NORSK MATEMATISK TIDSSKRIFT

ORGAN FOR NORSK MATEMATISK FORENING

(UTKOMMER ÅRLIG MED 4 HEFTER)

REDAKTØRER:

THORALF SKOLEM · KAY PIENE

34. ÅRGANG
1952

OSLO
TRYKT HOS GRØNDAHL & SØN
1952

INNHOLD

Zur Erzeugung separabler Algebren.

Von

Friedrich Kasch in Göttingen.

Durch den bekannten Satz vom primitiven Element wird die Frage nach einer einfachen Erzeugung separabler Körpererweiterungen beantwortet. A. A. Albert stellte die gleiche Frage für separable Algebren und zeigte [1], dass eine separable Algebra A/F ein oder zwei erzeugende Elemente über F besitzt, je nach dem, ob sie kommutativ ist oder nicht. Dabei versteht man unter einer separablen Algebra A/F eine halbeinfache Algebra endlichen Ranges über einem Körper F mit unendlich vielen Elementen, bei der das Zentrum eines jeden ihrer einfachen Summanden separabel über F ist.

Andererseits gilt der Satz [2], dass ein Schiefkörper K endlichen Ranges über seinem Zentrum Z zwei bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über Z besitzt: $K = Z(a, tat^{-1})$. Aus dem Beweis dieses Satzes entnimmt man ferner, dass man für a ein erzeugendes Element eines beliebigen maximalen kommutativen, über Z separablen Unterkörpers von K wählen kann.

Kombiniert man diese Tatsache mit der Schlussweise von A. A. Albert, so erhält man den folgenden Satz, der die beiden angeführten Ergebnisse umfasst:

Jede separable Algebra $\boldsymbol{A/F}$ bezitzt zwei bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}(\alpha, \tau\alpha\tau^{-1})$.

Zum Beweis betrachten wir zunächst den Fall, dass A eine einfache separable Algebra ist. Dann ist A isomorph zum direkten Produkt eines vollen Matrizenringes M und eines Schiefkörpers K über dem Zentrum Z von K: $A = K \times M$. Nach Voraussetzung ist Z separabel über F. K enthält bekanntlich einen über Z separablen, maximalen kommutativen Unterkörper H, der dann ein erzeugendes Element über F besitzt: $H = F\,(a)$.

Bezeichnet man mit $d_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, m)$ die Matrixeinheiten von M, so erzeugen die Elemente $d_{ii}\,(i = 1, \ldots, m)$ eine Algebra Q über Z, $Q = Z\,(d_{11}, \ldots, d_{mm})$, und wir bezeichnen das direkte Produkt von Q und H über Z mit $R = Q \times H$.

Im folgenden geben wir zwei innere Automorphismen von A an, erzeugt durch die Elemente τ' und τ'', derart, dass $(\tau' R \tau'^{-1}, \tau'' R \tau''^{-1}) = A$ ist. Dann ist auch $(R, \tau R \tau^{-1}) = A$ mit $\tau = \tau'^{-1}\tau''$. Bezeichnet e das Einselement von A, so sei

$$\tau' = t\,(e - f d_{m\,m-1})\,(e - d_{m-1\,m-2})\,(e - d_{m-2\,m-3}) \ldots (e - d_{21})$$
$$\tau'' = (e + d_{m-1\,m})\,(e + d_{m-2\,m-1}) \ldots (e + d_{12}).$$

Dabei sei $f \varepsilon F$ so gewählt, dass $f\,(1 + f) \neq 0$ ist, und t ein solches Element aus K, dass $K = F\,(a, tat^{-1})$ gilt. Dann enthält $(\tau' R \tau'^{-1}, \tau'' R \tau''^{-1}) = V$ offenbar den Schiefkörper K. Um $V = A$ nachzuweisen, bleibt zu zeigen, dass V alle Matrixeinheiten enthält.

Übt man die durch τ' und τ'' erzeugten inneren Automorphismen auf die Elemente $d_{ii}\,(i = 1, \ldots, m)$ aus, so folgt, wenn man noch für $i < 1$ $d_{ij} = 0$ definiert:

$$\tau' d_{ii} \tau'^{-1} = d_{i\,i-1} + d_{ii} - (d_{i+1\,i-1} + d_{i+1\,i}) + - \ldots$$
$$+ (-1)^{m-1-i}(d_{m-1\,i-1} + d_{m-1\,i}) + (-1)^{m-i} f\,(d_{m\,i-1}\, d_{mi}) \text{ für } i < m$$
$$\tau' d_{mm} \tau'^{-1} = d_{mm} + f d_{m\,m-1},$$
$$\tau'' d_{ii} \tau''^{-1} = d_{i-1\,i} + d_{ii} - (d_{i-1\,i+1} + d_{i\,i+1}) + - \ldots$$
$$+ (-1)^{m-i}(d_{i-1\,m} + d_{im}) \text{ für } i = 1, \ldots, m.$$

Dies sieht man unmittelbar ein, wenn man nacheinander die durch die Faktoren $e - d_{ij}$ von τ' bzw. $e + d_{ij}$ von τ'' erzeugten inneren Automorphismen ausübt und berücksichtigt, dass $(e - d_{ij})^{-1} = e + d_{ij}$ für $i \neq j$ ist.

Wegen $\tau' d_{mm} \tau'^{-1} \tau'' d_{mm} \tau''^{-1} = (1 + f)\, d_{mm}$ mit $1 + f \neq 0$ liegt d_{mm} in V. Wegen $f \neq 0$ ist dann auch $f^{-1}\,(\tau' d_{mm} \tau'_{-}{}^{1} - d_{mm}) = d_{m\,m-1}$ in V enthalten. Ferner gilt für $i < m$

$$(-1)^{m-i} f^{-1} d_{mm} \tau' d_{ii} \tau'^{-1} = d_{m\,i-1} + d_{mi}.$$

Wegen $d_{m\,m-1} \varepsilon V$ liegen daher alle $d_{mi}\,(i = 1, \ldots, m)$ in V und entsprechend sieht man ein, dass auch die Elemente

$d_{im}\,(i = 1, \ldots, m)$ in V enthalten sind. Folglich gilt $d_{ij} \varepsilon V\,(i, j = 1, \ldots, m)$ und es ist wie behauptet $V = A$.

Sei nun A eine beliebige separable Algebra mit der direkten Summendarstellung

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i\,,$$

so kennzeichnen wir die den bisherigen Überlegungen entsprechenden Grössen eines jeden einfachen Summanden A_i durch dessen Index. Wie Albert [1] zeigt, besitzt die Algebra

$$R = \sum_{n=1}^{n} R_i$$

ein erzeugendes Element über F, $R = F\,(a)$, wobei offenbar gilt

$$e_i R = R_i = F\,(e_i a) = F\,(a_i).$$

Wir betrachten nun die Algebra $A' = F\,(a, \tau a \tau^{-1})$, wobei

$$\tau = \sum_{i-1}^{n} \tau_i = \sum_{i=1}^{n} \tau_i'^{-1} \tau_i''$$

ist. Wegen $e_i \varepsilon A'$ ist auch $e_i A' \varepsilon A'$. Nun ist aber

$$e_i A' = F\,(a_i,\ \tau_i a_i \tau_i^{-1}) = (R_i,\ \tau_i R_i \tau_i^{-1}) = A_i\,,$$

also $A' = A$ und der Beweis geführt.

Literatur.

[1] *A. A. Albert*, Two element generation of a separable algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 50, (1944), 786—788.

[2] *F. Kasch.* Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern. J. f. d. r. u. ang. Math. 189 (1951).