$

Literaturverzeichnis

Ballwieser, Wolfgang (2004): Unternehmensbewertung, Prozeß, Methoden und Probleme, Stuttgart 2004.

Ballwieser, Wolfgang (1993): Methoden der Unternehmensbewertung, in: *Gebhardt, Günther/Gerke, Wolfgang/Steiner, Manfred* (Hrsg.): Handbuch des Finanzmanagements, München 1993, S. 151-176.

Bamberg, Günter/Dorfleitner, Gregor/Krapp, Michael (2004): Zur Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme mit intertemporaler Abhängigkeitsstruktur, in: *BFuP*, 56. Jg. (2004), S. 101-118.

Bimberg, Lothar (1991): Langfristige Renditeberechnung zur Ermittlung von Risikoprämien, Frankfurt am Main 1991.

Drukarczyk, Jochen (2003): Unternehmensbewertung, 4. Aufl., München 2003.

Drukarczyk, Jochen (1993): Theorie und Politik der Finanzierung, 2., völlig neugestaltete Aufl., München.

Fama, Eugene F. (1996): Discounting Under Uncertainty, in: *JoB*, Vol. 69 (1996), S. 415-428.

Fama, Eugene F. (1977): Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting Under Uncertainty, in: *JFE*, Vol. 5 (1977), S. 3-24.

Hachmeister, Dirk (1998): Diskontierung bei Unsicherheit, in: *Kruschwitz, Lutz/Löffler, Andreas* (Hrsg.): Ergebnisse des Workshops "Unternehmensbewertung" vom 7. Februar 1998, Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Freien Universität Berlin, Nr. 1998/7, S. 25-33.

Helmis, Sven/Timmreck, Christian/Richter, Frank (2002): Ein alternativer Ansatz zur Bestimmung der Risikoprämie im Rahmen der Bewertung von Investitionsprojekten, in: *WiSt*, 31. Jg. (2002), S. 302-308.

IDW (2005): Entwurf einer Neufassung des IDW Standards: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW ES 1 n.F.), in: *WPg*, 58. Jg. (2005), S. 28-46.

Jonas, Martin/Löffler, Andreas/Wiese, Jörg (2004): Das CAPM mit deutscher Einkommenssteuer, in: *WPg*, 57. Jg. (2004), S. 898-906.

Kruschwitz, Lutz (2004): Finanzierung und Investition, 4., überarbeitete und erweiterte Aufl., München/Wien 2004.

Kruschwitz, Lutz/Löffler, Andreas (2005): Ein neuer Zugang zum Konzept des Discounted Cashflow, in: Journal für Betriebswirtschaft, 55. Jg. (2005), S. 21-36.

Lintner, John (1965): The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, in: REStat, Vol. 47 (1965), S. 13-37.

Mossin, Jan (1966): Equilibrium in a Capital Asset Market, in: Ec, Vol. 34 (1966), S. 768-783.

Myers, Stewart C./Turnbull, Stuart M. (1977): Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News, in: JF, Vol. 32 (1977), S. 321-333.

Rapp, Marc Steffen/Schwetzler, Bernhard (2004): Personal Taxes and Circularity Problems in Corporate Valuation - A Note (not only) on 'Valuation With or Without Personal Income Taxes?' by Frank Richter, sbr 2004, Working Paper, Handelshochschule Leipzig, Version vom 13. August 2004, S. 1-23 [Download unter: <http://ssrn.com/abstract=576102>, Stand: 2. August 2005].

Richter, Frank (2005): Mergers & Acquisitions, Investmentanalyse, Finanzierung und Prozessmanagement, München 2005.

Richter, Frank (2004a): Valuation With or Without Personal Income Taxes?, in: sbr, Vol. 56 (2004), S. 20-45.

Richter, Frank (2004b): Relativer Unternehmenswert, in: *Richter, Frank/Timmreck, Christian* (Hrsg.): Unternehmensbewertung, Moderne Instrumente und Lösungsansätze, Stuttgart 2004, S. 367-380.

Richter, Frank (2003): Logische Wertgrenzen und subjektive Punktschätzungen – Zur Anwendung der risikoneutralen (Unternehmens-)Bewertung, in: *Heintzen, Markus/Kruschwitz, Lutz* (Hrsg.): Unternehmen bewerten, Berlin 2003, S. 59-73.

Richter, Frank (2002): Simplified Discounting Rules, Variable Growth, and Leverage, in: sbr, Vol. 54 (2002), S. 136-147.

Richter, Frank (2001): Simplified Discounting Rules in Binomial Models, in: sbr, Vol. 53 (2001), S. 175-196.

Richter, Frank/Drukarczyk, Jochen (2001): Wachstum, Kapitalkosten und Finanzierungsefekte, in: DBW, 61. Jg. (2001), S. 627-639.

Richter, Frank/Helmis, Sven (2001): Pragmatische Risikozuschläge, Sharpe-Ratio und Wertadditivität, Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Universität Witten/Herdecke, Version vom September 2001.

Richter, Frank/Timmreck, Christian (2002): Valuation With Risk-Neutral Probabilities: Attempts to Quantify Q, Arbeitspapier, Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Universität Witten/Herdecke, Version vom Oktober 2002.

Röder, Klaus/Müller, Sarah (2001): Mehrperiodige Anwendung des CAPM im Rahmen von DCF-Verfahren, in: FB, 3. Jg. (2001), S. 225-233.

Schwetzler, Bernhard (2002): Das Ende des Ertragswertverfahrens?, in: zfbf, 54. Jg. (2002), S. 145-158.

Schwetzler, Bernhard (2000): Unternehmensbewertung unter Unsicherheit - Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, in: zfbf, 52. Jg., S. 469-486.

Sharpe, William F. (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, in: JF, Vol. 19 (1964), S. 425-442.

Treynor, Jack L. (1961): Towards a Theory of Market Value of Risky Assets, unveröffentlichtes Manuskript, 1961, Nachdruck in: *Korajczyk, Robert* (Hrsg.): Asset Pricing and Portfolio Performance, London 1999, S. 15-22.

Wagner, Wolfgang/Jonas, Martin/Ballwieser, Wolfgang/Tschöpel, Andreas (2004): Weiterentwicklung der Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S 1), in: WPg, 57. Jg. (2004), S. 889-898.

Wilhelm, Jochen (2005): Unternehmensbewertung – Eine finanzmarkttheoretische Untersuchung, in: ZfB, 75. Jg. (2005), S. 631-665.

Dr. Stephan Rosarius, MBR

Dr. Jörg Wiese, MBR

Ludwig-Maximilians-Universität München
Seminar für Rechnungswesen und Prüfung

Ludwigstr. 28/RG

Tel.: +49-89-2180-6309

Fax.: +49-89-2180-6327

E-mail:

rosarius@bwl.uni-muenchen.de

wiese@bwl.uni-muenchen.de

<http://www.rwp.bwl.uni-muenchen.de>