Verallgemeinerung der Sätze von Johnson und Utumi auf Hom

Friedrich Kasch

1. Einleitung

Sei R ein Ring mit 1-Element und seien $A, B, \ldots$ unitäre R-Linksmoduln. Bezeichne $S := \mathrm{End}_R(N)$, $T := \mathrm{End}_R(M)$, dann ist $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ein S-T-Bimodul. Schreiben wir ${}_S\mathrm{Hom}_R(M, N)$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(M, N)_T$, dann soll $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ nur als S-Links- bzw. T-Rechtsmodul betrachtet werden.

Der Ausgangspunkt für diese Note sind die bekannten Sätze von Johnson und Utumi über den Endomorphismenring eines selbstinjektiven Modules bzw. im dualen Fall eines selbstprojektiven, komplementierten Moduls. Diese Sätze bilden bekanntlich eine wichtige Grundlage für entsprechende Strukturuntersuchungen bei Moduln.

Der zweite Ausgangspunkt für diese Note ist ds Kelly-Radikal [2], das in unserem Fall wie folgt definiert ist:

$$(1) \qquad \mathrm{RAD}(M, N) := \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \forall g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \; [1_M - gf \text{ ist invertierbar in } T]\}.$$

Dabei sei 1_M die identische Abbildung von M und "$1_M - gf$ ist invertierbar in T" bedeutet, daß $1_M - gf$ ein Automorphismus von M ist. Wir weisen darauf hin, daß $\mathrm{RAD}(M, N)$ unabhängig von der Seite ist, denn bekanntlich ist $1_M - gf$ genau dann ein Automorphismus von M, wenn $1_N - fg$ genau dann ein Automorphismus von M, wenn $1_N - fg$ ein Automorphismus von N ist. Im Falle $M = N$ folgt $\mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{RAD}(T) =$ Jacobson-Radikal des Ringes T. Das Kelly-Radikal ist geeignet, die Sätze von Johnson und Utumi von End auf Hom zu verallgemeinern. Das hat insbesondere den Vorteil, daß genau zu sehen ist, welche Voraussetzungen für die entsprechenden Aussagen über Hom tatsächlich gebraucht werden.

Als Anwendung gehen wir aufdie Frage ein, unter welchen Voraussetzungen das Kelly-Radikal $\mathrm{Rad}(M, N)$ einerseits gleich dem Total $\mathrm{TOT}(M, N)$ (Definition folgt später) und andererseits gleich dem Jacobson-Radikal $\mathrm{Rad}({}_S\mathrm{Hom}_R(M, N))$ bzw. $\mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M,N)_T)$ ist.

2. Regularitätseigneschaften von $\mathrm{Hom}_R(M, N)$

Im Hinblick auf die Sätze von Johnson und Utumi ist es klar, daß die Regularitätseigenschaft im Sinne von von Neumann gemeint ist. Wir brauchen einige Bezeichnungen. Für einen Untermodul U von M schreiben wir $U \subseteq M$ und es bedeute $U \subseteq^{\circ} M$ bzw. $U \subseteq^{*} M$ einen kleinen bzw. großen Untermodul von M.

2.1. HILFSATZ. *Sei* $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

1) (i) *Ist* M *selbstinjektiv und ist* $\mathrm{Ke}(h) \subseteq^{*} M$, *dann gilt* $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$.

(ii) *Ist* M N*-injektiv und ist* $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$, *dann gilt* $\mathrm{Ke}(h) \subseteq^{*} M$.

2) (i) *Ist* N *selbstprojektiv und ist* $\mathrm{Bi}(h) \subseteq^{\circ} N$, *dann gilt* $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$.

(ii) *Ist* N M*-projektiv und ist* $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$, *dann gilt* $\mathrm{Bi}(h) \subseteq^{\circ} N$.

