Wahr-schein-lichkeit, Stochastizität und Ambiguität: Eine Spurensuche bei der Modellierung des Unsicheren

Thomas Augustin

Institut für Statistik, LMU München

28. Januar 2008

Zunächst: Was ist Statistik?

"Statistik ist die *interdisziplinäre* Wissenschaft von der verantwortungsvollen Datenanalyse. "

"Statistik beschäftigt sich mit jenen Aspekten der Datenanalyse, die nicht absolut speziell zu dem Untersuchungsgegenstand gehören. Das heißt, es geht darum, *Konzepte und Methoden* zu entwickeln, die - jeweils geeignet angepasst - in vielen verschiedenen Gebieten anwendbar sind. "

Mit welchen Fragestellungen beschäftigen sich StatistikerInnen I ?

- Planung und Auswertung von Studien
- Zusammenfassende Beschreibung (Statistik)
- Strukturierung (Ermittlung von Einflussgrößen und ihrer Wirkungsstärke)
- Inferenz (Verallgemeinerung von Stichprobe auf Grundgesamtheit)
- Hirnkartierung
- Ernährungsgewohnheiten und Herz-/Kreislauferkrankungen
- Epidemilogie infektiöser Krankheiten
- Statistische Genetik
- Expertensysteme

Mit welchen Fragestellungen beschäftigen sich StatistikerInnen II ?

- Portfoliomanagement
- Kreditwürdigkeitsprüfung
- Betrugsaufdeckung
- KFZ-Unfälle
- Arbeitslosigkeitsdynamik
- Mietspiegel
- Armutsmessungen
- Wahlforschung
- Bürgerbefragungen
- Extreme Windgeschwindigkeiten auf ICE-Strecken
- Qualitätskontrolle: Wann läuft Prozess aus dem Ruder?

Inhalt

1. Wahrscheinlichkeit und Statistik
2. Wahrscheinlichkeit: Historische Entwicklung und aktuelle Hauptrichtungen
3. Uneindeutigkeit als Herausforderung:
   - 3.1 Weichere Modelle mit klassischen Wahrscheinlichkeiten
   - 3.2 Modellierung von Ambiguität: Imprecise Probabilities – Intervallwahrscheinlichkeit

1. Wahrscheinlichkeit und Statistik: Die Rolle der Wahrscheinlichkeit(srechnung) in der Statistik I

Stark vereinfacht:

- Wahrscheinlichkeit erlaubt Quantifizierung des Stichproben- und Inferenzfehlers bei Zufallsstichproben
- Bei Modellen zudem Modellfehler, unerklärter Rest
  - $$\begin{array}{ccccc} \text{Beobachtete Daten} & = & \text{wahrer Zusammenhang} & + & \text{Fehler} \\ y_i & = & f(x_i) & + & \epsilon_i \end{array}$$
  - ϵ_i Fehler: Zufällig

Die Rolle der Wahrscheinlichkeit(srechnung) in der Statistik II

- Wahrscheinlichkeitsbegriff bestimmt Inferenzkonzept (Art des Lernens)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung „deduktiv“: Gegeben die wahren Verhältnisse (Parameterwert θ); wie wahrscheinlich ist eine Beobachtung x?
- Statistik „induktiv“: Gegeben eine Beobachtung x; wie plausibel ist ein bestimmter Parameterwert?

Grundges.:	Wahre Verteilung P_θ	Wahre Verteilung P_θ
	$\big\downarrow$ W'keitsrechnung	$\big\uparrow$ Statistik
Stichprobe:	Beobachtung x	Beobachtung x

Die Rolle der Wahrscheinlichkeit(srechnung) in der Statistik III

- Der Wahrscheinlichkeitsbegriff prädeteminiert über das Inferenzkonzept hinaus auch den Optimalitätsbegriff in Entscheidungsproblemen

	Zustand 1	...	Zustand m
Aktion 1			
Aktion 2			
...		Nutzenwerte	
Aktion n			

z.B. Ausflugsproblem, Investitionsproblem

2. Wahrscheinlichkeit: Historische Entwicklung und aktuelle Hauptrichtungen

Weichselberger (2001, Physika, Kap. 1)

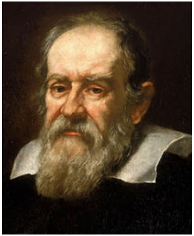
Der Urzustand

- Wahrscheinlichkeit als „philosophischer“ Begriff, Probabilismus in der Theologie
- Wahr – schein – lichkeit
- prove – ability

Historische Wurzeln

- Philosophische Auseinandersetzung, Probabilismus in der Theologie
- Mathematische Theorie der Glücksspiele
- Politische Arithmetik: Massenerscheinungen im öffentlichen Leben

- Zunehmende Quantifizierung:



„ Das Messbare messen, das Nichtmessbare messbar machen."

