5.

BEGINZELEN
DER
GEOMETRIE.

BEGINZELEN
DER
GEOMETRIE

DOOR DEN HEER

CLAIRAUT.

Lid van de Koninglyke Academie der Weten-ſchappen te *Parys*; van de koninglyke Genoodſchappen te *Londen*, *Berlyn*, *Upſal* en *Edenburg*, als mede van de Academie der inſtelling van *Bononien*.

Uit het Franſch vertaald, en met eene korte Trigonometrie, meerendeels gevolgt na het werkje van den Heer SIMPSON, *vermeerdert*

DOOR

* * * * * *

Te AMSTERDAM,
By JAN MORTERRE;
Boekverkooper over 't Zaandammer Veer 1760.

VOORREDEN

VAN DEN

SCHRYVER.

HOewel de Meetkonſt in zig zelfs, zeer afgetrokken is, moet men nogtans toeſtaan, dat de moeilykheden welken den gene, die 'er zig eerſt op begind toe te leggen, ontmoet, den meeſten tyd afhanglyk zyn van de wyze op dewelke zy in de gewoone Beginzelen, geleeraard wordt. Men begind doorgaans met het opgeeven van een groot getal *Bepaalingen*, *Vereyſchtens*, *Gemeene Kundigheden*, en *Voorafgeſtelde Beginzelen*, welke aan den Leezer niet anders dan een dor en onaangenaam onderwerp voorſtellen. De Voorſtellen welken daar in Vervolgens worden opgegeeven, het verſtand aan geen gewigtiger voorwerpen bepaalende, en daarenboven niet gemakkelyk te bevatten zynde, gebeurt het dikmaal dat de eerſt beginnende, vermoeid worden, en den moed verliezen, voor en aleer zy eenig klaar denkbeeld van het geen men hen onderwyzen wilde, verkreegen hebben.

't Is waar dat 'er Schryvers zyn, die om deeze dorheid, welke zoo onafſcheidelyk aan de ſtudie der Meetkonſt verbonden is, te vermyden; zig verbeeld hebben, agter ieder wezenlyk voorſtel onmiddelyk het gebruyk te moeten laaten volgen, dat men van het zelve in de oeffening maaken kan: maar hier door bewyzen ze alleenlyk de nutheid der Meetkunde, zonder de middelen, om dezelve te leeren, veel gemaklyker te maaken. Ieder Voorſtel, geduuriglyk voor deszelfs gebruyk gaande,

ge-

geraakt de Geest niet weder tot tastelyke denkbeelden, dan, naa de moeilykheid van de afgetrokkene te begrypen, beproeft te hebben.

Eenige overweegingen omtrent den oorsprong der Meetkunde, hebben my doen hoopen, dat ik, door het belang des aanvangers in 't oog te houden, en hen op dien voet te onderrigten, deeze zwaarigheden, zoude konnen verhoeden. Ik heb gedagt dat deeze Wetenschap, even gelyk alle anderen by trappen moest volmaakt zyn: dat het waarschynlyk de behoeftens der menschen waren, welken daar toe de eerste aanleiding gegeeven hebben; en dat die eerste voortgangen niet buyten het bereik der eerstbeginnende konden zyn, dewyl het geen andere, dan eerstbeginnende waren die dezelve gedaan hadden.

Met dit denkbeeld ingenoomen, heb ik my voorgesteld tot dat gene op te klimmen, 't welk den eersten oorſprong aan de Meetkunde konde gegeeven hebben; en heb getragt, de beginzelen daar van te ontvouwen, door een manier, welke natuurlyk genoeg was om onderſteld te worden, dezelve als die der eerſte uytvinders te zyn; neemende alleenlyk in agt, alle nutteloozе poogingen, welke zy noodzaaklyk hebben moeten doen, te vermyden.

Het meeten der Landen, heeft my als de natuurlykſte weg toegeſcheenen om de eerſte Voorſtellen der Meetkunde te doen voortkoomen; en dit is inderdaad den oorſprong deezer Wetenſchap, naardien het woord *Geometria*, eigentlyk genoomen, niet anders dan Landmeetkonſt, beteekend. Eenige Schryvers zyn van gedagten, dat de Egyptenaars, geduuriglyk de paalen hunner Erfdeelen, door de overvloeijingen der Nyl verwoeſt ziende, door het zoeken naar middelen, om zig naaukeuriglyk van de legging, uytgeſtrektheid, en gedaante hunner Landeryen te verzeezeekeren ; de eerſte grondſlagen der Meetkunde gelegt hebben. Dog, indien men zig niet al aan het gezegde deezer Schryvers houden wil, zal men ten minſten niet konnen twyffelen, of de Menſchen, hebben alrede van de eerſte tyden af, naar middelen gezogt, om hunne Landeryen te konnen meeten, of te verdeelen. Vervolgens, die eerſtgevondene handelwyzen willende volmaaken, geleiden hun de byzondere onderzoekingen allengskens tot algemeene; en zig eindelyk hebbende voorgeſteld, de nette betrekking van alle zoorten van grootheden te kennen, bedagten zy eene Wetenſchap, veel uytgeſtrekter, dan die zy eerſt omhelſt hadden, en aan welke zy nogtans den Naam toeëigenden, welke ze daar aan, in den beginne reeds gegeeven hadden.

Ten einde in dit Werk, een dergelyke weg, als die der uytvinders te volgen, tragt ik eerſt, aan de beginnende, de beginzelen te ontdekken, van dewelke de eenvoudige maat der Landen, of der genaak- of ongenaakbaare afstanden kan afhangen. Hier van gaa ik over, tot zulke onderzoekingen, welkers overeenkomst met de eerste, de nieuwsgierigheid, aan alle Menschen Natuurlyk, verpligt, om daar by stil te staan; en deeze nieuwsgierigheid, vervolgens door eenige nutte toepassingen wettigende, geraak ik eindelyk daar toe, dat ik al het gewigtigste der fondamenteele Meetkunde, doe doorloopen.

Men kan myns bedunkens niet ontkennen, of deeze handelwyze is ten minsten zeer geschikt, ter aanmoediging derzulken, welke door de afgetrokkenheid der Meetkonstige, en van toepassing ontblootte waarheden den moed zouden konnen verliezen: Ik hoope zelfs dat ze nog een veel gewigtiger nut zal hebben; te weeten, datze het verstand zal gewennen, zig met het zoeken, en uytvinden van onbekende waarheden, bezig te houden;

den;

den; want ik vermyde zorgvuldiglyk een eenig Voorſtel, onder de gedaante eens *Theorema*, dat is, van zulk een Natuur, op te geeven, dat men de waarheid van den een of ander bewyſt, zonder te doen zien, op wat wyze men dezelve ontdekt heeft.

Dat de allereerſte Wiskundige Schryvers, hunne ontdekkingen in *Theorema's* voorgeſteld hebben, is zonder twyffel geweeſt om hunne werken, een zwier van verwondering te doen hebben; of wel, om de moeite te vermyden van de aaneenſchakeling der denkbeelden te vervolgen, welke hen, in hunne onderzoekingen geleid hadden, Wat hier ook van zy; het heeft my gevoeglyker toegeſcheenen, mynen Leezer geduuriglyk bezig te houden, met het ontbinden van *Problema's*, dat is te zeggen, met hen de middelen te doen zoeken om eenige bewerking te doen, of, om eenige onbekende waarheid te ontdekken, door de overeenkomſt, die 'er tuſſchen gegeeven en onbekende grootheden

heden is, te bepaalen. Door deeze weg te volgen, befpeuren de aanvangers op ieder ftap welke men hen laat doen, wat reden, den uytvinder bepaalt heeft; en hier door, kunnen zy zig de manier van uytvinden gemaklyker eigen maaken.

Men zal my misfchien tegenwerpen, dat ik my op eenige plaatzen deezer Beginzelen, te veel op het getuygenis der oogen beroepe; en niet genoeg aan de ftrenge naaukeurigheid der bewyzen verbinde. Ik verzoek de gene, welken my zulk eene tegenwerping zouden mogen doen, in agt te neemen, dat ik niet ligtelyk iet voorbygaa, als in voorftellen, welkers waarheid door de allerminfte oplettenheid zelve, kan ontdekt worden. Ik gaa op deeze wyze te werk (vooral in den beginne, alwaar men dikwyls voorftellen van dit zoort ontmoet) om dat ik hebbe opgemerkt, dat de Liefhebbers der Meetkunde, doorgaans geneegen zyn hun verftand een weinig te oeffenen; en dat ze meermaalen den moed verliezen, wanneer men hen met Betoogingen welke om zoo te ſpreeken, nutloos zyn, ophoud.

Men moet zig niet verwonderen, dat *Euclides* de moeite neemt om te bewyzen, dat twee Cirkels welke elkanderen ſnyden, geen zelfde middenpunt hebben; dat de Som van de zyden eener driehoek, welke in een andere begreepen is, kleinder zy, als die der zyden van de driehoek in welke ze begreepen is. Die Meetkonſtenaar hadt halſtarrige Sophiſten te overtuygen, welke in het verwerpen der baarblykelykſte waarheden, hunnen grootſten roem ſtelden. De Meetkonſt moeſt derhalven, even gelyk de Redenkunde, om die twiſtrededenaars den mond te ſtoppen, tot de Redenering den toevlugt neemen. Thans zyn de zaaken van gedaante verandert. Alle Redeneeringen welke niet verder gaan dan het geen het gezond verſtand ons zelfs ten eerſten kenbaar doet zyn, zyn thans ten eenemaal buyten gebruyk, en dienen niet dan om de waarheid te verdonkeren, en den oplettenſten leezer, den luſt te beneemen.

Een andere zwaarigheid welke men my zoude konnen voorwerpen, is, dat ik verſcheiden voorſtellen hebbe nagelaaten, welken doorgaans in de Beginzelen worden ingelaſcht; en dat ik my in het verhandelen, der evenredigheden vergenoege, met 'er alleenlyk de voornaamſte Grondbeginzelen van voortedraagen. Hier op antwoorde ik, dat men in deeze verhandeling alles vindt, wat tot vervulling van myn oogmerk dienen kan: dat de voorſtellen, welke ik voorbygaa, alleenlyk zulke zyn, welke op zig zelven genoomen, geen de minſte nuttigheid hebben, en daarenboven niets kunnen toebrengen om het begrip dier genen, van welken men noodzaaklyk dient onderrigt te zyn, gemakkelyker te maaken; en eindelyk, dat, het gene ik ten opzigte der evenreedigheden voordraage, genoeg

noeg is, om de grondſtellige voorſtellen, welke onderſteld worden, te verſtaan. Dit is een ſtof, welke ik in myne Grondbeginzelen der *Algebra*, die in 't vervolg zal uytkoomen (*a*) omſtandiger zal verhandelen.

Eindelyk; gelyk ik het meeten der Landen verkooren hebbe, om de eerſt beginnende te beter te hulp te komen; moet ik dan niet vreezen, dat men deeze beginzelen met de gewoone verhandelingen der Landmeetkunde verwarre? Deeze gedagten kunnen niet, dan by de zulken plaats grypen, welke niet in aanmerking neemen dat het meeten der Landen het waare onderwerp van dit werk niet is; maar dat my dezelve alleenlyk dient, tot een gelegenheid, om de voornaamſte Meetkundige waarheden voor oogen te ſtellen. Ik zoude van gely-

(*a*) Dit werk, is by den Drukker deezes, in het Nederduytſch vertaald, gedrukt, en te bekoomen.

gelyken tot deeze waarheden hebben konnen opklimmen, door de beſchryving van de Natuurkunde, Sterrekunde, of eenig ander gedeelte der Wiskonſt, 't welk ik zoude moogen verkooren hebben; maar dan zoude de veelheid der vreemde denkbeelden; welke daar toe veréyſcht wierden, de meetkundige denkbeelden op welke ik het verſtand des Leezers alleenlyk moeſte veſtigen, gelyk als verſtikt hebben.

VOOR-

VOORREDEN

VAN DEN

VERTAALER.

NAardien het werk, welkers vertaaling wy den Liefhebberen der Meetkunde aanbieden, by allen, die het zelve in de Fransche Taal geleezen hebben, een algemeene goedkeuring heeft weggedraagen, zouden we een vry nutloozen arbeid onderneemen indien we door een menigte van Lofredenen (welken dog niet zelden verdagt gehouden worden) zulks wilden aantoonen. Alleenlyk mee-

nen wy, den leezer te moeten berigten dat de vertaaling op dien voet is ingerigt, dat we ons op de ſtrikſte wyze, welke ons mooglyk was, aan de eigen uytdrukkingen des Schryvers gehouden, en ons geen de minſte vryheid vergund hebben, dan wanneer de gemakkelykheid om het gezegde te bevatten, daar by eenig nadeel zoude geleeden hebben.

Het algemeene nut, en den grooten invloed welke de Trigonometrie, *op de wiskunde in 't algemeen, en de Meetkunde in 't byzonder heeft; deedt ons beſluyten, om een korte verhandeling derzelver meerendeels naar die van den Heer* Simpſon *gevolgt, by wyze van een Aanhangzel, agter het vertaalde werk van den Heer* Clairaut *te laaten volgen.*

Geen opeenſtapeling van Rede-

nee-

neeringen, agten we noodig om deeze verkiezing te regtvaerdigen. Een ieder weet hoe schaars den voorraad van dergelyke verhandelingen, in onze moedertaal is; en hoe weinig 'er onder dat kleine aantal nog gevonden worden, welke men wezenlyk, als goed kan aanmerken.

In de zamenstelling van dat werkje hebben we gedagt die order te moeten volgen, dat men met de verklaaring der Bepaalingen een aanvang maakte; naardien men zonder dezelve, volstrekt buyten staat is, om zig een regt denkbeeld der Trigonometrie *te konnen vormen. Hoe doch zal iemand, een* Theorema *by voorbeeld, bevatten kunnen, indien hy niet door eenige voorafgaande Bepaalingen geleert heeft, dat een driehoek zes paalen heeft, van dewelke men telkens drie voor* *bekende termen kan aanneemen: dat den omtrek eener Cirkel onderstelt wordt in* 360 *gelyke deelen (graaden genaamd) verdeeld te zyn: Dat ieder van die deelen wederom in* 60 *andere gelyke deelen (te weeten Minuten) kan verdeelt worden: en eindelyk, indien hem ten eenemaal onbekend is wat een Cirkelboog, Pees,* Sinus, Sinus verſus, Co-Sinus, *en dergelyken is?*

Naa eenige Theorema's, *gegeeven te hebben, welke dienen konnen, om de eerſtbeginnende, tot de* Trigonometriſche *evenredigheden op te leiden; en naa de oploſſing der gevallen van regthoekige en ſcheeve platte driehoeken, wyze ik den beginnende aan, langs welk eenen weg de allereerſte Meetkundigen tot de ontdekking der driehoeks Meetkunde door de* Sinus, *gekoomen zyn.*

De

De onvolkoomenheid van het gebruyk der ſchaal en Tranſporteur, *wordt als de voornaamſte beweegreden aangemerkt, welke hen op nieuwe onderzoekingen heeft doen bedagt zyn. Naderhand onderzogten zy de onderſcheidene eigenſchappen eener driehoek, en bevonden eindelyk,* dat de zyden eener driehoek tot elkander waaren, als de peezen van het dubbel, der aan die zyden overgeſtelde hoeken; *en hier door werden ze in ſtaat geſteld om het getal der misſlagen, grootelyks te verminderen.*

Vervolgens geeven we eenige Trigonometriſche *voorſtellen op, welke we alle door een eenige grondregel oploſſchen; te weeten:* Dat in een driehoek de *Sinus* der hoeken tot elkander zyn, gelyk de zyden welke aan die hoeken tegenovergeſteld zyn. *Wanneer*

neer men deeze voorſtellen wel verſtaat, is men bekwaam om alles wat 'er in de driehoeks-meeting kan voorvallen, op te losſchen.

In de Spheriſche, *of Klootſche Driehoeks-meeting (welke we niet ondienſtig hebben geoordeelt hier mede by te voegen) hebben we dezelfde orde als in de Platte Driehoeks-meeting gevolgt; en 'er de Natuur, en* Conſtructie *der* Logarithmus *beneffens derzelver toepaſſing op de* Theorie *der Driehoeken agter aan gevoegt. In de* Logarithmus, *hebben we alles door de* Algebra *bewerkt, in de onderſtelling, dat de gene, welke zig hier op begint toe te leggen zig reeds een weinig in de* Algebra *geoeffent heeft, ten minſten in zoo verre, dat hy eenig denkbeeld van de Stelkonſtige tekenen, en grootheden hebbe. De*

ſtel-

ſtelkonſt immers, en de Meetkunde, hebben een zeer naauwe betrekking op elkander. De ſtelkonſt is in veele gevallen, de Meetkunde tot een zeer groot behulp: en wy meenen reden te hebben om te moogen vaſtſtellen, dat hy, welke in de eerſte geen ſmaak heeft, de laatſte nooit zal meeſter worden.

BERICHT
VAN DEN
DRUKKER.

In de Geometrie de letter (k) op eenige plaatzen niet wel uytgedrukt zynde, wordt den Leezer verzogt, daar op een weinig agt te geeven.

BERICHT
VOOR DEN
BOEKBINDER.

De Plaaten moeten zoodanig gevouwen worden, datze buyten uytſlaan, en alle agter het laatſte Regiſter geplaatſt werden, de Platen N. 1. 2. 3. a 4 daar Trigonometrie boven aan ſtaat, moeten de agterſte zyn.

BEGINZELEN
DER
GEOMETRIE.

EERSTE DEEL.

Van de Middelen die het natuurlykst te gebruyken zyn, om tot de maat der Landen te geraaken.

DAt gene, het welk my toeschynd het allereerst te moeten gemeeten worden, zyn de lengtens, en de afstanden.

I.

Het middel dat de natuurlyke meetkunde verschaft, om eenige lengte, hoedanig die ook zy, te meeten, bestaat daar in, dat men de lengte van eene bekende maat, vergelykt met die gene, welke men wil kennen.

II.

De Regte lyn is de kortste, die 'er van het eene tot het andere punt kan getrokken worden, en by gevolg, de maat der afstand tusschen die twee punten.

Ten opzigt van de afstand ziet men, dat men, om die gene te meeten welke tusschen twee gestelde punten is, van het eene tot het andere punt een Regte lyn moet trekken, en dat men tot deeze lyn de bekende maat moet overbrengen; dewyl alle de andere, een meer of minder groote omweg maakende, langer zyn, dan de Regte lyn, die zulks niet doet.

III.

Behalven de noodzaakelykheid waar in men is, om de afstand van het eene tot het andere punt te meeten, is men ook zomtyds verpligt, die, van een punt, tot een lyn te meeten. Een man, by voorbeeld, staande aan den oever eener Rievier in D, steldt zig voor om te weeten, hoe groot de afstand zy, die 'er is, tusschen de plaats alwaar hy staat, en de andere oever A B. Het is klaar, dat men in dit geval, om de gezogte afstand te meeten, de kortste van alle de Regte lynen D A, D B enz. moet neemen, welke men van het punt D, tot de Regte AB trekken kan. Nu is het gemakkelyk te zien, dat deeze kortste lyn, welke men noodig heeft, de lyn D C is, die men ondersteld, dat nog naar de zyde A, nog naar de zyde B overheldt. Het is derhalven op deeze lyn (aan welke men de naam van *perpendiculair* (regtstandige) ge-

Plaat 1. Fig. 1.

Een lyn, op een andere vallende,

gegeeven heeft) dat men (om de afſtand DC, van het punt D tot de Regte AB te verkrygen) de bekende maat moet overbrengen. Maar men ziet ook, dat, om deeze maat op de linie DC te ſtellen, deeze linie van te voren getrokken moet worden. Het was derhalven noodzaakelyk, dat men een manier hadt, om een perpendiculair te trekken.

zonder naar den een of andere zyde te hellen, is perpendiculair op deeze lyn.

IV.

Oneindig veele andere gevallen zyn 'er, in dewelken men het trekken van een *perpendiculair* noodig heeft. Men weet by voorbeeld, dat de Regelmaatigheid der figuuren gelyk als ABCD, en FGHI, die Regthoeken genaamd, en uyt vier zyden (welke perpendiculair op elkander ſtaan) zamen geſteld worden, ons aanzet, om derzelver gedaanten tot Huyzen, Tuynen, Kamers, Gevels enz. over te brengen.

Fig 2. en 3.

De Regthoek is een figuur, welkers vier zyden perpendiculair op elkander ſtaan.

De eerſte deezer figuuren ABCD, welkers vier zyden gelyk zyn, wordt gemeenlyk een Vierkant genaamdt. De andere FGHI, welkers tegengeſtelde zyden alleenlyk gelyk zyn, draagt den naam van Regthoek.

En het Vierkant is een Regthoek, welkers vier zyden gelyk zyn.

V.

In de verſcheidene bewerkingen, welke vereyſſchen dat men perpendiculaire lynen trekt, zyn 'er, waar in men, of op een gegeevene lyn, uyt eenig punt buyten dezelve, een perpendiculair laat vallen: of, in welke men 'er een, uyt een punt dier lyn zelve, op regt.

Fig. 4. Manier om een perpendiculair op te regten.

Als men uyt het punt C, genoomen in de lyn A B, de lyn CD, perpendiculair wil trekken op AB, moet deeze lyn, nog na de zyde A, nog na de zyde B, overhellen.

Als men eerſtelyk onderſteld, dat C, in een gelyke afſtand van A, en B zy, en dat de Regte lyn C D, naar geen van beide zyden heldt, is het klaar, dat ieder der punten van deeze lyn, even ver van A en B zullen afwyken: 'er ſchiet dan niets meer over dan zulk een, na believen genomen punt D te vinden, zodanig dat deszelfs afſtand van het punt A, gelyk zy aan deszelfs afſtand van het punt B: want als dan, trekkende door C en dit punt, een Regte lyn C D, zal deeze de geëyſchte perpendiculair zyn.

Om het punt D te vinden, zou men het zelve al giſſende konnen zoeken, maar de giſſing voldoet het verſtand niet, zy eyſcht een manier die het zelve opſcherpt. Zie hier dezelve.

Neemt een gemeene maat, by voorbeeld, een koorde, of een paſſer, die op een willekeurige wydte geopent is, na dat gy, of op het Land, of op het papier werken zult.

Deeze maat genoomen zynde, moet gy in het punt A, of het uyterſte der koorde vaſt maken, of de punt der paſſer daar op vaſt zetten, en de andere punt der-

derzelver, of het ander einde der koorde, doende omdraaijen, zult gy de boog PDM beſchryven. Vervolgens, brengt gy haar (zonder van maat te veranderen) over in 't punt B, en op dezelfde wyze werkende, beſchryft de boog QDN, die, de eerſte in 't punt D ſnydende, het gezogte punt geeven zal.

Want, dewyl het punt D gemeen zal zyn aan de twee boogen PDM, QDM, door middel van een gemeene maat beſchreeven, zal derzelver afſtand van het punt A, gelyk zyn aan derzelver afſtand van het punt B. Derhalven zal CD nog naar het punt A, nog naar het punt B, hellen; en gevolgelyk zal deeze lyn perpendiculair zyn op AB.

Indien het punt C niet in een gelyke afſtand van A, en B bevonden wordt, moet men twee andere punten *a* en *b* neemen, die in dezelfde afſtand van C zyn, en dezelve in de plaats van A, en B gebruyken, om de boogen PDM, QDN te beſchryven. Fig. 5.

VI.

Fig. 4. De Cirkel is de geheele lyn, welke het beweeglyke punt der paſſer, geduurende haare voortgang om de andere punt, beſchryft.

Zoo een der lynen, als PDM, verlengt wierdt in O, E, R enz. tot dat ze wederom in het zelfde punt P kwam, zoude de geheele lyn, de omtrek der Cirkel, of eenvoudiglyk Cirkel genoemd worden.

Als men alleenlyk een gedeelte der omtrek PDM trekt, zal dit gedeelte de boog der Cirkel genoemd worden.

Het Centrum is de plaats van het vaste punt.

Het vaste punt A, zyn Centrum, of dat van de Cirkel.

De straal is de wydte, in welke de passer geopend is.

En de tusschenruymte AD zyn straal.

De Diameter is een dubbele straal.

De geheele lyn, als DAE, die door het Centrum A heen gaat, en aan den omtrek eyndigd, wordt Diameter genoemd. Het is klaarblykelyk dat deeze lyn een dubbele straal is, en dit maakt, dat de straal zomtyds halve middenlyn (*Semidiameter*) genaamd wordt.

VII.

Fig. 6. Manier, om een perpendiculair te laaten nedervallen.

De wyze van een perpendiculair op een lyn AB, op te regten, verschaft die, van 'er een uyt eenig punt E, dat buyten deeze lyn genomen is, te laaten nederdaalen; Want wanneer men in het punt E, of het einde van eene draad, of de punt van eene passer steld, die beide van E tot *b* reiken, moet men, naar alvorens op de lyn AB, twee punten *a* en *b* geteekend te hebben, op de zelfde wyze, als in de voorgaande afdeeling, een ander punt D zoeken, welkers afstand van het punt *a*, en van het punt *b*, dezelfde zy; en door dit punt, en E de Regte DE trekken, welke, dewyl zyne beide einden gelykelyk afwyken van de punten *a*, en *b*, en niet meer naar het eene, dan naar het andere deezer punten hellen, perpendiculair op AB zal zyn.

VIII.

Uyt de voorgaande bewerking volgt de op-

oplossing van een nieuw werkstuk (*Problema*).

Als 'er vereyscht wordt een Regte lyn AB, in twee gelyke deelen te verdeelen; moet men uyt de punten A en B, als Centrums, en met een willekeurige opening des passers, de boogen REI, GEF, beschryven, en vervolgens uyt dezelfde Centrums, en met dezelve, of met eenige andere wydte des passers, de boogen PDM, QDN; dan zal de lyn ED, die de twee snypunten E en D, zaamen voegt, de lyn AB, in 't punt C in twee gelyke deelen snyden. Fig. 7. Een lyn in twee gelyke deelen te verdeelen.

IX.

De manier om perpendiculaire lynen te trekken, gevonden zynde, is 'er niets gemakkelyker, dan zig daar van te bedienen om die Figuuren te maaken, welke men Regthoeken en Vierkanten noemdt, en van welke we in de IV. Afdeeling gesproken hebben. Men ziet, dat men, om een vierkant ABCD te maaken, welkers zyden aan de gegeeve lyn K, gelyk zyn, op de Regte GE, een wydte AB moet neemen, die gelyk aan K is, dan (volgens Art. V.) in de punten A en B, de perpendiculairen AD, BC, (die beide aan K gelyk zyn) opregten, en vervolgens trekken de lyn DC. Fig. 2. Een vierkant te maaken, wanneer men derzelver zyde heeft.

X.

Zoo men een Regthoek FGHI wilde maa- Fig. 3. Een Regthoek te maaken, welkers lengte en breedte gegeeven zy.

maaken, welkers lengte als K, en welkers breedte als L was, moeſt men FG, gelyk aan K maaken; vervolgens de perpendiculairen FI, en GH opregten, die beide gelyk moeten zyn aan L; en eindelyk trekken, de lyn H I.

XI.

De Parallelen zyn zulke lynen, welke altoos in een gelyke afſtand van elkander zyn.

In de zaamenſtelling der werken, als Wallen, Gragten, Straaten, enz. is men dikwyls verpligt paralelle lynen te trekken, dat is te zeggen, zulke, welkers ſtelling zoodanig is, dat haare tuſſchenruymten overal door perpendiculairen van dezelfde lengte gemeeten worden, Maar om deeze paralellen te trekken, is 'er dunkt my, niets natuurlyker, dan tot de Leerwyze (welke men om de Regthoeken te maaken gebruykt) zyn toevlugt te neemen. Als AB (by voorbeeld) een der zyden van een Gragt, Wal, of iets anders is, aan welke men de breedte van CA geeven wil; of om het voorſtel, op een meetkundiger, en algemeener wyze uyt te drukken, zoo laat ons onderſtellen dat men door C, een, aan AB parallele lyn wil trekken, om dit te doen, moet men in de lyn AB, een willekeurig punt B neemen, en daar uyt op dezelfde wyze werken, als of men (de baſis AB hebbende) een Regthoek ABCD wilde maaken, welkers hoogte AC was. Dit gedaan zynde, zullen de lynen CD, AB, tot in 't oneindige verlengt zynde,

Fig. 8.

Uyt een gegeeven punt, een lyn te trekken, die parallel is, aan een ander.

al-

altoos parallel zyn, of 't geen op 't zelfde uytkomt, zy zullen elkander nooit ontmoeten.

XII.

Dewyl de Regelmatigheid der Regthoekige Figuuren (gelyk we reedts gezegdt hebben) oorzaak is, dat ze dikwyls gebruykt worden, zoo koomen 'er veel gevallen voor, waar in men de kennis van derzelver uitgeſtrektheid noodig heeft. By voorbeeld, men moet bepaalen hoe veel Tapyten men voor een Kamer noodig heeft; of hoe veel morgen Lands een Huys (dat de gedaante van een Regthoek heeft) in zyn uytgeſtrektheid bevatten moet, enz.

Men is van gevoelen, dat het eenvoudigſte en Natuurlykſte middel om tot deeze bepaalingen te geraaken, daar in beſtaat, dat men zig van een gemeene maat bedient, die, verſcheide reizen op de oppervlakte, welke gemeeten moet worden, gelegt zynde, dezelve geheel bedekt. Een manier, welke aan die geene, van welke men zig alrede bedient heeft om de lengte der lynen te bepaalen, gelyk is.

Maar het is klaarblykelyk dat de gemeene maat der oppervlaktens, zelfs, een oppervlakte zyn moet, by voorbeeld, die van een vierkante roede, van een vierkante voet, enz. Alzoo het meeten van een Regthoek niet anders is, als het bepaalen van de vierkante Roeden, Voeten, enz. die dezelver oppervlakte bevatten.

Fig. 9. Laat ons, om het verstand te hulp te koomen, een voorbeeld neemen. Laat ons onderstellen dat de gegeeve Regthoek ABCD, op een basis van acht voet, zeven voeten hoogte heeft; Men kan deeze Regthoek aanmerken, als verdeelt zynde in zeven deelen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, die ieder acht vierkante voeten zullen bevatten; en dan zal de geheele grootte der Regthoek, zeven maal 8, of 56, vierkante voeten zyn.

Indien men zig de eerste beginzelen der Arithmetica nu te binnen brengt, en zig erinnert, dat het vermenigvuldigen van twee getallen, eigentlyk daar in bestaat, dat men het eene zoo veelmaalen neemt, als 'er een-heden in het andere begreepen zyn, zal men een volmaakte overeenkomst tusschen de gewoone vermenigvuldiging (*multiplicatio*) en de bewerking waar door men de Regthoek meet, vinden. Men zal zien, dat men, door het vermenigvuldigen van het getal der Roeden, of der voeten die in derzelver hoogte begreepen zyn, met het getal der Roeden, of der voeten welke de lengte der basis maaken, de hoeveelheid der vierkante Roeden, of voeten, (die derzelver oppervlakte bevat) bepaalen zal.

De maat van een Regthoek is het *product*, van zyn hoogte met zyn basis.

XIII.

XIII.

De Figuuren welke men te meeten heeft, zyn niet altoos Regelmaatig, gelyk de Regthoeken, en ondertusschen heeft men toch dikwyls nodig haare maat te weeten; want dan is men eens verpligt om de uytgestrektheid van eenig werk (dat op een plaats gemaakt is welke niet regelmatig is) te bepaalen; en dan eens, zal men willen weeten hoe veel morgen 'er in een Land, dat op een onregelmatige wyze bepaald is, begreepen zullen zyn. Het was derhalven noodzaakelyk, dat men by de Leerwyze van de uytgestrektheid der Regthoeken te bepaalen, die, van de Figuuren welke niet Regthoekig zyn te meeten, nog byvoegde.

Men ziet aanstonds, dat 'er om dezelve in 't werk te stellen geen zwaarigheid is, dan met betrekking tot de Regtlynsche figuuren, als ABCDE, dat is te zeggen, der figuuren, welke door Regte lynen eyndigen; want het is klaar, dat, indien 'er in den omtrek van een streek Lands, eenige kromme lynen gevonden worden, gelyk in de figuur ABCDEFG, dat (zegge ik) deeze lynen, in zoo veel deelen verdeelt zynde als tot het vermyden van alle tastelyke dwaaling noodig zal zyn, altyd voor een verzameling van Regte lynen, zullen konnen genomen worden.

De regte lynsche figuuren, zyn dezulke, welke door Regte lynen bepaaldt worden.

Fig. 10.

Fig. 11.

Dit gesteld zynde, blykt het, dat men, in in weerwil van het oneindig verſchil der Regtlynſche figuuren, haar alle op een, en dezelfde wyze meeten kan, met dezelve in driezydige figuuren, (gemeenlyk driehoeken genaamdt) te verdeelen; 't geen men op de eenvoudigſte, en gemakkelykſte wyze doen kan, indien men uyt eenig punt A, van den omtrek der figuur ABCDE, tot de punten C, D, enz. de Regte lynen AC, AD, enz. trekt.

De driehoek is eenfiguur, bepaald door drie Regte lynen.

Fig. 10.

XIV.

Niets werdt 'er derhalven meer vereyſcht, als de maat der driehoeken welke men gemaakt heeft, te hebben. Nu weet men, dat, om iets waar van men onkundig is te vinden, het zeekerſte middel is, dat men in agt neemt, of, in het geen men kendt, niet iets gevonden wordt 't welk tot dat geene dat men kennen wil, overgebragt kan worden. Maar men heeft alreede gezien, dat de geheele Regthoek ABCD, gelyk is aan het vermenigvuldigde van zyn baſis AB, met zyn hoogte CB. Ten anderen is het ligtelyk te bemerken, dat deeze figuur, overdwars doorſneeden zynde door de lyn AC, de Diagonaal genoemd; zig in twee gelyke driehoeken verdeelt bevind; en daar uyt beſluyt men, dat ieder deezer driehoeken gelyk zal zyn, aan de helft van het vermenigvuldigde van haar baſis AB, of CD, met haar hoogte CB, of DA.

Fig. 12.

De Diagonaal van een Regthoek is de lyn, die haar in twee gelyke driehoeken verdeelt.

Het

Het is waar, dat het weinig gebeurd dat men driehoeken moet meeten, wel kers twee zyden perpendiculair op elkander ſtaan, gelyk by voorbeeld, de drie hoeken ABC, ADC, die men Regthoekige driehoeken noemdt; maar niets is 'er, dat ons belet, om hun alle tot driehoeken van die zoort over te brengen.

De Regthoekige driehoeken zyn de zulken in welke twee zyden perpendiculair op elkander ſtaan.

Want, indien men uyt het punt A, het toppunt van eenige driehoek ABC, op de baſis BC, de perpendiculair AD, laat nedervallen, zal de driehoek ABC, verdeelt zyn, in twee Regthoekige driehoeken ABC, ADC.

Plaat II. Fig. 1.

Herhaalende derhalven, al het het geen tot hier toe gezegt is, is 't klaar, dat gelyk de twee driehoeken ABD, ADC, de helft der Regthoeken AEBD, ADCF zullen zyn, dat zegge ik, de voorgeſtelde driehoek ABC, van 's gelyken, de helft zal zyn van de Regthoek EBCF, wiens baſis BC, en welkers hoogte AD, zal zyn: maar dewyl de oppervlakte der Regthoek EBCF, aan het vermenigvuldigde van de hoogte EB, of AD, met de baſis BC gelyk zal zyn, zal de maat der driehoek ABC, de helft zyn, van het vermenigvuldigde der baſis BC, met de perpendiculair AD, die de hoogte der driehoek is.

Een driehoek is de helft van een Regthoek die dezelfde baſis, en dezelfde hoogte heeft.

Derhalven is de maat der driehoek, de helft van het product, van derzelver hoogte, met de baſis.

Dus heeft men de manier, om alle de Landen te meeten welke door Regte lynen bepaald worden: dewyl 'er geen gevonden wordt die niet tot driehoeken

ge-

gemaakt kan worden, en uyt de toppunten van welke driehoeken, men geen perpendiculairen op haare basen kan laaten nedervallen.

XV.

Fig. 2. De driehoeken, diedezelfde hoogte, en dezelfde basis hebben, hebben ook dezelfde oppervlaktens.

Om dat men in de Leerwyze welke wy zoo even gegeeven hebben, om de grootte of oppervlakte der driehoeken te meeten, alleenlyk hunne basis en hoogte gebruykt, zonder op de lengte hunner zyden eenige Aanmerking te maaken, zoo trekt men daar uyt dit voorstel (*Propositie*) of *Theorema*, dat alle driehoeken, als ECB, ACB, welke een gemeene basis CB hebben, en waar van de hoogten EF, AD gelyk zyn, een zelve oppervlakte hebben.

XVI.

Om de bevatting der grondregel welke de maat der driehoeken voortbrengt, te ligter te maken, hebbenwe geoordeeld, niets anders voor basis te moeten verkiezen, als een zyde, op welke de perpendiculair van het tegengestelde toppunt zoude konnen nedervallen, 't geen men altoos de vryheid heeft om te doen, wanneer 'er niet anders dan het meeten der Landen geëyscht wordt. Maar dewyl in de vergelyking der driehoeken die dezelfde basis hebben, de uyt haare toppunten neêrgevallene perpendiculairen, buyten de driehoek konnen vallen,

ge-

gelyk in de 3e figuur, ſchynd het, dat men noodzaaklyk moet zien, of de driehoeken als BCG, in het geval van de andere zyn; dat is te zeggen, of ze altoos de helft der Regthoeken ECBF (die de perpendiculair GH, voor derzelver hoogte hebben) zyn. Fig. 3.

Maar dit is iets, waar van men zig gemakkelyk verzeekeren kan, door aan te merken, dat de driehoek CGH, zynde de ſom van de twee driehoeken CGB, GBH, de helft is van de Regthoek ECHG, zynde de ſom van de twee Regthoeken ECBF, FBGH; en dat dus de twee driehoeken CGB, GBH, zaamen genoomen de helft van de Regthoek ECHG uyt maaken: Nu is de driehoek GBH, de helft van de Regthoek FBHG; en derhalven is de voorgeſtelde driehoek BCG, de helft van de andere Regthoek ECBF, die BC, voor baſis, en GH, tot hoogte heeft.

XVII.

De in de drie voorgaande Afdeelingen beweezen Propoſitie, kan nog algemeen in deeze bewoordingen uytgedrukt worden: De driehoeken EBC, ABC, GBC, zyn gelyk, wanneerze een gemeene baſis BC hebben, en als ze tuſſchen dezelfde parallelen EAG, CBH ſtaan; dat is te zeggen, wanneer haare toppunten E, A, G, in een en dezelfde Regte lyn EAG, parallel aan de Regte CB zynde, ge-

Fig. 4. De driehoeken, die een zelfde baſis hebben, en tuſſchen dezelfde

parallelen beslooten zyn, hebben een gelyke oppervlakte.

gevonden worden. Want alsdan, zyn (volgens Art. XI.) haare hoogtens, die door de perpendiculairen EF, AD, GH, gemeeten worden, dezelfde.