BEWEIS. 1) (i) Zu zeigen ist: Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ ist $1_M - gh$ ein Automorphismus. Sei $x \in \mathrm{Ke}(h)$, dann gilt

$$(1_M - gh)(x) = x, \tag{2}$$

also

$$\mathrm{Ke}(h) \cap \mathrm{Ke}(1_M - gh) = 0.$$

Die Voraussetzung $\mathrm{Ke}(h) \subseteq^{*} M$ impliziert $\mathrm{Ke}(1_M - gh) = 0$, d.h. $1_M - gh$ ist ein Monomorphismus. Da M selbstinjektiv ist, folgt

$$M = \mathrm{Bi}(1_M - gh) \oplus M_0. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $\mathrm{Ke}(h) \subseteq \mathrm{Bi}(1_M - gh)$, also ist auch $\mathrm{Bi}(1_M - gh) \subseteq^{*} M$ und daher folgt aus (3) $M_0 = 0$. Somit ist $1_M - gh$ auch surjektiv also ein Automorphismus.

1) (ii) Sei $U \subseteq M$ mit $\mathrm{Ke}(h) \cap U = 0$. Bezeichne $\iota : U \to M$ die Inklusion. Dann ist $h\iota$ ein Monomorphismus. Nach Voraussetzung existiert dann in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & N \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

ein g mit $\iota = gh\iota$. Für $u \in U$ folgt $\iota(u) = u = gh\iota(u) = gh(u)$, also gilt $U \subseteq \mathrm{Ke}(1_M - gh)$. Die Voraussetzung besagt aber, daß $1_M - gh$ ein Automorphismus ist, also gilt $\mathrm{Ke}(1_M - gh) = 0$ und daher auch $U = 0$. Damit haben wir $\mathrm{Ke}(h) \subseteq^{*} M$ gezeigt.

2) (i) Um dem Leser Mühe zu ersparen, geben wir auch den dualen Beweis an. Da für beliebiges $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$

$$\mathrm{Bi}(1_N - hg) + \mathrm{Bi}(hg) = N$$

ist und wegen

$$\mathrm{Bi}(hg) \subseteq \mathrm{Bi}(h) \subseteq^{\circ} N$$

auch $Bi(hg) \hookrightarrow^{\circ} N$ folgt, ist $Bi(1_N - hg) = N$ und somit $1_N - hg$ ein Epimorphismus. Die Voraussetzung, daß N selbstprojektiv ist, impliziert dann

$$(4) \qquad N = \mathrm{Ke}(1_N - hg) \oplus N_0.$$

Ist $x \in \mathrm{Ke}(1_N - hg)$, dann folgt

$$x = hg(x) \in Bi(hg) \hookrightarrow \mathrm{Bi}(h) \hookrightarrow^{\circ} N,$$

also $\mathrm{Ke}(1_N - hg) \hookrightarrow^{\circ} N$. Wegen (4) folgt $\mathrm{Ke}(1_N - hg) = 0$. Also ist $1_N - hg$ ein Automorphismus und daher $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$.

2) (ii) Sei $U \hookrightarrow M$ mit

$$(5) \qquad \mathrm{Bi}(h) + U = N$$

und sei $v : N \to N/U$ der kanonische Epimorphismus. Wegen (5) ist dann vh auch ein Epimorphismus. Nach Voraussetzung existiert dann in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "vh"] & N/U \end{tikzcd}$$

ein Homomorphismus g mit $v = vhg$. Dies impliziert $v(1_N - hg) = 0$. Da $1_N - hg$ ein Automorphismus ist, muß $v = 0$ sein, also $U = N$ und daher $\mathrm{Bi}(h) \hookrightarrow^{\circ} N$. ∎

Wir können jetzt das bekannte Resultat über den Endomorphismenring eines selbstinjektiven Moduls auf Horn verallgemeinern.

2.2. SATZ *1) Ist M selbstinjektiv und N-injektiv, dann existiert zu jedem $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ein $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ mit*

$$fgf - f \in \mathrm{RAD}(M, N).$$

2) Ist N selbstprojektiv und M-projektiv, dann existiert zu jedem $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, für das ein additives Komplement von $\mathrm{Bi}(f)$ in N existiert, ein $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ mit

$$fgf - f \in \mathrm{RAD}(M, N).$$

BEWEIS. 1) Ist $U \hookrightarrow M$ maximal mit $\mathrm{Ke}(f) \cap U = 0$ (U = Durchschnittskomplement von $\mathrm{Ke}(f)$), dann gilt