(Galileo Galilei)

Aktuelle Hauptrichtungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes

- axiomatisch - formal (Kolmogoroff, 1933)
- objektiv(istisch), objektbezogen:
  - Wahrscheinlichkeit als Eigenschaft des Objektes
  - oft: zufällige Folgen (aleatorisch, frequentisch)
- subjektiv(istisch), subjektbezogen:
  - Wahrscheinlichkeit als Eigenschaft des Betrachters
  - Unsicherheit
- logisch, schlussbezogen:
  - Passt nicht in Kolmogorovsches System
  - Wahrscheinlichkeit als Eigenschaft des Schlusses von der Prämisse auf die Konklusion
  - $P(A||B)$: Prämisse $\xrightarrow{P(A||B)}$ Konklusion

Subjektive Wahrscheinlichkeit I

- Umfassend: **Jede** Form der Unsicherheit (statt Zufälligkeit) durch Wahrscheinlichkeiten quantifizierbar; (man denke an Zufallsszahlen)
- Behaviouristischer Zugang: Interpretation bzw. Messung über Verhalten (insbesondere in Wettsituationen)
  - Fiktiver Markt mit Wetten
  - Man kann Wetten kaufen oder verkaufen
    Kauf: Gewinn 1 Euro, falls A eintritt
    Marktpreis e variabel
  - Suche Indifferenzpunkt $p(A)$ zwischen Kauf (Wette auf A) und Verkauf (Wette auf „Nicht-A“)

  - $p(A)$ Wahrscheinlichkeit von A
  - Kohärenzbedingungen für Kombinationen von Wetten auf verschiedene Ereignisse
  - (fast) äquivalent zu Kolmogorovscher Axiomatik

Subjektive Wahrscheinlichkeit II

- unmittelbare Inferenztheorie (Bayesianer)
  - A priori Verteilung $\pi(\theta)$ über Parameter
  - Verteilung der Daten $f(x||\theta)$
  - Posteriori Verteilung $\pi(\theta|x)$ über den Satz von Bayes

Wahrscheinlichkeit(Parameter)

$+$

Daten

$\Rightarrow$

Wahrscheinlichkeit(Parameter|Daten)

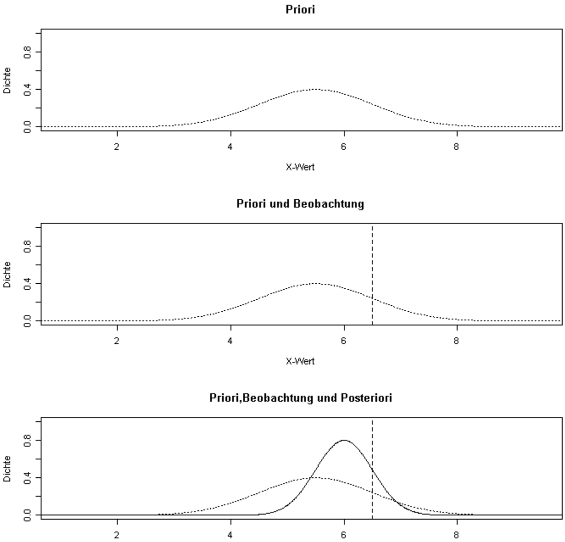
Priori-Daten-Konflikt, Walley (1991, p.6)

Bayes-Inferenz über Mittelwert bei Normalverteilung

- Stichprobe(nmittel) $X \sim N(\theta, 1)$: $f(x||\theta)$
- Priori $\theta \sim N(\nu, 1)$: $\pi(\theta)$
- Posteriori $\theta|x \sim N(\frac{1}{2} \cdot (\nu + x), 0.5)$: $\pi(\theta|x)$

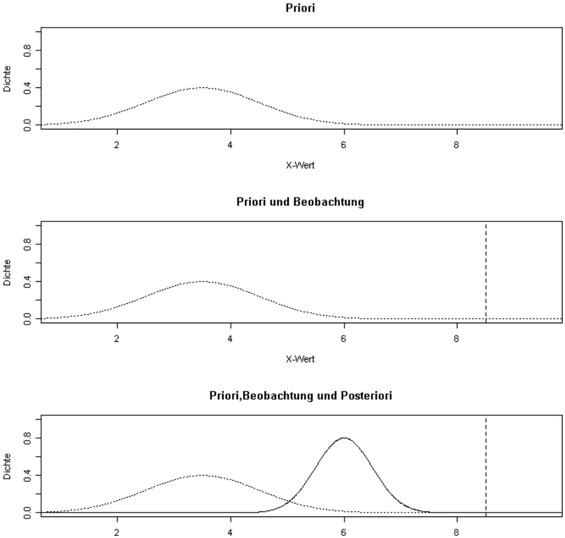
Priori-Daten-Konflikt - Beispiel 1

Beispiel 1: $\nu = 5.5$, $x = 6.5$, $\frac{\nu + x}{2} = 6$



Priori-Daten-Konflikt - Beispiel 2

Beispiel 2: $\nu = 3.5$, $x = 8.5$, $\frac{\nu+x}{2} = 6$



Logische Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit als Eigenschaft des Schlusses von der Prämisse auf die Konklusion
- $P(A||B)$: Prämisse $\stackrel{P(A||B)}{\longrightarrow}$ Konklusion
- Auflösung des Subjektivismus – Objektivismus Gegensatzes
- Symmetrischer Ansatz

$$\begin{array}{c}\text{Wahrscheinlichkeit(Daten}||\text{Parameter)}\\ \updownarrow \\ \text{Wahrscheinlichkeit(Parameter}||\text{Daten)}\end{array}$$