XVIII.

Fig. 5.

De Parallelogrammen zyn vierzydige figuuren, welkers twee tegengestelde zyden parallel zyn.

Ze worden gemeeten, door het vermenigvuldigen van haare hoogte met de basis.

Onder de onderscheidene Regtlynsche figuuren, welke door de voorgaande Leerwyze konnen gemeeten worden, zyn 'er eenige, die de Regelmatigheid der Regthoeken zeer naby koomen; 't zyn de zulke, die, op de wyze van ABCD, door vier zyden bepaald worden, van welke een ieder, parallel is aan die zyde, welke aan haar is tegengesteld. Deeze figuuren, worden *parallelogrammata* genoemd, en zyn gemakkelyker te meeten dan de andere Regtlynsche figuuren, de Regthoeken alleenlyk uytgezondert zynde. Want, als men het *parallelogram* ABED, in twee driehoeken ABC, ACD verdeelt, zullen deeze driehoeken oogschynlyk gelyk zyn: Maar dewyl ieder deezer driehoeken de helft is van het vermenigvuldigde van de hoogte AF, met de basis BC, zal de maat van het *parallelogram* het geheele vermenigvuldigde van de basis BC, met de hoogte AF zyn.

XIX.

Fig, 6. of 7.

Hier uyt volgt, dat alle parallelogrammen ABCD, EBCF, die een gemeene basis hebben, en geplaatst zyn tusschen de-

dezelfde paralelle lynen, gelyk zullen zyn: Dit kan men zelfs onafhankelyk van het voorgaande, gemakkelyk gewaar worden, als men aanmerkt dat het parallelogram ABCD, indien men 'er de driehoek DCF byvoegt, het parallelogram EBCF worden zal, en het zal teffens klaarblykelyk zyn, dat, als men van de geheele figuur ABCF, de driehoek ABC, aftrekt, (de twee driehoeken DCF, ABE, onderfteld zynde gelyk te zyn) dat zegge ik, het parallelogram ABCD, niet van uytgeftrektheyt verandert zal zyn, toen het EBCF, geworden was. Maar, om zig van de gelykheid deezer twee driehoeken te verzeekeren, zal het genoeg zyn, aan te merken, dat, AB en CD, alzoo wel paralel zynde, als BE, en CF, de driehoek ABE, het zelfde zal zyn als de driehoek DCF, die indiervoegen, langs derzelver bafis voortgegaan zal zyn, dat het punt A, in D, en E in F, gekomen is.

De parallelogrammen, die een gemeene bafis hebben, en tuffchen dezelfde evenwydigelynen ftaan, hebben een gelyke oppervlakte.

XX.

Men heeft nog andere Regtlynfche figuuren, die zeer gemakkelyk konnen gemeeten worden, en welke men Regelmatige veelhoeken noemdt; figuuren, welke met gelyke zyden, en die dezelfde neiging tot elkander hebben, eindigen. Dusdanige zyn de figuuren ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH.

De Regelmatige veelhoeken zyn figuuren die door gelyke zyden, welke dezelfde neiging tot elkander hebben, eindigen.

Fig. 8. 9. 10.

Gelyk men de gewoonte heeft om de

overeenkomſtige gedaanten deezer figuuren, aan Bekkens, Fonteinen, openbaare plaatzen &c. te geeven, ben ik van gedagten, dat men, alvoorens men tot de aantooning van derzelver meeting overgaat, eerſt moet voorſtellen, op welk een wyze zy getrokken worden.

XXI.

Manier om een veelhoek tebeſchryven, die een bepaald getal van zyden heeft.

Als men, na het beſchryven van den omtrek eener Cirkel, dezelve in zoo veel gelyke deelen verdeeld, als men zyden aan de veelhoek geeven wil, en dan uyt de punten A, B, D, E &c. de lynen, A B, B D, D E trekt, zoo zullen die den omtrek verdeelen, en men zal te gelyk de gezogte veelhoek hebben, die *Pentagoone*, *Hexagoone*, *Heptagoone*, *Octagoone*, *Enneagoone*, of *Decagoone* &c. genoemdt worden, na dat ze 5, 6, 7, 8, 9, of 10 zyden hebben.

De *Pentagoon* heeft 5 zyden, de *Hexagoon* 6, de *Heptagoon* 7, de *Octagoon* 8, de *Enneagoon* 9, de *Decagoon* 10 &c.

XXII.

Meeting van de oppervlakte van een regelmatige veelhoek.

Fig. 10.

Om tot de maat van een Regelmatige veelhoek te geraaken, zoude men dezelfde Leerwyze die we alreede (in Art. XIII.) voor alle de Regtlynſche figuuren hebben opgegeeven, gebruyken konnen; Maar men kan gemakkelyk begrypen, dat de kortſte weg is, de veelhoek in gelyke driehoeken te verdeelen, die alle het Centrum C voor hun toppunt hebben. Want, wanneer men in een deezer driehoeken

(by

(byvoorbeeld, C BD, op de baſis B D, de perpendiculair C K trekt; die als dan de *Apothema* van de veelhoek genoemd zal worden, zal het vermenigvuldigde, zoo dikwils genoomen als de *polygoone* zyden heeft; de oppervlakte of inhoud van de geheele figuur opleeveren, op de zelfde wyze, als de inhoud van de driehoek bepaald wordt; door het vermenigvuldigde van de baſis B D, met de helft van C K.

De *Apothema* is de perpendiculair, die uyt het Centrum des figuurs, op een van derzelver zyden valdt.

XXIII.

Als men de omtrek van een Cirkel alleenlyk in drie gelyke deelen verdeelde, zoude men een driehoek maaken, die gemeenlyk een gelykzydige genoemd wordt; Als men deeze omtrek in vier gelyke deelen verdeelde, zoude men een vierkant maaken; Maar deeze twee figuuren, de eenvoudigſte van alle veelhoeken; konnen gemakkelyk gemaakt worden, zonder dat men genoodzaakt is den toevlugt tot de verdeeling van den Cirkel te neemen; 't geen het zelfde is, dat we alreeds (in Art. IX.) voor het vierkant gezien hebben. Ten opzigt van de gelykzydige driehoek is het ligtelyk te zien, dat men, om dezelve op een gegeeve baſis A B, te beſchryven, uyt de punten A en B, als Centrums, en met een wydte des paſſers, die aan A B gelyk is, de boogen D C F, en G C H moet trekken, en vervolgens uyt de punten A en B, tot het

De Gelykzydige driehoek is die, welkers driezyden gelyk zyn.

Manier om dezelve te beſchryven. Fig. 11.

het punt C, de lynen AC, BC; welk punt C, 't gemeen ſnydpunt der twee boogen DCF, GCH, en het toppunt van den driehoek is.

XXIV.

By de Leerwyſe om een gelykzydige driehoek, en het vierkant, de eerſte van alle de *Polygoonen*, meetkonſtig te beſchryven, zoude ik die om op een meetkundige wyze een *Pentagoone* te trekken, gelyk verſcheide Schryvers in hunne beginzelen gedaan hebben, nog konnen byvoegen: Maar dewyl de eerſtbeginnende, voor welke deeze verhandeling alleenlyk geſchikt is, de weg welke het verſtand heeft moeten volgen, door de manier om deeze Figuur te trekken, te ſoeken, niet als met moeyte gewaar ſouden worden, nadien de *Algebra* ons in ſtaat ſteld om deeſe weg te ontdekken, ſoo hebben wy geoordeeld, dat het beeter was om de beſchryving van de *Pentagoone* in de verhandeling te plaatzen, welke onmiddelyk op deeze volgen zal, in welke men ook alle de andere *Polygoonen* beſchryven zal, die een grooter getal van zyden hebben, en welke zonder behulp van de *Algebra* niet meetkundig konnen beſchreeven worden.

Onder de *Polygoonen* welke meer dan vyf zyden hebben, en die ik zeg, dat niet zonder behulp van de Algebraiſche Reekening beſchreeven konnen worden,

moet

moet men nogtans die niet betrekken, welke 6, 12, 24, 48, of 8, 16, 32, 64 &c. zyden hebben, dewyl men die zeer gemakkelyk, door behulp van die Leerwyzen, welke de beginzelen der *Geometrie* zelve verſchaffen, beſchryven kan; gelyk men op het einde van dit eerſte deel nader zien zal.

XXV.

Wanneer men wederom tot de meeting der landen keerd, zal men gewaar worden, dat 'er onder de gene, welke men wil meeten, dikwyls zulke zyn, die geheel en al voor de hier voorgeſchreevene Leerwyzen onvatbaar zyn.

Ik onderſtel dat ABCDE de figuur van een veldt, of de omtrek van een beſlooten plaats is, welke men meeten wil. Fig. 12.
Volgens het geen te vooren gezegt is. Moeſt men ten dien einde ABCDE in driehoeken verdeelen, by voorbeeld, in ABC, ACD, ADE: en vervolgens, na dat men de perpendiculairen, EF, CH, BG, hadt laaten nedervallen, deeze driehoeken meeten: Maar als 'er zig in de ruymte ABCDE, eenig beletſel opdoet, een heuvel, by voorbeeld, een Bos, een Vyver, of iets anders; zoo dat men niet in ſtaat was om de lynen, die men noodig hadt, te konnen trekken. Wat zal men dan moeten doen? welke Leerwyze moet men dan volgen, om die onvolkomenheden uyt den weg te neemen?

 men?

men? Die, welke zig het eerst aan den geest vertoond, is, dat men eenig vlak stuk lands verkiezen moet, op het welke men gemakkelyk zal konnen werken, en daar op, moet men driehoeken beschryven, die gelyk, en overeenkomstig zyn met de driehoeken ABC, ACD &c. Laat ons zien op wat wyze men sulks sal aanvangen, om de nieuwe driehoeken te maaken.

XXVI.

Plaat III. Fig. 1. De drie zyden van een driehoek bekend zynde, een andere driehoek te maaken die daar aan gelyk is.

Fig. 1 en 2.

Laat ons beginnen, door te onderstellen dat het beletzel zig binnen in den driehoek ABC, welkers zyden bekend zyn, bevind; en dat men op het gekoozen veld, een gelyke en overeenkomstige driehoek wil trekken; het eerste dat men doen moet, is het beschryven van een lyn DE, die gelyk is, aan de zyde AB, vervolgens (neemende een koorde, die de lengte van BC heeft, en welkers eene uyteinde in E is vast gemaakt, moet men de boog SFG beschryven, die de koorde voor een straal zal hebben, en door middel eener andere koorde, die gelyk moet zyn aan AC, en welkers eene einde men insgelyks in D zal vastgemaakt hebben, moet men de boog KFH beschryven, die de eerste in 't punt F snyden zal, en dan zal men, de lynen DF, en FE getrokken hebbende, een driehoek DEF verkrygen, die gelyk, en overeenkomstig is, met de voorgestelde drie-

driehoek ABC. Dit is iets dat ten uyterſten klaarblykelyk is, dewyl de zyden DP, en EF, die zig in 't punt F. vereenigen zullen, wederzyds gelyk zynde, aan de zyden AC, en BC, die in 't punt C vereenigt zyn; en de baſis DE gelyk genoomen hebbende, aan AB; het niet moogelyk zoude konnen zyn, dat de ſtelling der lynen DF, en EF, op DE, verſchillende was, van de ſtelling der lynen AC, en BC, op AB. Het is waar dat men de lynen D*f*, E*f*, beneden DE, zouden konnen nemen; maar dan zoude de driehoek nog dezelfde, en alleenlyk maar omgekeerd zyn.

XXVII.

Zoo men niet meer dan twee, der drie zyden van de driehoek ABC konde meeten, by voorbeeld, de zyden AB, BC; is het klaar, dat men daar mede alleen, geen tweede driehoek zoude konnen bepaalen, die gelyk, en overeenkomſtig zoude zyn, met ABC. Want, alhoewel men DE, gelyk aan BC; en DF, gelyk aan BA hadt genoomen, zoude men nog niet konnen weeten welke ſtelling men daar aan, met betrekking tot de andere geeven moeſt. Om deeze zwaarigheid op te loſſen, moet men op eene zeer eenvoudige wyſe te werk gaan; dat is, men moet DF, op dezelfde wyze doen hellen op DE, als AB heldt op BC; of, om my gelyk de meetkundige, uyt te druk-

Fig. 3.

Fig. 3. en 4.

Een hoek is de neiging van de eene lyn, tot den ander.

drukken, men geeft de hoek FDE, dezelfde wydte; als de hoek ABC.

XXVIII.

Manier om een hoek te maaken, die gelyk is aan een ander.

Om deeze bewerking te doen, neemt men, een werktuyg *abc*, zaamengesteld uyt twee liniaalen die in 't punt *b* konnen ronddraayen, en men legt deeze liniaalen op de zyden AB, en BC. als wanneer zy tusschen hun beiden dezelfde hoek, als de zyden AB, en BC zullen maaken. Indien men dan *bc*, indiervoegen op de basis DE legt, dat het Centrum *b*, aan het punt D beantwoord, en dat de opening van het instrument altoos dezelfde zy, zal de liniaal *ab*, de stelling van de lyn DF geeven, die met de lyn DE de hoek FDE gelyk aan de hoek ABC zal maaken. Nu, de lyn DF, van de zelfde lengte genoomen zynde als BA, zal 'er niets meer overschieten, dan van het punt F, tot E, de regte FE te trekken, om de driehoek FED in 't geheel gelyk, en overeenkomstig aan de driehoek ABC te maaken. Een eenvoudige bewerking: die dit beginzel ondersteld; dat een driehoek door de lengte van twee zyner zyden, en door derzelver opening bepaald wordt; of, het geen op het zelfde uytkomt, dat een driehoek, aan een andere gelyk is, wanneer twee van haare zyden wederzyds gelyk zyn, en als de hoek die tusschen deeze zyden begreepen is, dezelfde opening heeft.

Twee zyden, en de daar tusschen begreepene hoek gegeeven zynde, is de driehoek bepaaldt.

XXIX

XXIX.

Men zoude de Hoek F D E, ook op de volgende manier aan A B C gelyk konnen maaken. Fig. 5 en 6.

Beschryft uyt het Centrum B, met een na believen genomen wydte B A, de boog *a b c*; trekt vervolgens, uyt het Centrum D, met dezelfde wydte, de boog *e i f*; zoekt daarna, een punt *f*, dat op dezelfde wyze geplaatst is, op de boog *e i f*, als *a* op de boog *c b a*. Dit punt *f* zult gy zeer gemakkelyk vinden, wanneer gy u bedient van de Regte *a c*, die, volgens de gewoone bepaaling, de koorde van den boog *a b c* genoemt wordt.

Tweede manier om een hoek aan een ander gelyk te maaken.

DeCorda, koorde of pees van een Cirkelboog, is een regte lyn, die de Cirkel aan weerzyden stoot, en niet door het Centrum gaat.

Want, zoo gy uyt het Centrum *e*, met een wydte, die gelyk is aan *a c*, de boog *l f k*, beschryft, zal de snyding der boogen *e i f*, *l f k*, u het gezogte punt *f* geeven.

Trekt vervolgens uyt D en door *f*, de lyn D *f* F, en gy zult F D E gelyk aan den hoek A B C hebben. Dit is klaarblykelyk, (Art. XXVI.) dewyl de driehoeken B *a c*, D *f e* in 't geheel gelyk, en overeenkomstig in alle haare deelen zullen zyn.

XXX.

Indien het gebeurde, dat men, de driehoek F D E, gelyk willende maaken, aan de driehoek A B C, niet meer dan een van derzelver zyden by voorbeeld B C meeten konde, kan men de toevlugt neemen Fig. 3. en 4.

Twee hoeken, en een zyde bepaalen den driehoek.

tot de hoeken ABC, en ACB. Want, na dat men alvoorens DE, gelyk heeft gemaakt aan BC, plaatst men de lynen FD, en FE, indiervoegen, dat ze met DE, dezelfde hoeken maaken, als AB, en AC, met BC: en dan zal, door de ontmoeting deezer lynen, de driehoek FDE, gelyk, en overeenkomstig, met den driehoek ABC zyn. Het beginzel dat in deeze bewerking ondersteld wordt, is uyt zig zelfs zoo eenvoudig, dat het onnodig is, het zelve te betoogen.

XXXI.

Fig. 7.

De gelykbeenige driehoek is die geene, welke twee gelyke zyden heeft.

Zoo men van de drie zyden der driehoek ABC, niet meer dan de basis BC konde meeten, en als men daarenboven wist dat de driehoek gelykbeenig was, dat is te zeggen, dat de twee zyden AB, en AC gelyk waaren, is het klaar, dat men niet meer behoefde te doen, dan een der twee hoeken ABC, ACB, te meeten; overmits als dan, de andere, daar aan gelyk zoude zyn.

De reeden hier van, zal men gemakkelyk konnen begrypen, wanneer men zig voorsteld het geen gebeuren zoude, indien men onderstelde dat de zyden AB, AC, van den driehoek ABC, eerst rustede op BD en CE, verlengsels van de basis BC, en dat men haar vervolgens opregtede, om derzelver einden in 't punt A te vereenigen; want als dan, zoude de gelykheid deezer twee zyden, haar be-

beletten om een ongelyke weg te maaken. Derhalven zouden zy (zaamengevoegt zynde) een gelyke neiging hebben tot de basis B C, en gevolgelyk, zoude de hoek A B C, gelyk zyn aan den hoek A C B.

De hoeken die deeze zyden met de basis maaken, zyn elkander gelyk.

XXXII.

Om tot de maat der landen weder te keeren: men zal zien, dat, welke de beletzelen ook zyn moogen, die men in haar begrip zoude konnen ontmoeten; dat zeg ik, men alle de driehoeken, die de ruymte, welke men meeten wil, verdeelen zullen, door behulp van de voorgaande Leerwyze, zeer gemakkelyk op een land kan overbrengen, dat van alle deeze beletzelen bevryd is.

Laaten we, by voorbeeld, onderstellen, dat gy een bos zult willen meeten, welkers figuur, als A B C D E F G is. Fig. 8.

Het eerst: dat in dit geval gedaan moet worden, is het maaken van een driehoek, die gelyk is aan A B C. Dit is iets, dat ge zeer gemakkelyk zult konnen doen, zonder in het begrip deezer driehoeken te treeden, wanneer gy maar alleenlyk de maat neemt van de twee zyden A B, B C, en van den hoek C B A, welke daar tusschen begreepen is.

Deeze beschreeven driehoek zal de hoek BCA, en de lengte AC geeven; en, gelyk gy de uytwendige zyde D C zult konnen meeten, zult gy in de driehoek

CAD,

CAD, de zyden DC, en CA hebben.
Fig 8. en 9. Wat de hoek DCA betreft, die zult ge vinden, wanneer ge eerst de hoek IKL, gelyk aan de hoek DCB, en vervolgens de hoek LKO, gelyk aan de hoek BCA maakt, want dit zal u de overblyvende hoek IKO geeven, die gelyk zal zyn, aan de gezogte hoek DCA.

De driehoek ADC, dus, door de twee zyden DC, CA, en de begreepene hoek DCA, bepaald zynde, zult ge van zelfs de driehoek DAG, en het overige van de figuur kennen.

XXXIII.

De Leerwyze die we zoo aanstonds gegeeven hebben, om landen te meeten in welke men geen lynen trekken kan, maakt dikwyls groote zwaarigheden in de uytvoering. Men vind zelden een gelyke en vrye ruymte die groot genoeg is om driehoeken te maaken, welke gelyk zyn aan die van een ander land, welkers maat men zoekt. En wanneer men zulk een al vinden konde, zoude de groote lengte van de zyden der driehoeken, de bewerkingen nog zeer moeijelyk maaken. Een perpendiculair op een lyn te laaten vallen, uyt een punt dat alleenlyk in een afstand van 500 roeden geplaatst was, zoude een bewerking maaken, die zeer moeijelyk, en misschien ondoenlyk zyn zoude. Het is derhalven van een groote aangelegenheid, een middel te hebben,

ben, dat aan deeze groote bewerkingen voldoet.

Dit middel bied zig, gelyk van zelfs aan. Men steld zig wel haast voor, om de figuur ABCDE te meeten, door een andere *abcde*, die daar mede overeen komstig, maar kleinder is, in dewelke by voorbeeld, zoo de zyde AB, van 100 roeden zy, de zyde *ab* van 100 duymen is, zoo BC van 45 roeden zy, de zyde *bc* van 45 duymen is: Want hier uyt besluyt men, dat, indien de uytgestrektheid van de verminderde figuur, *abcde*, 60000 vierkante duymen is, die, van de figuur ABCDE van 60000 vierkante roeden moet zyn. Plaat IV. Fig. 1. en 2.

Maar, voor alles moet men weeten, waar in de overeenkomst van twee figuuren bestaat.

XXXIV.

Waar in de overeenkomst van twee figuuren bestaat.

Als men daarover maar de minste overweeging maakt, zal men wel haast bemerken konnen, dat de twee figuuren ABCDE, *abcde* om overeenkomstig te zyn, zoodanig moeten weezen, dat de hoeken A, B, C, D, E, van de groote, zyn als de hoeken *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, van de kleyne, en dat daar en boven, de zyden *ab*, *bc*, *cd* enz. van de klyne, even zoo veel van de deeltjes *p* bevatten, als de zyden AB, BC, CD &c. der groote, van de deelen P bevatten.

XXXV.

Om deeze tweede voorwaarde uyt te drukken, zeggen de Meetkundige, dat de zyden AB, BC, CD &c. evenredig moeten zyn, aan de zyden *ab*, *bc*, *cd*, &c. of, dat de zyde AB, op dezelfde wyze *ab*, moet bevatten, als BC, de zyde *bc*. &c. of, dat de zyde AB, met betrekking tot *ab*, even groot moet zyn, ale BC, is, met betrekking tot *bc* &c., of, dat 'er een zelfde reden, of dezelfde betrekking tusſchen AB, en *ab*, als tusſchen BC, en *bc*, moet zyn &c., of eindelyk, dat AB, moet zyn tot *ab*, als BC, tot *bc*. &c. Alle verſchillende wyzen om een zelfde zaak uyt te drukken, maar die men nogtans genoodzaakt is, zig eigen te maaken, indien men de taal der meetkundige verſtaan wil.

XXXVI.

Manier om een figuur overeenkomſtig aan een andere te maaken.

Na dat we aangetoond hebben, waar in eigentlyk de overeenkomſt van twee figuuren beſtaat, zullen we nu zien, welke weg de Natuur ons aanwyſt, om een figuur overeenkomſtig met een andere te maaken. Laaten we ons ten dien einde een ontwerper of afſchetſer verbeelden, die een figuur, door dezelve te verminderen, wil nabootſen.

Neemende eerſt *ab*, om de baſis AB van de figuur ABCDE die hy nabootſen wil, te vertoonen, doet hy de zyden *ae*, en *bc*, op dezelfde wyze, op *ab* neigen,

gen, als AE, en BC op AB neigen, in agt neemende, dat de lengtens van *ae*, en *bc*, tot die van *ab* zyn, als de lengtens van AE, en BC, zyn, tot die van AB; dat is te zeggen, dat, indien AE, by voorbeeld, de helft is van AB, *ae* gelyk moet gemaakt worden, aan de helft van *ab*, en dat men op dezelfde wys te werk moet gaan, om de lengte van *bc*, betrekkelyk tot BC te bepaalen.

De punten *e*, en *c*, dus bepaald hebbende, trekt men twee lynen *ed*, en *cd*, die men op dezelfde wyze op *ea*, en *cb* doet neigen, als ED, en CD, neigen op EA, en CB: en, verlengende deeze zyden, tot dat ze elkander in *d* ontmoeten, voltrekt men de figuur *abcde*.

XXXVII.

Wanneer men nu op deeze bewerking agt geeft; zal men zien, dat ze alleenlyk steund op de gelykheid die 'er is tusschen de hoeken E, A, B, C, en *e*, *a*, *b*, *c*, en op de evenredigheid der zyden, EA, AB, BC, en der zyden *ea*, *ab*, *bc*; en dat dus de figuur geëindigt, of voltooid is, zonder dat men de hoek *d*, aan den hoek D gelyk heeft gemaakt, of de zyden *ed*, *cd*, evenredig aan de zyden ED, CD. Een aanmerking, die in den eersten opslag zoude konnen doen vreezen, dat de hoek *d*, niet daadelyk gelyk was, aan den hoek D, nog de zyden *ed*, *cd*, evenredig aan de zyden ED, CD, en dat by gevolg, de figuur *abcde* niet geheel overeenkomstig zoude zyn, met de figuur ABCDE; maar al hadt men niet dan de ondervinding om zig daar van te ontslaan, zoude nogtans deeze twyffeling wel haast weggenoomen zyn; behalven dat men door een weinig aandagt zien zal, dat uyt de wederzydsche gelykheid der vier hoeken, E, A, B, C, en *e*, *a*, *b*, *c*, zoo wel als uyt de evenredigheid der drie zyden EA, AB, BC, en *ea*, *ab*, *bc*, noodzaakelyk de gelykheid der hoeken D, *d* &c., en de evenredigheid der zyden ED, CD, en *ed*, *cd*, volgt.

Ondertusschen zullen we, om alle argwaan te vermyden, doen zien, dat alle de voorwaardens die de overeenkomst van twee figuuren eyscht, noodzaakelyk van elkander afhangen; 't geen we zeer gemakkelyk zullen konnen doen, wanneer we eerst de driehoeken onderzoeken, die de eenvoudigste figuuren zyn, en in de saamenstelling van alle de andere noodzaakelyk invloejen. Een onderzoek, dat ons tot alle de eigenschappen, en gebruyken der overeenkomstige figuuren leiden zal.

XXXVIII.

Fig. 3 en 4. Zoo twee hoeken van eene driehoek,

Laaten we onderstellen, dat men op de basis *ab*, de driehoek *abc* trekt; dan zal men zig in de eerste plaats konnen verzeekeren, dat, indien men alleenlyk de hoeken *cab*, *cba*, gelyk maakt aan de hoe-

hoeken C A B, C B A, van de driehoek ABC, dat zegge ik, de derde hoek *a c b*, gelyk zal zyn aan de derde hoek ACB.

Want, zoo de driehoek *a b c*, indiervoegen op de driehoek ABC gelegt was, dat het punt *a* zig bevond op het punt A; *a b*, op A B, en *a c* op A C, is het klaar, dat *c b* parallel zal zyn aan CB, en dat, overmits de verlengde zyde *c b*, de zyde C B niet zoude konnen ontmoeten, als de twee lynen geen ongelyke neiging op AB hadden, dat zegge ik, by gevolg, de hoeken *c b a* en CBA ongelyk waren; 't geen tegen de onderstelling stryden zoude.

gelyk zyn, aan de twee hoeken van eene andere driehoek, zal de derde hoek van den eene, gelyk zyn aan de derde hoek, van den andere,

Gelyk, uyt de gelykheid der hoeken *c b a*, en CBA zal volgen, dat de lynen *c b*, C B, evenwydig zullen zyn, zal ook uyt de evenwydigheid deezer lynen volgen, dat de hoeken A*c b*, ACB gelyk zullen zyn; 't geen te bewyzen was.

XXXIX.

Laat ons nu doen zien, dat de zyden, die elkander in de twee driehoeken *a c b*, ACB, die dezelfde hoeken hebben, gelykformig zyn, ook evenredig zyn.

Om onze denkbeelden te beeter te doen verstaan, zullen we eerst onderstellen, dat *a b* de helft van AB is; en dan zal men moeten bewyzen, dat *a c*, ook de helft van AC, en *b c*, de helft van BC zyn zal. Als *a c b* nog op dezelfde wyze als in de voorgaande afdeeling in A*c b*

Twee driehoeken, welkers wederzydsche hoeken, gelyk zyn, hebben haare zyden evenredig.

geplaatst is, en men de lyn *cg*, parallel aan AB trekt, is het klaar, dat deeze lyn gelyk zal zyn aan *b*B, of A*b*, en dat *g*B, van 's gelyken, gelyk zal zyn aan *cb*. Dewyl nu de hoeken *cg*C, en C*cg* aan de hoeken *cb*A, en *c*A*b*, gelyk zullen zyn, zal ook de driehoek C*cg*, gelyk zyn aan de driehoek *c*A*b*, (Art. XXX.) Derhalven zal men C*c*, gelyk hebben aan A*c*: en C*g*, gelyk aan *cb*, of aan *g*B; en gevolgelyk zal A*c*, of *ac*, de helft van AC; en *cb*, de helft van CB zyn.

Fig. 3. en 5. Zoo *ab*, drie, vier of zoo veel maal in AB, bevat was als men wilde, zoude het insgelyks ligtelyk te betoogen zyn, dat *ac*, even zoo veel maal zoude bevat zyn in AC, en *cb*, in CB. Want, indien men uyt de punten van verdeeling *b*, *f*, van de basis AB, de lynen *bc*, *fb*, parallel aan BC trok, zoude men langs AC, drie, vier, of meer driehoeken A*cb*, *cbg*, *b*C*i*, &c. konnen plaatsen, die alle aan de driehoek *acb* gelyk waren.

Maar indien *ab*, in plaats van naaukeuriglyk, met een bepaalde veelheid van volkoomen getallen in AB begreepen te zyn, daar in, niet, dan met gebrooken bevat was; twee en een half maal by voorbeeld; zoude men konnen bewyzen dat *ac*, ook twee en een halfmaal in AC; en *bc*, twee en een halfmaal in BC begreepen was.

Want,

Want, wanneer men, door middel van de parallelen *bc*, *fb*, de twee driehoeken A*cb*, *cbg*, gelyk zynde aan *acb*, langs de lyn A C geplaatst zoude hebben, zoude 'er tusschen de twee parallelen *bf*, en CB een ruymte overblyven, om een driehoek C*bi* te konnen plaatsen, welkers zyden, de helften zouden zyn van de zyden van *c*A*b*; 't geen ten uytersten klaarblykelyk is, dewyl door de onderstelling, *f*B, de helft zoude zyn van A*b*: en de basis *bi*, van den driehoek C*bi*, gelyk zoude zyn, aan *f*B, ter oorzaake van de parallellen *bf*, CB. Derhalven zyn in 't algemeen, wanneer twee driehoeken ABC, *abc*, dezelfde hoeken hebben, de zyden deezer driehoeken (die, overeenkomstige driehoeken genoemd worden) evenredig; of, het geen volstrekt op het zelfde uytkoomt, de zyden AB, BC, AC, van de eene deezer driehoeken ABC, bevatten het zelfde getal van deelen P, als de zyden, *ab*, *bc*, *ac*, van de andere driehoek *abc*, van *p* bevat. P, een voet, een Roede, of in 't algemeen de maat zynde, met welke ABC is zaamengesteld, en *p* die, van welke men zig bediend heeft in het zaamenstellen van *abc*.

XL.

Uyt de *propositie* die we zoo even betoogd hebben, wordt de oplossing van een *Problema*, dat van zeer veel nut in de practyk is, getrokken.

Een lyn in een willekeurig getal van gelyke deelen, te verdeelen.

Men eischt: dat een lyn, in een gegeeven getal van gelyke deelen verdeeld zy; 't geen wel is waar, op een gissende wyze zoude konnen gedaan worden, doch nooit met die zekerheid, welke een naaukeurige Meetkunde geeft.

Fig. 5.

Laat ons by voorbeeld onderstellen, dat men de lyn AB, in drie gelyke deelen verdeelen wil; om zulks te doen, begind men, met het trekken van een onbepaalde lyn AC, die met AB een zekere hoek zal maaken; Vervolgens brengt men met een willekeurige opening des passers op deeze lyn, drie gelyke deelen A *c*, *c b*, *b c*; dan trekt men CB, en tot deeze regte leid men de parallellen *c b*, *bf*; waar door AB, in de punten *b*, en *f*, doorsneeden, en in drie gelyke deelen, verdeeld zal worden; dat van zelfs vloeid uyt de voorgaande betoogde *propositie*.

XLI.

Wanneer men een lyn in een gebrooken getal van deelen, by voorbeeld twee en een half, drie en een vierde enz. verdeelen wilde, of wel, als men zig in 't algemeen voorstelde, de lyn AB indiervoegen in 't punt *b* te verdeelen, dat AB, was tot A *b*, gelyk de lyn NO, tot de lyn M Q; ziet men, dat de oplossing van dit *problema* ook van de XXXIX afdeeling zoude afhangen; dat is te zeggen, dat men een na believen genomen regte lyn uyt A zoude moeten trekken, op dee-

ze

ze regte, *Ac*, en AC, gelyk neemen aan MQ en NO, en vervolgens *cb*, parallel trekken aan CB; als wanneer het punt *b*, het gezogte punt zyn zoude.

De Meetkundige drukken het *problema* dat we thans oplossen op deeze andere wyze uyt. Een lyn te vinden, die aan drie lynen NO, MQ, AB evenredig is.

Wat tot drie lynen, een vierde evenredige is, en hoe men dezelve vind.

XLII.

Het is klaarblykelyk, dat twee overeenkomstige driehoeken ABC, *abc*, niet alleen haare zyden, evenredig zullen hebben, maar dat ook de perpendiculairen CF, *cf*, die men uyt de toppunten C, *c*, op de Grondlynen, AB, *ab*, laat nedervallen, de evenredigheid der zyden volgen zullen: Dit is zoo gemakkelyk door het voorgaande te betoogen, dat we ons daar mede, nu niet zullen ophouden.

Fig 7 en 8. De hoogtens van twee overeenkomstige driehoeken, zyn evenredig aan haare zyden.

XLIII.

Wat de oppervlakte der overeenkomstige driehoeken ABC, *abc*, belangt, men ziet dat die van de eerste zoo veel van de vierkanten X, die op de maat P, gemaakt zyn, bevatten zal, als de oppervlakte der tweede, van de vierkanten *x* gemaakt op de maat *p*. Want, gelyk CF en AB, (door de voorgaande afdeeling) zoo veel van de gedeeltens P, als *cf*, en *ab*, van de gedeeltens *p*, bevatten

 zal;

zal; zal de helft van het vermenigvuldigde van CF, met AB, de maat van ABC, (Art. XIV.) het zelfde getal geeven, als dat geene, 't welk uyt de helft van het vermenigvuldigde van *cf*, met *a b*, de maat van *a b c*, ontstaan zal: dog met dit onderscheid, dat CF, en AB, bereekend wordende by gedeeltens P, haar *product* in tegendeel, bereekend zal worden by vierkanten X, en dat *cf*, en *ab*, bereekend wordende by gedeeltens *p*, een *product* zal geeven, dat gereekend wordt by vierkanten *x*.

XLIV.

De oppervlaktens der overeenkomstige driehoeken, zyn tot elkander, gelyk de vierkanten der gelyk-aartige zyden.

't Geen we thans over de maat der overeenkomstige driehoeken zeggen, diend tot bewys van een *Propositie*, die gewoonlyk in de beginzelen der *Geometrie* dus voorgesteld wordt. De overeenkomstige driehoeken ABC, *abc*, zyn tot elkander, gelyk de vierkanten ABDE, *ab de*, van haare gelyk-aartige of overeenkomende zyden AB, *ab*.

Tot dit gevolg worden we geleid, door de *demonstratie*, die in de voorgaande afdeeling begreepen is; want, het vierkant ABDE, zoo veel maalen X bevattende, als *a b c d*, *x*, bevat, is het klaar, dat twee getallen der vierkanten X, die de betrekking aantoonen welke de driehoek ABC, tot het vierkant ABDE heeft; dezelfde zyn, als de getallen van de vierkanten *x*, die de betrekking aanwyzen, welke de driehoek *abc*, heeft tot het vier-

vierkant *abde*: of, het geen op 't zelfde uytkoomt, dat de driehoek ABC, tot het vierkant ABDE is, gelyk den driehoek *abc*, tot het vierkant *abde*.

Daar uyt volgd, dat, indien, by voorbeeld, de zyde AB, het dubbel was van de zyde *ab*; de driehoek ABC, het vierdubbel zyn zoude van de driehoek *acb*; en dat, zoo AB, het drievoud was van *ab*, de driehoek ACB, negenmaal grooter zoude zyn, dan de driehoek *acb*: Want, het is onmoogelyk dat AB het dubbel zoude zyn van *ab*, indien het vierkant ABDE, het vierdubbel niet was, van het vierkant *abde*.

XLV.

Fig. 1 en 2, van dezelfde plaat. Eigenschappen der overeenkomstige figuuren, getrokken uyt die der driehoeken.

Om nu van de driehoeken, tot andere figuuren over te gaan, zullen we onderstellen dat men by yder der overeenkomstige driehoeken ABD, *abd*, twee andere driehoeken ADE, en BDC, *ade* en *bdc*, byvoegd, welkers twee eerste, met de twee andere overeenkomstig zyn; en dan zal men in de geheele figuuren ABCDE, *abcde* zien.

1. Dat de hoeken A, B, C, D, E, dezelve zyn, als de hoeken *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, 't geen zeer klaar is, dewyl de eene en de andere, of overeenstemmende hoeken, van overeenkoomende driehoeken zullen zyn, of, hoeken, die van deeze overeenstemmende hoeken zyn zaamengesteld.

2. Dat de betrekking der gelyk-aartige, of, overeenstemmende zyden DE, *de*, BC, *bc*. der figuuren ABCDE, *abcde*, noodzaakelyk dezelfde zal zyn; dat is te zeggen, dat zoo P, by voorbeeld, een bepaald getal reizen in de basis AB begreepen is, en dat *p* van 's gelyken, even zoo dikwyls in *ab* bevat is; P, en *p*, ook even zoo veel maalen in de twee overeenstemmende zyden DE, en *de*, zullen begreepen zyn; want de hoeveelheid van P, die in AD bevat zal zyn, zal, ter oorzaake, van de overeenkomst der driehoeken ABD, *abd*, gelyk zyn aan de hoeveelheid van *p*, die in *ad* beslooten zal zyn; en het getal der deelen P bevat in DE; (deeze zyden als grondlynen der overeenkomstige driehoeken ADE, *ade* aanmerkende) zal het zelfde zyn, als het getal der deelen *p*, die de zyde *de* bevatten zal.

3. Dat, indien men in de twee figuuren, lynen trekt, die elkander gelykformig zyn, als CE, *ce*, of de perpendiculairen DF, *df* &c; deeze lynen altoos tot elkander dezelfde reden zouden hebben, als de gelyk-aartige zyden der twee figuuren.

Derhalven zullen de figuuren ABCDE *abcde*, in 't geheel, in alle haare deelen overeenkomstig zyn.

XLVI.