$$(6) \qquad Ke(f) + U \hookrightarrow^{*} M.$$

Bezeichne $\iota : U \to M$ die Inklusion, dann ist $f\iota$ ein Monomorphismus. Da M N-injektiv ist, existiert ein $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ mit $\iota = gf\iota$. Folglich gilt $U \hookrightarrow \mathrm{Ke}(1_M - gf)$ und wegen

$$(7) \qquad f - fgf = (1_N - fg)f = f(1_M - gf)$$

folgt

$$\mathrm{Ke}(f) + U \hookrightarrow Ke(f- fgf).$$

Wegen (6) gilt dann auch $Ke(f- fgf) \hookrightarrow^{*} M$. Nun impliziert 2.1.1) (i) die Behauptung 2.2.1).

2) Nach Voraussetzung existiert ein Additionskomplement U von Bi(!) in N. Dafür gilt

(8) $$\mathrm{Bi}(!)+ U = N, \qquad \mathrm{Bi}(!) \cap U \hookrightarrow^{0} N.$$

Für den kanonischen Epimorphismus $v : N \to N/U$ ist dann $v$fein Epimorphismus. DaN M-projektiv ist, existiert ein g E $HomR(M, N)$ mit $v = v.fg$. Folglich gilt $v(1N- .fg) = 0$ und dies impliziert $\mathrm{Bi}(1N- fg) \hookrightarrow U$. Bei Beachtung von (7) folgt daraus

$$\mathrm{Bi}(!- fg.f) \hookrightarrow \mathrm{Bi}(.f) \cap U.$$

Aus (8) und 2.1.2) (i) folgt nun die Behauptung 2.2.2).

Offensichtlich sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, wenn im ersten Fall M ein injektiver und im zweiten Fall N ein projektive und komplementierter (= semi-perfekter) Modul sind.

2.3. FoLGERUNG *Voraussetzungen wie in* 2.2. *Seien* $.f$ E $HomR(M, N)$, g E $HomR(N, M)$, h E $RAD(M, N)$ *mit* $.fgf- f = h$. *Dann gilt:*

1) $\mathrm{Ke}(h) = Bi(gfL) \oplus Ke(gfL)$ 1\ $\mathrm{Ke}(h) \hookrightarrow^{*} M$, *wobeiL* : $\mathrm{Ke}(h) \to M$ *die Inkluszon sei.*

2) $N = Bi(fg)+Ke(v\ fg)$ 1\ $\mathrm{Bi}(fg) \cap \mathrm{Ke}(v\ fg) \hookrightarrow^{0} N$, *wobei* $v: N \to N/ \mathrm{Bi}(!)$ *der kanonische Epimorphismus sei.*

BEWEIS. 1) Wir zeigen zuerst, daß $Bi(gfL) \hookrightarrow Ke(h)$. Sei x E Ke(h), dann folgt

$$hg.fL(x) = (fgf- f)gf(x) = .fg(fgf- f)(x) = fgh(x) = 0.$$

Für x E Ke(h) gilt ferner

$$gfL(gfL(x)- x) = g(fgf- f)(x) = gh(x) = 0,$$

also $x- g.fL(x)$ E Ke(g.fL), also

$$\mathrm{Ke}(h) = Bi(gfL) + Ke(g.ft).$$

Ist y E $Bi(gft) \cap Ke(gft)$, dann existiert ein x E $Ke(h)$ mit $y = gfL(x)$ und $gf(y) = 0$. Dann folgt

$$0 = gf(y) = g.fg.f(x) = gfgf(x)- gh(x) = g.fg.f(x)-g(fg.f- f)(x) = g.f(x) = y.$$

Also gilt

$$Ke(h) = Bi(gft) \oplus Ke(gft).$$

Schließlich folgt $\mathrm{Ke}(h) \hookrightarrow^{*} M$ nach 2.2.1) (i), was wir bisher nicht benutzt haben.

2) Für x E N gilt

$$v.fg(.fg(x)- x) = vh(g(x)) = 0,$$

also

$$N = Bi(fg) + Ke(vfg).$$

Sei $y \in Bi(fg) \cap Ke(v\,fg)$, dann existieren $x, z \in N$ mit

$$y = fg(x), \qquad fg(y) = h(z).$$

Wegen $fgf = f + h$ folgt daraus

$$fg(y) = fgfg(x) = fg(x) + hg(x) = h(z),$$

also

$$y = fg(x) = h(z - g(x)) \in Bi(h).$$

Benutzt man noch $Bi(h) \subset^{\circ} N$, so folgt die Behauptung. ∎

3. Wann ist RAD = TOT?

Wir brauchen das folgende bekannte Ergebnis.