- Dempster, Levi, Kyburg, Hampel, Weichselberger/Wallner

Auswirkungen auf die Entscheidungstheorie

	Zustand 1	...	Zustand m
Aktion 1			
Aktion 2			
...		Nutzenwerte	
Aktion n			

- objektivistisch: keine Zustandswahrscheinlichkeiten (Nichtwissen), Entscheidungsproblem als Spiel gegen die feindliche Natur; Maximin-Lösung (s.a. Rawls)
- subjektiv: „virtuelle Lotteriesituation“, präzise Zustandswahrscheinlichkeiten: erwarteter Nutzen
- **Was tun mit partiellem Wissen?** $\Rightarrow$ 3. Ambiguität als Herausforderung

3. Uneindeutigkeit als Herausforderung - Modellierungsansätze

- Sehr erfolgreiche Verbreitung der Statistik in allen empirisch arbeitenden Wissenschaften; andererseits Uneindeutigkeit von Daten und Modellen

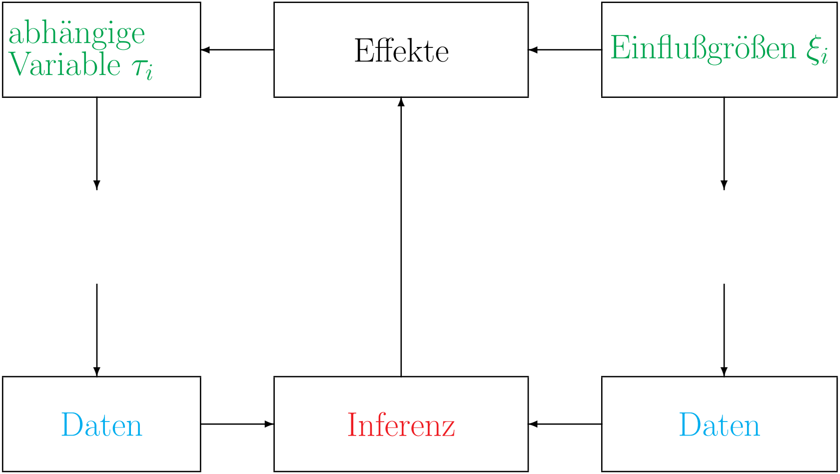
$$\Downarrow \Downarrow \Downarrow$$

- Weichere Modelle mit klassischen Wahrscheinlichkeiten
  - Fehler in-den-Variablen-Modellen
  - Robuste Verfahren
  - Nichtparametrische Verfahren
  - Sensitivitätsanalysen

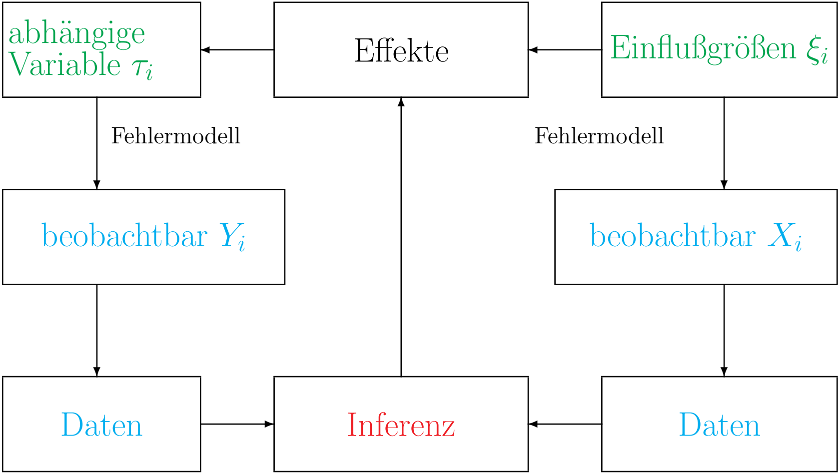
- **Darüberhinaus:** Zweifel an der prinzipiellen Eignung von Wahrscheinlichkeiten zur Modellierung Unsicheren Wissens
  - künstliche Intelligenz
  - Ökonomie (z.B. Ellsberg-Paradoxon, siehe später)

$\Longrightarrow$ Imprecise Probabilities – Intervallwahrscheinlichkeit

3.1. Weichere Modelle mit klassischen Wahrscheinlichkeiten



Fehler-in-den-Variablen-Modelle



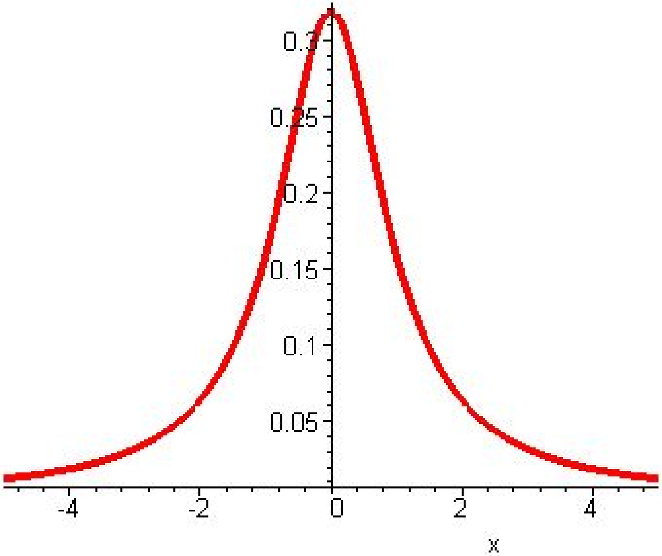
Messfehler und Fehlklassifikation

- Unterscheide zwischen
  - idealer und
  - beobachtbarer Ebene
- auch wichtig in amtlicher Statistik bei bewusst zur Anonymisierung kontaminierten Daten
- Nichtberücksichtigung von Messfehlern / Fehlklassifikation kann zu gravierenden Verzerrungen der Schätzung führen
- Grobe Erklärung: Variabilitität im Messprozess wird versehentlich dem Modell zugeschrieben
- stetige Variable: *Messfehler* (z.B. Carroll et al., 2006, Chapman & Hall; Schneeweiss & Augustin, 2006, ASTA)
- diskrete Variable *Fehlklassifikation* (z.B. Küchenhoff et al., 2006, Biometrics)

