

NORSK MATEMATISK TIDSSKRIFT

ORGAN FOR NORSK MATEMATISK FORENING

(UTKOMMER ÅRLIG MED 4 HEFTER)

REDAKTØRER:

THORALF SKOLEM · KAY PIENE

34. ÅRGANG
1952

OSLO
TRYKT HOS GRØNDAHL & SØN
1952

INNHOOLD

	Side
<i>Aubert, K. E.</i> : Funksjoner som fremstiller primtall	42
—«— : Kontinuitet og diskrete funksjoner	33
<i>Bang, Thøger</i> : En Funktion som fremstiller alle Primtall	117
<i>Kasch, Friedrich</i> : Über die eindeutige Primelementzerlegung	10
—»— : Zur Erzeugung separablen Algebren	97
<i>Ljunggren, Wilhelm</i> : New Solution of a Problem proposed by E. Lucas	65
<i>Piène, Kay</i> : Geometriske steder i matematikkundervisningen	100
<i>Rose, Allan</i> : Extensions of some theorems of Schmidt and McKinsey I..	1
<i>Selmer, Ernst S.</i> : On the Dixon elliptic functions in the equianharmonic case	105
<i>Skolem, Th.</i> : Anvendelse av 3-adisk analyse og «bikropper» til bevis for noen satser angående visse kubiske ubestemte ligninger	45
—»— : On a certain connection between the discriminant of a polynomial and the number of its irreducible factors mod p	81
—»— : The general congruence of 4th degree modulo p , p prime	73
<i>Mindre meddelelser.</i>	
<i>T. Nagel, Tor Schaug-Pettersen, Andreas Ystad</i>	13, 63, 93
<i>Nyberg, Michael</i> : Matematikk og poesi	32
Faktortabeller utarbeidet av <i>Michael Nyberg</i>	99
<i>Norsk Matematisk Forening.</i>	
Generalforsamling i Norsk Matematisk Forening	17
Resultatet av oppgavekonkurransen for gymnaselever 1951	18
Kronikk	9, 64, 96, 125
Norsk Matematisk Tidsskrift 1919—1952	126
Mathematica Scandinavica	128
<i>Eksamensoppgaver.</i>	
Universitetet i Oslo 1949 II, 1950 I, 1950 II, 1951 I, 1951 II, 1952 I	30, 57, 121
Norges tekniske Høgskole mai 1952	122
<i>Oppgaver til løsning.</i>	
<i>K. E. Aubert, Alfred Moessner</i>	56, 89

Oppgaver for gymnaselever.

Michael Nyberg og ved redaksjonen..... 51

Løste oppgaver.

A. Lødemel: Oppg. 9, 1951..... 61
Tor Schaug-Pettersen: Oppg. 10, 1951 62
S. Halvorsen: Oppg. 11, 1951 95
Tor Schaug-Pettersen: Oppg. 12. 1951..... 63

Bokmeldinger,

Andersen, A. F. og *Mogensen, Poul*: Lærebog i Matematik for Gymnasiet's matematisk-naturvidenskabelige Linie II, III, IV, anm. av *Kay Piene* 29, 85, 118
Ayre, H. Glenn: Basic Mathematical Analysis, anm. av *Kay Piene*... 119
Becker, O. & Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik, anm. av *Viggo Brun* 54
Bieberbach, L.: Einführung in die analytische Geometrie, anm. av *Sigmund Selberg* 27
Dávid, L. v.: Die beiden Bolya, anm. av *Kay Piene* 88
Fleckenstein, J. O.: Johann und Jakob Bernoulli, anm. av *Viggo Brun* 21
Gebelein, H.: Zahl und Wirklichkeit, anm. av *Kay Piene* 118
Hoheisel, Guido: Gewöhnliche Differentialgleichungen, anm. av *R. Tambs Lyche* 87
Itard, J.: Pierre Fermat, anm. av *Viggo Brun*..... 53
Lietzmann, Walther: Methodik des mathematischen Unterrichts, anm. av *Kay Piene*..... 25
—»— : Schulreform und mathematischer Unterricht, anm. av *Kay Piene*..... 24
Malsch, Fritz: Zahl und Raum, II, III, IV, anm. av *Kay Piene* 119
Nagell, Trygve: Introduction to Number Theory, anm. av *Sigmund Selberg* 87
Næss, Almar: Regnestaven, anm. av *Kåre Dalen*..... 23
Næss, Arne: Symbolsk logikk, I og II, anm. av *K. E. Aubert* 19
Pihl, H. J. og *Rubinstein, P.*: Lærebog i Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium I, anm. av *Kay Piene*..... 120
Sneddon, Ian N.: Fourier Transforms, anm. av *J. E. Fjeldstad* 21
Taton René: Gaspard Monge, anm. av *O. P. Arvesen* 22

