Schlicht, Ekkehart:

Eine neoklassische Theorie der Vermögensverteilung

Munich Discussion Paper No. 1977-

Department of Economics
University of Munich

Volkswirtschaftliche Fakultät
Ludwig-Maximilians-Universität München

Deutsche Fassung des Artikels "A Neoclassical Theory of Wealth Distribution", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 1975, 189(1/2), 78-96, übersetzt von Lucas Zeise, entnommen dem Buch Einführung in die Verteilungstheorie von Ekkehart Schlicht, Rowohlt 1976, veröffentlicht mit freundlicher Genehmigung des Übersetzers.

15. Ekkehart Schlicht
Eine neoklassische Theorie der Vermögensverteilung (1975)

Stiglitz' Theorie (Studientext 14) wird hier modifiziert, indem statt einer konstanten eine zunehmende marginale Sparquote angenommen wird. Es wird gezeigt, daß das Modell stabile Zweiklassenverteilungen erklären kann, wie sie in den Abbildungen 2 und 3 (S. 275 f.) dargestellt sind.

1. Einleitung

In seinem bahnbrechenden Artikel über wirtschaftliches Wachstum bemerkte Solow: «Jede Theorie stützt sich auf Annahmen, die nicht ganz wahr sind. Das gerade macht sie zur Theorie. Die Kunst der erfolgreichen Theoriebildung besteht darin, die unvermeidlichen vereinfachenden Annahmen so zu wählen, daß die Endergebnisse nicht zu stark von den Vereinfachungen beeinflußt werden. Entscheidend ist eine Annahme dann, wenn die Ergebnisse von ihr stark abhängen; es ist deshalb wichtig, daß derartig entscheidende Annahmen möglichst realistisch sind» (Solow, S. 58). Erstes Ziel dieses Aufsatzes ist der Nachweis, daß in dem von Stiglitz vorgeschlagenen Modell der Vermögensverteilung die Annahme einer *linearen* Sparfunktion im obigen Sinne entscheidend ist. Wenn man sie durch die Annahme einer konvexen Sparfunktion ersetzt, also eine steigende marginale Sparquote annimmt, kommt man zu qualitativ anderen Ergebnissen. Da sich die Analyse beträchtlich vereinfachen läßt, wenn man Duesenberrys Relative-Einkommens-Hypothese verwendet (was zusätzlich die einfache Berücksichtigung von Harrod-neutralem technischen Fortschritt ermöglicht), soll dieser Weg hier gewählt werden.

Zweites Ziel des Aufsatzes ist eine möglichst schlüssige und vollständige Analyse des vorgestellten Modells. Erhofft ist damit eine Verbesserung gegenüber Stiglitz' etwas heuristischer Diskussion seines Modells. Drittes Ziel ist die Aufstellung der These, daß das Modell stabile Zweiklassenverteilungen erzeugt, wenn allen Individuen identische Verhaltensgleichungen (d. h. identische Sparfunktionen) zugesprochen werden. Unsere Theorie erklärt deshalb Pasinetti-Sparverhalten endogen. Satz 4 und Folgesatz 2 ließen sich in der Aussage zusammenfassen, daß das Gleichgewicht mit der höchsten Kapitalintensität stabil ist, vorausgesetzt, die Gesellschaft ist in ausreichend kleine Gruppen aufgeteilt. Wenn folglich eine Zweiklassenverteilung eine höhere Kapitalintensität aufweist als alle anderen Verteilungen und wenn die Gruppen genügend klein sind, ist diese Verteilung stabil, und anderweitig gleiche Individuen besitzen in diesem stabilen Gleichgewicht unterschiedlich hohe Vermögen.[1] (Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit einer ähnlichen Eigenschaft nichtstationärer Lösungen.)

1 Es läßt sich mit denselben Methoden nachweisen, daß sich dieses Ergebnis auch

2. Das Modell

2.1 *Produktion und Faktorvergütung*

Was die Produktion anlangt, folgen wir Stiglitz und verwenden das übliche neoklassische Einsektorenmodell. Die Pro-Kopf-Produktion y ist eine zweifach kontinuierlich differenzierbare Funktion y: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ der Kapital intensität k, die die üblichen Bedingungen erfüllt:[2]

(1) $$y = y(k),\ y' > 0,\ y'' < 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \infty,\ y'(\infty) = 0.$$

Unsere Theorie der Faktorentlohnung ist eine etwas verallgemeinerte Version der Grenzproduktivitätstheorie.[3] Wir nehmen an, der Lohnsatz w sei eine streng monoton steigende, stetig differenzierbare Funktion w: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ der Kapitalintensität k, aber nicht größer als das Grenzprodukt der Arbeit. Auf diese Weise können einige Aspekte monopolistischer Preisbildung mitberücksichtigt werden.

(2) $$w = w(k),\ w' > 0,\ 0 < w \leq y - ky',\ \text{wenn } k > 0,\ w(0) = 0.$$

Dementsprechend ist der Zinssatz r eine abnehmende Funktion von k und nicht kleiner als die Grenzproduktivität des Kapitals. Das ergibt sich aus der Buchführungsgleichheit

(3) $$w + rk = y$$

und (2), d. h.

(4) $$r(k) := \frac{1}{k}\{y(k) - w(k)\} \geq y'$$
$$r' = \frac{1}{k}\{(y' - r) - w'\} < 0.$$

2.2. *Vermögens-Einkommensgruppen*

Die Gesamtbevölkerung ist in n Gruppen aufgeteilt. a_i bezeichnet den Anteil der $i$ten Gruppe ($i = 1, 2, \ldots, n$) an der Gesamtbevölkerung. Wir haben also

---

auf den Fall einer konvexen Ersparnisfunktion übertragen läßt, wie er von Stiglitz im Abschnitt «Nonlinear Savings Functions» diskutiert wird. (Stiglitz' Behandlung ist demnach unkorrekt.)

2 $\mathbf{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen, $\mathbf{R}_+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Der Kürze halber schreiben wir $f(\infty)$ statt $\lim_{k \to \infty} f(k)$ usw.

3 Vgl. Stiglitz, S. 383, Fn. 4.

(5) $a_i > 0$ für alle i, $\Sigma a_i = 1$.

Alle Mitglieder derselben Gruppe besitzen das gleiche Vermögen. Es sei c_i das Pro-Kopf-Vermögen in der Gruppe i. Es wird angenommen, daß diese Vermögen in der Form von Ansprüchen an den gesamten Kapitalstock der Wirtschaft gehalten werden. Die Kapitalintensität k ist deshalb identisch mit dem durchschnittlichen Vermögen pro Kopf:

(6) $\Sigma a_i c_i = k$

Darüber hinaus sollen alle Individuen das gleiche Arbeitseinkommen w beziehen. Das Einkommen y_i eines jeden Individuums der Gruppe i ist deshalb:

(7) $y_i = w + rc_i = y + (c_i - k)r$.

Aus 3, 5, 6 und 7 erhalten wir die Bestätigung, daß y das durchschnittliche Einkommen ist:

(8) $\Sigma a_i y_i = y$.

2.3. *Das Sparverhalten*

Der Hauptunterschied zur Analyse von Stiglitz besteht darin, daß seine Annahme einer konstanten marginalen Sparquote durch die Annahme einer steigenden marginalen Sparquote ersetzt wird. Es wird später deutlich werden, daß das zu einigen anderen Ergebnissen als bei Stiglitz führt.
Wir betrachten ein Mitglied der Gruppe i, das das Einkommen y_i bezieht. Es sei s^i der entsprechende Ersparnisbetrag. Wir nehmen an, s^i sei eine wachsende Funktion von y_i mit einer steigenden marginalen Sparquote, die sich bei wachsendem Einkommen an Eins annähert. Das Postulat einer steigenden marginalen Sparquote ist die übliche Lehrbuchannahme, die sich durch den Gedanken begründen läßt, daß ein steigendes Einkommen die Bedeutung «direkter» Konsumbedürfnisse gegenüber den «indirekten» Bedürfnissen – der Gewinnung wirtschaftlicher Unabhängigkeit und hoher sozialer Stellung durch Vermögensakkumulation – zurücktreten läßt.
Gemäß der Relativen-Einkommens-Hypothese soll s^i nicht nur von individuellen Einkommen y_i, sondern auch vom allgemeinen Lebensstandard, der sich als Durchschnittseinkommen y darstellt, beeinflußt sein. (Vgl. Duesenberry, Kap. 3 und 4, sowie Friedman, Kap. 6.) Wenn sowohl y_i als auch y um einen gleichen Faktor ansteigen, wächst s^i proportional mit, d. h. die durchschnittliche Sparneigung des Individuums s^i/y_i ist durch die relative Einkommensposition des Individuums (dargestellt als y_i/y) vollständig bestimmt und vom absoluten Einkommensniveau unabhängig.