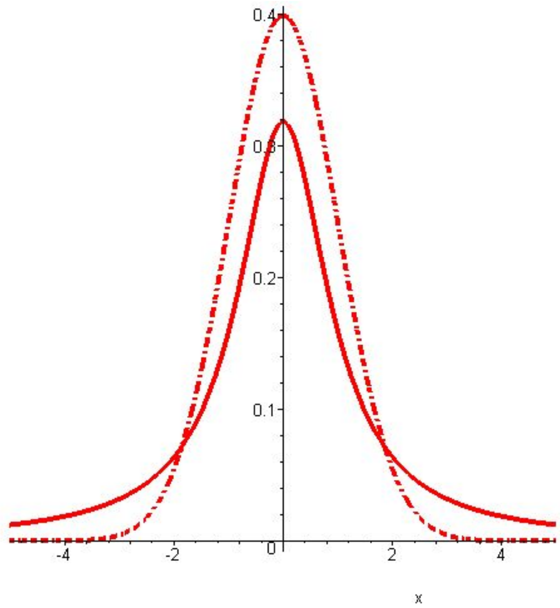
Nichtparametrische („Verteilungsfreie“) Verfahren

- Qualitative Verteilungsannahmen (z.B. Symmetrische Verteilung) mit entsprechenden Hypothesen (z.B. Median=0) anstatt z.B. Normalverteilung
- „Vorsichtige Datenverarbeitung“ statt Werte, Ränge oder größer–kleiner Zählungen

Robuste Verfahren



Robuste Verfahren



Robuste Verfahren

Betrachte Stichprobenmittel $\overline{X}$.

- Sind $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, 1)$ (normalverteilt), dann

  $$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$$

  Man kann aus der Stichprobe lernen: je größer der Stichprobenumfang, desto genauer der Schätzer $\overline{X}$.
- Sind $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{C}(\mu, 1)$ (Cauchy-verteilt), dann ist

  $$\overline{X} \sim C(\mu, 1)$$

  Man kann nicht dazulernen, egal wie groß der Stichprobenumfang ist.

Robuste Verfahren

- Viele optimale Verfahren verhalten sich desaströs unter minimalen Abweichungen vom zugrundegelegtem idealen Modell
- Idee: Schließe Versicherung ab (Versicherungsprämie $\triangleq$ leichter Effizienzverlust im Idealfall)
- Einfachstes Beispiel: Median statt ausreißerempfindlichem arithmetischen Mittel
- Betrachte statt Modell $f(x||\vartheta)$: Modell „ungefähr $f(x||\vartheta)$“

Sensitivitätsanalysen

- Idee (Ingenieurswissenschaften): Bleiben substanzwissenschaftliche Ergebnisse erhalten unter systematischer Variation der Modellannahmen?
- Analyse von Counterfactuals (Rubin)
- Fehlende Daten bei systematischem Fehlermuster (MNAR)
- Bayesianische Sensitivitätsanalyse (Good)

3.2. Modellierung von Ambiguität: Imprecise Probabilities – Intervallwahrscheinlichkeit

Klir and Wierman (Uncertainty-based Information, Physika, 1998, S.1)

„For three hundred years [...] uncertainty was conceived solely in terms of probability theory. This seemingly unique connection between uncertainty and probability is now challenged [... by several other] theories, which are demonstrably capable of characterizing situations under uncertainty. [...]
[...] it became clear that there are several distinct types of uncertainty. That is, it was realized that **uncertainty** is a **multidimensional concept**. [.... That] multidimensional nature of uncertainty was obscured when uncertainty was conceived solely in terms of probability theory, in which it is manifested by only one of its dimensions“.

Unsicherheit als mehrdimensionales Phäomen

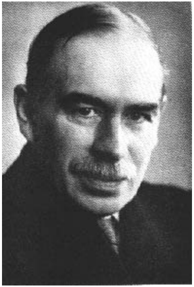
Unsicherheit

- Ideale Stochastizität (**Risiko**): perfekter Zufallsmechanismus
- **Ambiguität** (nichtstochastische Unsicherheit, Unbestimmtheit)
- **Vagheit**

Ambiguität - Begriffsabgrenzung

- (lat. *ambiguitas*: Zweideutigkeit, Doppelsinn)
- Terminus, der eine (Entscheidungs-)Situation charakterisiert, in der keine exakten Wahrscheinlichkeiten vorliegen bzw. keine eindeutigen subjektiven Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden können.
- Frisch und Baron (1988): "**Ambiguity** *is* **uncertainty about probability**, *created by missing information that is relevant and could be known.* "

„Are all uncertainties risks?“

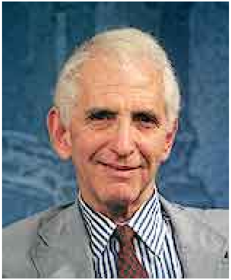


- Keynes (1921, Treatise on Probability):
  - Logische Wahrscheinlichkeiten
  - Nicht notwendigerweise alle Ergebnisse hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeit vergleichbar $\rightarrow$ „non-numerical probabilities“