Zur Erzeugung separabler Algebren.

Von

Friedrich Kasch in Göttingen.

Durch den bekannten Satz vom primitiven Element wird die Frage nach einer einfachen Erzeugung separabler Körpererweiterungen beantwortet. A. A. Albert stellte die gleiche Frage für separable Algebren und zeigte [1], dass eine separable Algebra A/F ein oder zwei erzeugende Elemente über F besitzt, je nach dem, ob sie kommutativ ist oder nicht. Dabei versteht man unter einer separablen Algebra A/F eine halbeinfache Algebra endlichen Ranges über einem Körper F mit unendlich vielen Elementen, bei der das Zentrum eines jeden ihrer einfachen Summanden separabel über F ist.

Andererseits gilt der Satz [2], dass ein Schiefkörper K endlichen Ranges über seinem Zentrum Z zwei bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über Z besitzt: $K = Z(a, tat^{-1})$. Aus dem Beweis dieses Satzes entnimmt man ferner, dass man für a ein erzeugendes Element eines beliebigen maximalen kommutativen, über Z separablen Unterkörpers von K wählen kann.

Kombiniert man diese Tatsache mit der Schlussweise von A. A. Albert, so erhält man den folgenden Satz, der die beiden angeführten Ergebnisse umfasst:

Jede separable Algebra A/F besitzt zwei bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über F : $A = F(a, \tau a \tau^{-1})$.

Zum Beweis betrachten wir zunächst den Fall, dass A eine einfache separable Algebra ist. Dann ist A isomorph zum direkten Produkt eines vollen Matrizenringes M und eines Schiefkörpers K über dem Zentrum Z von K : $A = K \times M$. Nach Voraussetzung ist Z separabel über F . K enthält bekanntlich



einen über Z separablen, maximalen kommutativen Unterkörper H , der dann ein erzeugendes Element über F besitzt: $H = F(a)$.

Bezeichnet man mit d_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) die Matrixeinheiten von M , so erzeugen die Elemente d_{ii} ($i = 1, \dots, m$) eine Algebra Q über Z , $Q = Z(d_{11}, \dots, d_{mm})$, und wir bezeichnen das direkte Produkt von Q und H über Z mit $R = Q \times H$.

Im folgenden geben wir zwei innere Automorphismen von A an, erzeugt durch die Elemente τ' und τ'' , derart, dass $(\tau'R\tau'^{-1}, \tau''R\tau''^{-1}) = A$ ist. Dann ist auch $(R, \tau R\tau^{-1}) = A$ mit $\tau = \tau'^{-1}\tau''$. Bezeichnet e das Einselement von A , so sei

$$\tau' = t(e - fd_{m\ m-1})(e - d_{m-1\ m-2})(e - d_{m-2\ m-3}) \dots (e - d_{21})$$

$$\tau'' = (e + d_{m-1\ m})(e + d_{m-2\ m-1}) \dots (e + d_{12}).$$

Dabei sei $f \in F$ so gewählt, dass $f(1+f) \neq 0$ ist, und t ein solches Element aus K , dass $K = F(a, tat^{-1})$ gilt. Dann enthält $(\tau'R\tau'^{-1}, \tau''R\tau''^{-1}) = V$ offenbar den Schiefkörper K . Um $V = A$ nachzuweisen, bleibt zu zeigen, dass V alle Matrixeinheiten enthält.