Der Einfachheit halber definieren wir die Ersparnisfunktion nur für nichtnegative Argumente und setzen voraus, daß die entsprechenden Ersparnisbeträge nichtnegativ sind.[4]
Alle Individuen sollen sich gleich verhalten, d. h., sie haben alle die gleiche Ersparnisfunktion s. Somit ist s^i eine zweifach stetig differenzierbare, linear homogene Funktion $s\colon \mathbf{R}^2{}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ von y_i und y mit den folgenden Eigenschaften (die Subskripte bezeichnen partielle Ableitungen):

$$(9) \qquad s^i = s(y_i, y) \geq 0,\ 0 \leq s_1 < 1,\ s_1(\infty, y) = 1,\ s_{11} > 0,\ s(0, y) = 0.$$

Die Linearhomogenität und Stetigkeit implizieren zusammen mit 9

$$(10) \qquad s_2(y_i, y) = s(y_i/y, 1) - s_1(y_i/y, 1)y_i/y < 0,\ s(y_i, 0) = y_i$$

d. h. ein Ansteigen des Durchschnittseinkommens y bei einem konstanten Individualeinkommen y_i verringert die Ersparnisse, während bei einem Absinken die durchschnittliche Sparneigung gegen Eins strebt.

2.4. *Die Akkumulationsgleichungen*

In jeder Gruppe wächst die Bevölkerung mit der gleichen Rate $\eta > 0$. Daher bleiben die a_i über die Zeit hinweg konstant. Schließlich nehmen wir an, daß Kinder das Vermögen ihrer Eltern zu gleichen Teilen erben. Die Veränderung des Pro-Kopf-Vermögens in der Zeit ist jetzt gegeben durch

$$(11) \qquad \dot{c}_i = s^i - \eta c_i,$$

d. h., das Pro-Kopf-Vermögen erhöht sich durch die Ersparnisse und verringert sich durch ηc_i als Folge des Bevölkerungswachstums.
Mit Hilfe von 1, 4, 6, 7 und 9 kann 11 umgeschrieben werden als

$$(12) \qquad \dot{c}_i = s\{y(k) + (c_i - k)r(k),\ y(k)\} - \eta c_i,\ k = \Sigma a_j c_j,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

---

4 Wäre die Ersparnisfunktion auch für negative Argumente definiert, so würde eine nicht abnehmende marginale Sparquote bei ausreichend negativem Individualeinkommen negativen Konsum implizieren. Die Nichtnegativität des Sparens (bei positiven Einkommen) wird postuliert, um die Nichtnegativitätsbedingungen für Einkommen bei der Behandlung des Modells nicht zu verletzen. Vom ökonomischen Standpunkt aus ~~machen~~ negative Ersparnisse langfristig nicht sehr viel Sinn, und unser Modell sollte als langfristiges Modell verstanden werden.
Diese Schwierigkeiten liegen allerdings in Stiglitz' Analyse auch vor. Er schlägt vor, $k < 0$ als Ergebnis einer Verschuldung gegenüber dem Ausland aufzufassen – ein nicht problemloser Vorschlag, da $k < 0$ weder in der Produktionsfunktion noch als Determinante für Löhne und Zins einen Sinn ergibt (Stiglitz, S. 384, Fn. 7).

Mit Hilfe der Hilfsfunktion ψ, die als , y(k)

$$(13) \qquad \psi(c,k) := s\{y(k) + (c-k)r(k)\} - \eta c$$

definiert ist, kann das System 12 kürzer wie folgt dargestellt werden:

$$(14) \qquad \dot{c}_i = \psi\{c_i, \Sigma a_j c_j\} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Dieses System von Differentialgleichungen ist definiert für alle Vermögensverteilungen $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, die nichtnegative Einkommen zur Folge haben, und daher auch für alle nichtnegativen Vermögensverteilungen $c \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$. Es beschreibt die Entwicklung der Vermögensverteilung in der Zeit. Unsere Aufgabe ist es nun, einige Eigenschaften möglicher Entwicklungen zu untersuchen.[5]

3. Die Analyse

3.1. *Vorbemerkungen*

Beschäftigen wir uns zunächst mit einigen formalen Vorbemerkungen unserer Analyse: Erledigen wir die Probleme der Existenz, Eindeutigkeit, Nichtnegativität und Beschränktheit der Lösungen von 14. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf nichtnegative Vermögensverteilungen $c \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$, mit einer positiven Kapitalintensität.

Hilfssatz 1

Für jede anfängliche nichtnegative Vermögensverteilung $c_o = (c_1(0), c_2(0), \ldots, c_n(0))$ mit einer damit verbundenen positiven Kapitalintensität $k_o = \Sigma a_i c_i(0)$ hat das System (14) eine eindeutige Lösung

$$(15) \qquad c(t) = C(t, c_o) = (C_1(t, c_o), C_2(t, c_o), \ldots, C_n(t, c_o))$$

mit einem entsprechenden Zeitpfad der Kapitalintensität

$$(16) \qquad k(t) = K(t, c_o) := \Sigma a_i C_i(t, c_o),$$

die für alle nichtnegativen Zeitpunkte t definiert ist. Sowohl $C(t, c_o)$ als auch $K(t, c_o)$ sind streng positiv für $t > 0$ und von oben beschränkt. $\triangle$[6]

---

5 Bei Harrod-neutralem technischen Fortschritt kann η als die Summe von technischem Fortschritt und Bevölkerungswachstum interpretiert werden.

6 Das Symbol $\triangle$ soll jeweils das Ende von Definitionen, Sätzen, Beweisen usw. angeben.

Beweis

1. Wir erinnern uns, daß ψ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Gemäß dem Existenzsatz (Lasalle/Lefschetz, S. 27) gibt es für 14 genau eine Lösung 15, die durch $\mathbf{R}^n{}_+$ fortgeführt werden kann. Um zu zeigen, daß diese Lösung für alle positiven Zeitpunkte streng positiv bleibt, genügt der Nachweis, daß $c(t)$ den positiven Orthanten nicht verlassen kann, was durch die folgenden beiden Aussagen impliziert ist:

(17) Es gibt ein $\delta > 0$ derart, daß aus $k(t)\varepsilon(0), \delta)$ folgt: $k(t) > 0$

(18) $c_i(t) = 0$ und $k(t) > 0$ impliziert $\dot{c}_i(t) > 0$.

Durch 17 wird die Posivität von $K(t, c_o)$ für $k_o > 0$ gezeigt. Somit kann $k(t) > 0$ in 18 herangezogen werden, um die Positivität von $C_i(t, c_o)$ für $t > 0$, $c_o \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$ $k_o > 0$ nachzuweisen.

1.1. Aussage 17 folgt unmittelbar. Aus 5, 6 und 12 entnehmen wir, daß

(19) $\dot{k} = \Sigma a_i \dot{c}_i = \Sigma a_i s\{y(k) + (c_i - k) r(k), y(k)\} - \eta k.$

$s_{11} > 0$ (d. h. Konvexität in y_i) und Homogenität von s implizieren

(20) $\dot{k} \geqslant s(1,1) \cdot y(k) - \eta k.$

Da $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$ (aus 1) und da y' stetig ist, ist 17 bewiesen.

1.2. Aussage 18 kann durch Verwendung von 2, 7, 9 und 12 nachgewiesen werden:

(21) $\dot{c}_i = s\{w(k), y(k)\} > 0$, wenn $c_i = 0$ und $k = 0$.

2. Nachgewiesen werden muß noch die Beschränktheit von K, die die Beschränktheit von C impliziert. Dafür ist es ausreichend, wenn gezeigt werden kann, daß es ein $z > 0$ derart gibt, daß

(22) $c(t) \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$ und $k(t) > z$ implizieren, $\dot{k}(t) < 0$.