- Knight (1921: Risk, Uncertainty and Profit)
  - Risiko (Wahrscheinlichkeitsbewertung exakt möglich) versus
  - Unsicherheit
  - Unterscheide Ziehen aus Urnen mit bekannten und unbekannten Anteilen

Daniel Ellsberg

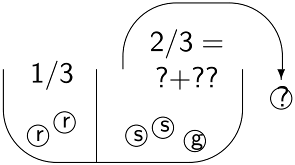
- Rand Corporation
- Pentagon Papers
- Alternativer Nobelpreis

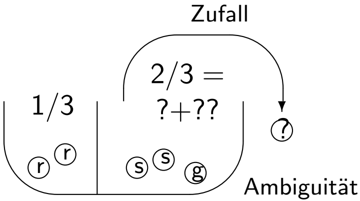


Ellsberg-Paradoxon (1961)

Gedankenexperiment unter Ökonomen und Statistikern

- Gegeben sei eine Urne mit
  roten
  gelben Kugeln
  schwarzen
- Anteil der *roten* Kugeln ist genau $\frac{1}{3}$
- Der Anteil der *gelben* und *schwarzen* Kugeln ist hingegen unbekannt
- Eine Kugel wird zufällig gezogen





- Situation I: Man darf wählen zwischen

  a_1: 1\$, falls „rot" gezogen wird

  und

  a_2: 1\$, falls „schwarz" gezogen wird

- Situation II: Gelb wird zum Joker, und man kann wählen zwischen

  a_3: 1\$; falls „rot" oder „gelb" gezogen wird

  und

  a_4: 1\$; falls „schwarz" oder „gelb" gezogen wird

Große Mehrheit für $a_1 > a_2$; $a_4 > a_3$; viele auch $a_2 > a_1$; $a_3 > a_4$

Ellsberg-Paradoxon — Die Priori im Hintergrund

- $\{r\} > \{s\}$ und zugleich $\{r \vee g\} < \{s \vee g\}$
- Bayesianisches Paradigma: es gibt zu jeder Unsicherheitssituation eine (klassische) Wahrscheinlichkeitsbewertung $\pi(\cdot)$, die die subjektive Einschätzung beschreibt.
- Für die priori Verteilung $\pi(\cdot)$ muss also gelten:

$$[\pi(\{r\}) > \pi(\{s\})] \qquad \wedge \qquad [\pi(\{r\})+\pi(\{g\}) < \pi(\{s\})+\pi(\{g\})]$$

$\Rightarrow$ Es kann *keine klassische* Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Umweltzustände geben, die die am häufigsten beobachteten Präferenzen widerspiegelt.

$\Rightarrow$ Erweiterung/Verallgemeinerung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes nötig.

Konsequenzen aus dem Ellsberg-Experiment

- Gedankenexperiment: Nicht nur empirische Verletzung von Rationalitätsprämissen, sondern bewusste und als rational empfundene Ablehnung durch führende Forscher der Entscheidungstheorie
- Es gibt also Präferenzordnungen in Entscheidungssituationen unter Unsicherheit, die als *rational* empfunden werden, die aber *nicht* mittels *klassischer* Wahrscheinlichkeit beschreibbar sind.
- Ambiguität (nichtstochastische Unsicherheit) als konstitutives Element
- Soll die Entscheidungstheorie ihrem Anspruch als Theorie des *rationalen Entscheidens* unter Unsicherheit gerecht werden, so muss sie solche Situationen modellieren können.
- Beachte: Die Einfachheit des Beispiels stützt das Argument.

Einschub: Neuronale Unterscheidung von Risiko und Ambiguität

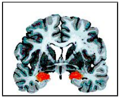
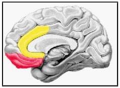
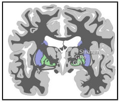
Quelle:

Neural Systems Responding to Degrees of Uncertainty in Human Decision-Making

Ming Hsu et al.

Science 310, 1680 (2005)

Gehirnregionen und ihre Funktionen

	Bild	Funktion	Geschwindigkeit
Amygdala		Überwachung	schnell
Orbitofrontaler Kortex			
Striatum		Belohnungs-erwartungs-system	langsam nachge-ordnet

Experimentelle Behandlungen

- **Kartenstapel**
  - Risikobedingung

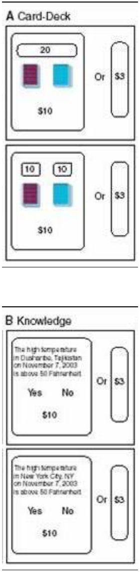
    Entscheidung zwischen purem Risiko (Zusammensetzung des Kartenstapels bekannt) und sicherem Geldbetrag
  - Ambiguitätsbedingung

    Entscheidung zwischen purer Ambiguität (Zusammensetzung des Kartenstapels unbekannt) und sicherem Geldbetrag

- **Wissen**

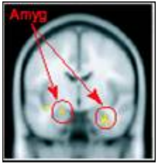
  Entscheidungen zwischen sicherem Geldbetrag und Wette auf Bejahung oder Verneinung von Aussagen bzw. Ereignissen, deren Inhalt entweder eine Risiko- oder Ambiguitätsbedingung darstellt.