De figuur *abcde* aldus volmaakt overeen-

kom-

komſtig met de figuur ABCDE beſchreeven zynde, is het klaar, dat zoo men op nieuws een figuur wilde trekken, die geheel gelyk was aan *a b c d e*, en by gevolg ook overeenkomſtig met ABCDE, het geheel en al nutteloos zoude zyn, alle de zyden, en hoeken van *a b c d e* te meeten; en dat het genoeg zoude zyn, by voorbeeld, de drie zyden *ab*, *ea*, *bc*, en de vier hoeken *e*, *a*, *b*, *c*, te neemen, dewyl men daar mede alleen, op een zeekere wyze dezelfde figuur *a b c d e*, hertrekken kan, overeenkomſtig met AB CDE; 't geen, van het geen men alleenlyk hadt konnen vermoeden (Art. XXXVII.) een volkomen *Demonſtratie* maakt. Maar men kan verder gaan, dewyl het klaarblykelyk is, dat men altyd verſcheidene manieren, om de grootheden van hoeken, en lynen die men noodzaakelyk in een figuur meeten moet, t'zaamen te voegen, hebben zal, om daar van een ander te maaken, die aan haar evenredig is. Dog in een uytgeſtrekter verhandeling te treeden, zou den leezer vermoeijen.

XLVII.

Door Redeneeringen, overeenkomſtig met die van (Art. XLIII.) kan men ook betoogen, dat het getal der vierkanten X die de figuur ABCDE bevat, het zelfde is, als dat van de vierkanten *x*, die in de figuur *a b c d e* beſlooten zyn, en dat

De oppervlaktens der overeenkomſtige figuuren zyn tot elkander, als de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden.

dat dus de oppervlaktens der overeenkomstige figuuren, tot elkander zyn als de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden.

XLVIII.

De overeenkomstige figuuren verschillen van elkander niet, als alleenlyk in de maat door welke zy zaamengesteld zyn.

Alles wat we over de overeenkomstige figuuren hebben voorgesteld, kan tot deeze eenige, en byzondere grondregel gebragt worden, dat de overeenkomstige figuuren niet van elkander verschillen, dan in de maat door welke zy zaamengesteld zyn.

XLIX.

Om nu te beter het gebruyk te bemerken, dat men van overeenkomstige driehoeken en verminderingen maaken moet, om de maat van zulke landen te verkrygen, op welke men niet gemakkelyk zoude konnen werken; zullen we ons verbeelden, dat ABCDEF, de omtrek van een perk, of van een vyver vertoond, welkers uytgestrektheid men zal willen bepaalen. In dit geval moet men eerst, een der zyden van de figuur, (by voorbeeld) F E meeten, en onderzoeken hoe veel (*) *toises*, of *perches* deeze zyde hebben zal; vervolgens (zoodanig een maat nee-

Plaat V. Fig. 1 en 2.

(*) Een *toise* of roede doet in Vrankryk 6 voeten, integendeel is een *perche* een maat, welke gemeenlyk 18 voeten lang is, maar deese lengte is niet overal dezelfde; want daar zyn plaatsen in Vrankryk alwaar de *perche* 20 voeten lang is, en weder op anrere plaatsen 22 voet, volgens het gebied of heerlykheid.

neemende als men wil) moet men op een ſtuk bord- of ander papier een lyn *fe*, trekken, die even zoo veel deelen van de maat bevat, als 'er *toiſes* of *perches* in de lyn FE begreepen zyn, en dan zal men (de hoeken *def*, *dfe*, aan de hoeken DEF, DFE, gelyk maakende) de driehoek *edf* verkrygen; in welke men *eg*, perpendiculair op *df*, moet laaten nedervallen, waar naa men (de lynen *df*, en *eg*, door behulp der ſchaal gemeeten hebbende) beſluyt, dat 'er even zoo veel *toiſes* of *perches* in de lynen DF, en EG begreepen zullen zyn, als 'er verkleinde deelen bevat zyn in de lynen *df*, en *eg*. Dus zal men de lyn DF, met de helft van EG vermenigvuldigende, de waarde hebben van de driehoek EDF; en wanneer men op dezelfde wyze yder der andere driehoeken, DCF, BCF, ABF, meet, zal de inhoud der geheele figuur bepaald zyn.

L.

Dikwyls gebeurd het in de practyk, dat men den afſtand van een plaats, daar we ons bevinden, by voorbeeld van F, tot een andere plaats moet meeten, waar tusſchen eenig beletzel is, dat ons verhindert, om van de eene tot de andere plaats over te gaan. Zynde een nieuw *Problema*, maar welkers oploſſing alrede in de voorgaande afdeeling is opgegeeven; want, dewyl men, om DF te meeten, niet

Manier om den afſtand eener ongenaakbaare plaats te meeten.

niet anders noodig heeft gehadt, dan de gelykheid der driehoeken *def*, en DEF, is het klaar, dat, zoo men een basis EF, meet, en uyt de punten F, en E, het punt D gewaar kan worden, het *Problema* opgeloſt zal zyn; dat is te zeggen, dat men den afſtand FD gevonden zal hebben.

LI.

'T Gebruyk dat men van byzondere inſtrumenten als *b*A*c* kan maaken, dat ik (Art. XXVIII.) gezegd heb uyt twee liniaalen zaamengeſteld te zyn, die in 't punt A vereenigd zyn, en de vryheid hebben om rondom het zelve punt te konnen ronddraaijen, is veel misreekeningen onderworpen: Want dan zal de opening der hoek in de overbrenging eens veranderd worden, en dan zal de gedaante, die men aan het inſtrument verpligt is te geeven om deszelfs gebruyk te bevoordeelen, beletten, dat men het op het plan waar van men de vermindering doen zal niet kan toepaſſen.

Laaten we 'er byvoegen, dat yder nieuwe hoek BAC, die men op deeze wyze neemdt, eyſcht, dat men het inſtrument wederom op nieuws op het papier overbrengt; en dat de eenige toevlugt die men heeft om twee hoeken met elkander te vergelyken, daar in beſtaat, dat men de eene op de andere legt, zonder dat men door dit middel op een behoorlyke

wyze,

wyze, haar overeenkomst, of volstrekte grootte hebben kan.

LII.

Het was dan noodzaakelyk, een vaste maat, voor de hoeken te zoeken, gelyk men 'er een voor de lengtens hadt. Maar deeze maat is gemakkelyk te vinden geweest. Want als men, A *b* vasthoudende, eerst de zyde A *c* daar op legt; en vervolgens deeze zyde, rondsom het punt A doet ronddraaijen, is het klaar, dat, zoo men, aan het einde *c* van de beweegelyke lyn A *c*, of een pen, of een potlootje vastmaakt, 't welk de middelen zyn, om de lyn die door het punt *c* beschreeven wordt gewaarwordelyk te maaken, dat zegge ik, deeze lyn, die een boog van een Cirkel maaken zal, naauwkeuriglyk de maat van den hoek, voor yder byzondere opening der zyden A *b*, A *c*, geeven zal; dat is te zeggen, dat het, ter oorzaak van de eenvormigheid van de kromte der Cirkel, noodzaakelyk gebeuren zal, dat een dubbele, driedubbele, of vierdubbele boog *c b*, beantwoorden zal aan een dubbele, driedubbele, of vierdubbele opening van *c* A *b*.

Fig. 4.

De Maat van een hoek, is de boog der Cirkel die tusschen zyn zyden begreepen is.

LIII.

Onderstellende dan, dat den omtrek *b c d f g*, beschreeven door de geheele ronddraaijing van het punt *c*, verdeeld is in eenig bepaald getal van gelyke deelen,

len; zal het getal der deelen, begreepen in de boog die de lynen A*c* en A*b* aan elkander hegten, naauwkeuriglyk de opening deezer lynen, of de hoek *c*A*b* meeten, welke zy zaamenſtellen.

De Cirkel wordt verdeelt in 360 graaden, yder graadt in 60 minuten &c.

De Meetkundige zyn gewoon, de Cirkel in 360 deelen te verdeelen, die men graaden noemd, yder graadt in 60 minuuten, yder minuut in 60 ſeconden &c. Dus zal een hoek *b*A*c*, by voorbeeld, 70 graden, en 20 minuuten hebben, zoo de boog *bc*, die haare maat zyn zal, 70 van de 360 deelen der Cirkel, en daarenboven 20 zeſtigſte deelen, van een graad heeft.

LIV.

Fig. 5.

De Regte hoek heeft 90 graaden, en derzelver zyden ſtaan perpendiculair op elkander.

Daar uyt volgt, dat een hoek van 90 graaden, gemeenlyk, een regte hoek genaamd, die is, welkers zyden AC, en AB, het vierde deel van den omtrek BC, tuſſchen zig begrypen, en perpendiculair op elkander ſtaan.

LV.

Een ſcherpe hoek is kleinder als een Regte. Fig. 6.

Alle hoeken die kleynder zyn als eene regte hoek, of, die minder dan 90 graaden hebben, worden ſcherpe hoeken genaamdt. Zoodanige zyn de hoeken CAB, FAG, EAG.

LVI.

Een ſtompe hoek is grooter dan een Regte hoek.

In tegendeel, worden die, ſtompe hoeken genaamd, welke meer dan 90 graaden bevatten, gelyk FAB.

LVII.

LVII.

Het is klaarblykelyk, dat alle hoeken gelyk GAF, FAE, EAC, CAB, die men van een zelfde zyde op een regte lyn GB maaken kan, en die het zelfde toppunt A hebben, zaamen genoomen, aan 180 graaden, of, aan twee regte hoeken, gemeeten door den halven omtrek, gelyk zyn.

De som van alle de hoeken gemaakt van een zelfde zyde op een regte lyn, en die het zelfde toppunt hebben, bedraagt 180 graaden.

LVIII.

Van 's gelyken, is de som van alle de hoeken EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, die men rondsom het punt A, dat haar tot een gemeen toppunt diend, maaken kan, gelyk aan 360 graaden, of aan vier regte hoeken, gemeeten door den geheelen omtrek BCDEF.

Fig. 7. Alle de hoeken, die men rondsom een zelfde puntmaaken kan, zyn, zaamen genoomen, gelyk aan vier Regte.

LIX.

Na getoond te hebben, dat de hoeken, de deelen der Cirkel tot maat hebben, zullen we nu gaan zien, op wat wyze men het getal der graaden bepaalen kan, welke in een hoek die men voorneemens is te meeten, bevat zyn.

Men bediend zig hier toe van een werktuyg I, dat men een halve Cirkel noemdt: Dit werktuyg is zaamengesteld uyt twee liniaalen EAC, DAB, die een gelyke lengte hebben, elkander kruyssen in A, en welkers einden met visieren bezet zyn. De eene deezer liniaalen EC, dien men *alidada* noemdt, is beweeglyk rondsom het

Gebruyk van het werktuyg dat men een halve Cirkel noemdt, om de grootte van een hoek te meeten.

het punt A, maar de andere DB, is vast, en diend tot diameter, voor den halven Cirkel DCB, die in 180 graaden verdeeld is.

Wanneer men nu de grootte van eene hoek kennen wil, die door twee regte lynen, welke van de plaats waar in men zig bevind tot de twee voorwerpen F, G, getrokken zyn, bepaald wordt; plaatst men eerst de onbeweeglyke liniaal DAB, indiervoegen, dat het oog, zig bevindende in D, door de twee visieren D, en B, een der twee voorwerpen F, ontdekt: Vervolgens, zonder het instrument te beweegen, draait men de *alidada* tot zoo verre, dat het oog, in E geplaatst zynde, door de visieren E, en C, het andere voorwerp G, gewaar wordt; en dan zal de *alidada* op de, met graaden getekende halve Cirkel, het getal der graaden, minuten &c. aanwyzen, die in de voorgestelde hoek GAF, begreepen zullen zyn.

LX.

Gebruyk van de *Transporteur*, om een hoek te maaken, die een bepaald getal van graaden heeft.

Als men op het papier, een hoek van een bepaald getal graaden maaken wil, bediend men zig van een werktuyg K,* dat in 180 graaden verdeelt is, en *Raporteur* of *Transporteur* (overdrager) genaamd wordt. Het Centrum dezes werktuygs A, wordt gelegt op het punt der hoek welke men maaken wil, en de lyn AB, op de lyn AG, welke men voor een van de

* Fig. 9.

de zyden der hoek neemt; dan teekend men het punt C, dat aan 't getal der graaden beantwoord, die men aan den voorgestelden hoek geeven wil; eindelyk, door dit punt, uyt het Centrum A, de lyn ACO, getrokken hebbende, zal men de hoek OAG, krygen, die het geëyschte getal van graaden bevatten zal.

LXI.

Laat ons nu onderstellen, dat men, op het papier een basis FG, genomen hebbende, op deeze basis een driehoek FGH, wil maaken, die met de driehoek ABC, op een stuk lands genomen zynde, overeenkomstig is. Om het getal der graaden te weeten, die yder der hoeken CAB, CBA, bevat, bediend men zig van den halven Cirkel; men maakt vervolgens, door middel van den *Transporteur*, de hoeken HFG, en HGF, wederzyds gelyk, aan de hoeken CAB, en CBA, en dan zal men (dewyl het punt H, in het welke de zyden FH, en GH, zaamenloopen, alzo wel, als de hoek FHG, door de bewerking bepaald zal zyn) de driehoek FGH, geheel overeenkomstig hebben met de driehoek ABC.

Plaat VI. Fig. 1 en 2.

LXII.

Dewyl het van zeer veel aanbelang in de practyk is, dat (gelyk we reeds gezegd hebben) de hoeken naauwkeuriglyk gemeeten worden; moet men zig niet voldaan agten, wanneer men haar zelfs met de allervolmaakſte inſtrumenten genoomen hadt. Men moet ook het middel weeten om haare maaten te onderzoeken, en om indien het noodig is, dezelve te verbeeteren. Maar dit middel is eenvoudig, en gemakkelyk. We zullen om dit te doen zien, wederom den driehoek ABC, neemen. Men ziet, dat de grootheid van de hoek C afhankelyk is, van die der hoeken A en B; want, als men deeze hoeken vermeerderde of verminderde, zouden de lynen CA, BC, en by gevolg de hoek C, die deeze lynen tuſſchen elkander maaken, veranderen. Indien nu deeze hoek, van de grootte der hoeken A, en B, afhangt, moet men vermoeden, dat het getal der graaden in de hoeken A en D, begreepen, het getal der graaden, welke in den hoek C bevat zullen zyn, bepaalen moet, en dat men zig dus van dit onderſoek, in de bewerkingen welke men gedaan heeft, om de hoeken A en B te bepaalen, bedienen kan, dewyl men zeeker zal zyn, dat men de hoeken A, en B, wel zal gemeeten hebben, wanneer men, de hoek C, vervolgens meetende, bevind, dat hy een getal van graaden bevat, die hem een betrekkelyke overeenkomſt met de grootheid der hoeken A en B, geeven zal.

Om te zien, op wat wyze men, van de grootheid der hoeken A, en B, tot die, van den hoek C, beſluyten kan, zul-

zullen we onderzoeken, wat 'er aan deeze hoek gebeuren zoude, indien de lynen AC, en BC, meer tot elkander naderden, of, verder van elkander afweeken. Laat ons (by voorbeeld onderſtellen) dat BC, rondsom het punt B, draaijende, zig verwyderde van AB, om tot BE te naderen; Het is klaar, dat geduurende het ronddraaijen van BC, den hoek B, geduurig wyder; en den hoek C, in tegendeel, meer en meer, naauwer worden zal; 't geen aanſtonds zoude konnen doen vermoeden, dat in dit geval, de vermindering van den hoek C, gelyk zoude zyn, aan de vermeerdering van den hoek B; en dat dus de ſom der drie hoeken A, B, C, altoos dezelfde zoude zyn, welk ook de neiging der lynen, AC, BC, op de lyn AE, was.

LXIII.

Maar dit vermoede beſluyt, brengt haar *demonſtratie* mede; want als men ID, parallel aan AC trekt, zal men in de eerſte plaats zien, dat de hoeken ACB, en CBD, ſchrikshoeken genaamd, gelyk zullen zyn, Dit is zeer klaarblykelyk, nadien de lynen AC, en IB, parallel zynde, ook gelykelyk zullen neigen op CBO, en dat dus, den hoek IBO, gelyk zal zyn, aan de hoek ACB. Maar de hoek IBO, zal ook gelyk zyn aan den hoek CBD, dewyl de lyn ID, niet meer van de eene, dan van de andere zyde op CO,

Fig. 4. De ſchrikshoeken zyn die omgekeerde hoeken, welke van weerzyden eener regte lyn, op twee

parallelle lynen vallende, gemaakt worden.

CO, hellen zal. En derhalven zal de hoek DBC, gelyk aan de hoek EBO zynde, ook aan zyn schrikshoek ACB gelyk zyn.

Deeze hoeken zyngelyk.

LXIV.

In de tweede plaats zal men zien, dat de hoek CAE, ter oorzaak van de parallelle lynen CA, en DB, gelyk zal zyn aan den hoek DBE. Derhalven zouden de drie hoeken der driehoeken naast elkander gesteld, en met haare toppunten in 't punt B, vereenigd konnen worden, en dan zoude men zien, dat de drie hoeken DBE, CBD, en CBA, die aan de drie hoeken CAB, ACB, CBA, gelyk zouden zyn, ook aan twee regte zouden gelyk zyn (Art. LVII.) en, gelyk alles wat we hier voorstellen, gelykelyk op alle driehoeken kan toegepast worden, zal men van deeze algemeene eigenschap der driehoeken verzekerd zyn: dat de Som van de drie hoeken eener driehoek bestendiglyk dezelfde is, en dat ze altoos aan twee regte, of 't geen op 't zelfde uytkomt, aan 180 graaden gelyk is.

De Som der drie hoeken eener driehoek, is gelyk aan twee regte.

LXV.

Om de waarde derhalven, van de derde hoek eener driehoek, wanneer men de beide andere gemeeten heeft, te bepaalen, moet men van 180 graaden, dat getal aftrekken, dat de twee hoeken, zaamen bevatten zullen: zynde een eigengenſchap, die een zeer gemakkelyke manier uytleverd, om de maat, van de drie hoeken eener driehoek te onderzoeken, en die men teffens zien zal dat van een oneindig nut is, in het geen men vervolgens zal voorſtellen. Laaten we ons hier vergenoegen om alleen de onmiddelykſte gevolgen daar uyt te trekken.

LXVI.

Een driehoek kan niet meer, dan een Regte hoek hebben; ook kan ze niet meer, dan een ſtompe hoek hebben.

LXVII.

Als een der drie hoeken van eene driehoek regt is, is de ſom der twee andere, altoos gelyk aan twee regte.

Deeze twee voorſtellen zyn uyt zig zelven zoo klaar, dat ze geen betooging noodig hebben.

LXVIII.

De uytwend ge hoek, eener driehoek, is gelyk aan de twee tegengeſtelde inwendige.

Indien men een der zyden van den driehoek ABC verlengt; de zyde AB, by voorbeeld; zoo zal de uytwendige hoek CBE, gelyk zyn aan de twee tegengeſtelde inwendige BCA, CAB: want, als men by de hoek CBA, of, de twee hoeken BCA, CAB, of, de hoek CBE voegd, zal de ſom, altoos aan 180 graaden, of aan twee regte hoeken gelyk zyn (Art. LXIV.)

LXIX.

Fig. 5. Een der hoeken, van eene gelykbeenige driehoek ABC, kennende, kend men ook de twee andere.

Een hoek van eene gelykbeenige driehoek geeft de twee andere.

Wanneer de hoek in 't toppunt A, bekend zy, is het klaar, dat, als men het getal der graaden, die deeze hoek begrypt, van 180, welke de maat der drie hoeken van eene driehoek zyn, aftrekt, de helft van de overblyvende som, de maat zal zyn van yder der hoeken, B, C, die op de basis zyn.

Indien een der twee hoeken op de basis, namentlyk, B, C, ons bekend was, zoude het dubbel zyner waarde, van 180 graaden afgetrokken zynde, den hoek geeven, die in het toppunt A is.

LXX.

De hoeken eener gelykzydige driehoek, zyn yder van 60 graaden.

Gelyk eene gelykzydige driehoek niet anders is, dan een gelykbeenige, in welke yder zyde voor basis dienen kan, is het klaar, dat zyne drie hoeken, noodzaaklyk gelyk zyn, en dat ze yder 60 graaden, dat is, een derde van 180 graaden uytmaaken.

LXXI.

Beschryving van de Hexagone.

Hier uyt kan men ligtelyk de beschryving van de *Hexagone*, of zeszydige veelhoek trekken, welke we in Art. XXIV, beloofd hadden.

Want om eene lyn te vinden die den om-

omtrek in zes gelyke deelen verdeeld, moet deeze lyn de pees eener boog van 60 graaden zyn, dat een zesde gedeelte van 360 graaden de waarde der geheele omtrek is. Ondersteld dan zynde dat AB, deeze pees is, en dat men van het Centrum I tot de eindens A en B, de straalen AI, en IB, getrokken heeft, zal de hoek AIB van 60 graaden zyn, en dewyl de twee zyden AI, en IB, gelyk zullen zyn, zal ook de driehoek AIB, gelykbeenig zyn. Derhalven de hoek die in het toppunt is, van 60 graaden zynde, zal ook ieder der twee andere hoeken, van 60 graaden, zynde de helft van 120, zyn. Derhalven (Art. LXX.) zal de driehoek AIB, gelykzydig, en AB, aan den straal der Cirkel gelyk zyn. Waar uyt volgd, dat men om een *Hexagone* te beschryven, de passer eene wydte moet geeven, welke aan de straal gelyk is, haar vervolgens zes maal, op den omtrek brengen, en dan zal men de zes zyden der *Hexagone* hebben.

LXXII.

De *Hexagone* ABCDEF, beschreeven zynde, zal men gemakkelyk de *dodecagoon*, of twaalfzydige veelhoek konnen beschryven.

De helft der hoek, in 't Centrum van de *Hexagoon*, geeft den hoek in 't Centrum van de *Dodecagoon*.

Ten dien einde, moet men den boog AKB, of de hoek AIB, in twee gelyke deelen verdeelen, en de lyn AK, de pees van de helft der boog AKB, zal een der zyden van de *dodecagoon* zyn.

 LXXIII.

LXXIII.

Een boog in twee gelyke deelen, te verdeelen.

Maar, om de boog AKB, in twee gelyke boogen AK, en KB te verdeelen, moet men op dezelfde wys te werk gaan, als of men de pees AB, in twee gelyke deelen wilde verdeelen, dat is, men moet uyt de punten A en B, als Centrums, met eenige opening des passers de boogen MLN, OLP beschryven, en uyt het punt L, de snyding der twee boogen, tot het Centrum I, de lyn LI trekken, welke de boog AKB, en de pees AB, in tweën verdeelen zal.

LXXIV.

Beschryving der *polygoonen* van 24, 48 en meer zyden.

Als men de voorgaande manier volgd, en de boog AK, in twee gelyke boogen verdeeld, zal de pees van den een of ander deezer boogen, de zyde eener *polygoon* van 24 zyden zyn. Op dezelfde wyze zal men *polygoonen* van 48, 96, 192 &c. zyden krygen.

LXXV.

Beschryving der *Octagoon*.

Om nu een *Octagoon*, dat is te zeggen, een *polygoon* van acht zyden te beschryven, begind men, met in den Cirkel, een vierkant te trekken; 't geen men gemakkelyk doen kan, wanneer men, naar alvoorens twee diameters AIB, CIE, die elkander met regte hoeken doorsnyden, getrokken te hebben, derzelver beide eindens, door de lynen AC, CB, BE, AE, zaamenvoegd.

Want

Want ter oorzaak van de Regelmaatigheid der Cirkel, en gelykheid der vier hoeken welke door de perpendiculairen AIB, CIE, gemaakt worden, zullen de vier zyden AC, CB, BE, EA noodzaakelyk gelyk zyn, en ook gelykelyk tot elkander neigen; 't geen alleen aan het vierkant eigen is.

Het vierkant beschreeven zynde, moet men door de voorgaande manier, yder der boogen CKB, BLE &c. in twee gelyke deelen verdeelen, en dit zal de *Octagoon* CKBLEMAN geeven.

En der *polygoonen* van 16, 32, en meer zyden.

Als men nu, yder der boogen CK, KB &c. in 2, in 4, in 8, of meer gelyke deelen verdeelde, zoude men *Polygoonen* van 16, 32, 64, en meer zyden krygen.

BEGINZELEN DER GEOMETRIE.

TWEEDE DEEL.

Van de Meetkundige manier om Regtlynsche figuuren met elkanderen te vergelyken.

INdien men oplettende geweest is, in het geen we tot hier toe gezegd hebben, om aan te toonen op welk een wyze men tot het meeten der landen gekoomen is, heeft men ongetwyffeld moeten gewaar worden, dat de gesteldheid der lynen, ten opzigt van elkanderen, aanmerkingen verschaften, die door zig zelfs, en onafhankelyk van het nut welk zy in de practyk hadden, alle onze oplettenheid waardig waren; en het is te denken dat deeze zelf-

zelfde aanmerkingen, de eerste meetkundige aangespoord hebben, om hunne ontdekkingen hoe langs hoe meer voort te zetten; want het zyn niet alleenlyk de behoeftens welke de menschen aanspooren, de weetgierigheid is dikwyls een alzoo groote beweegreden om haar onderzoek op te wekken.

't Geen ook veel tot de vorderingen der Meetkunde heeft moeten toebrengen, is de smaak welke men natuurlyk voor deeze gestrenge verdeeling heeft, zonder welke het verstand nooit volkomenlyk voldaan is.

Wanneer men dus, de figuuren meetende, gewaar geworden is, dat in oneindig veel gevallen, de schaalen en halve Cirkels niet anders dan de naaste groottens der lynen en hoeken gaven, heeft men Leerwyzen gezogt, die het gebrek deezer werktuygen vervullen konden.

Wy zullen hier ter plaatse, de Regtlynsche figuuren wederom op nieuws hervatten; maar in de bewerkingen, welke wy doen zullen om haare nette overeenkomst te ontdekken, zullen we ons alleen van de liniaal, en passer bedienen.

Dikwyls is men verpligt, in een zelfde figuur, verscheide figuuren te verzaamelen, die aan dezelve gelykvormig zyn, of, om een figuur in een andere van dezelfde soort te veranderen; 't geen men zeer gemakkelyk doen kan, wanneer men eerst de Regthoeken behandeld, de-

wyl

wyl alle Regtlynſche figuuren niet anders zyn, dan verzaamelingen van driehoeken, en dat yder driehoek, de helft van een Regthoek is, die dezelfde baſis, en hoogte heeft.

I.

Om de Regthoeken te vergelyken, moet men een Regthoek in een andere konnen veranderen, die dezelfde oppervlakte maar een verſchillende hoogte heeft. Want wanneer twee Regthoeken, veranderd worden in twee andere van dezelfde hoogte, zullen ze niet anders dan door haare grondlynen verſchillen; de grootſte zal die zyn, welke de grootſte baſis heeft; en hy zal op dezelfde wyze de kleindere bevatten, als zyne baſis, die, van de kleinſte Regthoek bevatten zal; 't geen men gemeenlyk dus uytdrukt: Twee Regthoeken die dezelfde hoogte hebben, zyn in dezelfde Reden, als haare grondlynen.

II.

Om deeze twee Regthoeken t' zaamen te voegen, moet men den een naaſt den andere zetten.

III.

Het zal niet moeijelyker zyn, de kleinſte van de grootſte af te trekken.

IV.

En om een Regthoek in een bepaald ge-

getal van gelyke regthoeken te verdeelen, moet men zyne basis, in een gelyk getal van gelyke deelen snyden, vervolgens perpendiculairen op de punten der verdeeling opregten.

V.

Indien men zig dan voorsteld, de Regthoek ABCD, in een andere, BFEG, die dezelfde oppervlakte heeft, en welkers hoogte BF is, te veranderen, moet men aanmerken, dat dewyl de som zyner inhoud het vermenigvuldigde zal zyn van zyne hoogte met zyn basis, de gezogte Regthoek BFEG, welkers hoogte grooter zal zyn, dan BC, een kleinder basis heeft dan AB: dat is te zeggen, dat indien BF, by voorbeeld, het dubbel van BC is, BG, niet meer, dan de helft van AB, moet zyn.

Plaat VII. Fig. 1. Manier om eene Regthoek in eene andere, welke een gegeeve hoogte heeft, te veranderen.

Zoo BF, het drievoud van BC was, zou BG, niet meer, dan de derde van AB zyn.

Men zou van 's gelyken zien, dat zoo BF, in plaats van BC, een nauwkeurig getal maalen te bevatten, zulks alleenlyk met gebrookene als by voorbeeld tweemaal en een derde deed, de Regthoek BFEG, niet gelyk zoude konnen zyn aan de Regthoek ABCD, of deszelfs basis zou ook twee en een derde maal in de basis AB, bevat moeten zyn. En het zal in het algemeen ligt te zien zyn, dat 'er om de twee Regthoeken ABCD, BF

EG,

EG, gelyk te doen zyn, vereyst wordt, dat de basis BG, van den een, in de basis van den ander bevat wordt, gelyk de hoogte BC, in de hoogte BF.

Niets schiet 'er derhalven meer over, dan de lyn AB, indiervoegen te verdeelen, dat AB, zy tot GB, gelyk BF, tot BC; 't geen geschieden kan (I Deel, Art. XLI.) Wanneer men de lyn FA, en uyt het gegeeven punt C, de parallelle CG trekt.

VI.

Tweede manier, om een Regthoek, in een ander te veranderen, welkers hoogte gegeeven zy. Fig. 2.

Om de Regthoek ABCD, in een andere Regthoek BFEG, te veranderen, die een gegeeven hoogte BF heeft, kan men een minder natuurlyker maar veel gemakkelyker Leerwyze dan de voorige, gebruyken. De lyn AD, verlengd hebbende, tot datze in I, de regte FEI, die uyt het punt F, parallel aan AB, getrokken is, ontmoet; moet men de diagonaal BI, en uyt het punt O, daar ze de zyde DC, ontmoeten zal, GOE, parallel aan FB, trekken; en de regthoek BFEG, zal aan den regthoek ABCD, gelyk zyn.

Om dit te bewyzen, zal het genoeg zyn te doen zien, dat, wanneer men van de Regthoeken ABCD, BFEG, het gemeene deel OCBG, aftrekt, de Regthoek ADOG, gelyk zal zyn, aan den Regthoek EOCF.

Indien men nu, oplettend is, op de gelyklykheid der twee driehoeken IBF, IBA, zal men gewaar worden, dat, wanneer men van deeze driehoeken, gelyke grootheden aftrekt, de reſten gelyk zullen zyn. Maar de driehoek IAB, zal de Regthoek ADOG, worden, zoo men de twee driehoeken IDO, OGB, daar van aftrekt; van 's gelyken, zal de driehoek IBF, de Regthoek EOCF, worden, alleen door het aftrekken der driehoeken IEO, OBC, die aan de twee eerſte gelyk zyn. Derhalven zullen de twee Regthoeken ADOG, EOCF, het overſchot der twee driehoeken, gelyk zyn aan elkander, alzoo wel als de Regthoeken ABCD, BFEG.

VII.

Deeze tweede manier om een Regthoek in een andere te veranderen, beveſtigd de grondregel die de eerſte onderſteld, en dat ons zou hebben konnen toeſchynen niet anders dan op een eenvoudig beſluyt gegrond te zyn.

Men betoogd ſtiptelyk, dat, als twee Regthoeken gelyk zyn, de baſis van de eerſte, tot die der tweede is, gelyk de hoogte van de tweede tot de hoogte der eerſte.

Uyt de gelykheid der twee Regthoeken ABCD, BFEG, hadt men beſlooten, dat AB, moeſt zyn, tot BG, gelyk BF, tot BC; 't geen het zelfde is, dat men nu door de voorgaande afdeeling bewyzen kan.

Want de driehoeken IAB, en OGB, klaarblykelyk overeenkomſtig zynde, zal de baſis AB, van de groote, tot de baſis GB van de kleine zyn, gelyk de hoogte te IA, tot de hoogte OG, of, als haare gelyke BF, tot BC, derhalven zal AB, tot GB, gelyk BF, tot BC, zyn, gelykvormiglyk aan het beginzel van de vyfde afdeeling.

VIII.

Zoo vier lynen, dusdanig zyn, dat de eerste is tot de tweede, gelyk de derde tot de vierde, zal de Regthoek gemaakt, door de eerste, en de vierde gelyk zyn aan die, welke de tweede, en derde maaken.

Uyt de manier welke men opgegeeven heeft, om te betoogen, dat uyt de gelykheid der twee Regthoeken ABCD, BFEG, volgt, dat de hoogte BF, tot de hoogte BC is, gelyk de basis AB, tot de basis BC, zoude men ook betoogen kunnen, dat wanneer vier lynen zodanig zyn, dat de eerste is tot de tweede, gelyk de derde tot de vierde, de Regthoek die de eerste, en de vierde deezer lynen voor haare hoogte en basis zoude hebben, gelyk zoude zyn aan den Regthoek, welke de tweede, en derde voor basis en hoogte hebben zouden.

IX.

Vier grootheden, van welke de eerste, tot de tweede, gelyk de derde, tot de vierde is, worden gezegd, een evenredigheid uyt te maaken.

Wanneer vier grootheden, by voorbeeld, de voorgaande lynen BF, BC, AB, BG, dusdanig zyn, dat de eerste is tot de tweede, gelyk de derde tot de vierde, zegt men, dat deeze vier grootheden evenredig zyn, of dat dezelve een evenredigheid uytmaaken. Aldus zyn de getallen 6, 9, 18, 27 evenredig, om dat 6 zoo dikwyls in 9, als 18, in 27, begreepen is. Het is op dezelfde wyze gelegen met 15, 25, 75, 125, &c.

De

X.

De eerſte, en de vierde, der vier grootheden van eene evenredigheid, worden uyterſte termen, of eenvoudiglyk de uyterſte genaamd; de tweede en de derde, noemd men middenſte termen, of eenvoudiglyk, de middenſte.

Van vier termen eener evenredigheid, worden de eerſte en vierde de uyterſte, en de tweede en derde, de middenſte genoemd.

Wanneer men zig van de voorgaande bepaalingen bediend, is het klaarblykelyk, dat de voorſtellen, welke in de VII en VIII afdeeling begreepen zyn, dus verklaard zullen worden.

XI.

Wanneer vier grootheden evenredig zyn, is het vermenigvuldigde der uyterſten, gelyk, aan het vermenigvuldigde der middenſten.

In een evenredigheid, is het vermenigvuldigde der uyterſte, gelyk aan het vermenigvuldigde der middenſte.

XII.

Als vier grootheden dusdanig zyn, dat het vermenigvuldigde der uyterſtens, gelyk is, aan het vermenigvuldigde der middenſten, zullen deeze vier grootheden evenredig zyn.

Als het vermenigvuldigde der uyterſtens gelyk is, aan het vermenigvuldigde der middenſte, zyn die vier grootheden evenredig.

XIII.

De twee voorgaande afdeelingen moeten zeer zorgvuldig in agt genoomen worden; zy zyn van een zeer groot gebruyk: Onder anderen, wordt 'er de betooging dier rekenkundige regel uytgetrokken, welke men, den regel van drieën noemd. Om een denkbeeld deezer regel te geeven, Hier uyt, wordt de regel van drieën getrokken.

ven, zullen we een voorbeeld ter neder ſtellen; dit dog, is de eenvoudigſte manier, om zig te doen verſtaan.

Laat ons onderſtellen, dat 24 Werklieden, in een geſtelde tyd, een werk van 30 *toiſes* gemaakt hebben; de vraag is, hoeveel 64 arbeiders, in eene gelyke tyd maaken zullen.

Om dit vraagſtuk op te loſſen, is het klaarblykelyk, dat men een getal moet vinden, 't welk tot 64, in dezelfde rede is, als 30, tot 24. Nu, volgens het geen we gezien hebben, zal dit zulk een getal zyn, welkers vermenigvuldigde, met 24, gelyk zal zyn, aan het vermenigvuldigde van 30, met 64. Maar het vermenigvuldigde van 30, met 64, is 1920. Derhalven zal het gezogte getal, dat gene zyn, 't welk, met 24 vermenigvuldigd zynde, 1920 geeven zal. Nu, door een weinig kennis, die men van de rekenkundige bewerkingen heeft, kan men ligtelyk begrypen dat, dit getal, de *quotient* der deeling van 1920, door 24, dat is, 80, zyn moet.

Manier, om de vierde term eener evenredigheid te vinden, van welke de drie eerſte gegeeven zyn.

In 't algemeen moet men, om de vierde term eener evenredigheid, (van welke de drie eerſte gegeeven zyn) te vinden, het vermenigvuldigde van de tweéde en derde neemen, en het zelve door de eerſte term der evenredigheid, deelen.

XIV.

Een voorbeeld zoo eenvoudig, als dat, wel-

welke we gekoozen hebben, is misschien niet genoeg, om de noodzaakelykheid der voorgaande Leerwyze te doen bevatten. Het gezond verstand alleen zoude in staat zyn, het geëyschte getal te vinden. Men ziet dat 30, het getal van 24, een vierde te boven gaat, en dat derhalven het gezogte getal, ook een vierde grooter, dan 64 zyn moet: 't geen 80 geeft. Maar men heeft gevallen, waar in men een geruymen tyd, na de overeenkomst der twee eerste getallen eener evenredigheid zoude konnen zoeken.

By voorbeeld, men wil een vierde term hebben, die aan drie getallen 259, 407, 483 evenredig is.

Om dit getal, door de voorgaande Leerwyze te vinden, moet men 483, met 407, vermenigvuldigen, en 196581, dat het *product* daar van is, door 259 deelen; dat voor de vierde gezogte term, 759, geeven zal.

Indien men, om deeze term te vinden, op een andere wyze hadde te werk gegaan, zoude zulks niet anders, dan by gissing konnen zyn. Men zoude by voorbeeld, wel hebben konnen ontdekken, dat 148, het verschil van 407 en 259, vier zevende deelen van 259 bevat; en dat men van 's gelyke tot 483, het getal 276, dat vier zyner zevende deelen bevat, voegen moest. Maar de algemeenheid, en zekerheid der voorgaande manier, bevryd ons altoos van de moeijelykheid der giſſingen; die zelfs in veele gevallen nutteloos konnen zyn.

XV.

Wanneer men twee vierkanten by elkander voegen moeſt, kan haare vergaaring op dezelfde wyze, als die van twee regthoeken gedaan worden, dewyl de vierkanten, niet anders, dan regthoeken zyn, welke een gelyke baſis, en hoogte hebben. Men moet derhalven, een deezer vierkanten, by voorbeeld het kleinſte, in een regthoek veranderen, welke de zyde van het groote tot hoogte heeft, als wanneer deeze twee vierkanten, niet meer dan een regthoek maaken zullen. Men zoude van 's gelyken de hoogte van het kleine vierkant, of eenige andere willekeurige hoogte, aan alle beide geven konnen; maar het geen men weinig miſſen kon zig voor te ſtellen, wanneer men aldus, twee vierkanten, tot een eenige figuur brengen wilde, was, een vierkant, aan twee andere gelyk te maaken. Een *Problema*, van welke het zeer gemakkelyk was, de volgende oploſſing te vinden.

XVI.

Fig. 3. Een vierkant, het dubbel van een ander te maaken.