Wir wählen $z > 0$ so, daß $y(z) = \eta z$. Da $s(y_i, y) \leqslant y_i$, folgt aus 19

(23) $\dot{k} \leqslant y(k) - \eta k,$

was für $k > z$ negativ ist. △

3.2. *Einklassengleichgewicht*

In diesem und im folgenden Abschnitt wollen wir uns auf die Gleichgewichtslösungen von 14 konzentrieren, d. h. solche Lösungen, die über die Zeit hinweg konstant bleiben.

Definition 1

Ein Einklassengleichgewicht ist eine Vermögensverteilung $c \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$ mit identischem Pro-Kopf-Vermögen in allen Gruppen, die über die Zeit hinweg konstant bleibt. △

Nach dieser Definition ist ein Einklassengleichgewicht gekennzeichnet durch $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ und $\dot{c}_i = 0$ für alle i. Aus 6 und 14 erkennen wir, daß das äquivalent ist zu $c_i = k$ für alle i und $\psi(k, k) = 0$. Die Gleichung

$$(24) \qquad \psi(k, k) = s(1,1)y(k) - \eta k = 0$$

hat genau zwei Lösungen: Die triviale Lösung $k=0$ und die Lösung $k=\underline{k}$, wobei $\underline{k}$ definiert ist durch

$$(25) \qquad s(1,1) \cdot y(\underline{k}) = \eta \underline{k}, \ \underline{k} > 0.$$

Wir sind jetzt in der Lage, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1

Das einzige Einklassengleichgewicht mit positiver Kapitalintensität ist durch $c = (\underline{k}, \underline{k}, \ldots, \underline{k})$ gegeben, wobei $\underline{k}$ aus 25 entnommen ist. △

Als ein nächster Schritt sind die Stabilisierungseigenschaften des Einklassengleichgewichts zu untersuchen.[7]

Satz 2

Das Einklassengleichgewicht ist genau dann stabil, wenn

$$(26) \qquad s_1 \cdot r < \eta.$$

Beweis

Aus 14 erhält man an der Stelle $c = (\underline{k}, \underline{k}, \ldots, \underline{k})$ die charakteristische Gleichung

$$(27) \qquad \det \begin{pmatrix} a_1\psi_2 + \psi_1 - \lambda & a_2\psi_2 & \ldots & a_n\psi_2 \\ a_1\psi_2 & a_2\psi_2 + \psi_1 - \lambda & \ldots & a_n\psi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1\psi_2 & a_2\psi_2 & \ldots & a_n\psi_2 + \psi_1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

7 Es werden durchweg die üblichen Stabilitätskonzepte, wie sie z. B. in Bhatia/Szegö angegeben sind, verwendet. Die triviale Lösung wird im folgenden vernachlässigt. Es läßt sich zeigen, daß sie instabil ist.

Diese Determinante wird entwickelt, indem die zweite Zeile von der ersten subtrahiert wird, die dritte von der zweiten usw. Die erste Spalte wird zur zweiten hinzuaddiert, die zweite zur dritten usw. Schließlich reduziert sich Gleichung 27 auf

$$(28) \qquad (\psi_1 - \lambda)^{n-1} (\psi_1 + \psi_2 - \lambda) = 0$$

mit den beiden Wurzeln $\lambda_1 = \psi_1$ und $\lambda_2 = \psi_1 + \psi_2$. Da $\psi_1 = s_1 r - \eta$ und $\psi_2 = s_1(y' - r) + s_2 y' < 0$, sind alle Wurzeln negativ, falls 26 gilt. Falls $s_1 r - \lambda > 0$, ist eine Wurzel positiv, und das Gleichgewicht ist instabil. In Schlicht (S. 74) wird mittels des Satzes von Lasalle/Lefschetz (S. 51) gezeigt, daß $s_1 r - \eta = 0$ iuch Instabilität impliziert. △

Die ökonomische Interpretation des Satzes 2 ist einfach. Man nehme an, die Wirtschaft befinde sich im Einklassengleichgewicht, und verändere das Pro-Kopf-Vermögen in der Gruppe i um dc_i. Das verändert die Ersparnisse um $(s_1 r) dc_i$ und verändert die Verringerung des Pro-Kopf-Vermögens aufgrund von Bevölkerungswachstum um ηdc_i. Die Differenz ergibt die Veränderung des Pro-Kopf-Vermögens, die, wenn 26 zutrifft, die ursprüngliche Störung wieder ausgleicht oder, falls $s_1 r - \eta > 0$, diese Störung verstärkt.

Ganz augenfällig hängt das Stabilitätsverhalten entscheidend von der Höhe der marginalen Sparquote s_1 ab. In unserem Modell ist die marginale Sparquote größer als die durchschnittliche Sparneigung, weil die Spartätigkeit auch vom Durchschnittseinkommen abhängt. So könnten wir den Quotienten aus Grenz- und durchschnittlicher Sparneigung als Maßzahl für diesen Effekt heranziehen, was in der folgenden Ergänzung zu Satz 2 geschieht.

Folgesatz 1

Das Einklassengleichgewicht ist dann und nur dann stabil, wenn das Verhältnis von durchschnittlicher Sparquote zur marginalen Sparquote größer als die Profitquote ist, d. h. wenn

$$(29) \qquad \frac{s/y}{s_1} > \frac{r\,k}{y} \text{ an der Stelle } c = (\underline{k}, \underline{k}, \ldots, \underline{k}). \qquad \triangle$$

Beweis

29 folgt unmittelbar aus 25 und 26. △

Somit ist ein Einklassengleichgewicht stabil oder instabil, je nachdem ob – in dieser Gleichgewichtsposition – der gesellschaftliche Einfluß auf die Spartätigkeit sehr gering oder sehr hoch ist. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß das Gleichgewicht dann stabil ist, wenn von Veränderungen von y kein großer Einfluß auf das Konsumniveau ausgeht. Wenn dagegen dieser Einfluß ausreichend stark ist, ist das Gleichgewicht instabil.

Definition 2

Ein Zweiklassengleichgewicht ist eine Vermögensverteilung $c \varepsilon \mathbf{R}^n{}_+$, die im Zeitverlauf konstant bleibt und die folgende Eigenschaft aufweist: es gibt zwei reelle Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ derart, daß für jede Gruppe $i \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$ entweder $c_i = \alpha$ oder $c_i = \beta$ zutrifft. Außerdem existiert zumindest ein $j \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $c_j = \alpha$ und zumindest ein $k \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $c_k = \beta$. △

Definition 3

In einem Zweiklassengleichgewicht werden α als «Pro-Kopf-Vermögen der Arbeiter» und β als «Pro-Kopf-Vermögen der Kapitalisten» bezeichnet. Wenn $c_i = \alpha$, gehört Gruppe i zur Klasse der Arbeiter $\mathfrak{W}$, die definiert ist als

$$(30) \qquad \mathfrak{W} := \{i \mid c_i = \alpha\}.$$

Wenn $c_i = \beta$, gehört Gruppe i zur Kapitalistenklasse $\mathfrak{C}$, die definiert ist als

$$(31) \qquad \mathfrak{C} := \{i \mid c_i = \beta\}.$$

Der Anteil der Arbeiter an der Gesamtbevölkerung ist

$$(32) \qquad \sigma := \sum_{i \varepsilon \mathfrak{W}} a_i, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Der den Arbeitern gehörende Anteil am Gesamtkapital beträgt

$$(33) \qquad \tau := \frac{\alpha \cdot \sigma}{k}.$$

Diese Definitionen erscheinen ziemlich natürlich. In diesem Abschnitt soll die Frage der Existenz und der Stabilität von Zweiklassengleichgewichten, wie sie oben definiert sind, untersucht werden. Es wird sich herausstellen, daß diese Fragen im Fall des Zweiklassengleichgewichts etwas komplizierter sind als im Fall des im vorherigen Abschnitt untersuchten Einklassengleichgewichts. Insbesondere erfordert der Beweis unserer beiden Hauptsätze eine ganze Reihe an Hilfssätzen, die Relevanz nur im Hinblick auf unser Ziel haben. Mit der Absicht, dieses Ziel deutlich zu machen, stellen wir die Sätze über Existenz und Stabilität an den Anfang der Analyse und weisen auf die ökonomischen Vorstellungen hin, die den Methoden des Beweises zugrunde liegen. Erst danach folgen die exakten Beweise.