3.1. HILFSSATZ. *1) Ist M selbstinjektiv und ist $T := \mathrm{End}_R(M)$, dann können Idempotente von $T/\mathrm{Rad}(T)$ nach T geliftet werden.*

2) Ist N selbstprojektiv und komplementiert und ist $S := \mathrm{End}_R(N)$, dann können Idempotente von $S/\mathrm{Rad}(S)$ nach S geliftet werden.

BEWEIS. 1) Bekannt; siehe z.B. [3], 221.

2) Bekannt; dual zu 1). ∎

Wir führen nun das Total von M nach N ein

$$\mathrm{TOT}(M, N) := \{f \mid f \in Hom_R(M, N) \wedge \forall g \in Hom_R(M, N)\ [(gf)^2 = gf \Rightarrow gf = 0]\}.$$

Einige einfache Eigenschaften des Totals sollen hier erwähnt werden (siehe [1]). $\mathrm{TOT}(M, N)$ ist seitensymmetrisch, denn es gilt: Ist $(fg)^2 = fg \neq 0$, dann auch $((gfg)f)^2 = (gfg)f \neq 0$ und ist $(gf)^2 = gf \neq 0$, dann auch $(f(gfg))^2 = f(gfg) \neq 0$. Ferner ist $\mathrm{TOT}(M, N)$ ein Halbideal in der Kategorie der unitären R-Linksmoduln, d.h. für beliebige solche Moduln X, Y gilt

$$Hom_R(N, Y)\,\mathrm{TOT}(M, N)\,Hom_R(X, M) \subset \mathrm{TOT}(X, Y).$$

Wichtig ist die Gleichung

$$\mathrm{RAD}(M, N) + \mathrm{TOT}(M, N) = \mathrm{TOT}(M, N), \tag{9}$$

also auch

$$\mathrm{RAD}(M, N) \subset \mathrm{TOT}(M, N). \tag{10}$$

Im allgemeinen gilt nicht $\mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{TOT}(M, N)$ und $\mathrm{TOT}(M, N)$ ist im allgemeinen auch nicht additiv abgeschlossen. Es erhebt sich daher die Frage: Für welche M und N ist $\mathrm{TOT}(M, N)$ additiv abgeschlossen und für welche M und N ist $\mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{TOT}(M, N)$? (Siehe dazu [1].)

Ist $T = \mathrm{End}_R(M)$, dann ist einerseits $\mathrm{TOT}(M, M)$ definiert und dies ist ein Halbideal in T. Andererseits ist für T, betrachtet etwa als T-Linksmodul, $\mathrm{TOT}(T, T)$ definiert. Identifiziert man die Elemente von T mit den durch sie als Linksmultiplikatoren von T erzeugten Endomorphismen, so gilt $\mathrm{TOT}(M, M) = \mathrm{TOT}(T, T)$. Da es sich bei $\mathrm{TOT}(T, T)$ um eine Eigenschaft des Ringes T handelt (und nicht der Kategorie), schreiben wir dafür auch $\mathrm{Tot}(T)$.

Wir kommen jetzt wieder auf die allgemeine Situation zurück.

3.2. SATZ. *Ist eine der folgenden Bedingungen (i), (ii) erfüllt, dqnn gilt* $\mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{TOT}(M, N)$.

(i) M ist selbstinjektiv und N-injektiv;

(ii) N ist selbstprojektiv, M-projektiv und komplementiert.