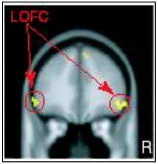
  Bsp.: Wetter in New York — Wetter in Tirana



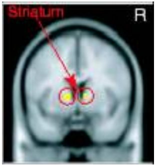
Aktivität von Hirnregionen unter Risiko/Ambiguität

- Während der ambigen Bedingung – im Vergleich zur riskanten Bedingung – waren besonders aktiv *OFC (Orbitofrontaler Kortex) und Amygdala*

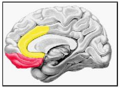
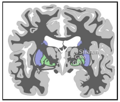




- Während der riskanten Bedingung – im Vergleich zur ambigen Bedingung – war besonders aktiv: *Striatum*



Gehirnregionen und ihre Funktionen

<table>
<tr><th></th><th>Bild</th><th>Funktion</th><th>Geschwindigkeit</th><th>besonders aktiv bei</th></tr>
<tr><td>Amygdala</td><td></td><td rowspan="2">Überwachung</td><td rowspan="2">schnell</td><td rowspan="2">Ambiguität</td></tr>
<tr><td>OFC</td><td></td></tr>
<tr><td>Striatum</td><td></td><td>Belohnungs-erwartungs-system</td><td>langsam nachge-ordnet</td><td>Risiko</td></tr>
</table>

Erste Schritte zur mathematischen Modellierung des Ellsberg-Experiments

Situation beschreibbar:

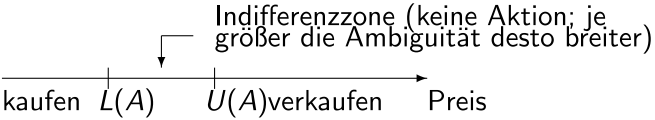
- einerseits durch *Mengen* klassischer Wahrscheinlichkeitsmasse im Sinne Kolmogorovs. Die priori Information besteht aus der Menge aller klassischen Wahrscheinlichkeitsmasse $\pi(\cdot)$ auf $(\{r, g, s\}, P(\{r, g, s\}))$, womit $\pi(\{r\}) = \frac{1}{3}$ und $\pi(\{g, s\}) = \frac{2}{3}$.
- Modellierung durch *intervallwertige Wahrscheinlichkeiten*

$$\pi(\{r\}) = \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right], \quad \pi(\{r, g\}) = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$$
$$\pi(\{g\}) = \left[0; \frac{2}{3}\right], \quad \pi(\{r, s\}) = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$$
$$\pi(\{s\}) = \left[0; \frac{2}{3}\right], \quad \pi(\{g, s\}) = \left[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

Die Idee ist verallgemeinerbar!

Imprecise Probabilities – Intervallwahrscheinlichkeit

- P: Ereignisse $\rightarrow$ Intervalle in $[0;1]$
- $P(A) = [L(A), U(A)]$
- Breite drückt Ambiguität aus
- Idee sehr naheliegend (spätestens seit Boole, 1854)
- Axiomatisierung
  - Spezielle Teilklassen: Dempster (1966), Huber (1973), Shafer (1976)
  - Allgemein:
    Walley (1991): behavioristisch
    Weichselsberger (2000, 2001): interpretationsunabhängig



Positive und negative Symmetrie

- Keine der beiden Farben (gelb oder schwarz) ist wahrscheinlicher:
  - * $\pi(\{s\}) = \pi(\{g\}) = \frac{1}{3}$!?
  - * $\pi(\{s\}) = \pi(\{g\}) = [0; \frac{2}{3}]$

- Unterscheide zwischen
  - Wissen um Symmetrie ("positive Symmetrie")

  und
  - Nichtwissen von Asymmetrie ("negative Symmetrie")
  - $\frac{2}{3}$ gelbe und schwarze Kugeln in unbekannter Zusammensetzung

Typische Modellklassen und Anwendungen

Society for Imprecise Probabilities, Theories and Applications: www.sipta.org

- Modellierung partiellen Wissens in der Entscheidungstheorie
- Weiterrechnen mit Konfidenzintervallen
- Modellierung Unsicheren Wissens in Expertensystemen (Medizin, auch Wirtschaftswissenschaften)
- Gruppenentscheidungen: verschiedene klassische Prioris
- Robuste Bayes Analyse: Mengen von Prioris
- Finanz- und Finanzierungsmathematik (auch enger Zusammenhang zu Risikomaßen, Knightian Uncertainty)
- Modellierung von Priori-Daten-Konflikten
- Vorsichtige Analyse bei unvollständigen Daten (Manski (2003): Partial Identification)

Manskis Law of Decreasing Credibility

- The credibility of inference decreases with the strength of the assumptions maintained.