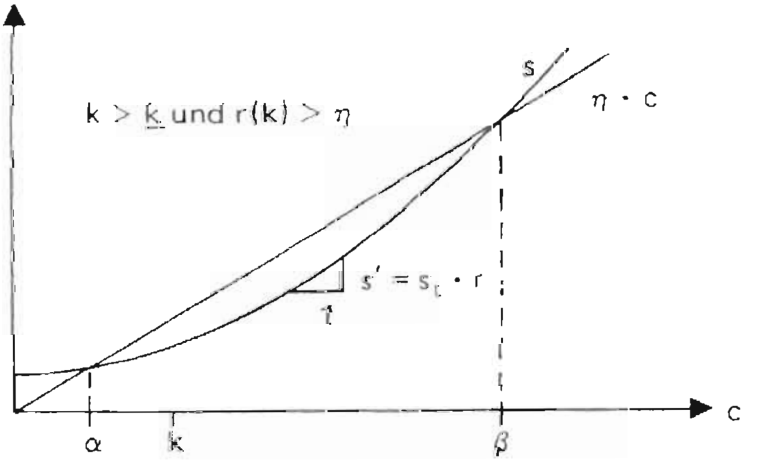
Satz 3

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Zweiklassengleichgewichts ist

(34) $\qquad r(\underline{k}) > \eta, \quad n \geqslant 2$

wobei $\underline{k}$ durch (25) definiert ist. Wenn es ein ausreichend kleines a_j für einige $j \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, ist diese Bedingung auch hinreichend. $\triangle$

$n \geqslant 2$ ist eine offensichtliche Bedingung für die Existenz eines Zweiklassengleichgewichts. Um die andere Bedingung, $r(\underline{k}) > \eta$, zu verstehen, müssen wir uns daran erinnern, daß im Fall einer steigenden marginalen Sparquote eine steigende Vermögens- und Einkommensungleichheit die Ersparnisse in der Wirtschaft erhöht. Daher wird eine Zweiklassengleichgewicht zu einer höheren Kapitalintensität führen als das Einklassengleichgewicht, d. h. zu einer Kapitalintensität $k > \underline{k}$ mit einem entsprechenden Zinssatz $r(k) < r(\underline{k})$. Ist $r(\underline{k}) \leqslant \eta$, so impliziert dies $r(k) < \eta$ für das Zweiklassengleichgewicht. Aber $r < \eta$ bedeutet, daß es notwendig ist, *mehr* als den Kapitalertrag zu sparen, um das Pro-Kopf-Vermögen konstant zu halten. «Von selbst» vermehrt sich Kapital nicht so schnell, wie die Bevölkerung wächst. Je höher das Pro-Kopf-Vermögen, desto größer ist auch die Differenz zwischen der erforderlichen Ersparnis und dem Kapitalertrag. Das bedeutet, daß die Kapitalisten in einem Zweiklassengleichgewicht mit $r < \eta$ *weniger* als die Arbeiter verbrauchen müssen, obwohl sie das höhere Einkommen haben. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme über die Spartätigkeit. Aus diesem Grunde ist 34 eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Zweiklassengleichgewichts.



Figur 1

Das Argument ist in Figur 1 dargestellt. Bei einer gegebenen Kapitalintensität $k > \underline{k}$ beschreibt die Ersparniskurve s die Pro-Kopf-Ersparnisse in Abhängigkeit vom Pro-Kopf-Vermögen c, d. h.

$$(35) \qquad s(c) = s\{w(k) + r(k) \cdot c,\ y(k)\}$$

mit der Steigung $s' = s_1 \cdot r < r$, dem Produkt aus marginaler Sparquote und dem Kapitalertrag. Da $s_{11} > 0$, ist $s'' > 0$, d. h., die Ersparniskurve ist streng konvex. Durch 9 und 35 erhalten wir $s(0) = s\{w, y\} > 0$ für positive k. Die Gerade durch den Ursprung hat die Steigung η. Gemäß 12 ist die Veränderung des Pro-Kopf-Vermögens gegeben durch die Differenz zwischen $s(c)$ und $\eta \cdot c$ (der Differenz zwischen Pro-Kopf-Ersparnissen und dem für ein Schritthalten mit dem Bevölkerungswachstum erforderlichen Kapitalbetrag). Es wird gezeigt werden, daß es ein Pro-Kopf-Vermögen der Arbeiter $\alpha < k$ gibt mit $s(\alpha) = \eta \cdot \alpha$, wenn $k > \underline{k}$.[8] Eine notwendige Bedingung für ein Zweiklassengleichgewicht ist die Existenz eines $\beta > \alpha$ mit $s(\beta) = \eta\beta$, d. h. einem stationären Wert des Pro-Kopf-Vermögens der Kapitalisten. Solch ein β existiert dann und nur dann, wenn die Ersparniskurve für ausreichend hohe Werte von c eine Steigung größer als η hat. Da s' bei steigendem c auf r hintendiert, weil steigendes Vermögen das Einkommen erhöht und die marginale Sparquote an Eins annähert, ist damit impliziert, daß die Kapitalintensität k die Bedingung $r(k) > \eta$ erfüllt. Die zusätzliche Bedingung $k > \underline{k}$ kann nur erfüllt werden, wenn 34 gilt. Außerdem ist k ein gewichteter Durchschnitt von α und β mit den Gewichten σ und $(1 - \sigma)$. (Vgl. 6 und 32.) Wir bezeichnen die Kapitalintensität bei $r = \eta$ mit $\bar{k}$, d. h.

$$(36) \qquad r(\underline{k}) = \eta.$$ $r(\bar{k}) = \eta$

Aus Figur 1 läßt sich ersehen, daß β gegen unendlich geht, wenn k sich an $\underline{k}$ annähert. Es kann deshalb ein beliebig nahe an eins liegendes σ erreicht werden, wenn k geeignet gewählt wird.

Insbesondere kann man ein $(1 - \sigma) = a_j$ erhalten, wenn a_j, wie in Satz 3 postuliert, ausreichend klein ist. Durch die Wahl der Klassen $\mathfrak{W} = \{i = j \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathfrak{C} = \{j\}$ ist damit die Existenz eines Zweiklassengleichgewichts mit $(1 - \sigma) = a_j$ und den entsprechenden α, β, und k gesichert.

Der folgende Satz betrifft die Stabilitätseigenschaften von Zweiklassengleichgewichten.

Satz 4

1. Eine notwendige Bedingung für die Stabilität eines Zweiklassengleichgewichts ist, daß die Klasse der Kapitalisten nur aus einer Gruppe besteht.
2. Alle Zweiklassengleichgewichte, die die obige Bedingung bei einer Kapitalintensität genügend nahe an $\bar{k}$ erfüllen, sind stabil, wobei $\bar{k}$ durch 36 definiert ist.

---

8 S. Hilfssatz 3.

3. Es gelte 34, und es sei a_j für ein j genügend klein. Dann existiert ein Zweiklassengleichgewicht mit einer Kapitalistenklasse $\mathfrak{C} = \{j\}$, die die Bedingung 2 erfüllt. $\triangle$

Zunächst soll die Notwendigkeit diskutiert werden. Man nehme ein Zweiklassengleichgewicht mit einer Kapitalistenklasse an, die mehr als eine Gruppe umfaßt. Da $\dot{c} = s - \eta \cdot c$ für jede Gruppe gilt, läßt sich aus Figur 1 erkennen, daß eine geringfügige Differenz des Pro-Kopf-Vermögens zwischen den zur Kapitalistenklasse gehörenden Gruppen (die aus Störungen resultiert) durch das System *vergrößert* wird. Anfängliche Störungen können also nicht beseitigt werden. Dies begründet den Notwendigkeitsteil des Satzes.

Aus der Diskussion von Satz 3 und Figur 1 folgt, daß die Kapitalintensität eines Zweiklassengleichgewichts zwischen $\underline{k}$ und $\bar{k}$ liegen muß. Wir nehmen nun an, daß ein Zweiklassengleichgewicht mit einer nahe an $\bar{k}$ liegenden Kapitalintensität besteht und eine Kapitalistenklasse, die nur eine Gruppe enthält, etwa $\{j\}$. Wenn nun das Pro-Kopf-Vermögen der Kapitalisten etwas gestört, z. B. erhöht wird, hat das zwei Auswirkungen. Erstens wird die anfängliche Störung verstärkt, da die s-Kurve die ηc-Kurve in β von unten schneidet (Fig. 1). Diese Auswirkung ist ziemlich gering, wenn k genügend nahe an $\bar{k}$ liegt. Die zweite Wirkung besteht darin, daß die Erhöhung des Vermögens der Kapitalisten die aggregierte Kapitalintensität erhöht und dadurch α nach rechts verschiebt, da erhöhte Löhne höhere Ersparnisse der Arbeiter ermöglichen.