BEWEIS. (i) Wegen (10) ist nur $\mathrm{TOT}(M, N) \subseteq \mathrm{RAD}(M, N)$ zu zeigen. Beweis indirekt. Angenommen $f \in \mathrm{TOT}(M, N)$, $f \notin \mathrm{RAD}(M, N)$. Nach 2.2 existieren $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ und $h \in \mathrm{RAD}(M, N)$ mit $fgf - f = h$. Wegen $f \notin \mathrm{RAD}(M, N)$ muß auch $gf \notin \mathrm{RAD}(M, M)$ ($= \mathrm{Rad}(T)$) und $fg \notin \mathrm{RAD}(N, N)$ ($= \mathrm{Rad}(B)$) gelten (denn RAD ist ein Ideal in der Kategorie). Es folgt im injektiven Fall $gfgf - gf = gh$, wobei $gh \in \mathrm{Rad}(T)$. Daher ist $\overline{gf} \in T/\mathrm{Rad}(T)$ ein Idempotent $\neq 0$. Da nach 3.1 Idempotente geliftet werden können, gibt es ein $e \in T$, $e^2 = e \neq 0$ mit $\bar{e} = \overline{gf}$. Dafür gilt dann

$$e = gf + k, \quad k \in \mathrm{Rad}(T).$$

Aber aus $f \in \mathrm{TOT}(M, N)$ folgt $gf \in \mathrm{TOT}(M, M)$ und dann impliziert (9)

$$e = gf + k \in \mathrm{TOT}(M, M).$$

Dies ist aber für ein Idempotent $\neq 0$ nicht möglich, also Widerspruch. Analog im Projektive Fall mit fg. ∎

Die Bedingung (i) in diesem Satz ist für alle N erfüllt, wenn M injektiv ist, und (ii) ist für alle M erfüllt, wenn N projektiv und komplementiert= semiperfekt ist.

3.3. FoLGERUNG. *(i) Ist M selbstinjektiv, dann sind für beliebige N* $\mathrm{TOT}(M, N)$ *und* $\mathrm{TOT}(N, M)$ *additiv abgeschlossen.*

(ii) Ist N selbsprojektiv und komplementiert, dann sind für beliebige M $\mathrm{TOT}(M, N)$ *und* $\mathrm{TOT}(N, M)$ *additiv abgeschlossen.*

BEWEIS. Betrachten wir den Spezialfall $M = N$, dann liefert 3.2 unter den angegebenen Voraussetzungen

$$\mathrm{Rad}(T) = \mathrm{RAD}(M, M) = \mathrm{TOT}(M, M) = \mathrm{Tod}(T),$$

bzw.

$$\mathrm{Rad}(S) = \mathrm{RAD}(N, N) = \mathrm{TOT}(N, N) = \mathrm{Tod}(S),$$

also ist $\mathrm{Tod}(T)$ bzw. $\mathrm{Tod}(S)$ additiv abgeschlossen. Ferner gilt (nach [1]) in der Situation

$${}_S\mathrm{Hom}_R(M, N)_T, \quad S = \mathrm{End}(N), \quad T = \mathrm{End}(M):$$

Ist für wenigstens einen der Ringe S oder T Tod(S) oder Tod(T) additiv abgeschlossen, dann ist auch TOT(M, N) additiv abgeschlossen. Dies Resultat kann auch auf ${}_T\mathrm{Hom}_R(N,M)_S$ angewendet werden und liefert die additive Abgeschlossenheit von TOT(N,M).

4. Beziehungen zwischen dem Jacobson- und dem Kelly-Radikal

Wir wollen hier Beziehungen zwischen den Jacobson-Radikalen von ${}_S\mathrm{Hom}_R(M,N)$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(M,N)_T$ und RAD(M, N) untersuchen. Zunächst gilt für beliebige Moduln M und N eine triviale Inklusion.

4.1. HILFSSATZ. $\mathrm{Rad}({}_S\mathrm{Hom}_R(M,N))+\mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M,N)_T) \subseteq \mathrm{RAD}(M,N)$

BEWEIS. Für $f \in \mathrm{Rad}({}_S\mathrm{Hom}_R(M,N))$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ ist Sfg ein kleines Linksideal von S. Daher folgt aus

$$S(1_N - fg) + Sfg = S,$$

daß

$$S(1_N - fg) = S$$

gilt. Also existiert ein $s_0 \in S$ mit $s_0(1_N - fg) = 1_N$ und folglich gilt $s_0 = 1_N + s_0fg$. Da auch $s_0fg \in \mathrm{Rad}(S)$, ist s_0 invertierbar und daher auch $s_0^{-1} = 1_N - fg$. Das bedeutet aber $f \in \mathrm{RAD}(M,N)$. Analoger Beweis für das andere Radikal. Die Surrune liegt in RAD(M, N), da dies ein Ideal ist. $\blacksquare$