  C. Manski. (2003, Partial Identification, Springer)

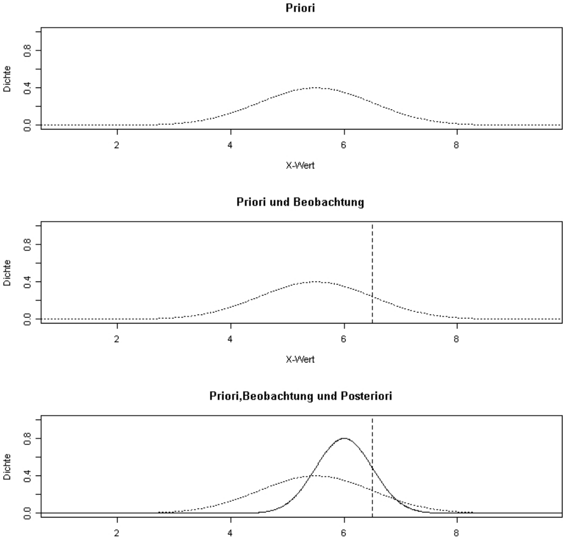
- „Unschärfere“, aber dafür zuverlässigere Aussagen

Modellierung partiellen Wissens in der Entscheidungstheorie

- Ambiguität in Intervallbreite ausdrücken
- Adäquate Modellierung partiellen Wissens
- Intervallwertiger Erwartungsnutzen (Choquet Erwartungsnutzen, Gamma-Maximin)
- Extremfälle:
  - perfekte probabilistische Information: einpunktiges Intervall $\longrightarrow$ klass. Erwartungsnutzen
  - vollständiges Nichtwissen: Wahrscheinlichkeit $[0; 1]$, Maximin Lösung (Spieltheorie), Schleier des Nichtwissens
- Effiziente Berechnung durch lineare Optimierung (Utkin & Augustin (2005), Kikuti et al. (2005))

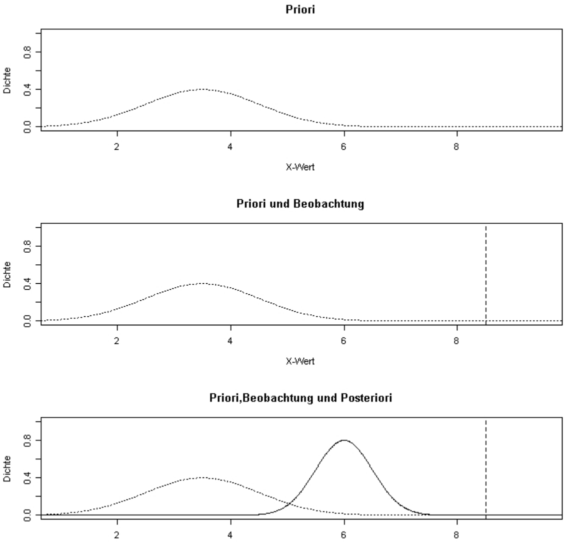
Erinnerung Priori-Daten-Konflikt - Beispiel 1

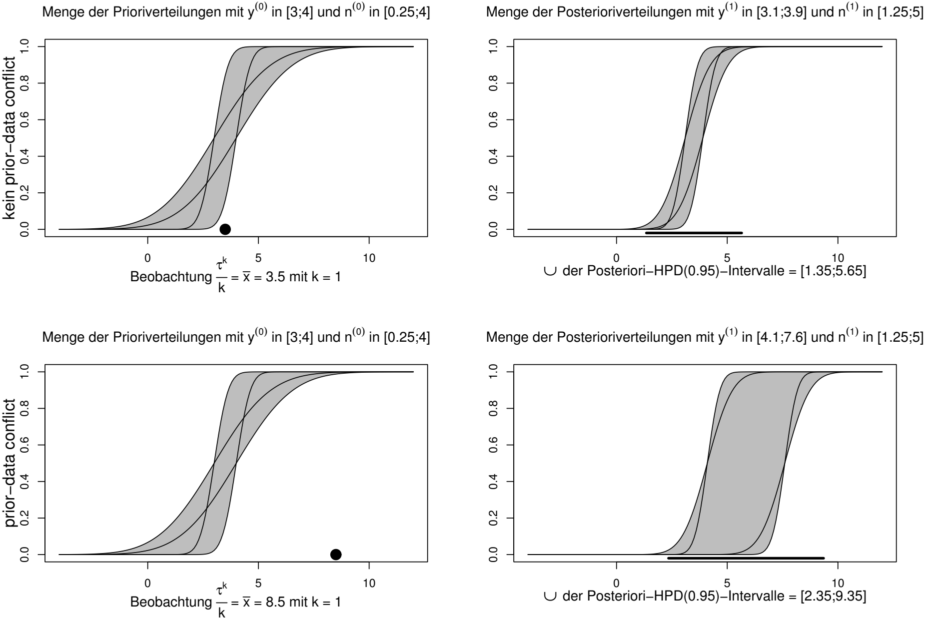
Beispiel 1: $\nu = 5.5$, $x = 6.5$, $\frac{\nu + x}{2} = 6$