In dieser Situation sind die Arbeiter links von einem neuen α, und ihr Vermögen wächst. Das bewirkt ein Wachstum der durchschnittlichen Kapitalintensität, der Zinssatz sinkt, und β verschiebt sich nach rechts.

Da der erste Effekt auf das Vermögen der Kapitalisten relativ gering ist, wächst bis zu einem Punkt, wo β größer als das Vermögen der Kapitalisten ist, β schneller als das Vermögen der Kapitalisten. Jetzt sinkt das Kapitalistenvermögen, und das Vermögen der Arbeiter nähert sich einem neuen α, etwa $\bar{\alpha}$. Wenn das Vermögen der Arbeiter nahe genug an seinen stationären Wert $\bar{\alpha}$ herankommt, wird das Schrumpfen des Kapitalistenvermögens sich auf die Bewegung der aggregierten Kapitalintensität auszuwirken beginnen und letztlich ihr Absinken verursachen. Jetzt kehrt sich der gesamte Vorgang um. Die abnehmende Kapitalintensität verringert den Lohnsatz und erhöht den Zinssatz. Das Vermögen der Arbeiter sinkt, und die Schrumpfung der Kapitalistenvermögen verlangsamt sich ... Endlich wird sich – nach einigen Oszillationen – die ursprüngliche Position wieder einstellen.

Sind die von den Kapitalisten anfänglich gehaltenen Vermögen etwas unter β, so ist das Argument ähnlich. Der Stabilitätsmechanismus, der anfängliche Störungen des Vermögensbesitzes der Arbeiter beseitigt, wird aus Figur 1 ersichtlich: Anfängliche Störungen der Arbeitervermögen um α herum neigen dazu, beseitigt zu werden.

Der dritte Teil des Satzes läßt sich ganz leicht zeigen. Wir wählen ein k, hinreichend nahe an $\bar{k}$, und zeichnen die entsprechende Figur 1. Das entsprechende a_j wird der Gleichung $k = (1 - a_j) \cdot \alpha + a_j \cdot \beta$ entnommen. Nähert sich k an $\bar{k}$, so tendiert das entsprechende a_j gegen Null. Jetzt kann k so gewählt werden, daß es Teil 2 von Satz 4 erfüllt und daß gleichzeitig das entsprechende a_j die Bedingung von Satz 3 erfüllt.

3.4. *Zweiklassengleichgewicht: Formale Diskussion*

Aus 6 und den Definitionen 2 und 3 erhalten wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2

In einem Zweiklassengleichgewicht sind die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\psi(\alpha, k) = 0,\ \psi(\beta, k) = 0,\ k = \sigma \cdot \alpha + (1 - \sigma) \cdot \beta, \quad \alpha < \beta,\ 0 < \sigma < 1. \quad \triangle \tag{37}$$

Außerdem beweisen wir

Hilfssatz 3

Es gibt eine Lösung $(\alpha(k), \beta(k), \sigma(k))$ von 37 dann und nur dann, wenn

$$k \varepsilon \mathfrak{K} := \{k \mid \underline{k} < k < \bar{k}\} \tag{38}$$

wobei $\underline{k}$ durch 25 und $\bar{k}$ durch 36 definiert ist.
Bei $k \varepsilon \mathfrak{K}$ sind $\alpha(k)$, $\beta(k)$ und $\sigma(k)$ eindeutig definiert, positiv und differenzierbar. $\triangle$

Beweis

1. Notwendigkeit. Wir beweisen, daß $k \varepsilon \mathfrak{K}$ impliziert, daß die Bedingung 37 verletzt wird.
1.1 Wenn $k \geqslant \bar{k}$, erhalten wir $r(k) \leqslant \eta$. Da $s_1 < 1$, ist $\psi_1 = s_1 \cdot r - \eta$ negativ, und die Gleichung $\psi(c, k) = 0$ kann nicht zwei Wurzeln für c haben.
1.2. Nehmen wir an $k \leqslant \underline{k}$ und es gelte gleichzeitig 37. Da $\psi_{11} > 0$, folgt aus 37

$$\psi(k, k) < \sigma \cdot \psi(\alpha, k) + (1 - \sigma) \cdot \psi(\beta, k) = 0. \tag{39}$$

Andererseits erhalten wir aus 1 und 25

(40) $\qquad \psi(k,k) < 0$ dann und nur dann, wenn $k > \underline{k}$,

was 39 widerspricht.
2. Hinlänglichkeit und Eindeutigkeit. Ist $k \varepsilon \mathfrak{K}$, so gilt nach 40 $\psi(k,k) < 0$. Außerdem impliziert $k \varepsilon \mathfrak{K}$ daß $\psi(\infty, k) > 0$ ist. Zusammen mit $\psi(0,k) > 0$ bei $k > 0$ beweist dies die Existenz von (α, β) mit $0 < \alpha < \beta$. Da $\psi_{11} > 0$, sind α und β eindeutig bestimmt. Das entsprechende σ ist $\sigma = (\beta - k)/(\beta - \alpha)$. Da ψ eine stetig differenzierbare Funktion ist, sind α, β und σ differenzierbar. △

Als nächstes beweisen wir

Hilfssatz 4

Nehmen wir an, $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, und definieren wir

(41)
$$J(k) := \begin{pmatrix} \psi_1\{\alpha(k),k\} + \sigma(k)\cdot\psi_2\{\alpha(k),k\} & (1-\sigma(k))\cdot\psi_2\{\alpha(k),k\} \\ \sigma(k)\cdot\psi_2\{\beta(k),k\} & \psi_1\{\beta(k),k\} + (1-\sigma(k))\psi_2\{\beta(k),k\} \end{pmatrix}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $0 < \lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \alpha(k) < \bar{k}$
2. $\lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \beta(k) = \infty$
3. $\lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \sigma(k) = 1$
4. $0 < \lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \tau(k) < 1$
5. $-\infty < \lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \psi_1\{\alpha(k),k\} < 0$
6. $\psi_1\{\beta(k),k\} > 0$ für alle $k \varepsilon \mathfrak{K}$, $\lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \psi_1\{(k),k\} = 0$
7. $\operatorname{tr} J(k) \leqslant -\delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $k \varepsilon \mathfrak{K}$, die genügend nahe bei $\bar{k}$ liegen
8. $\det J(k) \geqslant \delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $k \varepsilon \mathfrak{K}$, die genügend nahe bei $\bar{k}$ liegen
9. $\sigma'(k) \geqslant \delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $k \varepsilon \mathfrak{K}$, die genügend nahe bei $\bar{k}$ liegen. △

Beweis

1. Aus 1, 2, 9, 13 und 40 bekommen wir $\psi(0,\bar{k}) = s\{w(\bar{k}), y(\bar{k})\} > 0$ und $\psi(\bar{k},\bar{k}) < 0$. Zusammen mit $\psi_{11} > 0$ (aus 9 und 13) ergibt sich die Aussage.

2. Aus 9, 13, 36 und 40 erhalten wir $\psi(\bar{k},\bar{k}) < 0$, $\psi_1(\infty,k) > 0$ für $k < \bar{k}$ und $\psi_1(\infty,\bar{k}) = 0$. Zusammen mit $\psi_{11} > 0$ impliziert dies die Behauptung.

3. Nach Hilfssatz 3 sind α, β und σ für alle $k \varepsilon \mathfrak{K}$ streng positiv. Aus Hilfssatz 2 ergibt sich, daß $0 < \alpha < \bar{k}$, d. h. α ist beschränkt, und $\sigma = (\beta - k)/(\beta - \alpha) < 1$. Da $\lim\limits_{k \uparrow \bar{k}} \beta(k) = \infty$, ist die Behauptung bewiesen.

4. Dies folgt aus 1., 3. oben und 33.

5. Bei $\bar{k}$ haben wir $r(\bar{k}) = \eta$. Deshalb ist $\psi_1\{\alpha(\bar{k}), \bar{k}\} = (s_1\{w(\bar{k}) + \eta \cdot \alpha(\bar{k}), y(\bar{k})\} - 1) \cdot \eta$ negativ und beschränkt, weil wir aus 3. wissen, daß α beschränkt ist.