4.2. HILFSSATZ. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *Es existieren* $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $g_i \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$, $i = 1, \ldots, n$ *mit*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1_N \quad bzw. \quad \sum_{i=1}^{n} g_i f_i = 1_M .$$

(ii) *N ist zu einem direkten Summanden von M^n isomorph bzw. M ist zu einem direkten Summanden von N^n isomorph.*

BEWEIS. Wir beweisen nur den ersten Fall.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Man definiere:

$$f := (f_1, \cdots, f_n) : M^n \longrightarrow N^n,$$
$$g := (g_1, \ldots, g_n) : N^n \longrightarrow M^n,$$
$$d : N \ni x \longmapsto (x, \ldots, x) \in N^n,$$
$$s : N^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \cdots + x_n \in N.$$

Die Voraussetzung (i) impliziert dann $sfgd = 1_N$. Folglich gilt

$$M^n = \mathrm{Bi}(gd) \oplus \mathrm{Ke}(sf).$$

Da gd ein Monomorphismus ist, folgt $N \; Bi(gd)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien

$$M^n = A \oplus B \tag{11}$$

und $k : N \to A$ ein Isomorphismus. Ferner bezeichne für $i = 1, \dots, n$

$\iota_A : A \to M^n$ die Inklusion,

$\pi_A : M^n \to A$ die Projektion zu (11),

$\pi_i : M^n \to M$ die Projektion auf die i-te Komp.,

$\tau_i : M \to M^n$ die Abbildung $x \mapsto (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ *i-te* Stelle.

Dann seien

$$\begin{aligned} g_i &:= \pi_i \iota_A k, \\ f_i &:= k^{-1} \pi_A \tau_i. \end{aligned} \qquad i = 1, \dots, n,$$

Wie leicht zu bestätigen, gilt dafür (i). ●

4.3. SATZ. *Sind die Voraussetzungen von 4.2 erfüllt, dann gilt*

$$\mathrm{Rad}({}_S\mathrm{Hom}_R(M, N)) \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M, N)_T) = \mathrm{RAD}(M, N)$$

bzw.

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M, N)_T) \subset \mathrm{Rad}({}_S\mathrm{Hom}_R(M, N)) = \mathrm{RAD}(M, N).$$

BEWEIS. Wir beweisen nur den ersten Fall. Wegen 4.1 ist nur $\mathrm{RAD}(M, N) \subset \mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M, N)_T)$ zu zeigen. Für $f \in \mathrm{RAD}(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $U \hookrightarrow T_T$ sei

$$gfT + U = T.$$

Dann existieren $t_0 \in T$, $u_0 \in U$ mit

$$gft_0 + u_0 = 1 (= 1_M),$$

also gilt

$$u_0 = 1 - gft_0.$$

Da RAD ein Ideal in der Kategorie ist, gilt $gft_0 \in \mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{Rad}(T)$. Daher ist u_0 invertierbar, also folgt $U = T$. Das bedeutet $gfT \overset{\circ}{\hookrightarrow} T_T$ und für $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ gilt dann auch $hgfT \overset{\circ}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M, N)_T$. Benutzt man diese Eigneschaft in 4.2.(i) (für $f_i = h$, $g_i = g$), so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i f T = fT \overset{\circ}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M, N)_T,$$

also $f \in \mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M, N)_T)$. ●

Nimmt man die Sätze 3.2 und 4.3 zusammen, so erhält man z.B. die Aussage: Ist M injektiv und ist N zu einem direkten Summanden eines endlichen Produktes von Kopien von M isomorph, dann gilt

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M, N)_R) = \mathrm{RAD}(M, N) = \mathrm{TOT}(M, N).$$

REFERENCES

[1] KASCH, F. und SCHNEIDER, W., *The total of modules and rings,* Algebra Berichte 69, 1992, Verlag Reinhard Fischer, München.

[2] KELLY, G.M., On the radical of a category, *J. Austr. Math. Soc.* 4 (1964), 299-307.

[3] WISBAUER, R., *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie,* 1988, Verlag Reinhard Fischer, München.