Laat ons in de eerſte plaats, onderſtellen, dat de twee vierkanten, ABCD, CBFE, van welke men voorneemens is, een eenig vierkant te maaken, aan elkander gelyk zyn; zoo is het ligtelyk te zien,

zien, dat, wanneer men de *diagonaalen*, AC, en CF trekt, de driehoeken ABC, en CBF, t'zaamen, de waarde van een vierkant zullen uytmaaken. Derhalven, zal men, door het overbrengen der twee andere driehoeken DCA, en CEF, beneden AF, het vierkant ACFG, maaken, welkers zyde AC, den *diagonaal* zal zyn, van het vierkant ABCD; en welkers oppervlakte gelyk zal zyn, aan die, der twee voorgeſtelde vierkanten; 't geen niet noodig heeft, nader betoogd te worden.

XVII.

Laaten we nu onderſtellen, dat men een vierkant wil maaken, 't welk aan de ſom der ongelyke vierkanten, ADC *d*, CFE *f*, gelyk is: of, 't geen op het zelfde uytkomt, dat men voor heeft, de figuur ADFE *f d*, in een vierkant te veranderen.

Fig. 4. Een vierkant te maaken, dat aan twee andere, t'zaamen genomen, gelyk is.

De leiding van de voorgaande manier opvolgende, moet men zien, of het niet mogelyk is, in de lyn DF, zulk een punt H, te vinden, dat

1°. Wanneer men de lynen AH, en HE trekt, en de driehoeken ADH, EFH, zoo verre om de punten A en E, doet draaijen, dat ze de ſtellingen A *d b*, E *f b*, hebben; deeze twee driehoeken zig in *b*, vinden t'zaamengevoegt. en

2°. Dat de vier zyden AH, HE, E *b*, *b* A, *b* A, gelyk zyn, en perpendiculair op elkander ſtaan.

Dit punt H nu, zal gevonden worden, wanneer men DH, aan de zyde CF, of EF gelyk maakt. Want uyt de, tusſchen DH, en CF onderſtelde gelykheid, volgt voor eerſt, dat, zoo men ADH, indiervoegen rondſom zyn hoek A doet draaijen, dat men daar aan de ſtelling A *d b* geeft, het punt H, in *b* gekoomen zynde, in een afſtand van C zyn zal, die gelyk is aan DF.

Uyt dezelfde, tuſſchen DH, en CF onderſtelde gelykheid, volgt, ook, dat HF, gelyk zal zyn aan DC, en dat dus, de driehoek EFH, om de ſtelling E*f b* te neemen, rondſom E draaijende, het punt H, in het zelfde punt *b*, zal koomen; in een gelyke afſtand van C, als DF, zynde.

Derhalven zal de figuur ADFE *d f*. in een vierzydige figuur AHE*b*, verandert zyn. Alles wat 'er derhalven nu meer vereyſcht wordt, is te zien, of de vier zyden gelyk zullen zyn, en perpendiculair op elkander ſtaan.

Maar de gelykheid deezer vier zyden, is klaarblykelyk; dewyl A*b*, en *b* E, dezelfde zullen zyn als AH, en HE; en dat de gelykheid der twee laatſte (overmits DH, gelyk is aan CF, of FE) maaken zal, dat de twee driehoeken ADH, HEF, gelyk en overeenkomſtig zullen zyn.

Niets

Niets schiet 'er derhalven, meer over, dan te zien, of de zyden der figuur AH E*b*, regte hoeken zullen maaken; en hier van kan men zig gemakkelyk verzeekeren, door aan te merken, dat de zyde AH, geduurende dat HAD, rondsom A, draait, om te koomen in *b*A*d*, dezelfde beweeging, als de zyde AD moet maaken. Maar de zyde AD, zal, wanneer ze A*d* wordt, een regte hoek, DA*d* maaken. Derhalven zal de zyde AH, ook een regte hoek, HA*b*, maaken, wanneer ze A*b* wordt.

Wat de andere hoeken, H, E, *b*, betreft; het is onbetwistelyk, dat ze regte hoeken zullen maaken. Want het zou niet mogelyk konnen zyn, dat een figuur, door vier gelyke zyden bepaald, een regte hoek hadt, zonder dat de drie andere van 's gelyken, regte waren.

XVIII.

Wanneer men aanmerkt, dat de twee vierkanten ADC*d*, CFE*f*. gemaakt zyn, den een op AD, zynde de middelbaare zyde der driehoek ADH; den ander op EF, gelyk aan DH, zynde de kleyne zyde der zelfde driehoek ADH; en dat het vierkant AHE*b*, gelyk aan de twee andere, op de groote zyde AH, die men gemeenlyk *Hypothenusa* noemdt, beschreeven is; zal men wel haast deeze beroemde eigenschap der regthoekige driehoeken ontdekken, dat het vierkant der

De Hypothenusa eener regthoekige driehoek, is zyne grootste zyde.

En het vierkant der zyde, is gelyk aan de som, der vierkanten, die op de twee andere gemaakt zyn.

der *Hypothenuse* (schuynse) gelyk is, aan de som der vierkanten, die op twee andere zyden gemaakt zyn.

XIX.

Fig. 5 en 6.

Waar uyt, een eenvoudige manier, om twee vierkanten, tot eeneenige te brengen, getrokken wordt.

Indien men derhalven van twee vierkanten HDKL, ABCD, niet meer, dan een enkel vierkant maaken wil, is het nutteloos, om den een op zyde van den ander te stellen, en hun te ontbinden op de wyze als in de XVII afdeeling gedaan is. Het is genoeg, wanneer men haare zyden AD, DH, in diervoegen plaatst, dat ze een regte hoek maaken; en vervolgens, de lyn AH, trekt; dewyl als dan deeze lyn, de zyde van het gezogte vierkant, AHIE, zyn zal.

XX.

Fig. 7.

Fig. 8. en 9.

Fig. 10. Zo de zyden eener regthoekige driehoek, aan drie overeenkomstige figuuren tot bazen dienen, zal de figuur, die op de *Hypothenusa*

Zoo men twee overeenkomstige figuuren DAFGM, DHPON hadt, en dat men zig voorstelde, daar van, eene derde te maaken, welkers oppervlakte, aan de twee andere, zaamen genoomen, gelyk was; behoefd men alleenlyk, de bazen AD, HD, deezer figuuren, op de beyde zyden van een regte hoek ADH, te leggen, en de *Hypothenusa* AH, van den driehoek ADH, zal de basis, van de geëysche figuur zyn.

Om de reden daar van te weeten moet men zig verbeelden, dat de vierkanten ABCD, DHKL, AHIE, op de grondlynen der drie overeenkomstige figuuren ge-

gemaakt zyn, en dan zal men aanſtonds, door de XVIII, afdeeling zien, dat het vierkant AHIE, alleen, zoo veel bedraagen zal, als de beide andere vierkanten ABCD, DHKL. Nu zyn, door de XLVII afdeeling, van het eerſte deel, de overeenkomſtige figuuren, tot elkander, gelyk de vierkanten, hunner gelyk-aartige zyden. Derhalven zullen de drie vierkanten ABCD, DHKL, AHIE, gelyke gedeeltens zyn, van de figuuren DAFGM, DHPON, AHQRS.

gemaakt is, gelyk zyn, aan de twee andere, zaamen genoomen.

Hier uyt is het nu gemakkelyk, te beſluyten, dat de figuur AHQRS, zoo veel als de twee andere bedraagen zal. Want, laaten we by voorbeeld, onderſtellen, dat yder deezer vierkanten, de helft was van de figuur, in welke zy begreepen zouden zyn; zoo zal niemand twyffelen, of de figuur AHQRS, is aan de twee andere gelyk, dewyl zyne helft alleenlyk, zoo veel als de helften der twee figuuren DHPON, DAFGM bedragen zal. Het zoude het zelfde zyn, als de vierkanten ABCD, DHKL, AHIE, de twee derdens, de drie vierdens &c., der figuuren DAFGM, DHPON, en AHQRS waaren.

XXI.

Verſcheide overeenkomſtige figuuren, tot eene eenige figuur te brengen.

Wanneer men zig voorſtelde, om drie, vier, of meer overeenkomſtige figuuren, of, 't geen op het zelfde uytkoomt, drie, vier, of meer vierkanten, by elkander te voegen, zal de manier altoos dezelfde zyn. Als men by voorbeelt drie daar van, by elkander wilde voegen, moeſt men eerſt een vierkant maaken, dat aan de twee eerſte gelyk was; vervolgens moet men by dit nieuwe vierkant, het derde voegen; en daar door zal men een vierkant hebben, dat aan de drie voorgeſtelde vierkanten gelyk is.

XXII.

Hier uyt volgd, dat, als men een vierkant wilde maaken, dat vyf, zes, en meermaalen grooter, dan een ander was, het genoeg zoude zyn, tot oploſſing van dit *Problema*, en zelfs van zyn tegendeel de voorgaande manier te volgen; dat is, om een vierkant te maaken dat niet anders, dan het vyfde, zesde &c. deel van een voorgeſteld vierkant was; Het geen alleenlyk vereyſchen zou, dat men zig de manier om tot drie gegeevene lynen een vierde evenredige te vinden, herinnerde. Maar we zullen in het derde deel van dit werk, een directer en gemakkelyker Leerwyze, om dit zoort van werkſtukken op te loſſen, voorſtellen.

XXIII.

De vergaaring der overeenkomſtige figuuren, verſchaft een kragtig bewys, van de noodzaakelykheid om het gebruyk der ſchaalen agter te laaten, wanneer men de bewerkingen op eene wyze, die ge-

geſtrengelyk betoogd kan worden, doen wil.

Laaten we by voorbeeld onderſtellen, dat men een vierkant moeſt maaken, dat het dubbel van een ander was. In dit geval zouden dezulke, welke de in de XVI Afdeeling aangeweezen Leerwyze niet kundig waren, waarſchynlyk op de volgende manier te werk gaan.

Zy zouden de zyde van het gegeeven vierkant in een groot getal van deelen verdeelen; in 100 deelen by voorbeeld; vervolgens, 100 met 100 vermenigvuldigende, zouden zy voor de waarde van het vierkant 1000 vinden, dat wederom 20000 voor die, van het geëyſchte vierkant voort zou brengen.

Maar uyt de waarde van dit vierkant, zoudenze de manier niet konnen trekken om het zelve te beſchryven; hier toe zou vereyſcht worden, dat ze zyne zyde door eenig getal uytgedrukt hadden, en dat dit getal zoodanig was, dat, wanneer men het in zig zelfs vermenigvuldigde, dat is te zeggen door het te *quadrateren*, het *product* daar van, 20000, zoude uytmaaken.

Het *product*, dat uyt de vermenigvuldiging van een getal, in zig zelfs voortkomt, is het vierkant van dit getal.

Dit getal nu, dat zy daar toe noodig zouden hebben, zouden zy te vergeefs op een ſchaal zoeken, welkers deelen, honderſte deelen der zyde van het eerſte vierkant zyn zouden; want 141, in zig zelfs vermenigvuldigt, zoude 19881, en 142, 20164 voortbrengen; het geen wederzyds

zyds

zyds van het getal, dat zy zouden moeten vinden, af zou wyken.

Misschien zouden zy konnen denken, dat, wanneer ze de zyde van het gegeeven vierkant, in meer dan 100 deelen verdeelden, zy dan een bepaald getal deezer deelen voor de zyde van het vierkant, dat het dubbel des eersten is, vinden zouden; maar welke beproevingen zy ook doen konden, zouden zy altoos bevinden dat zy te vergeefs twee getallen zogten, waar van een de zyde, of volgens de gewoone taal, de wortel van een vierkant, en het andere de zyde, of de wortel van het dubbele vierkant zoude uytdrukken.

De vierkante wortel, is het getal, dat in zig zelfs vermenigvuldigd, het vierkant voortbrengt.

XXIV.

Een getal is het volkomen vermeerderd getal van een ander, als het eerste in het laatste verscheiden maalen nauwkeurig begreepen is.

Men betoogd inderdaad in de *Arithmetica*, dat, zoo twee getallen, geen volkomen vermeerderde getallen (*multiplex*) van malkander zyn, dat is, zoo het eene het ander geen volkomen getal maalen bevat, het vierkant des grootsten ook geen volkomen vermeerderd getal van het vierkant des kleynsten zal zyn. Aldus zal, by voorbeeld, dewyl 5 niet naauwkeurig door 4 gedeeld kan worden, desselfs vierkant 25 ook niet door 16 (zynde het vierkant van 4) gedeeld kunnen worden.

Indien men derhalven twee getallen, (waar van het eene grooter als het andere, en nogtans kleinder als het dubbel is), is), *quadrateerd*, zal men door deeze bewerking, twee andere getallen bekoomen, waar van het eene, kleinder als het viervoud des anderen zyn zal, zonder nogtans, nog het tweevoud, nog het drievoud te konnen zyn. Als men derhalven, de zyde van een vierkant in een willekeurig getal van deelen verdeeld, zal de zyde van het dubbel vierkant, die, volgens het geene in de XVI Afdeeling betoogd is, de *diagonaal*, van dit vierkant zal zyn, geen naaukeurig getal van deeze zelfde deelen bevatten; 't geen men in de taal der meetkundige zoude uytdrukken, door te zeggen, dat de zyde des vierkants, en desselfs *diagonaal*, onmeetbaar zyn.

De zyde eens vierkants, en derzelver *diagonaal*, zyn onmeetbaar.

XXV.

Men kan ook aanmerken, dat 'er verscheiden andere lynen zyn, welke geen gemeene maat hebben.

Andere onmeetbaare lynen.

Want als men de twee reeksen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c. schryft.

van welke de eerste, de natuurlyke getallen, en de andere, derzelver vierkanten uytdrukt, zal men zien, dat, dewyl de getallen, die tusschen 4 en 9, tusschen 9 en 16, tusschen 16, en 25, &c. zyn, geen wortel hebben, de zyden van twee vierkanten, van welke het eene, of het drievoud, of het vyfvoud, of het zesvoud,

voud van het andere is, onmeetbaar onder elkander zullen zyn.

XXVI.

Maar uyt de onmeetbaarheid van verscheiden lynen met andere, zoude misschien eenige verdenking over de naaukeurigheid der voorstellen (van welke we ons bediend hebben, om de evenredigheid der overeenkomstige figuuren vast te stellen) konnen spruyten. Men heeft gezien, dat we (in de XXXIV Afdeeling van het eerste Deel, en vervolgens, in het vergelyken van deeze figuuren met malkander, altoos ondersteld hebben, dat ze eene maat hadden, die gelykelyk tot het meeten van alle haare deelen dienen konde. Eén onderstelling, die thans, uyt aanmerking van het geen we gezegd hebben, zoude schynen, bepaald te moeten worden. Wy moeten derhalven een weinig te rug treeden, en zien, of onze voorstellen, om waar te zyn, niet eenige bepaalingen noodig hebben.

XXVII.

Laaten we eerst hervatten, 't geen we in de XXXIX Afdeeling van het eerste Deel gezegd hebben; en laat ons zien, of het naauwkeurig waar is, dat de soortgelyke driehoeken, als *abc*, ACB, welkers hoeken dezelfde zyn, haare zyden evenredig hebben. Laat ons by voorbeeld onderstellen, dat, dewyl de basis

Fig. 11. en 12.

des

des eerſten *ab* is, die van de tweede een regte AB zy, die aan de *diagonaal* van een vierkant, (waar van *ab* de zyde is) gelyk is; en laat ons onderzoeken, of in deeze onderſtelling, de verhouding van AC, tot *ac*, dezelfde zal zyn, als die van AB, tot *ab*.

Schoon, volgens het geene wy gezien hebben, hoe groot ook het getal der deelen die men als beſliſſende in *ab*, onderſtellen mogte. zy, AB, nooit een naauwkeurig getal deezer deelen bevatten zal; is het nogtans ligtelyk te zien, dat, hoe grooter dit getal zyn zal, hoe nader AB zal zyn om met de deelen van *ab*, naaukeuriglyk gemeeten te worden. Indien we onderſtellen, dat *ab* in 100 deelen verdeeld is, zal het getal der deelen, die AB bevatten zal, tuſſchen 141, en 142, volgens Art. XXIII. zyn. Laaten we ons met 141 vergenoegen, en het kleine overſchot laaten vaaren, dan is het klaar, door Art. XXXIX. van het eerſte Deel, dat AC, ook 141 deelen van *ac*, bevatten zal.

Laaten we nu vervolgens onderſtellen, dat *ab*, in 1000 deelen verdeeld is, zoo zal het getal der deelen van *ab*, die AB bevatten zal, tuſſchen 1414, en 1415 zyn; indien we nu 1414 behouden, en het overſchot verwerpen, zal men van 's gelyken bevinden, dat AC, 1414 der duyzendſte gedeeltens van *ac* bevatten zal, en in 't algemeen, dat AC, altoos zoo veel der deelen van *ac* met een o-verſchot bevatten zal, als AB, van de deelen van *ab* met een overſchot be-grypt.

Daar en boven zullen deeze overſchot-ten, gelyk we zulks hebben aangemerkt, van weêrzyden zoo veel kleinder zyn, als het getal der deelen van *ab* grooter zal zyn. Derhalven zal het geoorloofd zyn dezelve voorby te gaan, als men de verdeeling van *ab* zig verbeeld tot in 't oneyndige uytgeſtrekt te zyn. En der-halven zal men als dan konnen zeggen, dat het getal der deelen van *ac*, die in AC bevat zullen zyn, gelyk zal zyn aan het getal der deelen van *ab*, die in AB begreepen zullen zyn; en dat dus AC, zal zyn tot *ac*, gelyk AB, tot *ab*.

De zyden der overeenkomſtige driehoeken, en figuuren zyn evenredig; dan zelfs, wanneer deeze zyden onmeetbaar zyn.

Dus hebben we nu, ſtrengelyk betoogd, dat, wanneer twee driehoeken, dezelfde hoeken hebben, haare zyden evenredig zullen zyn; 't zy dat ze een gemeene maat hebben, of niet.

De *Propoſitie*, van het I Deel, Art. XLV., waar uyt de evenredigheyd der lynen, die elkander in de overeenkomſtige figuuren beantwoorden, getrokken wordt, werdt op dezelfde wyze be-veſtigd.

XXVIII.

Men zal door diergelyke redeneringen zien, dat de verklaarde voorſtellen in de XLIV. en XLVII Afdeelingen van het eer-

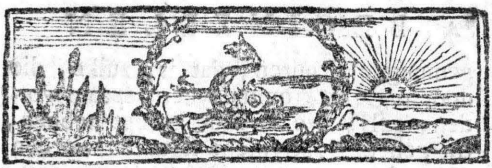
eerſte deel, waar in men heeft doen zien, dat de oppervlaktens der driehoeken, en overeenkomſtige figuuren, dezelfde evenredigheid onder elkander hebben, als de vierkanten hunner gelyk-aartige zyden, altoos, in 't algemeen de waarheid zyn; zelfs dan, wanneer de zyden deezer figuuren, onmeetbaar zyn.

En deeze figuuren zyn altoos tot elkander, gelyk de vierkanten hunner gelyk-aartige zyden.

Laat ons tot een voorbeeld, de overeenkomſtige driehoeken ABC, *abc* neemen, van welke we zullen onderſtellen, dat de hoogtens, met de grondlynen onmeetbaar zyn. In dit geval zal men geen eenig vierkant hebben, hoe kleyn het zelve ook zyn mag, dat voor een gemeene maat deezer driehoeken, en de vierkanten, welke op haare grondlynen gemaakt zyn, dienen kan; dat is te zeggen, dat de oppervlaktens *abc*, en *abde*, onmeetbaar onder elkander zullen zyn, even, als de oppervlaktens ABC, en ABDE; maar het zal niet minder waar zyn dat de driehoek ABC, tot het vierkant ABDE zyn zal, gelyk de driehoek *abc*, tot het vierkant *abde*.

Hier van kan men zig verzeekeren, door aan te merken, dat, hoe kleinder de deelen der ſchaal (waar van men zig tot het meeten van AB, en CK bediend) onderſteld zullen zyn, hoe meer men de getallen zal naderen, welke de betrekking van ABC, tot ABDE zullen uytdrukken. Wanneer men derhalven, de maat der driehoek, *abc*, altoos, in het zelfde getal van deelen verdeeld, en de overſchotten voorby gaat, zal men zien, dat dezelfde getallen altoos dienen zouden, om de betrekking uyt te drukken die 'er is tusſchen den driehoek ABC, en het vierkant ABDE, als mede, tusſchen den driehoek *a b c*, en het vierkant *a b d e*. Als men denkbeeldig, de verdeeling der maaten tot in 't oneindige uytſtrekt, zullen de overſchotten eindelyk volſtrekt tot niet worden; en men zal konnen zeggen, dat de getallen die de betrekking der driehoek *a b c*, tot het vierkant *a b d e* zouden uytdrukken, ook de betrekking van den driehoek ABC, tot het vierkant ABDE zouden uytdrukken, en dat dus, de driehoek *a b c* tot het vierkant *a b d e* zal zyn, gelyk de driehoek ABC, tot het vierkant ABDE.

Het is het zelfde, met alle overeenkomſtige figuuren.



BEGINZELEN DER GEOMETRIE.

DERDE DEEL.

Van de maat der kringswyze figuuren, en van derzelver Eigenschappen.

NA alvoorens tot het meeten van allerley ſoorten van Regtlynſche figuuren geraakt te zyn, is men tot de manier om zulke figuuren te bepaalen, welke door kromme lynen omſchreeven worden overgegaan. De Landſtreeken, en in 't algemeen, de ruymtens welke men verpligt kan zyn te meeten, worden niet altoos door regte lynen bepaaldt.

Dikwyls konnen de kromlynſche, en

gemengde figuuren, dat is, zulke, die door regte en kromme lynen bepaald worden, gelyk we alreede gezegt hebben, tot geheel Regtlynſche figuuren worden overgebragt, want, indien men een figuur, als ABCDEFG te meeten had, zoude men de zyde AD, voor een verzaameling van twee, drie, of meer regte lynen konnen neemen; en wanneer men vervolgens de regte FD, in de plaats der kromme FDE, ſtelde, zou men de Regtlynſche figuur ABCDFG, krygen, die zoo weinig van de gemengde figuur verſchillen zoude, dat men zonder eenige gewaarwordelyke dooling, de een voor de ander zoude konnen houden.

Plaat VII. Fig. 1

Men zoude derhalven met deeze figuuren volgens de voorgaandeLeerwyze konnen handelen: maar de Meetkundige zyn weinig, met deeze ſoorten van bewerkingen voldaan; zy eyſſchen altoos ſtrenge betoogingen. Ten anderen, is 'er een geval, waar in de verandering eener kromlynſche of gemengde, in een geheele regtlynſche figuur, vereyſſchen zoude, dat men zyn omtrek in zulk een groot getal van deelen verdeelde, dat de gemeene Leerwyze daar toe als dan volſtrekt onvoldoenende was; en dus zoude men zeekerlyk haar niet volgen, indien men een ruymte Z. (fig. 7.) of de geheele Cirkel X, (fig. 3.) te meeten hadt, maar men zoude een andere weg moeten

in-

inflaan, om de maat van dit foort van ruymtens te vinden. Hier ter plaatze zullen we ons alleenlyk tot de zulke bepaalen, in welkers omtrek, boogen van Cirkels begreepen zyn.

I.

Laaten we eerft onderftellen, dat men de oppervlakte der Cirkel X, te meeten heeft. Men moet aanmerken, dat, wanneer men in dezelve een regelmaatige *Polygone* BCDE &c. befchryft; deeze *Polygone*, na maate dat hy meerder zyden heeft, nader zal komen om aan de Cirkel gelyk te wezen. Nu heeft men gezien, in Art. XXII van het I Deel, dat de oppervlakte deezer figuur, gelyk is, aan zoo veel maalen het vermenigvuldigde der zyde BC, met de helft van de *Apothema* AH, als de *Polygone* zyden heeft; of, 't geen op het zelfde uytkoomt, dat de maat deezer oppervlakte het vermenigvuldigde van de geheele omtrek BC DE &c. met de helft der *Apothema*, is. Derhalven, dewyl zyn oppervlakte, zyne omtrek en zyn *Apothema*, het getal der zyden van de *polygone*, tot in 't oneindige vergroot zynde) gelyk zullen zyn, aan de oppervlakte, den omtrek, en den ftraal der Cirkel, zal de maat der Cirkel, het vermenigvuldigde van zyne omtrek, met de helft zyner ftraal zyn.

Fig. 3.

De maat der Cirkel, is het vermenigvuldigde van zyn omtrek met de helft van zyne ftraal.

 Hier

II.

Fig. 4. De inhoud der Cirkel is gelyk, aan een driehoek welkershoogte de ſtraal, en wiens baſis een regte lyn is, die gelyk is aan zyne omtrek.

Hier uyt volgt, dat de oppervlakte eener Cirkel BCD, gelyk is, aan die van eene driehoek ABL, welkers hoogte, de ſtraal AB, en wiens baſis, een Regte lyn BL, zoude zyn, die aan den omtrek gelyk was.

III.

Niets wordt 'er derhalven vereyſcht, dan de ſtraal, en den omtrek te weeten. Wat de ſtraal betreft; die kan zeer gemakkelyk gemeeten worden, maar het is zoo niet, met den omtrek gelegen: Om egter haare maat te hebben, kan men den Cirkel, door eene draad omringen, 't geen voor de oeffening, in veele gelegenheden voldoenend is.

Maar tot heden toe, heeft men nog niet konnen ſlaagen om den omtrek eener Cirkel op een Meetkundige wyze te konnen meeten; dat is te zeggen, om naauwkeuriglyk te bepaalen, welke overeenkomſt dezelve, met de ſtraal heeft. Men vind deeze overeenkomſt, byna tot op een hondert duyzendſte, of tien maal hondert duyzendſte; en men kan 'er zelfs zoo naby koomen als men wil, zonder dat men haar, daarom, volſtrektelyk bepaalen kan.

IV.

De eenvoudigſte nadering, die men gevonden heeft, is die, welke men *Archi-*

chimedes toeëygend. De diameter 7 deelen hebbende, is het getal der deelen die in den omtrek bevat zyn, tuſſchen de 21 en 22; en men weet dat ze veel nader by de 22, dan by de 21 zyn.

De diameter van een Cirkel 7 deelen hebbende, heeft 'er den omtrek omtrent 22.

V.

Voor het overige, is het klaar, dat, zoo men de betrekking eener enkele omtrek, tot zyn ſtraal naauwkeurig wiſt, men ook die, van alle andere omtrekken, tot hunne ſtraalen weeten zoude; dewyl deeze betrekking in alle Cirkels dezelfde moet zyn. Dit voorſtel ſchynd zoo eenvoudig, dat het zelve niet noodig heeft, betoogd te worden, dewyl men ziet, dat, welke bewerkingen men ook gedaan hadt, om eene omtrek te meeten, als men zig van de deelen zyner ſtraal bediende, men altoos dezelfde bewerkingen, voor het meeten van alle andere omtrekken zou moeten doen; en men dus daar in het zelfde getal van deelen als in zyn ſtraal vinden zoude.

De omtrekken der Cirkels zyn tot elkander, gelyk haare ſtraalen.

VI.

Het is klaarblykelyk, dat de Cirkels, ook nog de algemeene eigenſchap van alle de overeenkomſtige figuuren hebben, (1 Deel, Art. XLVII.); Ik wil zeggen, dat hunne oppervlaktens in dezelfde evenredigheid zyn, als de vierkanten hunner gelyk-aartige zyden; maar, nadien men, om dit voorſtel op de Cirkels toe te paſſen, haare zyden, niet zal konnen neemen, zal men genoodzaakt zyn, zig van de ſtraalen te bedienen; als wanneer men zien zal, dat de oppervlaktens der Cirkels evenredig zullen zyn, aan de vierkanten hunner ſtraalen.

De inhouden der Cirkels, zyn evenredig aan de vierkanten hunner ſtraalen.

Indien het iemand mogte toeſchynen, dat dit voorſtel niet aanſtonds, uyt het geen in Art. XLVII van het I Deel gezegt is, volgen moeſt, en dat men daar van, een byzondere betooging hebben wilde, zoude men in aanmerking moeten neemen, dat het volſtrekt op het zelfde zoude uytkomen, 't zy dat men de oppervlaktens der twee Cirkels BCD, EFG, vergeleek, of die, der driehoeken ABL, AEM, die aan haar gelyk zouden zyn (Art. 11.) onderſteld zynde, dat haare grondlynen BL, en EM, de, in een regte lyn uytgeſtrekte omtrekken, BCD, en EFG, en dat haare hoogtens, de ſtraalen AB en AE, waren. Nu zouden door de voorgaande afdeeling, deeze driehoeken overeenkomſtig zyn, en derhalven zouden hunne oppervlaktens in dezelfde rede zyn, als de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden AB, AE, die ſtraalen der Cirkels BCD, en EFG zyn. Derhalven &c.

Fig. 3. en 4.

VII.

De Cirkels zullen ook, uyt aanmerking haarer gelykheid, op dezelfde wyze,

Van drie Cirkels, die de drie

ze, als de overeenkomstige figuuren, deeze eigenschap hebben, dat, wanneer men, de drie zyden (eener Regthoekige driehoek tot straalen neemende) drie Cirkels beschreef, die geene, welkers straal de *Hypothenuse* zal zyn, gelyk zal zyn aan de twee andere, zaamen genoomen.

zyden eener Regthoekige driehoek tot straalen hebben, is die, welke de *Hypothenuse* geeft, zoo groot als de twee andere zaamen genoomen.

Dus zal men altoos een Cirkel vinden, die aan twee gegeven Cirkels gelyk is, en dat wel, zonder de moeite te neemen van yder deezer Cirkels te meeten. Als men by voorbeeld een bekken wil maaken, dat zoo veel water, als twee andere bevat, de diepte dezelfde blyvende; of, als men de wydte eener fonteyn pyp wilde vinden, door welke even zo veel water, als door andere gegeevene pypen vloeiden; zal men zonder moeite daar in slaagen konnen, wanneer men den weg inslaat, die we nu aangetoond hebben.

VIII.

Indien men de oppervlakte van eene kroon V. (zynde een Figuur, die tusschen twee evenmiddenpuntige Cirkels EFG, BCD, dat is te zeggen, tusschen twee Cirkels, die een gemeen middenpunt hebben, besloten is) te meeten hadde; zoude dat gene, 't welk zig het allereerst aan de zinnen opdeed, zyn, dat men afzonderlyk de oppervlaktens der twee Cirkels meetede, en de kleinste, van de grootste aftrok. Maar het is ligtelyk te zien, dat dit *Problema*, op een manier,

Fig. 6. Een kroon, is eenruymte, die tusschen twee evenmiddenpuntige Cirkels beslooten is.

 die

die gemakkelyker voor de oeffening is, kan opgeloſt worden.

Laaten we ons een driehoek ABL, verbeelden, die de ſtraal AB, tot hoogte heeft, en welkers baſis een regte lyn BL is, die, gelyk is aan den omtrek BCD. Zoo men door het punt E, de regte E M, parallel aan BL, trekt, zal deeze regte, gelyk zyn aan den omtrek EFG; want, uyt aanmerking van de gelykheid der driehoeken AEM, ABL, zal 'er een zelve evenredigheid tuſſchen AB, en BL, als tuſſchen AE, en EM, zyn. Nu zal door de onderſtelling, BL, gelyk zyn aan den omtrek, van welke AB de ſtraal zal zyn; derhalven zal EM, ook gelyk zyn aan den omtrek, waar van de lyn AE, die een gedeelte van AB is, de ſtraal zal zyn. Het zoude het zelfde zyn met alle andere lynen KI, parallel aan BL, zynde; dat is, zy zouden altoos gelyk aan den omtrek zyn, van welke AK, de ſtraal was.

Uyt de onderſtelde gelykheid, tuſſchen den omtrek EFG, en de regte EM, volgd noodzaakelyk de gelykheid der driehoek AEM, met de Cirkel EFG; en derhalven moet de regtlynſche ruymte EBLM, aan de voorgeſtelde kroon V, gelyk zyn. Nu kan deeze ruymte EBLM, gemakkelyk in een regthoek EBPH, veranderd worden, wanneer men ML, in twee gelyke deelen MI, en IL, ſnydt, en van het punt I, tot BL, de perpendiculair

HIP

HIP trekt, want deeze zal de bygevoegde driehoek MHI, aan den afgetrokken driehoek PLI, gelyk maaken.

Indien men derhalven IK, die EB, in twee gelyke deelen ſnydt, door het punt I, parallel aan BL trekt, zal de voorgeſtelde kroon, die aan de ruymte EBLM, of EBPH gelyk is, het vermenigvuldigde van EB met KI, zynde een omtrek van welke AK, de ſtraal zal zyn, tot maat hebben.

Om derhalven een kroon V, te meeten, moet men derzelver breedte EB, met den omtrek KOQ vermenigvuldigen die als een middelbaare, tuſſchen de omtrekken, BCD, en EFG, aangemerkt wordt, om dat ze de kleyne omtrek EFG, of de regte EM, met een grootheid MH, die gelyk is aan PL, overtreft, zynde PL, een grootheid, waar mede zy, door de groote omtrek BCD, of door de regte BL, overtroffen wordt.

Om een kroon te meeten, moet men derzelver breedte met de middelbaare omtrek vermenigvuldigen.

IX.

Wanneer men een Figuur moeſt meeten, die als Y, dat is, zaamengeſteld was uyt regte lynen, en boogen van onderſcheidene Cirkels; of wel, als men de figuur Z moeſt meeten, die alleenlyk uyt boogen van Cirkels is zaamengeſteld; zoude alle zwaarigheid tot het meeten van de *Segmenten* des Cirkels, dat is te zeggen, der ruymtens ABCE*, die door een boog ABC, en de pees AC bepaald zyn,

Fig. 2. Fig. 7.

Het *Segment* des Cirkels, is een ruymte, die door een boog, en zyne pees bepaald wordt.

* Fig. 8.

De maat van alle Circulaire figuuren, wordt tot die, van het *Segment* gebragt.

zyn, gebragt konnen worden. Want de figuuren, die geheel uyt boogen van Cirkels, of uyt boogen, en regte lynen zaamengesteld zyn, konnen alle, als regtlynige figuuren, die de vermeerderde of verminderde van zeekere *Segmenten* zyn, aangemerkt worden.

X.

De *Sector* is een gedeelte der Cirkel, dat door tweestraalen, en de daar tusschen begreepen boog, bepaald wordt.

Haare maat, en die van het *Segment*.

De maat van een na believen genomen *Segment*, ABCE, is gemakkelyk te vinden, wanneer ons die der omtrek bekend is; want, als men tot het Centrum van den boog T, de lynen AT, CT, trekt, zal men een figuur, ABCT maaken, die *Sector* genoemd wordt, welkers inhoud tot die des Cirkels zal zyn, gelyk de boog ABC, tot den geheelen omtrek is, en die by gevolg, het vermenigvuldigde van de helft der straal AT, met de boog ABC, tot maat zal hebben: Maar de *Sector* bepaald zynde, behoefd men, om het *Segment* ABCE te hebben, alleenlyk, de driehoek ACT, daar van af te trekken.

XI.

Gelyk het zeer dikwyls gebeurd, dat men, wanneer men een dusdaanige figuur als Y meeten wil, geen Centrum van den boog HIK heeft; en dat men ondertusschen zonder dit Centrum, de figuur niet zoude konnen meeten, dewyl de voorgaande Leerwyze de kennis der straal ondersteld, moeten we nu, het Cen-

Centrum eener boog, van een na believen genomen Cirkel zoeken.

Indien we onderſtellen, dat ABC, de boog der voorgeſtelde Cirkel zy, en dat men op deeze boog twee willekeurige punten A en B neemt, en uyt deeze punten, als Centrums, de vier boogen *goi*, *fob*, *lpk*, *mpn* beſchryft, waar van de twee eerſte door eenige gekoozene ſtraal, en de twee andere, of door dezelve, of door eenige andere willekeurige ſtraal gemaakt zyn, is het klaar, dat het gezogte Centrum van de boog ABC, op de lyn *op*, die de punten der tuſſchenſnydingen *o*, *p*, zaamenvoegd, zyn zal. Fig. 9. Het Centrum van de boog, eener bepaalde Cirkel te vinden.

Wanneer men vervolgens op de boog ABC, een derde punt C, verkieſt, en zig van B en C, op dezelfde wyze, als van A, en B, bediend, zal men een regte *qr*, hebben, op welke zig ook, het geëyſchte Centrum bevinden zal; Derhalven zal dit Centrum het punt T zyn, daar de lynen *op*, *qr*, elkanderen ontmoeten.

XII.

Hier uyt blykt, dat, hoedanig de ſchikking ook zy, die men aan drie punten geeft, mits, dat ze niet in een regte lyn geplaatſt zyn, dat zegge ik, men hem altoos door de boog eenes Cirkels verbinden kan; of, 't geen op 't zelfde uytkoomt; dat, welk de evenredigheid der zyden AC, BC, van den driehoek Fig. 10. ACB,

ACB, tot zyne basis ook zy, men altoos, om deeze driehoek, een Cirkel zal konnen beschryven.

XIII.

De manier, welke we nu opgegeeven hebben, om een Cirkel om een driehoek te beschryven, vervolgens op verschei- dene driehoeken ACB, AEB, AGB, welkers toppunten in een grooter of kleinder afstand van hunne basis staan, toegepast zynde, ontdekt men, dat, wanneer men van een driehoek ACB, welkers tophoek zeer scherp is, tot andere driehoeken AEB, AGB, welkers tophoeken zeer stomp zyn, overgaat, het Centrum der omschreevene Cirkel geduuriglyk naar AB, naderd, en dat dit Centrum vervolgens beneden AB, komt, wanneer den tophoek AGB, een zekere wydte bereikt heeft. Maar, wanneer men dit Centrum, na dat men het alvoorens boven AB, gezien heeft, naar beneden ziet overgaan, moet het, volgens myn gedagten, in bedenking koomen, om te onderzoeken van welke soort de driehoek AFB is, wanneer de omschreeve Cirkel, zyn Centrum op AB zelve heeft.

Fig. 10 en 11.

Fig. 12.

Om deeze driehoek AFB, te kennen, moet men beginnen, met aan te merken dat het deel der Cirkel, dat in dit byzonder geval, om den driehoek omschreeven is, naauwkeuriglyk een halve Cirkel zyn moet: inderdaad, voor dat het Centrum

trum der Cirkel zig op de basis AB, welkers twee einden, door de onderstelling in den omtrek zyn, bevind, zal het Centrum M, niet konnen nalaaten van naaukeuriglyk, indiervoegen in het midden van AB, geplaatst te zyn, dat AB, noodzaakelyk een diameter zyn zal.

Indien men, uyt een punt, van den omtrek eens halven Cirkels, twee regte lynen tot de eindens der diameter trekt, zal men een regtehoek hebben.