6. Da $k \varepsilon \mathfrak{K}$ impliziert, daß $k > \underline{k}$, stellen wir aus 1 und 25 fest, daß $\psi(k,k) < 0$. Aus 37 erhalten wir $\alpha < k < \beta$, und dies zusammen mit $\psi_{11} > 0$ ermöglicht die erste Aussage. Die zweite folgt aus $r(\bar{k}) = \eta$ und $s_1(\infty, y) = 1$.

7. Wir schreiben die Spur in verkürzter Schreibweise wie folgt

$$\operatorname{tr} J = \psi_1{}^\alpha + \sigma \cdot \psi_2{}^\alpha + \psi_1{}^\beta + (1 - \sigma) \cdot \psi_2{}^\beta.$$

Unter Verwendung von 3, 13 und 37 läßt sich das auch schreiben als

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} J = {} & \psi_1{}^\alpha + \psi_1{}^\beta + (y' - r) \cdot \{\sigma \cdot s_1{}^\alpha + (1 - \sigma) \cdot s_1{}^\beta\} + \\ & y'\{\sigma \cdot s_2{}^\alpha + (1 - \sigma) \cdot s_2{}^\beta\} + (\alpha - \beta) \cdot \sigma \cdot (1 - \sigma) \cdot (s_1{}^\alpha - s_1{}^\beta)\end{aligned}$$

wobei $s_1{}^\alpha$ als kurzer Ausdruck für $s_1\{w(k) + r(k) \cdot \alpha(k), y(k)\}$ stehen soll usw. Wenn k sich an $\bar{k}$ annähert, so wissen wir aus 5. und 6., daß $\psi_1{}^\alpha$ negativ wird und $\psi_1\{\beta(k), k\}$ sich an null annähert. Ist k genügend nahe an $\bar{k}$, so impliziert das, daß der Ausdruck $(\psi_1{}^\alpha + \psi_1{}^\beta)$ negativ ist. Aus 4, 9 und 32 läßt sich erkennen, daß der nächste Ausdruck auch negativ ist. 10 und 32 implizieren die Negativität der folgenden beiden Ausdrücke. Aus 37 wissen wir, daß $\alpha < \beta$, was zusammen mit 9 bedeutet, das $s_1{}^\alpha < s_1{}^\beta$. Also kann in Verbindung mit 4 und 32 gezeigt werden, daß der letzte Ausdruck negativ ist. Dies beweist die Aussage 7.

8. Aus 41 ergibt sich

$$\det J(k) = \psi_1{}^\alpha \psi_1{}^\beta + \sigma \cdot \psi_2{}^\alpha \psi_1{}^\beta + (1 - \sigma) \cdot \psi_1{}^\alpha \psi_2{}^\beta.$$

Da $\psi_1{}^\beta \downarrow 0$ und $\psi_1{}^\alpha$ für $k \uparrow \bar{k}$ beschränkt bleibt, impliziert das

$$\lim_{k \uparrow \bar{k}} \det J = \lim_{k \uparrow \bar{k}} \{\sigma \psi_2{}^\alpha \psi_1{}^\beta + (1 - \sigma)\, \psi_1{}^\alpha \psi_2{}^\beta\}.$$

Da außerdem σ, α und damit $\psi_2{}^\alpha$ für $k \uparrow \bar{k}$ beschränkt bleiben, reduziert sich das auf

$$\lim_{k \uparrow \bar{k}} \det J = \lim_{k \uparrow \bar{k}} (1 - \sigma) \cdot \psi_1{}^\alpha \psi_2{}^\beta.$$

Aus 37 wissen wir, daß $(1 - \sigma) = (k - \alpha)/(\beta - \alpha)$. Wir können also schreiben

$$\lim_{k \uparrow \bar{k}} \det J = \lim_{k \uparrow \bar{k}} \{(k-\alpha) \cdot \psi_1{}^\alpha\} \cdot \left\{\frac{\psi_2{}^\beta}{\beta-\alpha}\right\}.$$

Unter Verwendung der Definition von $\psi_2{}^\beta$ stellen wir fest

$$\frac{\psi_2{}^\beta}{\beta-\alpha} = \frac{s_1{}^\beta \cdot (y'-r)}{\beta-\alpha} + s_1{}^\beta \cdot \sigma \cdot r' + \frac{s_2{}^\beta \cdot y'}{\beta-\alpha} < s_1{}^\beta \cdot \sigma \cdot r' < 0.$$

Da sowohl $(k-\alpha) \cdot \psi_1{}^\alpha$ als auch $s_1{}^\beta \cdot \sigma \cdot r'$ für $k \uparrow \bar{k}$ eine positive untere Schranke besitzen und da $(k-\alpha) \cdot \psi_1{}^\alpha < 0$, ist die Aussage bewiesen.
9. Differenzierung des (aus 37 abgeleiteten) Systems

$$\begin{aligned} &\psi\{\alpha(k), k\} &&= 0 \\ &\psi\{\beta(k), k\} &&= 0 \\ &\sigma(k) \cdot \alpha(k) + (1-\sigma(k)) \cdot \beta(k) &&= k \end{aligned}$$

nach k impliziert

(42) $$\sigma'(k) = \frac{\det J}{(\alpha-\beta) \cdot \psi_1{}^\alpha \cdot \psi_1{}^\beta}$$

In Verbindung mit 5. bis 8. und $\alpha < \beta$ ist damit die Aussage bewiesen. △

Wir sind jetzt in der Lage, die Sätze 3 und 4 zu beweisen.

Beweis von Satz 3

1. Notwendigkeit. $n \geqslant 2$ ist eine offensichtliche Bedingung. 34 folgt aus Hilfssatz 3.
2. Hinlänglichkeit. Gemäß Hilfssatz 4, Teil 9. Es gibt ein $k^+ < \bar{k}$ derart, daß für alle $k \varepsilon (k^+, \bar{k})$ die Beziehung $\sigma'(k) > 0$ gilt. Deshalb existiert für jedes $a_j \varepsilon (1 - \sigma(k^+), 0,$ ein Zweiklassengleichgewicht mit $\mathfrak{C} = \{j\}$, $\mathfrak{W} = \{i \neq j \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, $k = \sigma^{-1})1 - a_i)$ und entsprechenden $\alpha(k)$, $\beta(k)$ und $\sigma(k)$. (Wegen $\sigma'(k) > 0$ existiert die Inverse σ^{-1} um $\bar{k}$.) △

Beweis von Satz 4

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die ersten m Gruppen zur Arbeiterklasse und die letzten $n-m$ Gruppen zur Kapitalistenklasse gehören, d. h., wir betrachten das System 14 an der Stelle $c = (\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{m}, \underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{n-m})$.

An dieser Stelle ergibt sich die charakteristische Gleichung

(43)

$$\det \begin{pmatrix} a_1\psi_2^\alpha+\psi_1^\alpha-\lambda & a_2\psi_2^\alpha & \cdots & \cdots & a_n\psi_2^\alpha \\ a_1\psi_2^\alpha & a_2\psi_2^\alpha+\psi_1^\alpha-\lambda & \cdot & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_1\psi_2^\alpha & a_2\psi_2^\alpha & \cdots\; a_m\psi_2^\alpha+\psi_1^\alpha-\lambda & & a_n\psi_2^\alpha \\ a_1\psi_2^\beta & a_2\psi_2^\beta & \cdots & a_{m+1}\psi_2^\beta+\psi_1^\beta-\lambda & a_n\psi_2^\beta \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1\psi_2^\beta & a_2\psi_2^\beta & \cdots & \cdots & a_n\psi_2^\beta+\psi_1^\beta-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

1. Notwendigkeit. Es sei $m < n - 1$. Die Wurzel $\lambda = \psi_1^\beta$ ist eine Wurzel der charakteristischen Gleichung, weil sie die beiden letzten Zeilen identisch werden läßt. Nach Hilfssatz 4, Teil 7, ist diese Wurzel positiv. Deswegen ist das Gleichgewicht instabil.

2. Hinlänglichkeit. Es sei $m = n - 1$. Wird die Determinante in einer ähnlichen Weise entwickelt wie beim Beweis von Satz 2, so erhält man die folgende äquivalente Gleichung

$$(44) \qquad (\psi_1^\alpha - \lambda)^{n-2} \det(J(k) - \lambda \cdot I) = 0.$$

wobei $J(k)$ in 41 definiert ist und I die Einheitsmatrix bezeichnet. Aus 44 läßt sich erkennen, daß es $n - 2$ identische Wurzeln $\lambda_i = \psi_1^\alpha$ gibt, die negativ sind, wenn k nahe an $\bar{k}$ liegt; siehe Hilfssatz 4, Teil 5. Die zwei zusätzlichen Wurzeln sind die Wurzeln von $J(k)$, die negative Realteile haben, wenn $\operatorname{tr} J < 0$ und $\det J > 0$. Dies gilt in der Nähe von $\bar{k}$, wie in Teil 7 und 8 von Hilfssatz 4 bewiesen.