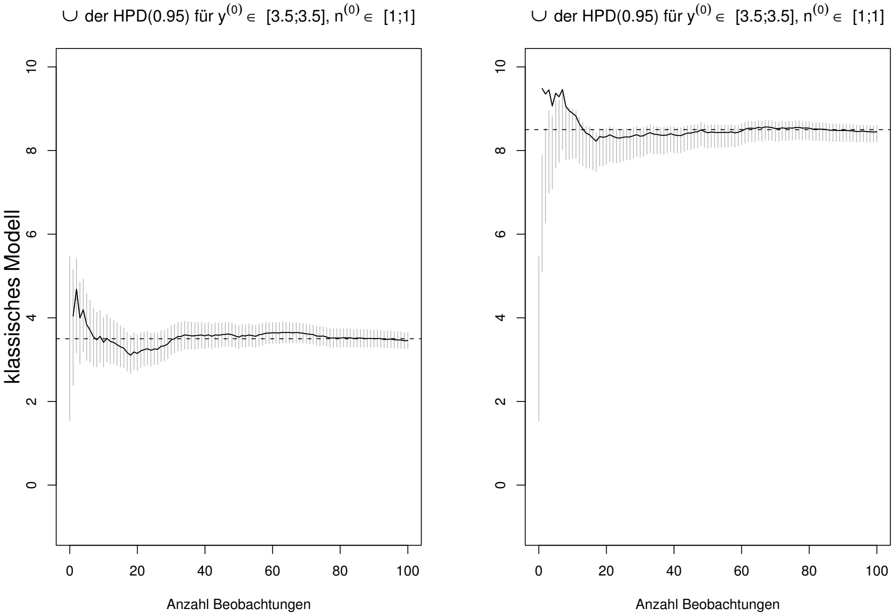


Erinnerung Priori-Daten-Konflikt - Beispiel 2

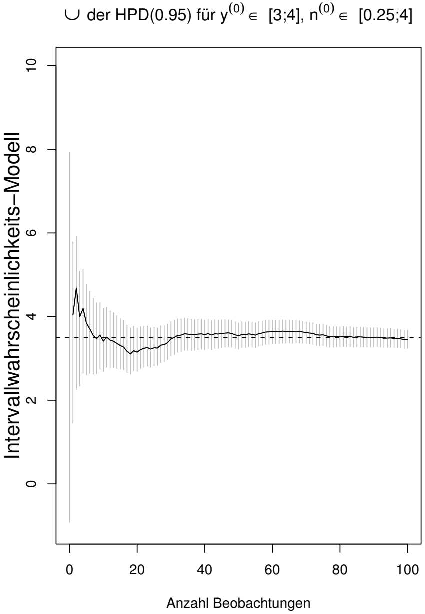
Beispiel 2: $\nu = 3.5$, $x = 8.5$, $\frac{\nu + x}{2} = 6$

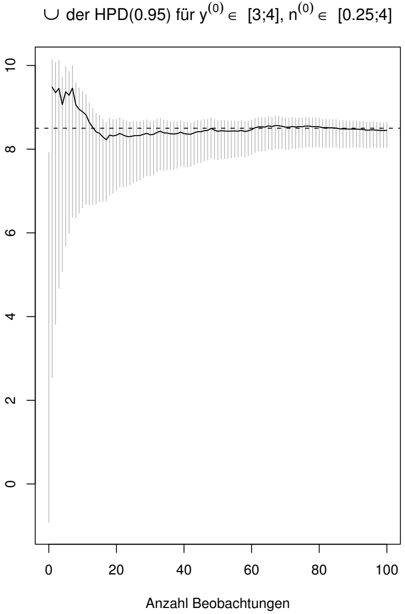



Menge der Prioriverteilungen mit y(0) in [3;4] und n(0) in [0.25;4]
kein prior−data conflict
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
Beobachtung τ^k / k = x̄ = 3.5 mit k = 1
Menge der Posterioriverteilungen mit y(1) in [3.1;3.9] und n(1) in [1.25;5]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
∪ der Posteriori−HPD(0.95)−Intervalle = [1.35;5.65]
Menge der Prioriverteilungen mit y(0) in [3;4] und n(0) in [0.25;4]
prior−data conflict
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
Beobachtung τ^k / k = x̄ = 8.5 mit k = 1
Menge der Posterioriverteilungen mit y(1) in [4.1;7.6] und n(1) in [1.25;5]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
∪ der Posteriori−HPD(0.95)−Intervalle = [2.35;9.35]



∪ der HPD(0.95) für $y^{(0)} \in$ [3.5;3.5], $n^{(0)} \in$ [1;1]
∪ der HPD(0.95) für $y^{(0)} \in$ [3.5;3.5], $n^{(0)} \in$ [1;1]
klassisches Modell
Anzahl Beobachtungen
Anzahl Beobachtungen


∪ der HPD(0.95) für $y^{(0)} \in$ [3;4], $n^{(0)} \in$ [0.25;4]
Intervallwahrscheinlichkeits–Modell
Anzahl Beobachtungen
0
20
40
60
80
100
0
2
4
6
8
10


∪ der HPD(0.95) für $y^{(0)} \in$ [3;4], $n^{(0)} \in$ [0.25;4]
Anzahl Beobachtungen
0
20
40
60
80
100
0
2
4
6
8
10

Resümee der zentralen Aspekte

- W'keitsbegriff
  - bestimmt Inferenzkonzept, prädeterminiert Optimalitätsbegriff in Entscheidungsproblemen
  - axiomatisch - objektiv - subjektiv - logisch
  - subjektive W'keit:
    - jede Form der Unsicherheit (statt Zufälligkeit) durch W'keiten quantifizierbar
    - behaviouristischer Zugang ($\rightarrow$ Verhalten in Wettsituationen)
    - unmittelbare Inferenztheorie (Bayes)
- Unsicherheit als mehrdimensionales Phänomen
  - Abgrenzung Risiko - Ambiguität
    - Ellsberg-Paradoxon (1961)
    - aktuell: neuronale Unterschiede
- Ungenügen des klassischen W'keitsbegriffes
  - Intervallw'keiten
    - Intervallbreite drückt Ambiguität aus
    - adäquate Modellierung partiellen Wissens
    - nun z. B. Modellierung des Ellsberg-Paradoxons und Priori-Daten-Konflikten möglich