Men zal vervolgens zien, dat, als men uyt eenig punt F, der halve Cirkel, de lynen FA, FB, trekt, de hoek AFB, regt zal zyn. Want, wanneer men FM trekt, zullen de twee driehoeken AFM, MFB, gelykbeenig zyn: derhalven zullen de twee hoeken AFM, MFB, wederzyds gelyk zyn aan de hoeken FAM, FBM, of, 't geen op het zelfde uytkoomt, de geheele hoek AFB, zal gelyk zyn, aan de som der twee hoeken FAM, FBM; maar de drie hoeken AFB, FAM, FBM, zaamen genoomen, zyn als twee regte. Derhalven zal de hoek AFB, regt zyn.

Zoo men derhalven op de basis AB, een regthoekige driehoek beschryft, zal deeze driehoek die geëyschte hoedanigheid hebben, dat ze in een Cirkel, welkers Centrum op haare basis is, beschreeven is.

XIV.

Deeze hoedanigheid der Cirkel; dat de hoek, die zyn top in den halve omtrek heeft; en welke op de diameter steundt, altoos regt is, verpligt ons om

te

te onderzoeken, of de andere deelen der Cirkel niet eenige overeenkomstige eigenschap hebben; dat is by voorbeeld, of de hoeken ACB, AEB, AFB, in eenig *Segment* ACEFB, genoomen, niet alle aan elkander gelyk zouden zyn, zoo wel als die van den halven Cirkel.

Plaat IX. Fig. 1.

Om ons hier van te verzeekeren, moeten we eerst de grootte van een deezer hoeken zoeken, en vervolgens zien, of de andere dezelfde grootte hebben. Laaten we by voorbeeld de hoek AEB, neemen, welkers toppunt E in 't midden van den boog AEB, geplaatst is. Gelyk de lyn EDG, door het Centrum D heen gaande, deeze hoek in twee gelyke deelen snyd, zal het genoeg zyn, alleenlyk de helft van de hoek AEG, te meeten; of, 't geen op het zelfde uytkoomt, het zal genoeg zyn dat men weete, welk deel den hoek AEG, van een andere hoek zy, die alrede gemeeten is; by voorbeeld ADG: Ik zeg, dat de hoek ADG, alrede gemeeten is, dewyl we weeten, dat de boog AG, haare maat is, (1 Deel Art. LII.)

Indien men in aanmerking neemt, dat de driehoek AED, gelykbeenig is, zal men gemakkelyk zien, dat de hoek AEG, de helft is van den hoek ADG: want de hoeken AED, EAD, (1 Deel Art. XXXI.) zyn gelyk: maar (1 Deel Art. LXVIII.) deeze twee hoeken, zaamen genoomen, bedraagen even zoo veel, als

de

de uytwendige hoek ADG. Derhalven is de hoek AED, of AEG, de helft van den hoek ADG.

Door dezelfde reden, zal de hoek DEB, de helft van den hoek GDB zyn. Derhalven zal de geheele hoek AEB, de helft van den hoek ADB, en dus, haare maat, de helft van den boog AGB zyn.

XV.

De hoek AEB, gemeeten zynde, om te weeten of hy aan yder der andere hoeken, welke haar toppunt in het zelfde *Segment* hebben, gelyk is; moet men onderzoeken of een deezer willekeurig genoomene hoeken; AFB, by voorbeeld, Fig. 3. ook de helft van den hoek in 't Centrum ADB is. Men zal zig hier van gemakkelyk konnen verzeekeren, wanneer men de regte FDG, door het Centrum trekt. Want dan zal men zien, dat de hoek AFB, uyt twee andere AFD, DFB, zal zaamen geſteld zyn, die, door de voorgaande afdeeling, de helften der hoeken ADG, GDB, zullen zyn; waar uyt men beſluyten kan, dat de geheele hoek AFB, de helft zal zyn van den hoek ADB: en, wanneer men, dezelfde redeneeringen op alle de hoeken ACB, AEB, AFB, die haare toppunten in den omtrek hebben, en op dezelfde boog AGB, ſteunen, toepaſt; zal men ook konnen beſluyten, dat deeze hoeken, even als we

Alle de hoeken, welkers toppunten in den omtrek zyn, en die op dezelfde boog ſteunen, zyn gelyk, en hebben de helft der boog op welke zy ſteunen, tot een gemeene maat.

Fig. 1. in de voorgaande afdeeling van gedagten waren, aan elkander gelyk zyn.

XVI.

Onder de verscheiden hoeken, die haare toppunten in den boog ACEFB, hebben, zyn 'er, die in den eersten opslag zouden konnen toeschynen, niet in de voorgaande betooging begreepen te konnen worden, en dit zyn zulke hoeken A
Fig. 4. FB, waar van de regte FDG, door het Centrum getrokken zynde, buyten de hoek ADB, valt. Wanneer men ondertusschen, altoos aanmerkt, dat de hoek GFA, de helft is van den hoek GDA, en de hoek DFB, de helft van den hoek GDB, zal men zien, dat de hoek AFB, (dat geene zynde, met het welke de hoek DFB, de hoek DFA overtreed) in dit geval, de helft van den hoek ADB, (dat geene zynde, waar mede de hoek GDB, de hoek GDA overtreed) zyn zal.

XVII.

Door de figuuren, van welke wy ons
Fig. 5. bediend hebben, zoude het ook toeschynen dat de voorgaande betooging niet overeen zoude koomen, dan met *Segmenten*, die grooter dan een halve Cirkel zyn; maar het is ligtelyk te zien, dat een hoek, die op de wyze van AFB, zyn toppunt in een kleinder *Segment* dan een halve Cirkel hebben zoude, altoos uyt twee andere DFB, DFA, de helften der

hoe-

hoeken BDG, ADG, zoude zaamengesteld zyn; en by gevolg, dat deeze hoek AFB, de helft der twee boogen BG. AG dat is te zeggen, de helft der boog AGB, tot maat zoude hebben.

XVIII.

Na gezien te hebben, dat in een zelfde *Segment*, de hoeken AEB, AFB, AHB, die in den omtrek onderfteld worden, alle gelyk zyn: heeft men getragt te onderzoeken, wat 'er van den hoek AQB, wierdt, wanneer zyn toppunt met het punt B, dat het einde der bafis AB is, zaamen vloeide. Verdween die hoek toen? Maar het fchynd onmoogelyk te zyn, dat zy, zonder by graaden te verminderen, plotzelyk vernietigd wierd. Men ziet niet, wel het punt zoude zyn daar deeze hoek zoude ophouden te beftaan; hoe zal men dan, de maat daar van vinden konnen? Dit is waarlyk een zwaarigheid, welke men niet kan oplosfchen, zonder tot de meetkunde van het oneyndige, waar van alle menfchen, ten minften een onvolmaakt denkbeeld hebben, dat alleenlyk vereyfcht opgehelderd te worden; den toevlugt te neemen. Fig. 5.

Laaten we dan, in de eerfte plaats aanmerken, dat wanneer het punt E, door de punten FH tot Q gaande, het punt B naderd, de regte EB, geduuriglyk verkort, en de hoek EBA, welke zy met de Regte AB maakt, meer en meer vergroot wordt. Maar hoe kort de lyn QB, ook worden mag, zal de lyn QBA, niet te min een hoek zyn: dewyl men, om haar gewaarwordelyk te maaken, alleenlyk de verkorte lyn QB, tot R te verlengen heeft. Moet het daar mede even eens geleegen zyn, wanneer de lyn QB, door een ſterke vermindering, eindelyk tot niet gebragt is? Hoe is dan zyne ſtelling? Wat is zyne verlenging geworden?

Het is klaarblykelyk, dat hy niet anders, dan de regte lyn BS, is, die den Cirkel in eenig punt B, aanraakt; zonder dezelve in eenige andere plaats te ontmoeten, en die men om deeze reede, *Tangens* of raaklyn noemt.

De raaklyn eenes Cirkels, is de lyn, die haar alleenlyk in een punt aanraakt.

Daar en booven is het klaar, dat, geduurende, dat de lyn EB, geduuriglyk tot haare verdwyning toe verminderd wordt, de regte AE, die vervolgens AF, AH, AQ &c. wordt, altoos naar AB naderd, en zig eindelyk daar in verlieſt. Derhalven, wordt de hoek die aan den omtrek AEB, is, naa dat ze alvoorens AFB, AHB, AQB, geworden was, ten laatſten de hoek ABS, gemaakt door de pees AB, en de raaklyn BS, en deeze hoek, welke men de hoek in 't *Segment* heet, moet altoos die eigenſchap houden, van de helft der boog HGB, tot haare maat te hebben.

De hoek in 't *Segment* is die, welke door de pees, en raaklyn gemaakt is.

Haare maat is de helft van de boog des *Segments*.

Hoewel deeze betooging miſſchien een weinig afgetrokken voor de eerſtbeginnennende is, heb ik haar egter niet willen nalaaten hier ter needer te ſtellen, dewyl ze zeer nuttig zal zyn voor de zulke, die hunne ſtudiën, tot de Meetkunde van het oneindige willen uytſtrekken, om haar vroegtydig aan dusdaanige overweegingen te gewennen.

Zoo de eerſtbeginnende ondertuſſchen, deeze betooging boven het bereik hunnes vermoogens vinden mogten, is het gemakkelyk een ander in derzelver plaats te ſtellen, door de voornaamſte eigenſchap der raaklynen uyt te leggen.

XIX.

Fig. 7. De raaklyn is perpendiculair op den diameter die door het punt van aanraaking heen gaat.

Deeze hoedanigheid beſtaat daar in, dat een Raaklyn, den Cirkel in eenig punt B, aanraakende, perpendiculair op den diameter IDB, moet zyn, die door dit punt heen gaat. Want gelyk de kromte der Cirkel zoo eenvormig is, dat een diameter IDB, haar in twee halve Cirkels IAB, IOB, verdeeld, die gelyk, en ook, ten opzigt deezer diameter, gelykelyk geplaatſt zyn; moeten de twee deelen BS, BH, van de raaklyn die aan deeze halve Cirkels gemeen is, ook in een gelyke plaatzing, met betrekking tot deeze diameter zyn: Maar dit zoude niet konnen zyn, zonder dat IDB, perpendiculair op de raaklyn HBS, was.

XX.

Hier uyt zal men nu gemakkelyk konnen zien, waarom de hoek die in 't *Segment* ABS, is, de helft van de boog A GB, tot maat heeft.

Want de hoek ADB, met de twee gelyke hoeken DAB, DBA, zaamen gevoegd zynde, maakt (1 Deel Art. LXIV.) twee regte hoeken. Derhalven maakt de helft van den hoek ADB, zaamen gevoegd met de hoek DBA, een regte. Maar de hoek DBA, by de hoek ABS, gevoegd zynde, geeft ook een regte. Gevolgelyk is de hoek ABS, gelyk aan de helft der hoek ADB. En derhalven, zal de maat van ABS, de helft van den boog AGB, zyn.

XXI.

De tweede betooging, welke we over die eigenfchap der Cirkel, dat de hoek ABS, de helft van den boog AGB, tot maat heeft, gegeeven hebben, verfchaft de oplosfing van het volgende *Problema*.

Fig. 8. en 9. Wat een *Segment* is, dat aan een gegeeve hoek gelyk zy.

Op AB een *Segment* eenes Cirkels te befchryven, dat aan de gemaakte hoek L, gelyk is; dat is te zeggen, een *Segment* AFB, in het welke alle de hoeken AFB, in den omtrek, aan den hoek L, gelyk zyn.

Manier om een *Segment* overeenkomftig, met een gegeeve hoek te maaken.

Om dit *Problema* op te losfchen, moet men in A, en B, de hoeken BAS, en ABS, maaken, en wel zoo, dat ieder van die, gelyk is aan den hoek L, en dan op AS, en BS, de twee perpendiculairen, AD, en BD, op-regten; als wan-

wanneer haare ontmoeting D, het Centrum van de gezogte boog AFB, zal zyn.

Want door (Art. XIX.) zullen de regteBS, en AS, de raaklynen der Cirkel zyn, waar van het Centrum D, en de ſtraal AD, of BD, is; dewyl BD, of A D, perpendiculairen op BS, en AS, zyn. Daarenboven heeft door de voorgaande Afdeeling, de hoek ABS, de helft van AGB, tot haare maat; en zyn ook, door de XV Afdeeling, de hoeken AFB, gemeeten door de helft van AGB. Derhalven zullen deeze hoeken AFB, gelyk zyn aan ABS; dat is te zeggen, aan den hoek L, zoo als geëyſcht was.

XXII.

De ontdekking der eigenſchappen van de *Segmenten* der Cirkels, welke we thans uytleggen, zyn we waarſchynlyk, aan de enkele weetluſt der Meetkundige verſchuldigd. Maar het is met deeze ontdekking, op dezelfde wyze geleegen geweeſt, als men nog dagelyks omtrent veele andere ziet. Haare nuttigheid wierd niet ten eerſten, maar naar een aanmerkelyk tydverloop erkendt, en men heeft eindelyk de eigenſchappen der Cirkel, welke we betoogen, zeer gelukkiglyk in oeffening geſteldt. Ik zal niet meer, dan een deezer toepaſſingen ter neder ſtellen; men zal dezelve vinden, in de oploſſing van het volgende *Problema*, dat dikwyls in de *Geographie* noodzaaklyk is.

Fig. 10. De afstand eener plaats van drie andere te vinden, welkers stellingen bekend zyn

A, B, C, drie plaatzen zynde, van welke men, de weêrzydsche afstanden A B, BC, AC, kendt; onderstel ik, dat men weeten wil, in welken afstand van deeze plaatzen, een punt D is; uyt het welke men, hun alle zien kan, dog dat niet toelaat, dat men van daar gaat, om op het land zelve te werken.

Fig. 10 en 11.

Men begind, door op het papier, drie punten *a*, *b*, *c*, te trekken, die op dezelfde manier als de drie punten A, B, C, onder elkanderen geplaatst zyn; dat is in de taal der Meetkundige, dat men, de driehoek *a b c*, overeenkomstig maakt, met de driehoek ABC.

Vervolgens, met de halve Cirkel de grootheid der hoeken ADB, BDC, aangemerkt hebbende, moet men op *a b*, het *Segment* der Cirkel *b d c* maaken, dat met den hoek ADB, overeenkomstig is; en op de regte *b c*, het *Segment* der Cirkel *b d c*, overeenkomstig met den hoek BDC; en dan zal de ontmoeting *d*, deezer twee *Segmenten*, op het papier de stelling der plaats D aanwyzen: dat is te zeggen, dat de lynen *d a*, *d b*, *d c*, in dezelfde rede met betrekking tot *a b*, *b c*, *a c*, zullen zyn, als de gezogte afstanden DA, DB, DC, met betrekking tot de gegeevene afstanden AB, BC, AC: dat, na het geen men over de overeenkom-

stige

ſtige figuuren gezegd heeft, geen byzondere betooging noodig heeft.

XXIII.

Men zoude gemakkelyk konnen doen zien, dat de oeffening der Meetkunde, veele andere nuttigheden, als de betoogde, uyt de eigenſchappen der Cirkel getrokken heeft: Maar het is beter, dat we tot andere eigenſchappen der Cirkel, die uyt de voorgaande ontleend zyn, en ook hunne nuttigheid hebben, overgaan.

Om in de ontdekking deezer eigenſchappen, met orde voort te gaan, zullen we beginnen, door aan te merken, dat, als twee hoeken EDC, EBC, die op dezelfde boog EC, ſteunen, gelyk zyn, daar uyt volgd dat de hoeken der driehoeken DAE, BAC gelyk zyn; dat is te zeggen (1 Deel Art. XXXIX.) dat deeze driehoeken, overeenkomſtig zyn. Plaat X. Fig. 1.

Want door dezelfde reden, als de hoek EDC, gelyk is aan den hoek EBC, zal de hoek DEB, gelyk zyn aan den hoek DCB: en, wat de hoeken DAE, BAC, betreft, die zullen oogſchynlyk, gelyk zyn; zoo wel om dat ze van gelyke lynen gemaakt zyn, als, om dat twee driehoeken, van welke den een, twee hoeken heeft, die weerzyds aan twee hoeken van den andere gelyk zyn; ook noodzaakelyk, de derde hoek gelyk hebben. (1 Deel. Art. XXXVIII.)

Om in 't vervolg, de algemeene eigenſchappen der overeenkomſtige driehoeken in de driehoeken ADE, ABC, gemakkelyker gewaar te worden, zullen we de driehoek DAE, op de driehoek BAC, voegen, leggende AD, op AB, en AE, op AC, op dat DE, parallel zy aan BC. Wy zullen ons, als dan, erinneren,

Fig 1. en 2.

1. Dat, zoo twee driehoeken ADE, ABC, overeenkomſtig zyn; de vier zyden AC, AE, AB, AD, evenredig zyn (I Deel Art. XXXIX.)

2. Dat in alle evenredigheden het vermenigvuldigde der uyterſtens, gelyk is aan het vermenigvuldigde der middenſte (II Deel Art. VIII.) en daar uyt beſluyten we, dat de regthoek, of het vermenigvuldigde van AC, met AD, gelyk is aan de Regthoek, of het vermenigvuldigde van AE, met AB. Een eigenſchap der Cirkel, die zeer aanmerkelyk is, en welke men dus kan uitdrukken: Als men in een Cirkel, op een willekeurige wyze, twee regte lynen trekt, die elkanderen ſnyden, is het vermenigvuldigde van de twee deelen des eerſten, gelyk, aan het vermenigvuldigde van de twee deelen des anderen.

Wanneer twee peezen in een Cirkel elkander ſnyden, is de regthoek van de deelen des eene, gelyk aan de regthoek van de deelen des andere.

Fig. 3.

XXIV.

Indien de twee regte BE, DC, elkander regtſtandig ſneeden, en dat den een deezer twee regte een diameter DC was, is het klaar, dat de twee deelen, AB, AE, AE, van de andere regte BE, aan elkander gelyk zouden zyn; en derhalven zoude de voorgaande eigenſchap, in dit byzonder geval, dus verklaard worden. Zoo men op de Diameter DC, eener Cirkel, een perpendiculair AB op-regt, zal het vierkant deezer perpendiculair, gelyk zyn aan de regthoek van AD, met AC.

Het vierkant van een perpendiculair op den diameter eenes Cirkels, is gelyk aan de regthoek der twee deelen van den diameter.

XXV.

Het gebeurd dikwyls, dat men noodig heeft, een regthoek in een vierkant te veranderen, en daar toe verſchaft de voorgaande afdeeling, een gemakkelyk middel. Als ACFE, by voorbeeld, de voorgeſtelde regthoek zy, moet men AC, indiervoegen tot D, verlengen, dat AD, gelyk zy, aan AE, en dan, de halve Cirkel DBC, beſchryven, welkers diameter DC zy. Verlengende vervolgens de zyde EA, tot dat ze de halve Cirkel ontmoet, zal men AB, voor de zyde van het gezogte vierkant ABGH, hebben, en, dit vierkant, zal aan de gegeevene regthoek AFCE, gelyk zyn.

Een Regthoek, in een vierkant te veranderen.

Fig. 4.

XXVI.

Men ſteld dikwyls een *Problema* voor, dat niets is, dan het geen we thans oploſſen, op een andere wyze voorgeſteld. Men eyſcht daar in, een lyn te vinden, die tuſſchen twee gegeevene lynen midden evenredig is; men verſtaat als dan, door de midden evenredige, de lyn die even zoo groot is, met betrekking

Wat een midden evenredige tuſſchen twee regte lynen is, tot de kleinſte der twee gegeeve lynen, als ze klein is, met betrekking tot de grootſte: dat is te zeggen, dat, zoo A B, by voorbeeld, de midden evenredige tuſſchen AD, en AC, is, men zal konnen zeggen, dat AD, is tot AB, gelyk AB, tot AC. Nu is het ligtelyk te zien, dat dit *Problema* het zelfde, als het voorgaande is, dewyl (II Deel Art. VIII.) het vermenigvuldigde van AD, met A C, dat is te zeggen, de regthoek deezer twee lynen, gelyk zal zyn aan het vermenigvuldigde van AB, met AB, dat is te zeggen, aan het vierkant van AB.

Manier om dezelve te vinden.

Wanneer men derhalven een midden evenredige tuſſchen twee gegeeve lynen vinden wil, moet men de regthoek deezer twee lynen, in een vierkant veranderen; welkers zyde de gezogte lyn zal zyn.

XXVII.

Andere manier.

Fig. 5.

Men kan ook op een andere wyze, die uyt de eigenſchap der Cirkel, die in Art. XIII. uytgelegt is, vloeid; de midden evenredige tuſſchen twee lynen vinden. Onderſteld zynde dat AC, de grootſte, en AD, de kleinſte van twee gegeeve lynen is, moet men DB, perpendiculair ſtellen op AC, en het punt B, daar de halve Cirkel ABC, die op de diameter AC getrokken is, door DB, ontmoet zal worden, zal de lyn AB geeven; zynde de midden evenredige tuſſchen AD, en AC.

AC. Want, als men BC trekt, is het klaar, dat de driehoek ABC, in B, regthoekig zal zyn. Derhalven (I Deel, Art. XXXVIII.) zal deeze driehoek overeenkomstig zyn met den driehoek ABD, dewyl deeze twee driehoeken verders, de hoek A gemeen hebben: maar zoo de driehoeken ADB, en ABC, overeenkomstig zyn, zyn hunne zyden evenredig. Derhalven is AD, tot AB, gelyk AB, tot AC. Gevolgelyk is AB, midden evenredig tusschen AD, en AC.

XXVIII.

Een Regtlynsche figuur in een vierkant te veranderen.

Zoo men een regtlynsche figuur in een vierkant wilde veranderen, behoefd men niets te doen, om dit *Problema* tot Art. XXV. te brengen, dan van deeze figuur, een Regthoek te maaken, dat zeer gemakkelyk is, om reden dat Regtlynsche figuuren niet anders dan verzaamelingen van driehoeken zyn; dat yder driehoek, de helft van eene regthoek is, die dezelfde basis, en hoogte heeft; en dat alle Regthoeken, uyt driehoeken voortgekomen, niet meer dan een eenige regthoek maaken, geevende hun alle, een gemeene hoogte (II Deel Art. VI.)

XXIX.

De Figuuren, welkers omtrekken van boogen eener Cirkel zullen besloten zyn, zullen ook in vierkanten veranderd konnen worden, wanneer men met naaukeurigrigheid de lengte der boogen, uyt welke zy zaamengefteld zullen zyn, gemeeten zal hebben; want men zal als dan deeze figuuren, even als de regtlynfche in regthoeken konnen veranderen, ten welke einde men tot de IX en X Afdeeling, (waar in men geleert heeft, alle foorten van Circulaire figuuren te meeten) de toevlugt kan neemen.

XXX.

Een vierkant te maaken dat tot een ander in een gegeeven rede is.

Uyt de eigenfchap der Cirkel, die in de XXIV Afdeeling is uytgelegd, trekt men een zeer gemakkelyke handelwys, om een vierkant te maaken, dat tot een gegeeve vierkant, in een gegeeven rede zy. Een *Problema*, dat we in de XXII Afdeeling van het tweede Deel beloofd hebben.

Fig. 6.

Laat ons, by voorbeeld, onderftellen, dat men een vierkant wil maaken, dat tot het vierkant ABCD, zy, gelyk de lyn M, tot de lyn N. Ten dien einde moet men (1 Deel Art. XLI.) de zyde CB, indiervoegen in 't punt E verdeelen, dat CB, zy, tot BE, gelyk de lyn N, tot de lyn M; vervolgens moet men EF, parallel aan AB trekken, en dan zal de Regthoek ABEF, dezelfde oppervlakte als het geëyfchte vierkant hebben: Derhalven wordt 'er niets meer verëyfcht, dan deeze Regthoek in een vierkant te veranderen.

Zoo

XXXI.

Zoo men een *Polygone* HIKLM wil maaken, die tot een overeenkomstige *Polygone* ABCDE in dezelfde reden was, als de lyn X, tot de lyn Y, moet men eerst op de zyde AB, van de gegeeven *Polygone* ABCDE, het vierkant ABGF, maaken; vervolgens moet men een ander vierkant HIOQ zoeken, dat tot het vierkant ABCF is, als de lyn X tot de lyn Y. Wanneer men dan, op de zyde HI, van dit vierkant, een *Polygone*, HIKLM beschryft, die aan de eerste ABCDE, gelykvormig is, zal deeze nieuwe *Polygone* de geene zyn, welke men eyscht. De reden daar van is zeer gemakkelyk te vinden, wanneer men zig te binnen brengt (1 Deel Art. XLVIII.) dat de overeenkomstige figuuren tot elkander zyn, gelyk de vierkanten hunner gelyk-aartige zyden.

Fig. 7 en 8. Een *Polygone* te maaken, die in een gegeeven rede met een overeenkomstige *Polygone* is.

XXXII.

Als men een Cirkel wil maaken, welkers inhoud tot die van eene gegeeve Cirkel was, als X, tot Y, moet men een vierkant zaamenstellen, dat tot het vierkant der straal van deeze eerste Cirkel is, als X tot Y, want dan zal de zyde van dit nieuwe vierkant, de straal van de geëyschte Cirkel zyn.

Een Cirkel te maaken die in een gegeeven rede tot een andere Cirkel is.

XXXIII.

Zie hier nog een eigenschap der Cirkel, getrokken uyt die geene, welke de

voor-

voorgaande werkſtukken verſchaft heeft.

Fig. 9. Zoo men uyt een punt A, buyten een Cirkel genoomen, twee willekeurige regte lynen ABC, ADE, trekt, die yder den omtrek in twee punten ſnyden, en dan de regten CD, BE, trekt; zullen de driehoeken ACD, AEB, overeenkomſtig zyn, dewyl de hoek A, aan de twee driehoeken gemeen is, en dat ten anderen, de hoeken aan den omtrek C, en E, gelyk zyn. Maar, uyt deeze gelykvormigheid der driehoeken CAD, EAB, volgd, dat de vier lynen AB, AD, AE, AC, evenredig zyn; en by gevolg, dat de Regthoek der twee regte AB, AC, gelyk is aan de regthoek der twee regte AD, AE; dat ook dus kan uytgedrukt worden. Zoo men uyt eenig punt A, buyten een Cirkel genoomen, twee willekeurige regte lynen AC, AE, trekt, die de Cirkel overdwarſchen, zal de Regthoek van de regte AC, met zyn uytwendig deel AB, gelyk zyn aan de Regthoek van de regte AE, met zyn uytwendig deel AD.

Zoo men uyt een punt, buyten een Cirkel genoomen, twee lynen trekt, die haar overdwarſchen, zullen de Regthoeken deezer twee regte door haar uytwendige deelen gelyk zyn.

XXXIV.

Wanneer de regte, die uyt het punt A gaat, in plaats van den Cirkel te ſnyden, dezelve alleenlyk aanraakt, even als AF, wordt de voorgaande eigenſchap in deeze veranderd: Het vierkant van eene raaklyn AF, is gelyk aan de regthoek, voortgebragt door de ſnylyn AE, en zyn uytwendig deel AD. Dit is ligtelyk te betoogen. Want, indien men de regte AF, die de Cir-

Het vierkant van de raaklyn is gelyk aan de regthoek van de

Cirkel aanraakt, als een lyn aanmerkt, die dezelve in twee oneindig naby geleegene punten doorſnyd, zyn de lynen AB AC, niet anders, dan een zelve lyn AF, en men heeft, in plaats der Regthoek van AB, met AC, het vierkant van AF.

ſnylyn met zyn uytwendig deel.

XXXV.

Fig. 10. Uyt een gegeeven punt buyten een Cirkel, een raaklyn te trekken.

Schoon de *propoſitie*, die in de voorgaande Afdeeling betoogd is, ons den inhoud van het vierkant der raaklyn AF, doet zien, leerdt ze ons egter niet, op wat wyze, deeze raaklyn uyt het gegeeven punt A, moet getrokken worden. Om dezelve te trekken, moet men zig erinneren, (Art. XIX.) dat de ſtraal FG, perpendiculair op de raaklyn FA, is. Dan werdt 'er niets vereyſcht, dan op de gegeeven Cirkel zulk een punt F, te vinden, dat de hoek AFG, regt zy. Derhalven, wanneer men op AG een halve Cirkel beſchryft, zal het punt, daar ze de Cirkel FKO ſnyden zal, (Art. XIII.) het gezogte punt F, zyn.

BEGINZELEN
DER
GEOMETRIE.

VIERDE DEEL.

Van de manier, om de lighaamen en haare oppervlaktens te meeten.

DE beginzelen, welke we in de drie eerſte deelen deezes werks ter neder geſteld hebben, zouden voldoenende konnen zyn, tot het oploſſchen van *Problemâ's*, welke veel moeijelyker waren dan dezulke, die we vervolgens zullen voorſtellen; maar het is overeenkomſtiger met de orde, welke we tot hier toe gevolgd hebben, dat we thans overgaan, tot de maat der Lighaamen; dat is te zeggen, der bepaalde uytgeſtrektheden, die, drie afmeetingen,

gen, te weeten, lengte, breedte, en diepte hebben.

Dit onderzoek; is zonder twyffel, een der eerfte Voorwerpen geweeft, welke den aandagt der Meetkundige tot zig getrokken heeft. Men zal by voorbeeld, hebben willen weeten, hoeveel Arduin fteenen 'er in eene muur zyn, welkers hoogte AD, zoo wel, als derzelver breedte AB, en diepte, of dikte BG, bekendt waren. Men zal zig voorgefteld hebben de hoeveelheid van water te bepaalen, welke in een gragt of Waterbak bevat is. Of wel, men zal het Lighaam van een toorn, van een gedenkpylaar, van een huys, klokketoren &c. hebben willen vinden. Plaat XI. Fig. 1. Fig. 2.

Om de figuuren, die drie afmeetingen hebben op dezelfde wyze te verhandelen, als we die, welke 'er niet meer dan twee hebben, verhandeld hebben, zullen we beginnen, met die lighaamen, welke door vlaktens eindigen, te onderzoeken.

Wy behoeven niet te fpreeken, van de wyze om de oppervlaktens deezer lighaamen te meeten, dewyl ze niet anders, dan verzaamelingen van Regtlynfche figuuren zyn konnen, en dat derhalven, haare maat van dat gene, 't welk in het eerfte Deel gezegd is, afhangd.

I.

Om de vaftheid der lighaamen te meeten, is het natuurlyk, haar alle, tot het eenvoudigste Lighaam over te brengen, even als men, om de oppervlaktens te meeten, hun alle, tot het vierkant gebragt heeft. Maar het eenvoudigste Lighaam is de *Cubicq*; die inderdaad, onder de Lighaamen is, 't geen het vierkant is, onder de oppervlaktens: dat is te zeggen, dat het een ruymte *abcdefgh* is, welkers lengte, breedte, en diepte gelyk zyn; of, 't geen op 't zelfde uytkoomt, het is een figuur, die door zes gelyke oppervlaktens, welke vierkanten zyn, bepaald wordt.

De *Cubicq* is een lighaamlyke figuur, door zes vierkanten bepaaldt. Het is de gemeene maat der lighaamen.

Fig. 3.

De zyde eener *Cubus*, noemdt men, de zyde der vierkanten; die hem tot oppervlaktens dienen.

Door een cubicqvoet, verstaat men een *Cubus*, welkers zyde, de grootte van een voet heeft, op dezelfde wyze, als men, door een Cubicqduym een *Cubus* verstaat, welkers zyde, de uytgestrektheid van een duym heeft &c.

II.

De Lighaamen, die het allermeest voorkoomen om gemeeten te worden, zyn figuuren, welke op de wyze van ABCD EFGH door zes Regthoekige oppervlaktens ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GEFH, ABGH, bepaald worden. Men noemdt deeze lighaamen *Paralelepipedæs*, dewyl haare tegengestelde oppervlaktens die in alle haare punten even verre van elkander staan, even gelyk de lynen,

Fig. 1.

Het *Parallepipedum*, is een lighaam, door zes Regthoeken bepaald.

nen, wanneerze overal in een gelyke afstand van elkander zyn, parallellen genaamd worden.

De parallellevlaktens zyn zulke, die altoos, dezelfde afstand tusschen hun beide hebben.

III.

Indien men nu, Lighaamen van dit soort meeten wil, zal de overeenkomst van dit *Problema*, met dat, in het welke de meeting der regthoekige oppervlaktens geëyscht wordt, een gemakkelyk middel om zulks uyt te voeren, verschaffen.

Maat van de *paralelepipeda*.

Men moet beginnen, met de lengte A D, de breedte AB, en de diepte BG, van de voorgestelde figuur, 't zy door voeten, of duymen &c. yder afzonderlyk te meeten. Vervolgens vermenigvuldigd men den een, met den ander der drie getallen welke men zal gevonden hebben; en dan zal het *product* dat uyt deeze vermenigvuldiging voort zal koomen, uytdrukken, hoe veel Cubicqvoeten of duimen in het *Paralelepipedum* (agtervolgens dat desselfs afmeetingen, door voeten of duymen zullen gemeeten geweest zyn) bevat zullen weezen. Wy zullen, om de wyze op welke deeze bewerking gedaan wordt aan te wyzen, daar van een voorbeeld geeven.

Laaten we onderstellen, dat de lengte AD, van 6, de breedte AB, van 5, en de diepte BG, van 4, voeten zy; dan zegge ik, zal de Regthoek ABCD, (I Deel, Art. XI.) 6 maal 5, of 30 vierkante voeten bevatten. Wanneer men zig vervolgens verbeeld, dat de lynen BG, CF, DE, AH, die alle gelykelyk, de diepte van het lighaam meten, yder in vier gelyke deelen verdeeld zyn, en dat men door de overeenkomende punten van verdeeling, even zoo veel vlaktens, die parallel aan elkander zyn, doet door gaan; dan zullen deeze vlaktens, het voorgestelde *Parallelepipedum* in vier andere *parallelepipedæ* verdeelen, die yder, de diepte van een voet hebben zullen, en te gelyk, alle met elkander overeenkomstig zyn zullen. Nu; de enkele beschouwing van de figuur, doet zien, dat de eerste deezer *Parallelepipedæ*, 30 Cubicq voeten bevat, dewyl derzelver uyterlyke oppervlakte ABCD, 30 vierkante voeten begrypt. Derhalven zal het geheele lighaam ABCDEFGH, 4 maal, 30, of 120 Cubicqvoeten bevatten.

IV.

Wy zullen ons niet ophouden, met de verscheidene middelen, die men in 't werk kan stellen om *parallelepipedæs* zaamen te stellen, uyt te leggen; dewyl deeze middelen voor het grootste gedeelte zoo gemakkelyk te vinden zyn, dat 'er niemant is, welke zig dezelve niet verbeelden kan. Maar we zullen de volgende vorming der *parallelepipedæ*, voorstellen, die nutter, dan alle de andere is.

Indien men begrypt, dat een vierkant

of

of Regthoek ABGH evenwydig aan zig zelven indiervoegen bewoogen wordt, dat zyn vier hoeken A, B, G, H, yder, een der vier lynen AD, BC, GF, HE, die perpendiculair aan het vlak der Regthoek ABGH zyn, doorloopt; zal deeze Regthoek, door de beschreeve beweeging het *Parallellepipedum* ABCDEFGH, maaken.

De *Parallellepipeda*, worden gemaakt door een Regthoek die evenwydig aan zig zelven, bewoogen wordt.

V.

Het is byna nutteloos, te berigten, dat we door een lyn, die perpendiculair op een vlak is, een lyn verstaan, die nog na de een, nog na de ander van de zyden van dit vlak heldt; en dat van 's gelyken, een vlak dat niet meer na den eene, dan na den andere zyde, op een tweede vlak heldt; gezegd wordt, perpendiculair op dit tweede vlak te zyn; wyl deeze twee bepaalingen overeenkomstig zyn met die gene, welke we van een lyn, die perpendiculair op een andere was, gegeeven hebben.

De lyn, die perpendiculair op een vlak is, is die gene, welke nageen der zyden van dit vlak heldt.

Het is het zelfde, met een vlak, dat perpendiculair op een ander vlak is.

VI.

Maar hier uyt volgd, dat de lyn AB, die perpendiculair op het vlak X is, perpendiculair moet zyn op alle de lynen, die uyt het punt A van deeze lyn voortkomen, en in dit zelfde vlak zyn. Want het is klaarblykelyk, dat, zoo zy op een deezer lynen helden, zy naar eenige zy de

Fig. 4.

De lyn, die perpendiculair op een vlak is, is perpendiculair op alle de lynen van dit vlak, welke uyt het punt daar zy valdt, voortkoomen.

de van het vlak neigen, en derhalven niet perpendiculair zyn zoude.

VII.

Om zig, op een zeer bevattelyke wyze voor te ſtellen, hoe de lyn AB, perpendiculair op alle de lynen zyn kan, die uyt derzelver uyteinde A voortkoomen, behoefd men alleenlyk op de volgende wyze een verheeven figuur te maaken.

Men maakt van eenige effen, en ligt vouwbaare ſtof, by voorbeeld van bordpapier, een Regthoek FGDE, die door
Fig. 5. de regte AB, welke perpendiculair op de zyden ED, FG, is, in twee gelyke deelen verdeeld zy: vervolgens vouwdt men deeze Regthoek indiervoegen, dat de vouw, langs de lyn AB loopt, en dan
Fig. 6. brengt men het, dus gevouwen zynde, over op het vlak X. Het is klaarblykelyk, dat, welk de opening ook zy, die men aan de twee deelen FBAE, GBAD, van de gevouwene Regthoek EADGBF, geeft, dat zegge ik, deeze twee deelen, altoos gevoegd zullen blyven op het vlak X, zonder dat de lyn AB, met betrekking tot dit vlak van ſtelling veranderd. Deeze Regte AB, zal derhalven perpendiculair op alle de lynen zyn die uyt zyn einde A voortkoomen, en in het vlak X zullen zyn, dewyl de zyden AE, AD, der gevouwen Regthoek, vervolgens, door de gezegde beweeging,

op

op yder deezer lynen, gevoegd zal worden.

VIII.

Uyt de voorgaande zamenstelling volgd een zeer gemakkelyke manier om uyt een punt, op een vlak gegeeven, een lyn, die perpendiculair op dit vlak is, op te regten: als ook, om uyt een punt, buyten dit vlak genomen, een lyn te laaten nedervallen, welke perpendiculair op dit vlak zy. Want, als het voorgestelde punt in het vlak zelve is, by voorbeeld in A, of, als het buyten het vlak is, gelyk in H, zal men de Regthoek EFBG DA altyd op het vlak X konnen doen voortgaan, tot dat de vouw AB, het gegeeven punt aanraakt, en AB, zal in beide deeze gevallen de geëyschte perpendiculair zyn.

Fig. 7. Eenvoudige manier, om lynen op te regten, of te laaten nedervallen, die perpendiculair op deeze vlakken zyn.

IX.