3. Existenz. Im Beweis von Satz 3 wurde gezeigt, daß ein Zweiklassengleichgewicht mit $\mathfrak{C} = \{j\}$ existiert bei einer Kapitalintensität nahe an $\bar{k}$ vorausgesetzt, a_j ist genügend klein. Zusammen mit 2 ist damit der Satz bewiesen. △

Bemerkung

Die in Satz 4, Teil 2 dargestellte Lösung läßt eine sehr kleine Kapitalistenklasse zu, die jedoch wegen Hilfssatz 4, Teil 4 einen beträchtlichen Anteil am Gesamtkapital besitzt.[9] △

9 Die Anregung, diese Frage zu beachten, verdanke ich W. Vogt.

3.5. Abschließende Bemerkungen zu stationären Lösungen

Satz 5

Jede stationäre Lösung ist entweder ein Einklassen- oder ein Zweiklassengleichgewicht. △

Beweis

Wegen $\psi_{11} > 0$ gibt es höchstens zwei Lösungen x der Gleichung $\psi(x, k) = 0$. △
Aus den Sätzen 2, 4 und 5 ergibt sich folgender

Folgesatz 2

Die Größen der Gruppen (d. h. die a_j) seien genügend klein, und man betrachte alle möglichen stationären Lösungen von 14. Dann ist jedes Gleichgewicht mit maximaler Kapitalintensität stabil. △

Beweis

1. Angenommen, es besteht ein Zweiklassengleichgewicht. Wir zeigen nun, daß jedes Gleichgewicht mit maximaler Kapitalintensität ein Zweiklassengleichgewicht ist, bei dem nur eine Gruppe die Kapitalistenklasse ausmacht. Die Aussage wird dann durch die Anwendung von Satz 4 bewiesen.
Aus den Hilfssätzen 2 und 3 entnehmen wir, daß jedes Zweiklassengleichgewicht eine höhere Kapitalintensität als das Einklassengleichgewicht aufweist. Außerdem ist wegen Hilfssatz 4, Teil 9 um k herum $\sigma' > 0$. Zusammen mit $\lim_{k \uparrow \bar{k}} \sigma(k)$ bedeutet das, daß eine kleiner werdende Kapitalistenklasse Zweiklassengleichgewichte mit höherer Kapitalintensität ermöglicht.
2. Wenn kein Zweiklassengleichgewicht besteht, ist das in Satz 1 beschriebene Einklassengleichgewicht das einzig stationäre Gleichgewicht. Da bei genügend kleinen a_j ein Zweiklassengleichgewicht bestünde, wenn $r(\underline{k}) > \eta$ (Satz 3), können wir $r(k) \leqslant \eta$ annehmen. Das bedeutet, daß die Stabilitätsbedingung (26) erfüllt ist.

3.6. Rekurrente Lösungen

Jede nichtstationäre Lösung von 14, die sich keiner stationären Lösung, d. h. entweder einem Einklassen- oder Zweiklassengleichgewicht, nähert, nähert sich einer rekurrenten Lösung. Eine rekurrente Lösung ist wie folgt definiert. Man nehme irgendeinen Punkt, der von der Trajektorie zu einem bestimmten Zeitpunkt durchlaufen wird und wähle einen beliebig kleinen Abstand $\delta > 0$. Die Trajektorie wird den gewählten Punkt innerhalb einer begrenzten Zeitspanne näher als δ passieren. (Für nähere Details s. Schlicht, S. 25–6, 58–9, und Bathia/Szegö, S. 38.)

Wir wollen festhalten, daß alle wiederkehrenden Lösungen für einige Vermögens-Einkommens-Gruppen unterschiedliche Pro-Kopf-Vermögen aufweisen. Andernfalls würde sich das System einem Einklassengleichgewicht annähern.

Außerdem erhalten wir aus der Konvexität von $s(y_i, y)$ in Hinblick auf Individualeinkommen – in ähnlicher Weise, wie auch schon 20 abgeleitet wurde –

$$\dot{k} > \dot{c}_i, \text{ wenn } c_i = k \text{ und nicht alle } c_i \text{ gleich sind.} \tag{45}$$

Das bedeutet, daß eine Vermögens-Einkommens-Gruppe mit einem durchschnittlichen oder geringer als durchschnittlichen Pro-Kopf-Vermögen in der gesamten Zukunft weniger als das durchschnittliche Pro-Kopf-Vermögen haben wird.

Rekurrente Lösungen weisen also eine Eigenschaft ähnlich der zuvor analysierten Zweiklasseneigenschaft auf: einige Gruppen halten immer ein geringeres als das Durchschnittsvermögen, andere halten immer mehr als das durchschnittliche Vermögen.

4. Dank

In danke W. Vogt für einige hilfreiche Kritik an meiner Dissertation, die einigen Einfluß auf die hier vorliegende Formulierung hatte. Besonderer Dank gilt W. Oberhofer dafür, daß er den mathematischen Teil durchsah und mich auf einige Mängel hinwies. Anregend waren für mich die Diskussionen mit H. Holländer.

5. Literatur

Solow, R. M.: A Contribution to the Theory of Economic Growth. The Quarterly Journal of Economics 1956, S. 65–94.

Stiglitz, J. E.: Distribution of Income and Wealth Among Individuales. Econometrica 1969, S. 382–397. [Studientext 14]

Schlicht, E.: Eine Neoklassische Theorie der Vermögensverteilung. Dissertation, Universität Regensburg 1971.

Duesenberry, J. E.: Income, Saving and the Theory of Consumer Behaviour. Cambridge (Mass.) 1949.

Friedman, M.: A. Theory of the Consumption Function. Princeton 1957.
Lasalle, J., und Lefschetz, S.: Die Stabilitätstheorie von Ljapunov, Die direkte Methode mit Anwendungen, Mannheim 1967.
Bhatia, N. P., und Szegö, G. P.: Stability Theory of Dynamical Systems. Berlin 1970.

6. Anhang: Eine Illustration

Eine numerisch handhabbare Version in diskreter Zeit erhält man, wenn man die ursprünglichen Gleichungen durch die folgenden ersetzt:

$$(1') \qquad y = \begin{cases} \gamma \cdot \{\alpha \cdot k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)\}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} & \text{für } \sigma \neq 1 \\ \gamma \cdot k^{\alpha} & \text{für } \sigma = 1 \end{cases}$$