Übt man die durch τ' und τ'' erzeugten inneren Automorphismen auf die Elemente d_{ii} ($i = 1, \dots, m$) aus, so folgt, wenn man noch für $i < 1$ $d_{ij} = 0$ definiert:

$$\tau'd_{ii}\tau'^{-1} = d_{i\ i-1} + d_{ii} - (d_{i+1\ i-1} + d_{i+1\ i}) + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1-i}(d_{m-1\ i-1} + d_{m-1\ i}) + (-1)^{m-i}f(d_{m\ i-1}d_{mi}) \text{ für } i < m$$

$$\tau'd_{mm}\tau'^{-1} = d_{mm} + fd_{m\ m-1},$$

$$\tau''d_{ii}\tau''^{-1} = d_{i-1\ i} + d_{ii} - (d_{i-1\ i+1} + d_{i\ i+1}) + \dots$$

$$+ (-1)^{m-i}(d_{i-1\ m} + d_{im}) \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Dies sieht man unmittelbar ein, wenn man nacheinander die durch die Faktoren $e - d_{ij}$ von τ' bzw. $e + d_{ij}$ von τ'' erzeugten inneren Automorphismen ausübt und berücksichtigt, dass $(e - d_{ij})^{-1} = e + d_{ij}$ für $i \neq j$ ist.

Wegen $\tau'd_{mm}\tau'^{-1}\tau''d_{mm}\tau''^{-1} = (1+f)d_{mm}$ mit $1+f \neq 0$ liegt d_{mm} in V . Wegen $f \neq 0$ ist dann auch $f^{-1}(\tau'd_{mm}\tau'^{-1} - d_{mm}) = d_{m\ m-1}$ in V enthalten. Ferner gilt für $i < m$

$$(-1)^{m-i}f^{-1}d_{mm}\tau'd_{ii}\tau'^{-1} = d_{m\ i-1} + d_{mi}.$$

Wegen $d_{m\ m-1} \in V$ liegen daher alle d_{mi} ($i = 1, \dots, m$) in V und entsprechend sieht man ein, dass auch die Elemente

d_{im} ($i = 1, \dots, m$) in V enthalten sind. Folglich gilt $d_{ij} \in V$ ($i, j = 1, \dots, m$) und es ist wie behauptet $V = A$.

Sei nun A eine beliebige separable Algebra mit der direkten Summendarstellung

$$A = \sum_{i=1}^n A_i,$$

so kennzeichnen wir die den bisherigen Überlegungen entsprechenden Grössen eines jeden einfachen Summanden A_i durch dessen Index. Wie Albert [1] zeigt, besitzt die Algebra

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

ein erzeugendes Element über F , $R = F(a)$, wobei offenbar gilt

$$e_i R = R_i = F(e_i a) = F(a_i).$$

Wir betrachten nun die Algebra $A' = F(a, \tau a \tau^{-1})$, wobei

$$\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{i=1}^n \tau_i'^{-1} \tau_i''$$

ist. Wegen $e_i \in A'$ ist auch $e_i A' \in A'$. Nun ist aber

$$e_i A' = F(a_i, \tau_i a_i \tau_i^{-1}) = (R_i, \tau_i R_i \tau_i^{-1}) = A_i,$$

also $A' = A$ und der Beweis geführt.

Literatur.

- [1] A. A. Albert, Two element generation of a separable algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 50, (1944), 786—788.
 [2] F. Kasch. Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern. J. f. d. r. u. ang. Math. 189 (1951).