Daar uyt volgd ook, dat een lyn AB, perpendiculair zal zyn, op een vlak X, zoo dikwyls, als ze op twee lynen van dit vlak AE en AD, perpendiculair zyn zal. Want als dan zal AB, konnen aangemerkt worden, als de vouw van eene Regthoek, welkers eene zyde op AE, en de andere op AD, gevoegd was. Maar deeze vouw, zoude niet konnen nalaaten perpendiculair te zyn op het vlak X.

Een lyn zal perpendiculair op een vlak zyn, als ze perpendiculair is op twee lynen van dit vlak, die uyt het punt daar ze nedervallen, voortkomen.

X.

Manier, om een vlak, perpendiculair op een ander op te regten.

Indien men op een lyn KL, een vlak wil opregten, dat perpendiculair op het vlak X zy, in welke deeze lyn begreepen is; zal men zig ten dien einde, ook van de gevouwene Regthoek GBFEAD, bedienen konnen. Want alles wat men zal behoeven te doen, is, dat men, op de lyn KL, de zyden AD, van een der deelen ADGB, deezer gevouwen Regthoek ftelle, dewyl het vlak van dit gedeelte ADGB, dat gene zyn zal, welk men eyfcht.

XI.

Fig. 8.

Men kan ligtelyk zien, dat, als men een derde vlak Y, op de twee zyden EB, en BG, van dezelfde gevouwen Regthoek ftelde, dat zegge ik, dit vlak Y, ook perpendiculair op de lyn AB, en by gevolg parallel aan het vlak X zal zyn.

Een vlak, parallel, aan een ander te trekken.

Indien men derhalven, op een vlak X, drie perpendiculairen EF, AB, DG, van een gelyke lengte, en die niet in een regte lyn gefteld zyn, opregt; zal het vlak Y, dat door de drie punten F, B, G, zal door gaan, parallel zyn aan het vlak X.

XII.

Wanneer twee vlakken niet parallel zyn, zal men, wanneer men zig van onze gevouwen Regthoek bediend, gemakkekelyk de hoek konnen kennen, die ze tusschen hun beiden maaken zullen. Om dit te betoogen, zullen we, een der twee deelen ABGD, deezer Regthoek, op het vlak X, stellen. Het is immers klaarblykelyk, dat de hoek EAD, of zyn gelyke FBG, de helling van het vlak EABF, op het vlak DABG, meeten zal. Indien men nu aanmerkt, dat AB, de gemeene snyding deezer vlakken is, en dat EA, en AD, perpendiculair op AB zyn, zal men daar uyt de volgende Regel trekken. Fig. 9.

Twee vlakken, die niet parallel zyn, gegeeven zynde, moet men eerst de regte lyn vinden, die haar gemeene snyding is; vervolgens moet men uyt eenig punt deezer lyn twee perpendiculairen trekken, die yder, in een deezer vlakken zyn; en de hoek die deeze perpendiculairen tusschen hun beiden maaken zullen, zal de hoek meeten, welke door deeze twee gegeeven vlakken gemaakt wordt.

De helling van een vlak, op eenander, te meeten.

XIII.

Gelyk men, zonder moeite gewaar wordt, dat, geduurende de beweeging, van ABFE, rondsom de vouw AB, de regte AE, welkers uyterste E, een Cirkelboog ED beschryft, nooit buyten het vlak EAHD, dat perpendiculair op het vlak X is, gaat; en dat de helling van de regte EA, op het vlak X, niet anders is dan de hoek EAD, ontdekt men ook

De helling van een lyn op een vlak te meeten.

zeer

zeer gemakkelyk, dat de neiging eener Regte EA, op het vlak X, gemeeten wordt door de hoek EAH, gemaakt tusſchen deeze lyn en de lyn AD, die door A, en het punt van het vlak X, gaat, daar de perpendiculair EH, uyt een punt E, van de regte AE, nedervaldt.

XIV.

De enkele beſchouwing van de figuur, van welke men zig in de voorgaande Afdeeling bediende, verſchaft een nieuw hulpmiddel, om, uyt een punt E, buyten een vlak X zynde, een lyn EH, die perpendiculair op dit vlak is, te laaten nedervallen.

Nieuwe manier om een perpendiculaire lyn, op een vlak te laaten nedervallen.

Hebbende een lyn BAS, in het vlak X, getrokken, moet men uyt het gegeeven punt E, de lyn EA, perpendiculair op deeze lyn laaten nedervallen. Dit gedaan zynde, moet men uyt het punt A, daar deeze perpendiculair valdt, in het vlak X, de lyn AD, perpendiculair op AB, op regten, en als men vervolgens, uyt het punt E, op de regte AD, de perpendiculair EH, laat nederdaalen, zal deeze lyn, de perpendiculair op het vlak X zyn.

XV.

Tweede manier om op een gegeeven vlak, een perpendiculair op te regten.

Daar uyt, trekt men een tweede wyze om op een vlak X, uyt een gegeeven punt M, op dit vlak, een perpendiculair MN op te regten.

Heb-

Hebbende uyt een punt E, genoomen buyten het vlak X, de lyn EH, perpendiculair op dit vlak, laaten nedervallen, moet men door het gegeeven punt M, de regte MN, parallel aan HE, trekken, en deeze zal perpendiculair op het vlak X, zyn.

XVI.

Na het *Parallelepipedum*, is het eenvoudigste lighaam, de regte *Prisma*. Dit is een figuur ABCDEFGHIKLM, welkers twee tegengestelde, en evenwyde basen, twee gelyke *polygonen* zyn, zoodanig geplaatst, dat de zyden GF, FE &c. van de eene, evenwydig zyn aan de zyden BC, CD, van de andere, en welkers andere oppervlaktens, Regthoeken ABGH, BGFC, zyn &c.

Fig. 10. De regte *Prisma* is een lighaamlyke figuur, welkers twee tegengestelde basen, twee gelyke *polygonen*, en de andere oppervlaktens, regthoeken zyn.

XVII.

De Meetkundige onderstellen deeze figuuren even als de *paralellepipedæ* gevormd te zyn, door eene basis ABCDLM, die evenwydig aan zig zelven bewoogen wordt, indiervoegen dat zyne hoeken A, B, &c. perpendiculaire lynen op het vlak der basis volgen.

Vorming der regte *Prisma*.

XVIII.

Om de verschillende soorten van regte *Prisma's* te onderscheiden, voegd men 'er de naam der *Polygoon* die haar tot basis diend, by. De *Hexagonaale Prisma*, by

voor-

voorbeeld, is die, wel ers basis een *Hexagone* is.

XIX.

Twee *Prisma's*, die gelyke basen hebben, zyn in dezelfde reden als haare hoogtens.

Om de manier te vinden om alle soorten van regte *Prisma's* te meeten, moet men in de eerste plaats aanmer en dat van twee regte *Prisma's*, welkers basen gelyk zyn, die gene, welke de grootste hoogte heeft, in het lighaamlyke in dezelfde reden grooter is, als zyn hoogte grooter zal zyn.

XX.

Twee *Prisma's*, die dezelfde hoogte hebben, zyn in dezelfde reden als haare basen.

Vervolgens moet men aanmerken, dat twee regte *Prisma's*, die dezelfde hoogte hebben, maar van welke de eene een basis heeft, die de basis van den andere een zeeker getal maalen bevat, in dezelfde reden tot elkander, als haare basen zyn zullen. De waarheid deezer *Propositie*, wordt men ligtelyk gewaar, wanneer men de vorming der *Prisma's* in Art. XVII uytgelegd, overweegd.

Fig. 10 en 11.

Laaten *abcdefghiklm*, en ABCDE FGHIKLM twee *Prisma's* zyn, die dezelfde hoogte hebben; en laat de basis *abcdlm*, der kleinste, by voorbeeld, de vierde van de basis ABCDLM zyn. Dewyl de twee *Prisma's* door de beweeging deezer twee basen voortgebragt zyn, volgd daar uyt, dat een na believen genomen vlak, dat parallel, aan 't vlak zal zyn, waar in de twee basen gevonden wor-

worden, in de twee *Prismâ's* twee *Polygoonen* snyden zal, waar van ieder aan de basis der *Prisma* daar hy in gesneden is, gelyk zyn zal: dat is te zeggen, dat de snyding der groote *Prisma* altoos het vierdubbel van die der kleine zal zyn. Derhalven zal de *Prisma* ABCDEFGHIKLM, aangemerkt konnen worden, als zamengesteld zynde uyt snydzels, die alle het vierdubbel van die der *Prisma a b c d e f g h i k l m* zyn; en by gevolg, zal het lighaam des eersten *Prisma*, het vierdubbel van die der tweede zyn.

XXI.

Na deeze twee aanmerkingen, zal het niet moeijelyk zyn, de volgende regel te maaken, om alle regte *Prismâ's* te meeten.

De maat der regte *Prisma*, is het vermenigvuldigde van zyn hoogte, met zyne basis.

Eerst moet men in vierkante voeten of duymen de inhoud van de voorgestelde *Prisma* meeten; vervolgens het getal dat men zal gevonden hebben, met het getal der voeten of duymen die de hoogte der *Prisma*, bevatten zal, vermenigvuldigen, en dan zal het *Product*, het getal der Cubicq voeten of duymen geeven, welke in de voorgestelde *Prisma* bevat zullen zyn, en dit *Product* zal by gevolg, derzelver maat zyn.

XXII.

De schuynse *Prismâs* verschil-

De naam van *Prisma* wordt ook aan lighaamen gegeeven (Fig. 13) die twee ge-len daar in van de regte, dat de oppervlaktens, die regthoeken zyn in deeze, *paralellogrammen* zyn in geene.

gelyke veelhoekige basen, even als de voorgaande hebben, maar welkers andere oppervlaktens, in plaats van Regthoeken, *Paralellogrammæ* zyn. Om deeze nieuwe *Prismâ's*, van de zulke waar van we nu spreeken, te onderscheiden, noemdt men haar schuynsche *Prismæ* in tegenstelling der andere, die men regte noemdt.

XXIII.

Vorming der schuynse *Prismâs.* Fig. 13.

Men begrypt deeze schuynsche *Prismâs* als gevormd te worden door een basis *a b c k i*, die, evenwydig aan zig zelven bewoogen wordt, en wel indiervoegen, dat haare hoeken, evenwyde lynen *a g*, *b b*, *c d*, &c. volgen, die zig buyten het vlak der basis verheffen, en daar op niet perpendiculair zyn.

XXIV.

De overeenkomst die 'er tusschen de vorming der schuynsche, en die der regte *Prismâ's* van welke we in de XVII Afdeeling gesprookenhebben, is, geeft op een gemakkelyke wyze, de maat van het Lighaamlyke der schuynsche *Prismâ's*. Want, indien men zig op de zyde van een schuynsche *Prisma a b c d e f g b i k*, een regte ABCDEFGHIK, die dezelfde basis heeft, verbeeld, en als deeze twee *Prismâ's*, tusschen twee evenwyde vlakken begreepen zyn, zal men zien, dat het lighaamlyke deezer twee lighaamen volstrekt, het zelfde zal zyn.

Fig. 12 en 13.

Want,

Want, indien men door eenig punt P, der hoogte, een vlak, dat evenwydig aan de basis is, doet gaan, zullen de snydingen NOPQR, *nopqr*, die dit vlak in yder der twee *Prismâ's* vormen zal, als de gelyke basen ABCKI, *abcki*, konnen aangemerkt worden, die door de beweeging welke deeze twee *Prisma's* maakt, in NOPQR, *nopqr*, gekoomen zyn: en dus, zullen deeze snydzels, gelyke veelhoeken zyn.

Maar, zoo alle verbeeldelyke snydzels, die men in deeze twee *Prismâ's* door gelyke snydende vlakken maaken kan, gelyk zyn; zullen de verzaamelingen dezer snydzels ook gelyk zyn.

Deeze *Propositie* wordt gemeenlyk dus uytgedrukt. De schuynsche *Prismâ's* zyn aan de regte gelyk, wanneer ze een gelyke basis, en dezelfde hoogte hebben. Men noemdt de hoogte der *Prisma*, de perpendiculair die uyt het bovenste, op het onderste vlak, of desselfs verlenging is neêrgevallen.

De schuynse *Prismâ's*, zyn aan de regte gelyk, wanneer ze de zelfde basis, en hoogte hebben.

Het is even zoo gelegen met de schuynse *paralellepipedas*, betrekkelyk tot de regte ligchaamen van die naam.

XXV.

En, gelyk de *paralellepipedæs* in 't getal der *Prismâ's* moeten gesteld worden, moet men het zelve, dat we van de *Prisma's* gezegt hebben in de schuynsche *paralellepipedæs* verstaan, dat is te zeggen, in figuuren als *abcdefgh**, voortgebragt door een vierkant, een Regthoek, of zelfs een *Paralellogram* indiervoegen te

* Plaat XII. Fig. 1 en 2.

 doen

doen beweegen, dat derzelver vier hoeken, paralelle lynen volgen, die zig schuyns op de basis verheffen. Dus zal het schuynse *paralellepipedum a b c d e f g h*, gelyk zyn aan het regte *paralellepipedum* ABCDEFGH, zoo de basis *a b g h*, dezelfde, of in dezelfde oppervlakte als de basis ABGH is, en zoo de nedergevallene perpendiculair uyt het vlak *d c f e*, op het vlak *a b g h*, gelyk is aan de perpendiculair die uyt het vlak DCFE, op het vlak ABGH gevallen is.

XXVI.

Gezien hebbende, alles wat de *paralellepipedæs* en *Prisma's* aangaat, zullen we nu de *piramiden*, dat is te zeggen, de lighaamen, die, op de wyze van ABCDEFG, door een zeeker getal van driehoeken, die alle uyt een zelfde toppunt A voortkoomen, en op een veelhoekige basis BCDEFG eindigen, beslooten zyn,
Fig. 3. onderzoeken. Dit soort van lighaamen moet noodzaakelyk in aanmerking genoomen worden, niet alleen om dat men ze in het zaamenstellen van gebouwen, en andere werken ontmoet, maar ook, om dat alle lighaamen, door vlakken bepaald, verzaamelingen van *piramiden* zyn, even als de regthoeken, verzaamelingen van driehoeken zyn. Om zig daar van te verzeekeren, behoefd men alleenlyk, uyt een, in het binnenste des lighaams, willekeurig genoomen punt, ly-

lynen, tot alle de hoeken deezer lighaamen te trekken.

XXVII.

Men onderſcheid de *piramiden* van elkander, even als de *Priſmâ's*, door de naam der figuur, die haar tot baſis diend.

XXVIII.

Wanneer de *Piramide* een regelmatige figuur voor baſis heeft, en als zyn toppunt regtſtandiglyk aan het middenpunt H, van zyne baſis, even als in de 3 Figuur, beantwoord, wordt die *piramide* als dan regte genoemdt: hy wordt integendeel, ſchuynſe genoemdt, wanneer het toppunt niet perpendiculair op het middenpunt der baſis is, gelyk in de 5 figuur.

XXIX.

Om de manier, (om alle ſoorten van *Piramiden*, zoo wel regte, als ſchuynſe te meeten) te ontdekken, zullen we omtrent deeze figuuren, eerſt eenige algemeene aanmerkingen (tot welke men, door de kennis van de eigenſchappen der *Priſmâ's* geleid wordt) ter nederſtellen.

Wanneer men de gelykheid der *Priſmâ's*, die dezelfde baſis, en hoogte hebben, in aanmerking neemdt, moet men zig natuurlyk te binnen brengen, dat de *paralellogrammen*, wanneer ze dezelfde vereyſchtens hebben, ook gelyk zyn; en dat het even zoo, met de driehoeken gelegen is. Als deeze drie waarheden zig gelykelyk aan den geeſt vertoonen, moet ons de evenredigheid doen gelooven dat de eigenſchappen, die aan de *paralellogrammen*, en driehoeken gemeen zyn, zulks ook kunnen zyn aan de *Priſmâ's* en *piramiden*: Men moet derhalven denken, dat de *piramiden*, die dezelfde baſis en hoogte hebben, dezelfde lighaamlykheid hebben.

XXX.

De volgende aanmerkingen konnen deeze gedagten beveſtigen.

Fig. 4. en 5. Laaten ABCDE, *a b c d e*, twee *piramiden* zyn, welkers hoogtens AH, *a b*, dezelfde, en welkers baſen, twee gelyke figuuren, by voorbeeld, twee gelyke vierkanten BCDE, *b c d e*, zyn. Indien men begrypt, dat deeze twee *piramiden*, door een oneindig getal van vlakken die aan haare baſen evenwydig zyn, doorſneeden worden, zal men zig zonder moeite konnen verbeelden, dat deeze ſnydzels der *piramide*, gelyke vierkanten IKLM, *i k l m* geeven zullen, en dat, by gevolg, de twee *piramiden*, aangemerkt konnen worden, als verzamelingen van een zelfde getal ſnydzels, die in deeze twee *piramiden*, yder aan zyne overeenſtemmende, gelyk zullen zyn. Derhalven moet men beſluyten; de ſom der ſnydzels is van weêrzyden, dezelfde: dat is te zeggen; dat de twee *piramiden*,

de

dezelfde lighaamlykheid hebben.

Zoo de basen van de beide *piramiden*, andere regelmaatige, of onregelmaatige veelhoeken BCDEF, *bcdef*, die aan elkanderen gelyk zyn, waren, is 'er niemandt, die niet denken zoude dat alle de snydzels IKLMN, *iklmn*, van den een en ander deezer *piramiden* aan elkander zouden moeten gelyk zyn, en die by gevolg daar uyt niet besluyt, dat de *piramiden* altoos dezelfde lighaamlykheid zouden hebben, wanneer ze dezelfde basis, en dezelfde hoogte hadden. Fig. 6. en 7.

XXXI.

Dit alles kan men zig nu, na de *demonstratie* die we van de gelykheid der *Prisma's* die dezelfde hoogte hebben, gegeeven hebben, ligtelyk verbeelden; ondertusschen zyn de eenvormigheid tusschen het snydzel eener *piramide* IKLMN; en de basis BCDEF, en de gelykheid der snydzels IKLMN, en *iklmn*, van dat soort van *propositiën*, die, (hoewel vatbaar voor elk) een strikte *demonstratie* noodig hebben; maar om deeze *demonstratie* te vinden, is men verpligt, in verscheide aanmerkingen over de gelykvormigheid der lighaamlyke figuuren te treeden.

XXXII.

Laaten we wederom de *piramide* ABCDEF, neemen, en haar onderstellen, door een vlak IKLMN, dat evenwydig aan de basis is, doorsneeden te zyn. We zullen betoogen dat de snyding, door het vlak in de *piramide* gemaakt, een veelhoek is, volmaakt overeenkomstig met de veelhoek BCDEF, en dat de *piramide* AIKLMN, zelfs, geheel overeenkomstig is met de *piramide* ABCDEF, dat is te zeggen, dat de hoeken, die alle de lynen deezer twee figuuren vormen, wederzyds gelyk zyn; en dat alle de zyden van de kleine *piramide*, dezelfde betrekking tot elkander, als die der groote hebben zullen.

Waar in de gelykvormigheid van twee *piramiden* bestaat.

XXXIII.

Fig. 8.

Laaten we eerst aanmerken, dat zoo twee vlakken X en Y, parallel zyn, en als twee lynen ALD, AME, uyt een zelfde punt A voortkomende, deeze twee vlakken overdwarschen, de regten LM, DE, die de punten L, M, D, E, zaamenvoegen, parallel zullen zyn. De reden daar van, is, dat, zoo deeze twee lynen niet parallel waren, zy, wanneer ze verlengt wierden, elkander elders ontmoeten zouden; maar, indien ze elkander ontmoeteden, zouden de vlaktens in welke zy zyn, en buyten welke zy niet gaan kunnen, zoo veel verlengt zynde als noodig zyn zoude, elkanderen ook ontmoeten. Derhalven zouden ze niet, zoo als men onderstelde, parallel zyn.

In-

XXXIV.

Indien men dan onderſteld, dat het vlak IKLMN, aan het vlak BCDEF, parallel zy, zal daar uyt volgen, dat alle de lynen ML, LK, KI, IN, NM, parallel zullen zyn aan de lynen ED, DC, CB, BF, FE; en dat by gevolg, de driehoeken, ALM, AKL, AIK &c. overeenkomſtig zullen zyn met de driehoeken ADE, ACD, ABC &c. Als men een van de zyden deezer driehoeken, by voorbeeld AM, voor gemeene maat, of voor ſchaal van alle de zyden der kleine *piramide* neemt, terwyl de overeenſtemmende zyde AE, tot maat, aan de zyde der groote diendt, zal men zonder veel moeite, gewaar worden, dat de zyden ML, LK, KI &c. van de veelhoek IKLMN, evenredig zullen zyn aan de zyden ED, DC, CB &c. van de veelhoek BCDEFG. Fig. 6.

Men kan dan ook gemakkelyk zien, dat alle de hoeken IKL, KLM, &c. wederzyds gelyk zullen zyn aan de hoeken BCD, CDE, dewyl de eerſte door lynen, die paralel aan de zyden der tweede waren, gemaakt zullen zyn. Derhalven zullen de twee veelhoeken IKLMN, BCDEF, gelykvormig zyn.

XXXV.

Maar nadien de zyden AM, AL, AK &c. aan de zyden AE, AD, AC, &c. evenredig, en de hoeken ALM, ALK &c.

aan de hoeken ADE, ADC wederzyds gelyk zyn, zullen de twee *piramiden* AIK LMN, ABCDEF, uyt aanmerking van de gelykvormigheid der driehoeken AL M, ADE; ALK, ACD &c. geheel en al overeenkomſtig zyn.

XXXVI.

Eindelyk; indien men uyt het punt A, de lyn AH perpendiculair op het vlak op het welke de *Polygone* BCDEF, gemaakt is, trekt, en als Q, het punt is, waar in deeze perpendiculair, het vlak der *Polygone* IKLMN, ontmoet, is het klaar, dat de regte AQ, AH, de hoogtens der twee *piramiden* AIKLMN, ABC DEF zynde, in dezelfde reden tot elkander zullen zyn, als de gelyk-aartige zyden AM, AE, AL, AD, &c. of, 't geen op het zelfde uytkoomt, dat, zoo men de hoogtens AQ, AH, voor de maaten der twee *piramiden*, neemdt, de zyden AM, AL, &c. zoo veel der deelen van AQ, als de zyden AE, AD, &c. der deelen van AH, bevatten zullen.

XXXVII.

Fig. 6 en 7. Als men nu wederom, de twee *piramiden* ABCDEF, *abcdef*, te gelyk in aanmerking neemdt; zal men zien, dat de twee ſnydzels IKLMN, *iklmn*, gelykvormig zynde aan de baſen BCDEF, *bcdef*, die dezelfde zyn, aan elkander gelyk zyn. Daarenboven zal men zien, dat

dat deeze twee ſnydzels aan elkander gelyk zullen zyn, om dat de maaten deezer twee figuuren, gelyke regte lynen AQ, *aq*, hoogtens der *piramiden* AIKLMN, *aiklmn*, zyn.

Derhalven weet men alreede met zekerheid zonder de lighaamlykheid der *piramiden* te kennen, dat zy, als ze dezelfde hoogte en baſis hebben, gelyk zyn, even als we zulks in de XXIX Afdeeling, vermoed hadden.

De *Piramiden*, die dezelfde baſis, en dezelfde hoogte hebben, zyn gelyk.

XXXVIII.

Indien de baſen der twee *piramiden*, in plaats van dezelfde te zyn, alleenlyk een gelyke oppervlakte hadden, zouden de *piramiden* egter, een gelyke lighaamlykheid hebben: want, als *abcdef**, en *arst*, twee *piramiden* zyn, die dezelfde hoogte *ab* hebben, en men deeze twee *piramiden* door een vlak, dat evenwydig aan de baſis is, doorſnyd, is het klaar, dat 'er een zelfde betrekking van de oppervlakte *iklmn*, tot de oppervlakte *bcdef*, als van *uxy*, tot *rst*, zal zyn; dewyl *iklmn*, *bcdef*, volgens de XXXIV Afdeeling, overeenkomſtige figuuren zynde, niet anders (I Deel Art. XLVIII.) dan door haare maaten *aq*, *ab* &c. onderſcheiden zyn, en dat de figuuren *uxy*, *rst*, ook overeenkomſtig zynde, insgelyks niet anders dan door haare maaten, die ook de lynen *aq*, *ab*, zyn, verſchillen.

Twee *piramiden*, zyn ook gelyk, wanneer zy (een zelfde hoogte hebbende) baſen hebben, die, zonder gelykvormige veelhoeken te zyn, een gelyke oppervlakte hebben.

* Fig. 7 en 9.

Maar, als de basen *r s t*, *b c d e f*, een gelyke oppervlakte hebben, volgd, dat haare evenredige deelen *u x y*, *i k l m n*, gelyk zullen zyn. Derhalven zullen alle de snydzels der twee *piramiden a r s t*, *a b c d e f*, dezelfde uytgestrektheid hebben. Gevolgelyk zullen ook haare verzaamelingen, dat is te zeggen, de *piramiden* zelve, een gelyke lighaamlykheid hebben.

XXXIX.

Piramiden, die dezelfde hoogte hebben, zyn in dezelfde reden tot elkander, als hunne basen.

Als de basis *b c d e f*, der eerste *piramide*, eenige bepaalde reizen, de basis *r s t* bevattede, zoude het lighaam der eerste *piramide*, *a b c d e f*, even zoo dikwyls, het lighaam der tweede *a r s t*, bevatten. Want in dit geval (de basis *b c d e f*, in verscheiden deelen, waar van yder aan de basis *r s t* gelyk was, verdeeld zynde) zoude men de *piramide a b c d e f*, konnen aanmerken, uyt verscheide andere, die de deelen van *b c d e f* tot basis hadden, zaamengesteld te zyn. Nu zoude, volgens het beweezene in de voorgaande Afdeeling, yder deezer nieuwe *piramiden*, gelyk zyn aan de tweede *piramide a r s t*, Derhalven &c.

Indien de basis *r s t*, niet naauwkeuriglyk in de basis *b c d e f* bevat was, maar als deeze twee basen een gemeene maat X hadden, zoude men yder der twee basen *b c d e f*, *r s t*, in deelen, die gelyk waren aan X, verdeelen moeten, en dan zou men

men zien, dat de twee *piramiden* *a b c d e f*, *a r s t*, uyt zoo veele nieuwe *piramiden* (die alle gelyk aan elkander zyn) zaamengesteld, zouden zyn, als 'er deelen X, in de twee basen, zouden begreepen wezen. Derhalven, zouden de *piramiden* *a b c d e f*, *a r s t*, tot elkander zyn, gelyk haare basen.

En, wanneer de basen onmeetbaar waren, zoude men egter, in weerwil van dat alles, altyd konnen aantoonen, dat de *piramiden* in dezelfde reden, als haare basen, tot elkander zouden zyn; wanneer men zig van een betoog bediende, dat overeenkomstig met dat gene was, dat men (II Deel Art. XXVIII) in een gelyk geval gebruykte, om de figuuren, welkers zyden onmeetbaar waren, met elkander te vergelyken; dat is te zeggen, als men de maat X indiervoegen tot in 't oneindige verminderde, dat ze voor een gemeene maat, zoo van de basis *r s t*, als van de basis *b c d e f*, konde gehouden worden.

XL.

Gezien hebbende, dat de *piramiden*, die een zelfde hoogte hebben, in dezelfde reden, als hunne basen zyn, moeten we nu betoogen, dat de maat hunner lighaamlykheid, zeer weinige zwaarigheden behelscht.

Want, om alle *piramiden* te konnen meeten, is het genoeg, dat men slegts, een

een eenige meeten kan. Laaten we, by voorbeeld onderſtellen, dat we de *piramide* ABCDE konnen meeten, en dat men de maat der *piramide* ASTVXY van ons eyſcht, die nog dezelfde baſis, nog dezelfde hoogte, als de eerſte heeft. Om aan deezen eyſch te voldoen, begindt men met het maaken eener *piramide*, die aan de *piramide* ABCDE gelykvormig is, en de hoogte van de *piramide* ASTVXY heeft; 't geen zeer gemakkelyk te doen is, dewyl alles wat daar toe vereyſcht wordt, daar in beſtaat (Art XXXV.) dat men de zyden AB, AC, AD, AE &c. verlengdt, en haar, door het vlak LM NO, welkers afſtand AG van het toppunt A, aan de hoogte AO, gelyk is, doorſnyd.

Dit gedaan zynde, (dewyl we onderſteld hebben, dat men de *piramide* ABC DE meeten konde) is het klaarblykelyk, dat we ook, de *piramide* ALMNO, welke daar aan gelykvormig is, zullen konnen meeten. Want, welke de bewerkingen ook zyn moogen, door welke men de *piramide* ABCDE, meet, zal men altoos dezelfde bewerkingen moeten doen, om de gelykvormige *piramide* AL MNO te meeten,

Als we derhalven onderſtellen, dat de *piramide* ALMNO, gemeeten zy, zal haare maat, ook die, van de voorgeſtelde *piramide* ASTVXY, bepaalen. Want, door de voorgaande Afdeeling, zyn deeze ze *piramiden*, in dezelfde reden tot elkander, als haare basen LMNO, STVXY; en wy hebben ten anderen, in het tweede Deel aangeweezen, op wat wyze de overeenkomst deezer twee basen kan gevonden worden.

XLI.

Dewyl men derhalven, om alle verbeeldelyke *piramiden* te meeten, slegts een enkele *piramide* behoefd te konnen meeten, laaten we ons een zeer eenvoudige voorstellen; die men maaken kan, wanneer men uyt vier hoeken A, B, C, H, van een der vlaktens eener *Cubis* AB CDEFGH, vier lynen tot het punt O, het middenpunt deezer *Cubis*, dat is te zeggen, het punt, dat in een gelyke afstand van A, D, B, E &c. is, trekt. Fig. 12.

Men ziet, zonder moeite, dat deeze *piramide*, het zesde Deel der *Cubis* is, dewyl men de *Cubis*, in zes gelyke *piramiden* ontleden kan, als men ieder oppervlakte voor basis neemt. Nu is de waarde der *Cubis*, het vermenigvuldigde van de hoogte AF, met de basis ABCH. Derhalven zal men, om den inhoud der *piramide* te verkrygen, het vermenigvuldigde van AF, met ABCH, in zes gelyke deelen moeten verdeelen; of, 't geen op 't zelfde uytkoomt, men zal het zesde deel der hoogte AF, met de basis A BCH, moeten vermenigvuldigen, en, gelyk het zesde deel der hoogte AF, de der-

derde van de hoogte OL, der *piramide* OABCH, is, dewyl haare hoogte OL, de helft is van de zyde der *Cubis*, volgd, dat de maat der *piramide* OABCH, het vermenigvuldigde is van een derde haarer hoogte, met haare basis.

XLII.

Fig. 13. Laat ons nu onderstellen, dat men de *piramide* OKMNSTV te meeten heeft. Zoo moet men zig een *Cubis* verbeelden, welkers zyde AB, of AF, het dubbel van de hoogte OL, der voorgestelde *piramide* zy, en in deeze *Cubis*, moet men een *piramide* OABCH begrypen, welkers punt in 't Centrum is, en die een van de vlakken ABCH der *Cubis*, tot basis heeft. Deeze nieuwe *piramide* zal dezelfde hoogte, als de eerste hebben, en by gevolg, (Art. XXXIX.) zal de lighaamlykheid van OABCH, tot die van OR MNSTV, zyn, gelyk de basis ABCH is, tot de basis KMNSTV; maar, door de voorgaande Afdeeling, is het vermenigvuldigde van het derdendeel der gemeene hoogte OL, met de basis ABCH, de waarde van de *piramide* OABC: Derhalven zal het vermenigvuldigde van het derdendeel der gemeene hoogte OL, met de basis KMNSTV, den inhoud van de voorgestelde *piramide* OKMNSTV, zyn.

De Lighaamlykheid eener *piramide*, is het vermenig-

En hier uyt, ontleend men dit algemeen *Theorema*, dat een *piramide*, het vermenigvuldigde haarer basis met de der-

derde haarer hoogte, tot maat heeft.

vuldigde van haare basis, met de derde haarer hoogte.

XLIII.

Gelyk wy, in de XXI Afdeeling, gezien hebben, dat de lighaamelykheid eener *Prisma*, het vermenigvuldigde van zyne hoogte, met zyne basis is; is het klaar door de voorgaande Afdeeling; dat de *piramiden* altoos, de derdens der *Prismá's* zullen zyn, die dezelfde basis, en dezelfde hoogte hebben.

XLIV.

Na alle de Lighaamen, door vlaktens, bepaald, gemeeten te hebben, zullen we nu de weg tragten te ontdekken, welke men kan gevolgd hebben, om lighaamen, welkers oppervlaktens geboogen zyn, te meeten. En, gelyk we in het derde deel, niet anders, dan van figuuren gehandeld hebben, welkers omtrekken alleenlyk door een Cirkel gemaakt waren; zullen we thans ook niet anders, dan die lighaamen onderzoeken, welkers kromtens, kringswys zyn.

In het onderzoek deezer lighaamen, zullen we twee verschillende voorwerpen hebben; te weeten: de maat van haare oppervlaktens, en die van haare lighaamlykheid; want, deeze oppervlaktens, of geheel krom, of, voor een gedeelte krom, en voor een gedeelte vlak zynde, stellen ons buyten staat, om, (gelyk we, met de lighaamen, door

vlak-

vlakken bepaald, gedaan hebben) haare maat, tot het eerste Deel, over te brengen.

XLV.

Plaat XIII. Fig. 1. en 2

De Cylinder is een lighaam, bepaald door twee tegenover elkander gestelde en evenwyde basen, die beide, gelyke Cirkels zyn; en door een vlak, dat rondsom haare omtrekken gevouwen is.

De eenvoudigste van alle kromme lighaamen, is de *Cylinder*, dat is een lighaam ABCDEF, welkers twee basen, ABC, DEF, twee gelyke, en evenwydige Cirkels zynde, door een geboogen oppervlakte, welke men zig verbeelden kan door een vlak, dat rondsom haare omtrekken gevouwen is, gemaakt te worden, met elkander verbonden zyn.

Fig. 1.

Wanneer de twee Cirkels, indiervoegen geplaatst zyn, dat het Centrum G, des eersten, regtstandiglyk boven het Centrum H, des tweeden is, wordt de *Cylinder* regt genoemdt.

De *Cylinder* wordt integendeel, schuyns genoemd, wanneer de lyn, uyt de twee Centrums G en H, getrokken, met betrekking tot de vlakken ABC, DEF, schuyns is.

XLVI.

Men onderscheid ze, in regte, en schuynse *Cylinders* Fig. 2.

Vorming der *Cylinder*.

De Meetkundige vorming deezer lighaamen, (overeenkomstig, met die der *Prisma's* en der *paralellepipedæs* zynde, van welke men, in de XVII Afdeeling gesprooken heeft) bestaat daar in, dat men een Cirkel, evenwydig aan zig zelven, indiervoegen beweegen doet, dat alle haare punten, regte, evenwyde lynen be-

beſchryven, die zig, tot boven het vlak der Cirkel verheffen.

XLVII.

Tot het meeten eener regte *Cylinder*, dat dikwyls in de oeffening zeer noodzaakelyk is, zal men door de volgende manier geraaken konnen.

De twee omtrekken ABC, DEF, ieder in een zelfde getal van gelyke deelen verdeeld zynde, zoo, dat de punten van verdeeling net boven elkander ſtaan; en regte lynen, die de overeenſtemmende hoeken van de twee regelmaatige veelhoeken, die deeze bewerking geeft zaamenbinden, getrokken hebbende; is het klaar, dat men een *Priſma* zal hebben, welkers oppervlakte uyt zoo veele regthoeken, in de oppervlakte der *Cylinder* begreepen, zal zaamengeſteld zyn, als 'er zyden, in ieder der omtrekken ABC, DEF, begreepen zyn. Nu, alle deeze regthoeken, ieder een hoogte hebbende, gelyk aan AD, zal haare geheele maat, het vermenigvuldigde van de hoogte AD, met de ſom van alle haare baſen, dat is te zeggen, met den omtrek der *polygone*, die in de Cirkel DEF, of ABC, bevat, of beſchreeven is, zyn. Fig. 8.

Maar dewyl na maate dat het getal der zyden van die *polygone* grooter is, den omtrek der *polygone* meer en meer naderen zal, om aan den omtrek gelyk te weezen; en de oppervlakte van het *Priſma*

ſma om aan die van de *Cylinder* gelyk te weezen, zoo volgd daar uyt, dat, indien men zig verbeelde dat het getal der zyden deezer *polygone* oneindig wierd, de *Priſma* in 't geheel niet van de *Cylinder* verſchillen zal. De kromme oppervlakte der regte *Cylinder*, is derhalven gelyk aan eene Regthoek, welkers hoogte, A D, en wiens baſis, een regte lyn, gelyk aan den omtrek DEF, zyn zoude.

De kromme oppervlakte van een regte *Cylinder*, is gelyk aan een Regthoek, die dezelfde hoogte heeft, en welkers baſis aan zyn omtrek gelyk is.

Dit Voorſtel is dienſtig, om de hoeveelheid van ſtof te vinden, om een evendikke zuyl te omkleeden, of, om het binnenſte van eene ronde omtrek te behangen.

XLVIII.

Wat de oppervlakte der ſchuynſe *Cylinder* aangaat, die kan men op deeze wys niet meeten; dewyl men, in plaats van Regthoeken, *Paralellogrammen*, van verſcheide hoogtens hebben zoude. 't Is niet, dan door zeer zaamengeſtelde, en moeijelyke Leerwyzen, dat men ſlegts de naaſte grootte deezer oppervlaktens heeft konnen kennen; en de Werkſtukken van deeze ſoort zyn het onderwerp der grondbeginzelen niet.

XLIX.

Wat de lighaamlykheid der *Cylinders*, zoo regte als ſchuynſe betreft; niets is gemakkelyker, dan haare maat te vinden. Want het is klaarblykelyk, dat alles, wat

wat we van de *Prisma's* gezegd hebben, ook aan de *Cylinders* toebehooren zal, wanneer men de *Cylinders* als de laatste der *Prisma's* aanmerkt, welke men in haar beschryven kan.

De *Cylinders*, die dezelfde basis, en dezelfde hoogte hebben, zyn van een gelyke lighaamlykheid.

Dus zullen de *Cylinders* die dezelfde basis, en hoogte hebben, van een gelyke Lighaamlykheid zyn.

L.

De maat, van een *Cylinder*, is het vermenigvuldigde van zyne basis, met zyne hoogte.

En de maat eener *Cylinder*, zal in het vermenigvuldigde van zyne hoogte met zyne basis bestaan.

LI.

De *Conus*, is, na de *Cylinder*, het eenvoudigste kromme lighaam van alle. 't Is een figuur ABCDE, welkers basis, een Cirkel is, en wiens oppervlakte uyt een oneindig getal regte lynen, die alle van het toppunt A, tot den omtrek deezer Cirkel BCDE loopen, zaamengesteld is. Dit Lighaam kan men, als een *Piramide* aanmerken, welkers basis een Cirkel zyn zoude.

Fig. 3 en 4.