$$(4') \qquad r = \frac{\partial y}{\partial k}$$

$$(9') \qquad s^i = ((y_i)^a + (by)^a)^{1/a} - b \cdot y$$

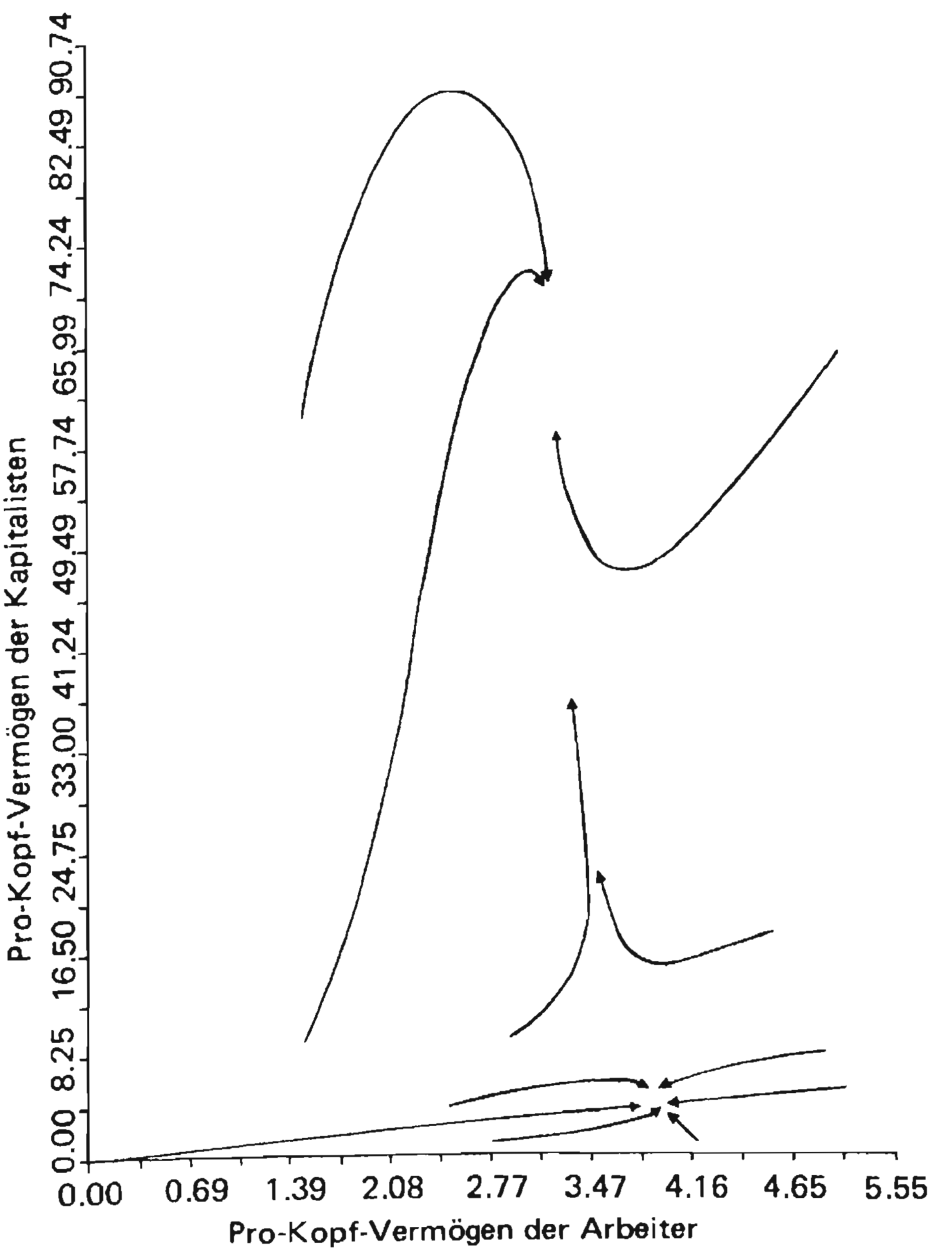
$$(11') \qquad c_i(t+1) = \frac{1}{1-\eta} \cdot \{s^i + c_i(t)\}$$

1′ ist eine CES Produktionsfunktion mit einer Substitutionselastizität σ, 4′ ist die Grenzproduktivitätstheorie, 9′ ist die Sparfunktion, und 11′ ist die diskrete Version der Akkumulationsgleichungen 11.

Figuren 2 und 3 stellen das Verhalten des Modells dar.[10] Die Parameterwerte sind $\sigma = ,6$; $\alpha = ,6$; $\gamma = 1$; $\eta = ,07$; $a = 2{,}3$; $b = 2{,}3$ (entsprechend einer durchschnittlichen Sparneigung von ,14 und einer marginalen Sparneigung von ,31 beim Einklassengleichgewicht).

Figur 2 ist ein typisches Phasendiagramm im zweidimensionalen Fall: Es bestehen zwei Gruppen, die jeweils 95 % und 5 % der Gesamtbevölkerung ausmachen. Der Anfang jedes Pfeiles bezeichnet die ursprüngliche Vermögensverteilung, und der Pfeil selbst stellt die entsprechende Entwicklung der Vermögensverteilung in der Zeit dar. Die Länge eines Pfeiles entspricht 100 Zeiteinheit (Jahren). Es bestehen zwei stabile Gleichgewichte: ein Einklassengleichgewicht in der unteren Hälfte des Diagramms und ein Zweiklassengleichgewicht in der oberen Hälfte. Über dem Einklassengleich-

10 Für Programmierungshilfe Dank A. Krafft und W. Oberhofer.



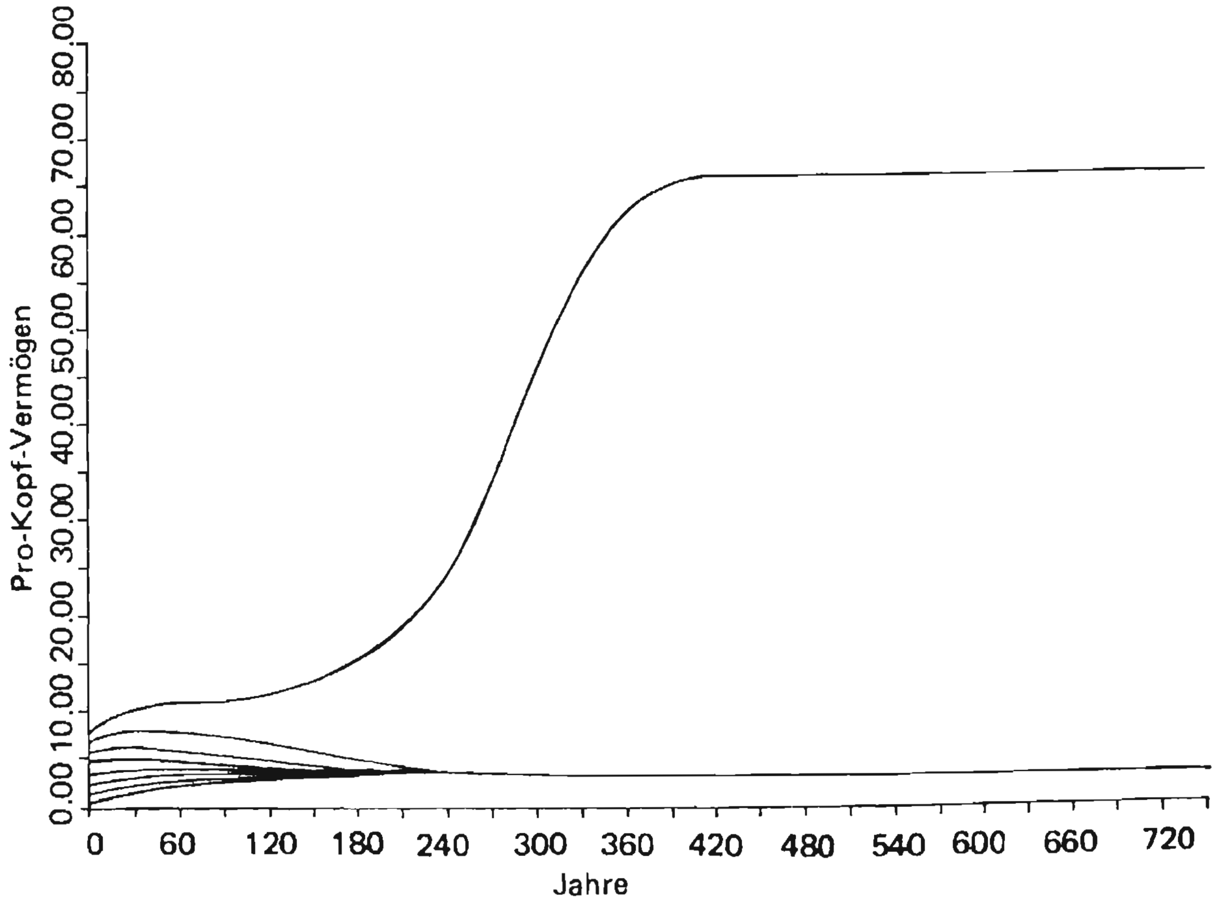
Figur 2

gewicht liegt ein Sattelpunkt. (Der in der Nähe des Ursprungs beginnende Pfeil liegt auf der 45-Grad-Linie.)

Figur 3 illustriert die Entwicklung der Vermögensverteilung in der Zeit für acht Gruppen. Die Gruppengrößen und die anfänglichen Pro-Kopf-Vermögen sind die folgenden:

Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8
% der Bevölkerung	10	20	25	20	10	5	5	5
ursprüngliches Pro-Kopf-Vermögen	,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5

Die unterste Kurve beschreibt die Entwicklung des Pro-Kopf-Vermögens der ersten Gruppe, die nächste die der zweiten Gruppe usw.


Pro-Kopf-Vermögen
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
60.00
70.00
80.00
0
60
120
180
240
300
360
420
480
540
600
660
720
Jahre

Figur 3