De *Conus*, is een soort van *Piramide*, welkers basis, een Cirkel is.

LII.

Men onderscheid hun, in Regte, en schuynse.

Indien (gelyk in de derde figuur) het toppunt A der *Conus*, perpendiculair, boven het middenpunt O, der basis staat, wordt de *Conus*, Regt genaamdt. Zy wordt schuyns genoemdt, indien het toppunt boven een punt der basis staat, dat van het middenpunt onderscheiden is, gelyk in de vierde figuur te zien is.

LIII.

Fig. 5. Om de oppervlakte eener regte *Conus* ABCDE, te meeten, moet men haar als de laatste *piramide* aanmerken, die men in haar beschryven kan; dat is te zeggen, dat men, den omtrek haarer basis BCDE, even als men den omtrek der *Cylinder* gedaan heeft, in een oneindig getal van kleine zyden verdeelen moet; want dan zal men (uyt alle de hoeken die in 't toppunt A, der *Conus* zyn, lynen getrokken hebbende) bevinden, dat de kegelswyze oppervlakte een verzaameling van een oneindig getal kleine gelykbeenige driehoeken is, welkers hoogtens gelyk zyn aan de zyde AB, der *Conus*, en welkers basen, alle zaamengenoomen, gelyk zyn aan den omtrek BCDE; waar uyt gemakkelyk te zien is, dat de maat deezer oppervlakte gevonden zal worden, wanneer men de helft van AB, met den omtrek BCDE vermenigvuldigd.

De oppervlakte eener Regte *Conus*, wordt gemeeten, door het vermenigvuldigen van zyn halve zyde, met den omtrek zyner basis.

LIV.

Indien men zig nu te binnen brengt, dat (III Deel Art. X.) de oppervlakte eener *Sector*, deezer Cirkel, gelyk is, aan het vermenigvuldigde van de boog deezer *Sector*, met de helft der straal, zal men zien, dat men, om de regte *Conus* ABCDE, met een buygbaare oppervlakte, by voorbeeld bordpapier, te omkleeden, een *Sector* der Cirkel moet neemen, welkers

kers ſtraal aan AB; en wiens boog, aan den omtrek BCDE, gelyk is.

Het ontwindſel eener *Conus*, is een *Sector* des Cirkels.

LV.

Wanneer de *Conus* ſchuyns is, is de maat van haare oppervlakte, even als die der ſchuynſe *Cylinder*, zelfs, op een naby koomende wyze, zeer moeijelyk te vinden; en dit is ook een *Problema*, dat geen plaats in Beginzelen hebben moet.

LVI.

Wat de Lighaamlykheid der Kegels, zoo regte als ſchuynſe aangaat; die kan men als de laatſte der *piramiden*, welke men in haar beſchryven kan, aanmerken; en gevolgelyk zal men op haar konnen toepaſſen, 't geen men van de *Piramiden* in 't algemeen gezegd heeft.

Dus zullen de kegels, die dezelfde basis en hoogte hebben, gelyk zyn.

Kegels, die dezelfde baſis en hoogte hebben, zyn gelyk.

LVII.

En de lighaamlykheid eener *Conus*, zal het vermenigvuldigde van haare baſis, met de derde van haare hoogte zyn.

Haare maat, is het vermenigvuldigde van haare baſis, met een derde van haare hoogte.

LVIII.

Somtyds is men verpligt, een lighaam BCDEFGH te meeten, dat men een *Conus truncata* of afgekorte *Conus* noemdt; 't is dat gedeelte, 't welk van een *Conus* AFGH, overblyft, wanneer men door een ſnyding, die evenwydig aan de baſis FGH

Fig. 5 en 6.

GH is, een andere kleiner *Conus* ABCD E, daar van afgetrokken heeft. Het is klaarblykelyk, dat de maat van dit Lighaam, het verſchil zal zyn, dat 'er is, tusſchen de lighaamlykheden der twee kegels ABCDE, AFGH.

LIX.

Wat de oppervlakte eener afgekorte *Conus* aangaat; men kan (indien ze, door de ſnyding van eene regte *Conus* gemaakt is) niets vinden, dat eenvoudiger is, dan de oppervlaktens der twee kegels, afzonderlyk te meeten, en den eenen van den ander af te trekken. Hier toe, moet men de volgende manier gebruyken, die, na het geen we in de LIV Afdeeling gezegd hebben, zeer gemakkelyk te verbeelden is.

Fig. 6 en 7. Indien we onderſtellen, dat ALR, de *Sector* is, die men maaken moeſt om de *Conus* AFGH, te omkleeden, en dat men uyt het Centrum A, met de wydte AM, gelyk aan AB, een boog MP, beſchreeven heeft; is het klaar, dat de ruymte MPRL, een gedeelte der kroon zoude zyn, dat geſchikt was, om de gezogte oppervlakte der afgekorte *Conus* te omkleeden. Wanneer men zig nu verbeeld, dat de twee omtrekken, van welke MP, en LR, gelykvormige boogen zyn, voltrokken zyn, zal men een geheele kroon hebben, welkers maat (III Deel Art. VIII.) het vermenigvuldigde is van ML ge-

gelyk aan BF, met den omtrek, waar van AN de ſtraal is, (zynde N, het midden van ML). Derhalven, zal het gedeelte der kroon MPRL, of de oppervlakte van de afgekorte *Conus* BCDEFGH, die daar aan gelyk is, door het vermenigvuldigen van ML, met de boog NQ, gemeeten worden: of, het geen op 't zelfde uytkoomt, door het vermenigvuldigen van BF; met den omtrek IKL, die de ſnyding van het voorgeſtelde lighaam geeft, door een vlak, dat evenwydig aan de baſis is, en door het midden I, van de zyde BF, doorgaat.

Manier om de oppervlakte van een afgekorte *Conus* te meeten.

LX.

Het laatſte der vaſte Lighaamen van welke wy zullen handelen, wordt *Sphere*, of *Globe* genoemdt. 't Is een lighaam, waar in alle punten der oppervlakte, even ver van een zelfde punt, dat het middenpunt daar van genoemd wordt, af ſtaan. Dikwyls, is men verpligt deeze oppervlakte te meeten: by voorbeeld, als men weeten wil, hoe veel verguldzel men voor een bal noodig heeft, of, hoeveel plaaten loot men neemen moet om een rond dak te bedekken &c.

De *Sphere* is een lighaam, in het welke alle punten der oppervlakte, even ver van het middenpunt, af ſtaan.

LXI.

Indien X, de *Sphere* is, welkers oppervlakte men meeten wil, is het klaar, dat men dit lighaam kan begrypen, voortgebragt te zyn door de draaijing van een

Fig. 8.

een halve Cirkel AMB, rondsom zyn diameter AB.

Laaten we eerst onderstellen, dat we, in plaats van de halve Cirkel, een regelmatige veelhoek van een oneindig getal kleine zyden, of zoo men wil, van een zeer groot getal zyden, hadden, en alleenlyk de oppervlakte Z, wilde meeten, die door de omwenteling dezer *polygone* wierd voortgebragt. Van het meeten deezer oppervlakte zal men vervolgens al zoo gemakkelyk tot de maat van de oppervlakte der *Sphere* konnen overgaan, als we, van het meeten der regtlynsche figuuren, tot de maat der Cirkel overgegaan zyn.

Fig. 9.

LXII.

Om de oppervlakte van het Lighaam Z, te meeten, zullen we het kleine deel, deezer oppervlakte, dat door de draaijing van een enkele zyde M*m*, der ingeschreeve *polygone* rondom den Diameter AB, gevormd wordt, onderzoeken. Het is klaarblykelyk, dat deeze zyde M*m*, in die beweeging, een oppervlakte van de afgekorte *Conus* V, beschryft. Want, wanneer men de regte M*m*, tot zoo verre verlengd, dat ze in T, de diameter, of den As der omloop AB, ontmoet, en ter zelver tyd de lyn TM*m*, als de halve Cirkel AMB, rond gedraaid wordt, zal ze zigtbaarlyk, een regte *Conus* beschryven, welkers toppunt T, en wiens basis

Plaat XIV. Fig. 1.

basis de Cirkel zal zyn, die door het punt *m* beschreeven wordt: indiervoegen, zal de oppervlakte V, voortgebragt door de beweeging van M*m*, een snydzel deezer *Conus* zyn, dat tusschen de vlakken der Cirkel, die de punten M en *m*, in hunne ronddraaijing beschryven, besloten wordt. Maar, uyt het geen wy (Art. LIX.) gezien hebben, is de oppervlakte V, gelyk aan eene Regthoek welke M*m*, tot hoogte heeft, en wiens basis, een lyn is, gelyk aan den omtrek KLO, die door het punt K, het midden van M*m*, beschreeven is. Derhalven is de oppervlakte, voortgebragt door den omloop der *Polygone*, gelyk aan de som van zoo veele regthoeken van deeze Natuur, als 'er zyden in de *Polygone* begreepen worden, die aan M*m*, gelyk zyn.

Nu, gelyk alle de zyden M*m*, de hoogtens deezer Regthoeken, ondersteld zyn, gelyk te zyn; zou men de gezogte oppervlakte, als een geheele regthoek konnen aanmerken, die dezelfde hoogte van M*m*, hadt, en welkers basis, gelyk was aan de som van alle de omtrekken KL, dat is te zeggen, die door het middenpunt van ieder kleine zyde, beschreeven zyn.

Maar de *polygone*, beschreeven in de halve Cirkel AMB, een zeer groot getal van zyden hebbende, maaken de kleinheid der hoogte M*m*, en de ongemeene grootte der bafis, deeze regthoek onmaakbaar.

Om deeze moeijelykheid weg te neemen is het zeer ligt, zig te verbeelden, alle deeze kleine Regthoeken, in andere te veranderen, die altoos een zelfde hoogte hebben, welke niet, gelyk M*m*, ongewaarwordelyk, maar, om dat ieder bafis zeer klein wordt, van een genoeg-zaame grootte is; want door behulp van deeze zal de optelling van alle deeze kleine bafen, niet meer, dan eene lengte maaken, die met de hoogte kan vergeleeken worden.

LXIII.

Laat ons derhalven zien, of we onze kleine Regthoeken, niet indiervoegen, zullen kunnen veranderen. Laaten we eerft om het *Problema* eenvoudig te maaken, onderftellen, dat onze Regthoeken, in plaats van lynen, die aan de
Fig. 2. omtrekken KL, gelyk zyn, tot bafen te hebben, niet anders dan de ftraalen KI deezer omtrekken, daar toe hebben. Het zal ons vervolgens niet moeijelyk zyn, dat gene, 't welk we, omtrent deeze laatfte Regthoeken vinden zullen, op de andere, toe te paffen.

Daar wordt derhalven vereift, een regthoek te vinden, die het vermenigvuldigdigde van M*m*, met KI, tot maat heeft, en welkers hoogte een lyn is, die onvergelykelyk grooter dan M*m* is, en zig

in

in een plaats bevind, daar deeze kleine zyde M*m*, geplaatst is. Laat ons by voorbeeld, de regte CK kiezen, die de *Apothema* der *Polygone* is, van welke M*m*, de zyde is, en die by gevolg, aan welke zyde der *polygone* zy ook toebehoord, altoos dezelfde is. Wy moeten derhalven een lyn zoeken, waar van het vermenigvuldigde met CR, gelyk is aan het vermenigvuldigde van KI, met M*m*; dat is te zeggen (II Deel Art. VII.) dat men een vierde lyn moet vinden, die aan drie lynen KC, KI, M*m*, evenreedig is. Nu weeten we, dat het alleen door middel der overeenkomstige driehoeken is, dat men in de figuuren, evenredige lynen ontdekken kan; derhalven moet men overeenkomstige driehoeken maaken, welkers gelyk-aartige zyden, de voorgestelde lynen zyn, en dit zal men doen, wanneer men MR, perpendiculair op *mp*, laat nedervallen. Want, dan zal men de driehoeken M*m*R, KIC, krygen, die, overmits den een in R, en den ander in I, Regthoekig zyn zal, overeenkomstig zyn zullen; en daarenboven, zal men de hoeken *m*MR, IKC, gelyk aan elkander hebben, om rede dat de eerste een regte hoek met de hoek M*m*R, die gelyk is aan den hoek MKI, maakt; en dat den andere IKC, ook een regte hoek, met MKI, maakt.

Hier uyt kan men gemakkelyk besluyten dat KC, is tot KI, gelyk M*m*, tot MR;

MR; dat is te zeggen, dat MR, de gezogte vierde evenredige is; of, het geen op 't zelfde uytkoomt, dat de Regthoek van KC, met MR, of *Pp*, gelyk is aan de Regthoek van M*m*, met KI.

Maar, gelyk de Regthoek, die we ons eerſt voorgeſteld hadden te veranderen, niet die van M*m*, met KI, maar die van M*m*, met den omtrek waar van KI, de ſtraal zy, was, moeten we ons hier te binnen brengen, dat de omtrekken tot elkander zyn, gelyk de ſtraalen; 't geen maakt, dat de gelykheid die 'er tuſſchen de Regthoek van M*m*, met KI, en die van P*p*, met CK, is, de gelykheid der Regthoek van M*m*, met den omtrek van KI, aan de Regthoek van P*p*, met den omtrek van CK, met zig brengt. Want men bemerkt ligtelyk, dat, zoo twee Regthoeken gelyk zyn, en dat men (haare hoogtens behoudende) haare baſen, evenredig vermeerderd, deeze Regthoeken nog gelyk blyven zullen.

LXIV.

In de twee voorgaande Afdeelingen ontdekt hebbende, dat alle de kleine afgekorte kegelagtige oppervlaktens, als V, (Fig. 1.) gelyk zyn aan zoo veele Regthoeken, die alle een zelfde regte, die aan den omtrek waar van KC, de ſtraal zoude zyn, gelyk is, tot hoogte; en ieder van welke een kleine regte P*p*, overeenkoomende met ieder zyde M*m*,

tot

tot basis hebben: kan men daar uyt besluyten, dat eene som deezer kleine oppervlaktens, genoomen van A tot p, by voorbeeld, gelyk zal zyn aan een Regthoek, die een regte, gelyk aan den omtrek van CK, tot hoogte, en de som van alle de lynen Pp, genoomen van A, tot p, dat is te zeggen, de regte Ap, tot basis zoude hebben.

Derhalven zal men, om de geheele oppervlakte (voortgebragt door de omloop van de geheele *Polygone*, te verkrygen, een Regthoek moeten maaken, welkers basis, aan den omtrek, door de straal C K beschreeven, en die een gelyke hoogte met den diameter AB heeft, gelyk is.

LXV.

De oppervlakte der *Sphere*, heeft tot haare maat, het vermenigvuldigde van zyne diameter, met den omtrek van zyne groote Cirkel.

Nu is het zeer gemakkelyk, de oppervlakte der *Sphere* te meeten. Want het is klaar, dat, hoe meer zyden de *polygone* hebben zal, hoe meer het lighaam, door zyne omloop voortgebragt, naderen zal, om aan de *Sphere* gelyk te zyn, en hoe meer ook de *Apothema* CK, naaderen zal aan de gelykheid met de straal; zoo dat, indien men zig verbeelden kan, dat de *Polygone* een Cirkel geworden is, zal de *Apothema* CK, de straal zelve zyn, en de oppervlakte der *Sphere* zal dezelfde uytgestrektheid hebben als een Regthoek, welkers hoogte en basis, de een de Diameter, en de andere een lyn zoude de zyn, die gelyk was aan den omtrek der Cirkel, welke dezelve heeft voortgebragt, en die men gemeenlyk de groote Cirkel der *Sphere* noemdt.

LXVI.

Wat een *Segment* der *Sphere* is.

* Fig. 3.

Hoe men haar oppervlakte meet.

Fig. 2.

Wat aangaat de kromme oppervlakte van een *Segment* der *Sphere* AMLNO*, dat is, het gedeelte der *Sphere*, 't welk men daar van aftrekt, wanneer men dezelve door een vlak MLNO, dat perpendiculair op den diameter is, doorſnyd; die heeft tot deſſelfs maat, het vermenigvuldigde van haare dikte AP, met den omtrek der groote Cirkel A MBN. De reden daar van, is dezelfde, als die, door welke men (Art. LXIV.) beweezen heeft, dat de Som der oppervlaktens, van alle de kleine afgekorte kegels begreepen tuſſchen A en *m*, gelyk is aan de Regthoek, welkers hoogte is A*p*, en wiens baſis een lyn is, die gelyk is aan den omtrek, van welke CK, de ſtraal uytmaakt.

LXVII.

Fig. 4.

De voorgaande meeting van de oppervlakte der *Sphere* leerdt, dat, als men in dezelfde tyd, als de halve Cirkel AMN B, rondſom AB, loopt, de Regthoek A BDE, doet ronddraaijen; dat zeg ik, de geboogen oppervlakte der regte *Cylinder* EFGIKDH, door de omloop deezer Regthoek voortgebragt, aan die der

Sphere,

Sphere, door den halven Cirkel beschreeven, gelyk zal zyn; 't geen men gemeenlyk, dus uytdrukt; de oppervlakte der *Sphere*, is gelyk aan die van den omschreevene *Cylinder*.

De oppervlakte der *Sphere*, is gelyk aan die, van den omschreevene Cirkel.

LXVIII.

En, wanneer men, zoo wel de *Cylinder*, als de *Sphere*, door twee vlakken, die in P, en Q, perpendiculair op de diameter AB, zyn, doorsnyd; zullen de snydzels, zoo van de *Sphere*, als van de *Cylinder*, die, door de beweeging van de regte OS, en van de boog MN voortgebragt zyn, een gelyke oppervlakte hebben.

De driehoeken der *Cylinder*, en van de *sphere* hebben dezelfde, oppervlakte.

LXIX.

Uyt het voorige ziet men ook, dat de oppervlakte der *Sphere* gelyk is aan den inhoud zyner groote Cirkel, vier maal genoomen: want de oppervlakte deezer groote Cirkel heeft tot haare maat, het vermenigvuldigde van de helft der straal, of van de vierde der diameter met den omtrek; en de oppervlakte der *Sphere*, is gelyk aan het vermenigvuldigde der geheele diameter, met dezelfde omtrek.

De oppervlakte van de *sphere*, is gelyk aan die van zyne groote Cirkel, vier maal genoomen.

LXX.

De maat van de oppervlakte der *Sphere* gevonden zynde, is het zeer gemakkelyk haar lighaam te meeten: want men kan de *Sphere* als een verzaameling van

on-

oneindig veel kleine *piramiden* aanmerken, welkers toppunten in 't Centrum zyn, en waar van alle de basen, de geheele oppervlakte bedekken. Ieder deezer *piramiden* nu, het vermenigvuldigde van de derde haarer hoogte, dat is te zeggen, van de straal, met haare basis tot hoogte hebbende, zal haar geheele som, of het Lighaam der *Sphere* gemeeten worden, door het vermenigvuldigen van de derde der straal met haare oppervlakte, dat is te zeggen, met den inhoud der groote Cirkel, vier maal genoomen.

Het lighaam der *Sphere*, is het vermenigvuldigde van de derde der straal, met den inhoud der groote Cirkel, viermaal genoomen.

LXXI.

Gelyk het vermenigvuldigde van de derde der straal, met vier maal de groote Cirkel, het zelfde is, als het vermenigvuldigde van vier maal de derde der straal (dat is te zeggen) der twee derdens van den diameter, met de groote Cirkel, en dat het lighaamlyke der *Cylinder* EF GIKDH, het vermenigvuldigde der diameter, met dezelfde groote Cirkel die haar tot basis diend, tot maat heeft; volgd, dat het lighaamlyke der *Sphere*, de twee derdens van die, der omschreevene *Cylinder* is.

Het lighaamlyke der *Sphere*, is de twee derdens van die, der omschreeven Cirkel.

LXXII.

Wanneer men het lighaamlyke van een *Segment* der *Sphere* AMLNO* meeten wilde, is het klaar, dat men eerst het deel der *Sphere* moest meeten, dat door den

Maat van het Lighaamlyke van een *Segment* der *Sphere*.

den omloop der *Sector* CAM is voortgebragt; 't geen gedaan wordt, wanneer men, de derde der ſtraal, met de oppervlakte van het Segment der voorgeſtelde *Sphere* AMLNO, vermenigvuldigd; en vervolgens van deeze maat, die der *Conus* aftrekt, welke door den omloop der driehoek CPM voortgebragt is; dat is te zeggen, de *Conus*, welkers baſis de Cirkel MLNO, en welkers hoogte CP, is; want dan zal het overſchot de geëyſchte waarde van het *Segment* zyn.

LXXIII.

Wy zullen deeze Beginzelen, door eenige voorſtellen over het Lighaamlyke en de oppervlakte der gelykvormige lighaamen eindigen. Deeze voorſtellen doen zig zeer natuurlyk op, wanneer men overweeging maakt, over de zaamenſtelling der eenvormigheid van twee Lighaamen. Men kan zelfs zeggen, dat men hen niet kan nalaaten door overeenkomſtigheid te ontdekken; wanneer men zig erinnert, 't geen we in het 1 Deel, Art. XXXIV. en vervolgens, van de eenvormigheid der vlakke figuuren, dat is te zeggen, van die, welke op vlakken beſchreeven zyn, gezegd hebben.

We hebben Art. XXXII. bepaald, waar in de eenvormigheid van twee *piramiden* beſtaat; de bepaaling welke we toen van overeenkomſtige *piramiden* gegeeven hebben, kan tot alle lighaamen, door vlakken bepaald, uytgeſtrekt worden: dat is te zeggen, dat twee lighaamen van deeze natuur, overeenkomſtige zullen genoemdt worden, als alle de hoeken, door de zyden der eerſte gemaakt, dezelfde zyn, als de hoeken, gemaakt door de zyden der tweede; en als de zyden van een deezer lighaamen, evenredig zyn, aan de gelyk-aartige zyden van het ander.

Waar in de gelykvormigheid van twee lighaamen, door vlakken bepaald, beſtaat.

LXXIV.

Wat de lighaamen aangaan, die niet van alle zyden door vlakken bepaaldt zyn, de Cylinders en de Kegels, by voorbeeld; het is ook gemakkelyk, de noodzaakelyke voorwaardens te bepaalen, om haar overeenkomſtig te doen zyn.

Twee regte *Cylinders*, zullen gelykvormig zyn, zoo haare hoogtens in dezelfde reden, als de ſtraalen hunner baſen zyn.

Voorwaardens, welke de gelykvormigheid van twee regte *Cylinders* bepaalen.

LXXV.

Als de *Cylinders* ſchuyns zyn, moeten daar en boven de lynen, welke de middenpunten der twee Cirkels zaamenvoegen, in ieder deezer *Cylinders*, dezelfde hoeken op de vlakken hunner baſen maaken.

Die van twee ſchuynſe *Cylinders*,

LXXVI.

Dezelfde bepaalingen konnen op de Kegels toegepaſt worden, wanneer men in plaats van de lyn, die door de midden-

Die van twee Kegels.

pun-

punten van de twee basen der *Cylinders* gaat, die steld, welke van het toppunt der *Conus*, tot het middenpunt der Cirkel gaat, die haar tot basis dient.

LXXVII.

Die van twee afgekorte Kegels.

Op dat twee afgekorte Kegels gelykvormig zyn, moeten in de eerste plaats, de Kegels van welke zy deelen zyn, met elkander overeenkomstig zyn: en in de tweede plaats, moeten haare hoogtens tot elkander zyn, gelyk de straalen hunner basen.

LXXVIII.

De *Sphere* de *Cubis*, en alle de figuuren, die alleenlyk van een lyn afhangen, zyn alle overeenkomstig.

Ten opzigt der *Spheren* ziet men, dat zy allen, aan elkander gelykvormig zyn; even als alle de figuuren, 't zy lighaamen, 't zy vlakken, die niet meer dan eene lyn noodig hebben om bepaald te worden; gelyk de Cirkel, het vierkant, de gelykzydige driehoek, de *Cubis*, de *Cylinder* in de *Sphere* beschreeven &c.

LXXIX.

In 't algemeen, verschillen de overeenkomstige lighaamen niet, dan door de maaten, na welke zy zaamen gesteld zyn.

In 't algemeen, zal men van overeenkomstige lighaamlyke figuuren, konnen zeggen, 't geen men van de vlakke figuuren gezegd heeft; te weeten, dat ze niet van elkander verschillen, als door de maaten, na welke men haar heeft zaamengesteld.

Dit aangetoonde, wel aangemerkt zynde, brengt ons tot twee grondstellige

 voor-

voorſtellen, over de oppervlakte, en het lighaamlyke der overeenkomſtige Lighaamen.

LXXX.

De oppervlaktens der overeenkomſtige lighaamen, zyn tot elkander, gelyk de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden.

Het eerſte voorſtel leerdt, dat de oppervlaktens van twee overeenkomſtige lighaamen, tot elkander zyn, gelyk de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden; dat is, dat 'er by voorbeeld dezelfde betrekking is, tuſſchen de oppervlaktens der twee overeenkomſtige piramiden z, en Z, als tuſſchen de vierkanten $abcd$, $ABCD$, gemaakt op de zyden ab, AB, die elkander in deeze twee *piramiden* beantwoorden.

Om dit voorſtel te ontdekken, heeft men niet anders, dan dezelfde redeneringen noodig, die men in het I Deel Art. XLIII. en XLIV. gebruykt heeft; dat is te zeggen, dat men alleenlyk moet aanmerken, dat, zoo P, de maat, van de *piramide* Z; en p, de maat van de overeenkomſtige *piramide* z, is, de lynen welke men gebruyken moet om de oppervlakte van Z, en die van het vierkant $ABCD$ te meeten, het zelve getal van P, zullen hebben, als 'er van de deeltjes p, in die zullen begreepen zyn, welke men gebruyken moet om de oppervlakte van z, en die van het vierkant $abcd$, te meeten.

Want daar uyt volgt, dat het *Product* der lynen, die in de maat van Z, en

ABCD begreepen zullen zyn, hetzelfde getal van de vierkanten X gemaakt op P, geeven zal; als het *Product* der lynen gebruykt tot het meeten van *z*, en *abcd*, van de vierkanten *x*, gemaakt op *p*, uytleeveren zal. Dat is te zeggen, dat de getallen die de betrekking van de oppervlakte der *piramide* Z, tot het vierkant ABCD, uytdrukken, dezelfde zullen zyn als die, welke de betrekking der oppervlakte *z*, tot het vierkant *abcd* zullen aantoonen.

Men moet op dezelfde wyze redeneeren, in de vergelyking van alle de andere gelykvormige lighaamen; 't zy dat deeze lighaamen door vlaktens, 't zy dat ze, door geboogene oppervlaktens bepaald waren: Want de lynen, die tot het meeten der oppervlaktens van alle deeze lighaamen gebruykt zyn, zullen altyd het zelfde getal van de deelen hunner maaten bevatten; en by gevolg zullen de *Producten* deezer lynen even zoo dikwyls de vierkanten deezer zelfde deelen bevatten.

En, zoo de vereischte lynen om de oppervlakte der overeenkomstige lighaamen te meeten, onmeetbaar waren, is het klaar dat de betooging altoos stand zoude houden, mits, dat men hier de beginzelen gebruykte, waar van men zig in het II Deel Art. XXVIII. bediendt heeft om de overeenkomstige figuuren

 wel-

welkers zyden onmeetbaar waren, te meeten.

LXXXI.

De oppervlaktens der *Spheren*, zyn tot elkander, gelyk de vierkanten van haar straalen.

Op de zelfde wyze kan men bewyzen, dat de oppervlaktens der *Spheren* tot elkander zyn, gelyk de vierkanten hunner *Straalen*. Maar, om dit nog duydelyker, op een andere manier te zien, zal het voldoenend zyn, zig te 'erinneren, dat de oppervlaktens der Cirkels tot elkander zyn, gelyk de vierkanten hunner Straalen (III Deel Art. VI.) en dat de oppervlaktens der *Spheren*, het viervoud van haare groote Cirkels zyn (Art. LXIX.)

LXXXII.

De evenredigheid tusschen de oppervlaktens der overeenkomstige lighaamen, en de vierkanten van haare gelyk-aartige zyden, is zoo algemeen, dat ze zoo wel op lighaamen die men niet kan meeten, als op die, welkers maat men kendt, toegepast wordt.

Zonder by voorbeeld, de oppervlakte eener schuynse *Cylinder* te konnen meeten, kan men stellen dat de oppervlaktens van twee schuynse overeenkomstige *Cylinders*, tot elkander zyn, gelyk de vierkanten van de diameters der basen deezer *Cylinders*. Want, wanneer men, in deeze twee *Cylinders*, twee overeenkomstige *prisma's* (van zoo veel vlaktens als

als men wil) beſchryft, zal men door het voorgaande zien, dat de oppervlaktens deezer *prisma's* tot elkander zullen zyn, gelyk de vierkanten van de diameters der bazen. Derhalven zullen de *Cylinders* zelve, aangemerkt als de laatſte der ingeſchreeven *Prisma's*, haare oppervlaktens, in dezelfde betrekking hebben.

LXXXIII.

Het grondſtellig voorſtel, voor de vergelyking van het lighaamlyke der overeenkomſtige lighaamen, is dit.

De overeenkomſtige lighaamen, zyn tot elkander, gelyk de *Cubii* van haare gelyk-aartige zyden.

De overeenkomſtige lighaamen, zyn tot elkander, gelyk de *Cubii*, van haare gelyk-aartige zyden.

Dit voorſtel kan, gelyk het voorgaande betoogd worden, door aan te merken, dat de overeenkomſtige figuuren, niet van elkander verſchillen, dan door de maaten, na welke zy zaamengeſteld zyn.

Om dit op de eenvoudigſte wyze, die ons moogelyk zyn zal, te doen zien, zullen we ons, by voorbeeld, van twee overeenkomſtige *Prisma's* Z en z, en van twee *Cubii*, X en x bedienen, welkers zyden aan A B, *a b* dat eenvormige lynen zyn, gelyk zyn: en wy zullen daar en boven twee ſchaalen A B, *a b*, neemen, verdeeld in een genoegzaam groot getal van deelen om de afmeetingen deezer lighaamen te konnen meeten.

Dit nu gesteld zynde, is het klaar, dat men even zoo veel *Cubii*, gemaakt op de deelen van *ab*, in de *Prisma z*, en in de *Cubis x*, vinden zal, als 'er *Cubii* gevonden zullen worden, gemaakt op de deelen van AB, in de *Prisma*, Z, en in de *Cubis* X.

Op dezelfde wyze redeneert men, over alle de andere lighaamen; en de zulke, welke onmeetbaare afmeetingen zouden schynen te hebben, zullen ook in dezelfde reden zyn, als de *Cubii*, van haare gelyk-aartige zyden.

LXXXIV.

De *Spheren* zyn tot elkander, gelyk de *Cubii* van haare Straalen.

De lighaamen der *Spheren*, by voorbeeld, zyn zigtbaarlyk tot elkander, gelyk de *Cubii*, van haar straalen.

EINDE.

TAFEL
DER VOORNAAMSTE
ZAAKEN.

EERSTE DEEL.

Van de middelen, die het natuurlykst te gebruyken zyn, om tot de maat der Landen te geraaken.

TWEEDE DEEL.

Van de Meetkundige manier om Regtlynsche figuuren met elkanderen te vergelyken.

DERDE DEEL.

Van de maat der kringswyze figuuren, en van derzelver Eigenschappen.

VIERDE DEEL.

Van de manier om de lighaamen en haare oppervlaktens te meeten.

 zyn,

LXVII.

VERHANDELING

OVER DE

PLATTE EN SPHERISCHE

DRIEHOEKSMEETKUNDE,

Benevens de

CONSTRUCTIE EN TOEPASSING

Der

LOGARITHMUS.

VERHANDELING
OVER DE
PLATTE
DRIEHOEKSMEETKUNDE.

Definitien of bepaalingen.

I.

De platte Driehoeksmeetkunde (*Trigonometria plana*) is een konst waar door men, hebbende van een platte Driehoek drie deelen bekend, alle de overige kan vinden. Zodanig een driehoek heeft zes paalen, naamelyk: drie zyden en drie hoeken, waar van men voor bekende *Termen* geeven kan.

(1) Twee hoeken en een zyde.

(2) Twee zyden, en een hoek over een van deeze zyden.

(3) Twee zyden en een hoek tusschen een van deeze zyden.

(4) Drie zyden.

Dit

Dit zyn alle de veranderingen, welke men in het opgeeven van een *Voorstel* kan aanneemen; wy zullen in deeze order hier na eenige *Voorstellen* verhandelen.

II.

De omtrek van ieder Cirkel word vooronderſteld in 360 gelyke deelen, of graaden, gedeeld te zyn; ieder graad in 60 gelyke deelen of minuten; en ieder minuut in 60 gelyke deelen of ſeconden &c.

III.

Plaat I. Fig. 1. Eenig deel A B van den omtrek der Cirkel, word een boog genaamd, en word gezegd de maat te zyn van den hoek A C B tot het Centrum, welke dezelve zaamenſteld.

NB. *De graaden, minuten, ſeconden &c. in eenige boog of boek begreepen, worden op deeze wyze geſchreeven, 50°, 18′ 35″, het welk betekend dat de gegeeven boog of boek 50 graaden, 18 minuten, en 35 ſeconden bevat.*

IV.

Het verſchil tuſſchen een boog en 90° (of een vierde gedeelte van een Cirkel) word deszelfs *Complement*, en deszelfs verſchil van 180° (of een halve Cirkel) deszelfs *Supplement* genaamd.

V.

De *Chorda* of pees, is een regte lyn getrokken van het eene einde van een boog tot het andere: Aldus is de regte lyn B E de *Chorda* of pees, van de boog B A E of B D E. Plaat I. Fig. 1.

VI.

De *Sinus* of regte *Sinus* van een boog, is de regte lyn, getrokken van het eene einde der boog, *Perpendiculair* op de *Diameter*, welke door het andere einde gaat. Dus is B F de *Sinus* van de boog A B of D B. Plaat I. Fig. 1.

VII.

De *Sinus versus* van een boog, is dat deel der *Diameter* dat tusschen de *Sinus* en de omtrek der boog begreepen is. Dus is A F de *Sinus versus* van A B; en D F van D B. Plaat I. Fig. 1.

VIII.

De *Co-Sinus* van een boog, is dat deel der *Diameter* dat tusschen het centrum en de *Sinus* begreepen is; en is gelyk aan den *Sinus* van het *Complement* dier boog. Dus is C F de *Co-Sinus* van de boog A B, en is gelyk aan B I, de *Sinus* van deszelfs *Complement* H B. Plaat I, Fig. 1.

IX.

De *Tangens* van een boog, is een reg-

te

te lyn, getrokken van het uyterste der
Plaat I. Fig. 1. boog, tot aan de lyn die door het ander uyterste der boog gaat. Dus is A G de *Tangens* van de boog A B.

X.

De *Secans* van een boog is een regte
Plaat I. Fig. 1. lyn, reykende buyten de Cirkel, van het centrum af tot aan het uyterste der *Tangens*. Dus is C G de *Secans* van A B.

XI.

De *Co-tangens* en *Co-Secans* van een boog, zyn de *Tangens* en *Secans* van het *Complement* dier boog. Dus zyn H K en C K de *Co-tangens* en *Co Secans* van A B.

XII.

Een *Trigonometrisch Canon* is een Tafel vertoonende de lengte van de *Sinus*, *Tangens* en *Secans*, tot ieder graad en minuut van het *Quadrant*, ten opzigte tot de *Radius*; welke vooronderfteld word de eenheid, en begreepen in 10000 of meerder tiende deelen verdeeld te zyn. Met behulp van deeze Tafel, en de Leeringe der overeenkomstige Driehoeken, word al het werk der *Trigonometria* volvoerd; het welk ik nu vervolgens zal aanwyzen. Maar het eerst van allen, moet men eigentlyk aanmerken, dat de *Sinus* van een boog A *b* grooter als 90°, gelyk is aan de *Sinus* van een andere boog A B welke even zoo veel beneden

90°

90° is, en dat, deszelfs *Co Sinus* Cf, *Tangens* Ag, en *Secans* Cg, ook wederzyds gelyk zyn, aan de *Co-Sinus*, *Tangens*, en *Secans* van deszelfs vervullinge (*Supplement*) AB; Het welk alles door de *Definitien* openbaar is.

Theorema I.

In een regthoekige platte Driehoek ABC, *is de* Hypothenusa *in reden tot de* perpendiculair, *als de* Radius (*uyt de Tafel*) *tot de* Sinus *van de hoek op den* basis. Plaat I. Fig. 2.

Want, laat AE of AF de *Radius* zyn na welke de Tafel van *Sinus* &c. gevoegd is, en ED de *Sinus* van de hoek A of boog EF (*Zie Def.* III *en* VI); Dan is ter oorzaake der twee overeenkomstige driehoeken ACB en AED; AC: BC = AE: ED.

Q, E, D.

Dus, indien AC = , 75, en BC = , 45 is, dan is, 75 : , 45 = 1 (*Radius*): de *Sinus* van A = , 6; welke in de Tafel beantwoord aan 36° 52′, de maat of waarde van A.

Theorema II.

In een regthoekige platte Driehoek ABC, *is de* basis AB *in reden tot de* perpendiculair BC, *gelyk de* Radius (*uyt de Tafel*) *tot de* Tangens *van de hoek op de* basis. Plaat I. Fig. 2.

Want, laat AE of AF de *Radius* uyt

de Tafel zyn (Zie de voorgaande Figuur), en F G de *Tangens* van de hoek A of boog E F (*Zie Def.* III. *en* IX.); dan is, ter oorzaake van de overeenkomstigheid der Driehoeken A B C, A F G; A B : B C = A F : F G.

Q, E, D.

Laat derhalven A B = , 8 en B C = , 5 zyn; Dan zullenwe hebben, 8 : , 5 = 1 (*Radius*) : *Tangens* A = , 625; waar door A van zelfs door de Tafel bevonden word 32° 00′ te zyn.

Theorema III.

Plaat I. Fig 3.

In ieder platte Driehoek A B C *is ieder zyde in reden tot de* Sinus *van deszelfs overstaande hoek, gelyk ieder der andere zyden tot de* Sinus *van deszelfs overstaande hoek.*

Want, maakt C F = A B, en laat op A C de *Perpendiculairs* B D en F E vallen; welke als de *Sinus* (hoekmaaten) der hoeken A en C tot de gelyke *Radii* (Straalen) A B en C F zyn. Nu zyn de Driehoeken C B D, C F E overeenkomstig, derhalven hebbenwe C B : B D (*Sinus* A) = C F (A B) : F E (*Sinus* C).

Q, E, D.

Theorema IV.

Plaat I. Fig. 4.

Gelyk de basis *van een platte Driehoek* A B C, *is, tot de zom van de twee zyden; zoo is het verschil der twee zyden tot tweemaal*

maal de afstand DE *der* Perpendiculair *van het midden der basis.*

Want, $\overline{AB+BC} \times \overline{AB-BC} = AC \times 2DE$; waar uyt volgd $AC : AB+BC = AB-BC : 2DE$.

Q, E, D.

Theorema V.

In ieder platte Driehoek, is de zom van twee van derzelver zyden in reden tot hun verschil, gelyk de Tangens *van de halve zom der twee overstaande hoeken, tot de* Tangens *van de helft van hun verschil.* Plaat I. Fig. 5.

Want, laat ABC de Driehoek zyn, en AB en AC de twee voorgestelde zyden; en beschryft uyt het Centrum A, met AB als *Radius*, een Cirkel, snydende CA in D en F; zoo zal CF de zom, en CD het verschil der zyden AC en AB uytdrukken: Trekt F, B en B, D te zaamen, en trekt DE *paralel* met FB, ontmoetende BC in E.

Dan, dewyl $2ADB = ADB + ABD = C + ABC$ is, zoo is het klaar dat ADB gelyk is aan de halve zom der overstaande hoeken, van de voorgestelde zyden. Daaren boven, aangezien $ABC = ABD\ (ADB) + DBC$, en $C = ADB - DBC$ is, zoo is het klaar dat $ABC - C = 2DBC$ is; of dat DBC gelyk is aan het halve verschil der zelfde hoeken.

Nu is, ter oorzaake van de *Parallele* lynen B F en E D, E F : C D = B F : D E; maar B F en D E zullen, ter oorzaake dat D B F en B D E regte hoeken zyn, tot elkander in reden zyn, gelyk de *Tangens* van de voorsz. hoeken F D B (A D B) en D B E (D B C) tot de *Radius* B D.

Q, E, D.

Corollarium

Hier uyt, hebbende in twee Driehoeken A B C en A *b* C, twee zyden aan elkander gelyk, volgd deeze evenredigheid: gelyk *Tangens* $\frac{AbC + ACb}{2}$: *Tangens* $\frac{AbC - ACb}{2}$ = *Tangens* $\frac{ABC + ACB}{2}$: *Tangens* $\frac{ABC - ACB}{2}$. Maar indien C A *b* vooronderfteld word een regte hoek te zyn, dan is A *b* C + A C *b* desgelyks = een regte hoek, en de *Tangens* van $\frac{AbC + ACb}{2}$ = *Radius*. Derhalven zal onze evenredigheid in dit geval worden, *Radius* : *Tangens* $\frac{AbC - ACb}{2}$ (= A *b* C — 45°) = *Tangens* $\frac{ABC + ACB}{2}$

: *Tan-*

: *Tangens* $\frac{ABC - ACB}{2}$. Welke de volgende *Theorema's* geeft, tot vinding der overstaande hoeken, aan twee voorgestelde zyden; als de ingeslooten hoek, en de zyden zelve bekend zyn.

Gelyk de kleinste van de voorgestelde zyden (A*b* *of* AB) *is tot de grootste* (AC) *zoo is* Radius *tot de* Tangens *van een hoek* (A*b*C Zie Theorema II.) *En gelyk* Radius *tot de* Tangens *van dat geene 't welk die hoek grooter als* 45° *is*, *zoo is de* Tangens *der halve zom van de begeerde hoeken*, *tot de* Tangens *van de helft huns verschils.*

De oplossingen van de gevallen van regthoekige platte Drieboeken.

Geval	Het gegeevene.	het gezogte.	Oplossing.
1	De *Hyp.* AC en de hoeken.	een regthoekszyde BC.	Gelyk *Radius* tot de *Sinus* van A, alzo is de *Hyp* AC tot de regthoekszyde BC (*Theor.* I.)
2	De *Hyp.* AC en eene regthoekszyde BC.	De hoeken.	Gelyk AC : BC = *Radius* : *Sin.* A (*Theor.* I.) wiens *Complement* de hoek C is.
3	De *Hyp.* AC en eene regthoekszyde BC.	De andere regthoekszyde AB.	Zoekt de hoeken volgens *Geval* 2, en dan de begeerde regthoekszyde AB volgens *Geval* 1.
4	De hoeken en eene regthoekszyde BC.	De *Hyp.* AC.	Gelyk *Sin.* A : *Radius* = de regthoekszyde BC : de *Hypothenusa* AC (*Theor.* I.)
5	De hoeken en eene regthoekszyde BC.	De andere regthoekszyde AB.	Gelyk *Sinus* A : BC = *Sin.* C : AB (volgens *Theor.* III.) of, gelyk *Radius* : *Tang.* C = BC : AB (volgens *Theor.* II.)
6	De twee regthoeks zyden AB en BC.	De hoeken.	Gelyk AB : BC = *Radius* : *Tang.* A (volgens *Theor.* II) wiens *Complement* de hoek C is.
7	De twee regthoeks zyden AB en BC.	De *Hyp* AC.	Zoekt de hoeken volgens *Geval* 6, en dan de *Hypothenusa* AC volgens *Geval* 4.

Plaat I. Fig. 6.

De

De oplossing der gevallen van scheeve platte Driehoeken.

Geval	Het gegeevene.	Het gezogte.	Oplossing.
1	De hoeken en eene zyde A B.	een van de beide anderezyden B C.	Gelyk *Sinus* C : A B = *Sinus* A : B C (volgens *Theor.* III.)
2	Twee zyden AB, B C en een hoek	De andere hoeken A en A B C.	Gelyk AB : *Sin.* C = BC : *Sin.* A (volgens *Theor.* III.) welke by C vergaard, en de zom van 180 afgetrokken zynde, de andere hoek ABC voortbrengen.
3	Twee zyden A B, BC en een tegengestelde hoek C.	De andere zyde AC.	Laat de hoek A B C gevonden worden, volgens het voorgaande *Geval*; en dan is, *Sin.* C : A B = *Sin.* A B C : A C. (volgens *Theor.* III.)
4	Twee zyden A C, AB en de ingeslooten hoek A.	De andere hoeken, C en ABC.	Gelyk de zom van AB en AC : hun verschil = *Tang.* van de halve zom van A B C en C : *Tang.* van de helft van hun verschil (volgens *Theor.* V.) welke vergaard tot, en afgetrokken van, de halve zom, voortbrengt de twee hoeken.
5	Twee zyden AC, AB en de ingeslooten hoek A.	De andere zyde BC.	Laat de hoeken gevonden worden volgens het laatste *Geval*, en dan B C, volgens *Geval* I.
6	Alle de drie zyden.	Een voorondergestelde hoek A.	Laat een *Perp.* B D op AC vallen: Dan (volgens *Theor.* IV.) gelyk A C : de zom van A B en B C = hun verschil : de afstand D G der *Perp.* van het midden der *Bazis*; en dan vind men vervolgens de hoek A, volgens *Geval* II.

Plaat I Fig. 7.

Schoon wy nu eeniger maaten onderweezen hebben, hoe men de zyden en hoeken van een na welgevallen genomen Driehoek vinden kan; nogtans, dewyl ons voornaamſte oogmerk geweeſt is, de geeſt der Aanvangers op te ſcherpen, zoo zyn die Leerwyzen hen alleenlyk voorgeſteld, om dat ze zeer gemakkelyk te begrypen waeren: Want zy zyn in de *Practycq* aan zulke groote zwaarigheden onderworpen, dat men weinig op de nauwkeurigheid van een uytvoering, waar van zy de grond zouden zyn, ſtaat kan maaken.

Daar is niets dat eenvoudiger ſchynd als de verdeeling van eene ſchaal; en miſſchien, welke voorzorge men daar omtrent ook gebruykt, is 'er niets zeldzaamer, dan dezelve nauwkeurig te hebben. Zomtyds word een lyn van de ſchaal voor een myl op een *Terrein* genomen; het is zeer mogelyk dat men zig op een lyn een honderdſte vergiſt; deeze misſlag is op zulk een kleine uytgeſtrektheid voor de zinnen niet te onderſcheiden; maar het honderdſte gedeelte van een myl, verbeeld door de lengte van een lyn, is een zeer aanmerkelyke grootheid: want het is meer als 21 franſche *Toiſen*, of 14 Rynlandſche Roeden.

Aan de andere zyde; aan hoe veel misſlagen ſteld men zig niet bloot, als men hoeken op het papier overdraagd? dat men

men dezelve meer of minder, kleinder of grooter maakt; als de lynen welke deeze hoeken eindigen meer of minder wyd zyn: zie daar gemeene Bron-aders van onnauwkeurigheid.

Men word zulks wel haast gewaar, wanneer men van de *Theorie* tot de *Practycq* overgaat. Ook hebben de meetkundige van de eerste oudheid zig toegelegt op de nasporing der middelen die het getal dier misslagen verminderen konden.

Dewyl een Driehoek maar uyt drie hoeken en drie zyden zaamengesteld is, zoo vermoededen zy aanstonds, dat 'er tusschen deszelfs hoeken en zyden eenige overeenkomst konde zyn; om dat in een driehoek een grooter hoek noodzaakelyk tegen over een grooter zyde is.

In gevalle deeze overeenkomst zeeker was, zou 'er een zeer groot voordeel uyt ontstaan: het geen men voor een Driehoek bereekend zou hebben, zou zulks voor een oneindig getal andere zyn, welke met dezelve overeenkomstig konden weezen; zy bragten derhalven deeze vraag hier toe, *om de overeenkomst of betrekking welke 'er tusschen de hoeken, en zyden van een Driehoek was, te bepaalen.*

Schoon men geen Hoek met een lyn kan vergelyken, dat is, dat men onmiddelyk geen lyn gebruyken kan, om een Hoek te meeten; nogtans kan de betrekking van een lyn tot een lyn, met de betrekking van een Hoek tot een Hoek, vergeleeken worden: want, indien 'er dubbele, drievoudige, &c. lynen van andere lynen zyn, zyn 'er ook hoeken, welke dubbeld, drievoudig &c. van andere hoeken zyn.

In gevolge van dit denkbeeld onderzogt men, *of de zyden van een Driehoek niet onder elkanderen zouden zyn, gelyk de aan die zyden overstaande Hoeken.*

Plaat I. Fig. 8. Men onderstelde derhalven de gelykbeenige Driehoek ABC regthoekig, waar van de zyde AB = is aan de zyde AC, en de hoek A het dubbeld is van de hoek B, of van de hoek C = B. Indien de hoeken van een Driehoek onder elkander waaren, gelyk de aan die hoeken tegengestelde zyden, zoo zou, dewyl de hoek A het dubbeld is van de hoek B, de aan de hoek A tegengestelde zyde B C, het dubbeld moeten zyn van de aan de hoek B tegengestelde zyde AC; maar het is blykbaar dat de zyde BC geenzins het dubbeld is van de zyde AC: Want de zyde AB aan AC gelyk zynde, zou men verkrygen BC = AC + AB, dat is; dat de regte lyn BC gelyk zou zyn aan de kromme lyn BAC, welke de zelve einden B, C heeft; het geen onmogelyk is.

De Hoeken van een Driehoek, zyn derhalven niet onder malkander, gelyk de aan die hoeken tegengestelde zyden.

Na

Na gezien te hebben dat 'er tusschen de hoeken en de zyden van een Driehoek geen zekere evenredigheid was, zoo was het natuurlyk te denken, dat'er misschien eene tusschen de hoeken en peezen (*Chordæ*) van die hoeken was, dat is, dat *de hoeken van een Driehoek onder elkander konden zyn, als de peezen van die hoeken.*

Men beschreef derhalven om een gelykbeenige Driehoek A B C een Cirkel, welke Driehoek wy nog onderstellen zullen regthoekig in A te zyn; en, aanmerkende dat de pees van een hoek het zelve was, als de pees van de boog, welke de maat van die hoek is, gelyk de hoek aan den omtrek gemeeten word door de helft van de boog, die tusschen zyne zyden doorgaat, wierd men gewaar dat D C de pees van de hoek B A C was, na A D, die door het centrum gaat, getrokken te hebben. Nu is het zigtbaar dat D C = A C is: aldus is A C de pees van de boog, welke de hoek A meet.

Van 's gelyken heeft de hoek B aan den omtrek tot maat de helft A O van de hoek A O C, welke tusschen zyne zyden doorgaat: aldus is de pees van de hoek B de lyn A O; by gevolg, indien de hoeken van een Driehoek onder elkander waaren, gelyk hunne overeenkomstige peezen, zou men deeze evenredigheid hebben: de hoek A is tot de hoek

hoek B, gelyk A C pees van de hoek A, is tot A O pees van de hoek B; maar (vooronderfteld zynde) de hoek A is het dubbeld van de hoek B; derhalven zou de pees A C van de hoek A het dubbeld zyn van de pees A O van de hoek B: nogtans is het zeer blykbaar dat A C geenzins het dubbeld van A O is; indien dat zoo was, zou, ter oorzaake van A O = O C, de regte lyn A C zoo lang zyn als de kromme lyn A O C; en zulks is niet mogelyk.

De hoeken van een Driehoek zyn derhalven niet onder elkander, gelyk de overeenkomftige peezen.

Dat de hoeken van een Driehoek niet onder elkander zyn, gelyk hunne overeenkomftige peezen, is zeer gemakkelyk te vermoeden; om dat de hoeken niet door hunne peezen, maar door boogen welke kromme lynen zyn, gemeeten worden. Het zou nogtans op het fcherpfte genomen mogelyk zyn, dat kromme lynen onder elkander de zelve betrekking als regte lynen hadden, gelyk twee Cirkels omtrekken onder elkander de betrekking hunner *Diameters* hebben; nogtans, dewyl men Driehoeken met alle zoorten van hoeken maaken kan, en men de betrekking van twee na welgevallen genomen onbepaalde Cirkel boogen niet weet, zou het moeyelyk fchynen, dat de boogen, welke de maat van die hoeken zyn, altoos een

over-

overeenkomſt hadden, welke door die van hunne zyden uytgedrukt kan worden.

Maar zou men de zyden niet kunnen vergelyken, niet met de hoeken, maar met de peezen van die hoeken, welke regte lynen zyn? Dat ſchynd veel waarſchynelyker. Laatenwe derhalven onderzoeken, *of de zyden van een Driehoek niet onder elkander zouden zyn, gelyk de peezen der aan die zyden overgeſtelde hoeken.*

Laatenwe onderſtellen dat de Driehoek ABC (waar van een der zyden AB, gelyk is aan de *Radius* des Cirkels welke om dezelve beſchreeven is) regthoekig in B is; de zyde AB is derhalven de helft van de *Diameter* AC, *hypothenuſa* van deeze Driehoek; en daar en boven is dezelve de pees van een hoek of boog van 60 graaden. Laatenwe vervolgens uyt het Centrum O de *perpendiculair* OMT doen nedervallen, welke de pees AB en de boog ATB in twee gelyke deelen ſnyd. Laatenwe de pees BT trekken, welke de pees van de hoek BCA is, die, hebbende zyn toppunt aan den omtrek, de boog TB, zynde de helft van de boog ATB, welke tuſſchen zyne zyden doorgaat, tot maat heeft. Door dezelve reden is DC, zynde de pees van een vierde deel der Cirkel, de pees van de regte hoek ABC. Plaat I. Fig 9.

Indien men derhalven wil dat de zyden van een Driehoek onder elkander

zyn.

zyn, gelyk de peezen der aan die zyden tegengestelde hoeken, zoo zal men deeze evenredigheid hebben: de zyde A C is tot de zyde A B, gelyk de pees D C van de hoek A B C is tot de pees B T van de hoek B C A: nu is A C het dubbeld van A B; derhalven zou de pees D C het dubbeld moeten zyn van de pees B T.

Laatenwe de straal $OB = AB = OC = OD = OT$, r noemen: zoo is ter oorzaake van de gelykbeenige regthoekige Driehoek C O D, $\overline{DC}^2 = rr + rr = 2rr$; Aldus de pees $DC = \sqrt{2rr}$.

Laatenwe nu de uytdrukking van de pees B T Zoeken: Laatenwe de regthoekige Driehoek B M O beschouwen; zoo zullenwe verkrygen $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$; derhalven $\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{OM}^2$: maar $OB = r$ en $BM = \frac{r}{2}$; aldus $rr - \frac{rr}{4} = \overline{OM}^2 = \frac{3rr}{4}$ (geevende aan de beide *Termen* $rr - \frac{rr}{4}$ een zelve benaaming); bygevolg $OM = \sqrt{\frac{3rr}{4}}$; derhalven $MT = OT - OM$ word $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Laa-

Laatenwe nog de regthoekige Driehoek B M T beſchouwen ; zoo zullenwe verkrygen $\overline{BT}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MT}^2 = \frac{rr}{4} + rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}} + \frac{3rr}{4}$ (ſtellende de waarden der lynen B M, M T,) het geen gebragt word tot $\overline{BT}^2 = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; en bygevolg $BT = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$. We hebben reeds bevonden dat de pees D C $= \sqrt{2rr}$ is; bygevolg, indien D C het dubbeld van B T was, zou men verkrygen $\frac{\sqrt{2rr}}{2} = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$; derhalven, *Quadraterende* de wederzydſche leden, $\frac{2rr}{4}$ of $\frac{rr}{2} = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$ ergo $\frac{rr}{2} - 2rr = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Maar $\frac{rr}{2} - 2rr = \frac{rr}{2} - \frac{4rr}{2} = -\frac{3rr}{2}$, (dezelve eene benaaming geevende;) bygevolg $-\frac{3rr}{2} = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; derhalven, *Quadraterende* de wederzydſche leden,

den, zal men verkrygen $\frac{9r4}{4} = 3r4$; (en vermenigvuldigende de wederzydsche leden met 4) word de *Vergelyking*, $9r4 = 12r4$. Eindelyk, dezelve door $r4$ deelende, heeft men de *Vergelyking*, $9 = 12$. het welk ongerymd is.

Tot nut en vermaak der oeffenaars zal ik hier het volgende *Bewys* nog byvoegen.

Plaat I. Fig. 10. Steld de ſtraal OD *perpendiculair* op den *Diameter*, en trekt de pees AD van de regte hoek; indien AD als toen het dubbeld van de pees BT was, zoo zou deeze pees BT aan de helft van AD gelyk zyn. Nu, zulks is onmogelyk: want de boog ATBD van 90° zynde, de boog ATB van 60, en de boog BT van 30°, zoo zyn de boogen AT, BD, noodzaakelyk ieder van 30°, en bygevolg is de pees BT parallel aan AD; dewyl als dan de uyt-en inwendige hoeken TBA, BAD, gelyk zyn, hebbende ieder de helft van gelyke boogen AT, BD tot maat: maar OT zynde *perpendiculair* op AB, gelyk BC het is, zoo volgd daar uyt dat OT *parallel* aan BC is; en dewyl de parallelen, tusſchen parallelen gelyk zyn, zoo ziet men dat de pees $BT = RS$ is. Derhalven, indien BT aan de helft van AD gelyk was, zou de lyn RS ook de helft van AD zyn, het geen ongerymd is, zynde maar de helft van AS, een deel van

A

A D, dewyl ter oorzaake der overeenkomſtige Driehoeken, A B S, A M R; A M : M B = A R : R S is; nu A M = M B, derhalven A R = R S; ergo R S, de helft van A S, kan de helft van A D niet weezen.

Q, E, D.

Men kan derhalven niet onderſtellen, dat *de zyden van een Driehoek onder elkander zyn, gelyk de peezen der aan die zyden tegengeſtelde hoeken, zonder in tegenſtrydigheid te vervallen.*

Eindelyk heeft men aangemerkt, dat *de zyden van een Driehoek onder elkander waaren, gelyk de peezen van het dubbeld der aan die zyden tegengeſtelde hoeken.*

Want, als men om den Driehoek A D B een Cirkel beſchryft, zoo is het blykbaar dat ieder zyde de pees is van een hoek, dubbeld aan die geene waar tegen die zyde is overgeſteld; dewyl, by voorbeeld de hoek D, welke zyn top in den omtrek heeft, niets anders is, als de helft van de hoek, welke de boog A O B, waar van de zyde A B de pees is, tot maat zou hebben. Plaat II. Fig. 1.

Eene beſchouwing, die zoo eenvoudig is, ſchynd ons ten eerſten toe, als moetende geen groot gemak voortbrengen; nogtans de eerſte meetkundige overweegende dat geene, 't welk daar uyt zou kunnen volgen, bevonden, dat met de waarde van alle de peezen der hoeken in getallen te bepaalen, men met een buyten gemeene gemakkelykheid de zyden en hoeken van een Driehoek bekend zou kunnen krygen.

Om zulks door een eenig voorbeeld te doen begrypen, zoo laatenwe onderſtellen dat men de twee hoeken A, B, en
Plaat II. Fig. 1. de zyde AB van de Driehoek ADB bekend heeft; ik zegge dat het met een eenvoudige Regel van Drien, gemakkelyk zal zyn, om de waarde der twee andere zyden AD, DB, en de hoek D te ontdekken: Want, de twee hoeken A, B van een Driehoek bekend zynde, zoo is de derde D noodzaakelyk ook bekend; ge hebt derhalven deeze evenredigheid maar te maaken: *De pees van het dubbeld der hoek* D, *is tot de pees van het dubbeld der hoek* B, *gelyk de zyde* BA *tegengeſteld aan de hoek* D, *is tot de zyde* DA *tegengeſteld aan de hoek* B: Als men nu onderſteld dat men de peezen van alle de hoeken in getallen bepaald heeft, gelyk men het in der daad uytgevoerd heeft, zoo zyn de drie eerſte *Termen* van deeze evenredigheid bekend; derhalven is de vierde *Term* ook gevonden.

Door het zelve middel zal men de zyde DB bepaalen.

Men ziet derhalven hoe gemakkelyk men geraaken zou, om alle hoeken en zyden van een Driehoek bekend te krygen, indien men een Tafel van alle peezen der hoeken in getallen hadde; en dit is het waar op de Meetkundige

van

van deeze laatste eeuwen zig met veel oplettenheid toegelegd hebben: maar in plaats van, gelyk de ouden, de waarde der peezen van alle de hoeken te bereekenen, hebben zy het gemakkelyker bevonden, de waarde van de helft der peezen te bereekenen; het geen op het zelve uytkomt, als of men de peezen berekend, *om dat de peezen onder elkander zyn, gelyk derzelver helften.*

Laatenwe de ingeschreevene Driehoek A B C beschouwen. We hebben hier voren gezien dat *de zyden van een Driehoek onder elkander waaren, gelyk de helften der peezen van het dubbeld der aan die zyden tegengestelde hoeken.* Laatenwe dan nu uyt het centrum O op de zyde A C de *perpendiculair* O S D laaten nedervallen, en de straal O C trekken. 1°. De pees A C is door de helft in het punct S gesneeden. 2°. De boog A D C is ook in het punct D in tweeën gesneden; aldus is de hoek C O D gelyk aan den hoek B, welke aan den omtrek is: maar men heeft de *Sinus van een hoek*, by voorbeeld, van de hoek C O D genaamd, een *perpendiculair* C S getrokken van het einde C der boog C D welke die hoek meet, op de straal O D, welke door het ander einde D der zelve boog gaat; bygevolg de hoek C O D gelyk zynde aan de hoek B, is de *perpendiculair* C S ook de *Sinus* van de hoek B: nu is C S alleenlyk de helft van C A, pees van het dubbeld der hoek B; Plaat II. Fig. 2.

derhalven is de Sinus *van een hoek alleenlyk de helft der pees van het dubbeld dier hoek*

Maar het is reeds beweezen dat de zyden van een Driehoek onder elkander waaren, gelyk de helft der peezen van het dubbeld der aan die zyden tegengestelde hoeken; dewyl derhalven de helften der peezen van het dubbeld van die hoeken, het zelve zyn als de *Sinus* van die hoeken, zoo volgd daar uyt *dat de zyden van een Driehoek onder elkander zyn, gelyk de* Sinus *der aan die zyden tegengestelde hoeken.*

De ontdekking van deeze waarheid heeft tot de rekening der *Sinus*-Tafelen aanleiding gegeeven. Het was gemakkelyk te bespeuren dat de *Sinus* der scherpe hoeken toenamen, na maate dat die hoeken grooter wierden, en dat men dus de betrekking van die *Sinus* bepaalen konde. De *Sinus* BS van de hoek BOA, is kleinder als de *Sinus* CT van de hoek COA, en indien de hoek COA de regte hoek DOA wierd, zou deszelfs *Sinus* de straal DO zyn, welke de grootste van alle de *Sinus* is, en daarom *Sinus totus* genaamd.

Plaat II. Fig. 2.

Dewyl de stompe hoeken, gelyk de hoek BOM, grooter zyn als de regte DOA, zoo begrypt men ten eersten niet dat de *Sinus* van de regte hoek de grootste van alle de *Sinus* is; maar men merkt wel haast aan, dat de *Sinus* BS van de scherpe hoek BOA, niet onderscheiden

den is van de *Sinus* der ſtompe hoek B O M, welke *zyn Complement tot twee regte* * is; nadien de *perpendiculair* B S zynde de helft van de pees van het dubbeld der ſtompe hoek B O M, gelyk men zulks ziet, als men B S tot G verlengt, moet dezelve de *Sinus* van deeze ſtompe hoek weezen.

Twee onderſcheidene hoeken kunnen derhalven de zelve *Sinus* hebben; dus is men in de oploſſing der Driehoeken genoodzaakt een merkteken te ſtellen, het welk doet onderſcheiden aan welke der beide hoeken een gevonden *Sinus* behoord.

Dewyl dan de *Sinus* van de regte hoek de grootſte van alle *Sinus* is, is het genoeg de *Sinus* der hoeken van 1 tot 90 graaden in getallen te bepaalen, ten einde de betrekking van die *Sinus* te hebben.

Om daar toe te geraaken, heeft men onderſteld dat de *Sinus totus*, of de *Sinus* van de regte hoek (welke van de ſtraal der Cirkel waar mede men een na believen genomen hoek meet, niet onderſcheiden is) men heeft, zeg ik, onderſteld, dat de *Sinus totus* in tien millioenen gelyke deelen verdeeld wierd, het geen zeer mogelyk is, ter oorzaake dat men de ſtraal der Cirkel, welke diend om de hoe-

* *Complement tot twee regte*; is dat geene 't welk men by een hoek moet vergaaren, ten einde dezelve aan twee regte hoeken gelyk zy.

hoeken te meeten, zoo lang als het nodig is, kan neemen (*a*). Men heeft vervolgens meetkonstig zoeken te bepaalen, hoe veel deelen van de *Sinus totus* de *Sinus* van ieder hoek en ieder minuut van een hoek bevattede. Na deeze bepaaling gedaan te hebben, heeft men de waarde in getallen van alle hoeken en hunne minuuten betrekkelyk tot de *Sinus totus* in een Colom geschikt; en dit word de *Sinus-Tafelen* genaamd. Wanneer men door derzelver middel de waarde der zyden, of hoeken eens Driehoeks, vinden wil, zegt men dat men van de *Trigonometria door de Sinus* gebruyk maakt. Ten einde men van de manier, waar na de *Sinus-Tafelen* zaamengesteld zyn, een denkbeeld kryge, zoo laat de

Plaat II. Fig. 4. hoek B O C van 30 graaden zyn. Maakt de boog B A = B C: de boog C B A is van 60 graaden; de pees A C van die boog, is derhalven gelyk aan de straal der Cirkel, of aan de *Sinus totus* = tien millioe-

(*a*) Iemand zal misschien hier vraagen, waarom men de *Sinus totus* in een zoo groot getal gelyke deelen ondersteld verdeeld te zyn; waar op ik antwoorde: dat men in de bepaaling in getallen der *Sinus* zien zal, dat men vierkante wortelen moet trekken, dat deeze wortelen zelden nauwkeurig zyn; en dat 'er altoos eenig overschot blyft: dat men daarom ondersteld heeft dat de *Sinus totus* in een zeer groot getal deelen verdeeld wierd, ten einde dezelve zoo onmaatig klein te maaken, dat men, het geene aan de vierkante wortel der getallen, welke de waarde der *Sinus* aanwyzen, ontbreeken zou, zonder eenige zwaarigheid, na konde laaten.

lioenen of 10000000. Nu de *Sinus* DC van de hoek BOC van 30 graaden, is de helft der pees van het dubbeld van die hoek, dat is te zeggen, is de helft van de pees AC; bygevolg de *Sinus* DC van de hoek van 30 graaden $= 5$ millioenen of 5000000.

Maakt op de Diameter BS de *perpendiculaire* ſtraal OM: het is blykbaar dat de hoek COM $= 60$ graaden is: Laatenwe uyt het punct C de *perpendiculair* CP op de ſtraal OM doen nedervallen. Deeze *perpendiculair* CP is de *Sinus* van de hoek COM van 60 graaden, welke het *Complement tot een regte* (*a*) is, van de hoek BOC van 30 graaden.

De *Sinus* van een hoek gevonden zynde, is het gemakkelyk de waarde van deszelfs *Complement* tot een regte te kennen. Men heeft zig maar de vermaarde eigenſchap der regthoekige Driehoek te 'erinneren, en de regthoekige Driehoek COD te beſchouwen, waar in men bekend heeft, de *Hypothenuſa* CO (*ſinus totus*), en de zyde DC, zynde de helft van deeze *Hypothenuſa* of van de *Sinus totus*, waar uyt men deeze *vergelyking* trekt, $\overline{CO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{DC}^2$. Aldus $\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{DO}^2$; en bygevolg $DO =$ $\sqrt{}$

(*a*) Het *Complement tot een regte*; is het geene men by een hoek moet vergaaren, ten einde deszelfs waarde aan die van een regte hoek gelyk zy.

$\sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$: nu $DO = CP$ *Sinus* van het *Complement* tot een regte van de hoek BOC; derhalven $CP = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$, dat is, dat de *Sinus* CP van 60 graaden, gelyk is aan de vierkante wortel uyt het verſchil dat 'er tuſſchen het vierkant van de *Sinus totus* en het vierkant van de helft van die *Sinus* is. Als men nu de *Sinus* CP in getallen uytdrukt, zal men dezelve bevinden $= 8660254$ deelen van de *Sinus totus*, welke 'er tien millioenen bevat.

Nu hebbenwe de gantſche *Theorie*, welke tot de grondſlag van de ontbinding der *Trigonometriſche voorſtellen* diend. De eenige waarheid welke men altoos in 't oog moet houden, is dat *de* Sinus *der hoeken onder elkander zyn, gelyk de aan die hoeken tegengeſtelde zyden*; waar uyt het gemakkelyk te oordeelen is, dat men tot de oploſſing van een Driehoek niet als met behulp der evenredigheden geraakt. Om nu alle *Termen* van een evenredigheid te bepaalen, moeten 'er noodzaakelyk drie bekend zyn, derhalven moet in een Driehoek ook drie paalen gegeeven zyn, om het overige te bepaalen, gelykwe in het begin deezes werks reeds aangemerkt hebben, en uyt de volgende *Voorſtellen* ook klaarlyk blykt.

Voor-

Voorstel I.

Men begeerd de afstand AC van de twee ongenaakbaare voorwerpen A, C te vinden. Plaat II. Fig. 5.

Oplossing.

Laatenwe een bekwaame plaats zoeken, alwaar we een bazis BD, waar toe we onze bewerkingen moeten overbrengen, meeten kunnen. Laatenwe aan de einden B, D van deeze bazis het *Astrolabium Successivè* stellen, ten einde de waarde der hoeken ABD, CBD, BDC, BDA te vinden; het geen de hoek ADC, welke het verschil tusschen de hoek BDC en de hoek BDA is, bekend zal maaken. Laatenwe daar na de Driehoek BAD beschouwen, waar in we de hoek ABD en de hoek BDA bekend hebben, en waar uyt men de waarde van de derde hoek BAD vind. Men ondersteld daar en boven dat men de bazis BD gemeeten heeft.

Wy hebben nu deeze evenredigheid maar te maaken: de *Sinus* van de hoek BAD door de Tafelen bekend, is tot de *Sinus* van de hoek ABD ook door de Tafelen bekend, gelyk de bazis BD, tegengesteld aan de hoek BAD, is tot de zyde AD, tegengesteld aan de hoek ABD; of eenvoudiger *Sin.* BAD : *Sin.* ABD = BD : AD. Nu zyn in deeze evenredigheid de drie eerste

Termen bekend: Want de twee eersten zyn door de *Sinus*-Tafelen bekend, en de derde is de bazis B D, welke men onderſteld gemeeten te zyn; aldus is de vierde *Term* A D bekend.

Laatenwe nu eens zien wat we in de Driehoek B D C bekend hebben. Men heeft de waarde der hoeken C B D, B D C genomen; het geen de hoek B C D bepaald. Eindelyk is de bazis B D bekend; bygevolg zullenwe deeze andere evenredigheid hebben, *Sin.* B C D: *Sin.* C B D = B D : C D, waar in de drie eerſte *Termen* nog bekend zyn; en bygevolg is de vierde *Term* C D bepaald.

Dit doet ons reeds zien *dat een zyde van een Driehoek bekend zynde, met de twee hoeken op die zyde gemaakt, men de twee andere zyden gemakkelyk bepaalen kan.*

We hebben derhalven in de driehoek A D C de lengte der zyden A D, C D, en de hoek A D C tuſſchen die zyden begreepen, bekend, zie hier derhalven het *Voorſtel* tot dit ander *Voorſtel* gebragt.

Voorſtel II.

Plaat II. Fig. 6. De twee zyden A D, C D van de Driehoek A D C gegeeven zynde, met de hoek A D C tuſſchen die zyden, de derde zyde A C te vinden.

Oploſſing

I. Indien de hoek A D C een regte hoek is, is, zal men hebben $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$. Derhalven $AC = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$; dat is; dat men, om de afſtand A C bekend te krygen, de vierkante wortel uyt de ſom der twee bekende vierkanten $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ moet trekken.

II. Indien de hoek A D C niet regt is, en dat de zyden A D, C D, welke bekend zyn, gelyk zyn, dan is de Driehoek A D C gelykbeenig; derhalven is de hoek A = de hoek C; bygevolg, dewyl men de hoek D bekend ſteld, zal de zom der twee hoeken A, C ook bekend zyn: aldus zal de helft van deeze zom de waarde van de hoek A en de hoek C geeven. Maakt derhalven deeze evenredigheid: *Sin.* D A C : *Sin.* A D C = C D : A C, waar in de drie eerſte *Termen* bekend zyn; de vierde A C zal derhalven bepaald zyn. Plaat II. Fig. 7.

III. Wanneer de bekende zyden A D, C D ongelyk zyn, en dat de ingeſlooten hoek A D C ſcherp is, zoo verbeeld uyt het uyterſte C der kleinſte zyde C D de *perpendiculair* C M op de grootſte zyde A D, en beſchouwd de regthoekige Driehoek C M D, waar in de zyde C D, de hoek C D M, en de hoek C M D bekend zyn: waar uyt men de waarde van de hoek M C D opmaakt; het geen de volgende evenredigheid voortbrengt: *Sin.* T : *Sin.* M C D = C D : M D, waar in Plaat II. Fig. 8.

de

de drie eerſte *Termen* gegeeven zyn, en bygevolg de vierde *Term* MD bekend is. Maar de gantſche zyde AD is (door de onderſtelling) bekend; aldus zal het deel $AM = AD - MD$ ook bepaald zyn. En, indien men nog deeze andere evenredigheid maakt: *Sin.* T : *Sin.* $CDM = CD : CM$, waar in de drie eerſte *Termen* gegeeven zyn, zal men de *perpendiculair* CM bekend krygen.

Men heeft derhalven in de regthoekige Driehoek AMC de twee zyden AM, MC welke de regte hoek zaamenſtellen, bekend. Aldus, dewyl $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$ is, zoo zal men hebben $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2}$, dat is, dat de afſtand AC gelyk is aan de vierkante wortel uyt de zom der twee bekende vierkanten $\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$; en bygevolg is deeze afſtand bekend.

Plaat II. Fig. 9. IV. Wanneer de bekende zyden AD, CD ongelyk zyn, en de ingeſlooten hoek ADC ſtomp is, zoo verbeeld uyt de hoek C de *perpendiculair* CM op de verlengde zyde AD. In de regthoekige Driehoek CMD heeft men de zyde CD bekend; de hoek CDM is ook bekend, om dat de hoek ADC gegeeven is; daarenboven is de hoek CMD regt; dus is de derde DCM bepaald. We hebben derhalven deeze evenredigheid: *Sin.* T : *Sin.* $DCM = CD : DM$,

waar

waar in de drie eerſte bekende *Termen* de vierde *Term* D M bekend zullen maaken. Vergaard deeze waarde by de bekende zyde A D, en de gantſche afſtand A M zal ten eenemaal bekend zyn.

Als men nog de regthoekige Driehoek C M D beſchouwd, zal men de lengte van de *perpendiculair* C M door deeze evenredigheid bepaalen : *Sin.* T : *Sin.* C D M = D C : C M, waar in de drie eerſte bekende *Termen* de waarde van de vierde C M uytleveren.

Men heeft derhalven in de regthoekige Driehoek A M C de twee zyden A M, C M, welke de regte hoek zaamenſtellen, bekend: aldus kan men de *Hypothenuſa* A C gemakkelyk bekend krygen, als men maakt de *Vergelyking* $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$, waar uyt men trekt $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2}$; het geen zeggen wil, dat de afſtand A C gelyk is aan de vierkante wortel uyt de zom der vierkanten $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$; derhalven is deeze afſtand ook bepaald.

Aldus, in het algemeen ſpreekende, *kan men door middel der* Sinus, *de derde zyde van een Driehoek waar van twee zyden bekend zyn, met de hoek tuſſchen die beide zyden, bekend krygen.*

Neem agt dat het nodig is, voor de oploſſing van dit *Voorſtel*, dat de bekende hoek A D C tuſſchen de twee gegeegeevene zyden A D, C D is. Indien deeze bekende hoek, in plaats van tusschen dezelve te zyn, tegen een der beide gegeevene zyden was overgesteld, zou men zyn toevlugt tot eenige andere beschouwing hebben moeten neemen, zoo als men zulks in het volgende *Voorstel* gaat bewyzen.

Voorstel III.

De twee ongelyke zyden A D, C D van een Driehoek gegeeven zynde, met de hoek D A C tegen over een van die beide zyden, de derde zyde A C te vinden.

Oplossing.

Dezelve is onmogelyk, als men zig daar in enkel aan de *Termen* der *Vraag* houd.

Bewys

Plaat II. Fig. 10. Indien we deeze evenredigheid maaken, C D : A D = *Sin.* D A C is tot de *Sinus* van de aan de zyde A D tegengestelde hoek, waar in de drie eerste *Termen* gegeeven zyn, zoo is het zeker dat men de vierde *Term* bekend zal krygen, dat is, de *Sinus* van de aan de zyde A D tegengestelde hoek; maar deeze *Sinus* is tot twee hoeken toepasselyk: want we hebben hier voren aangemerkt, dat de *Sinus* van een scherpe hoek ook de *Sinus* was, van het *Complement* dier hoek

tot

tot twee regte; bygevolg maaken de *Sinus* Tafelen de waarde van de hoek D C A tegengesteld aan de zyde A D niet bekend. Deeze hoek niet bepaald zynde, is het niet mogelyk de hoek A D C bekend te krygen, waar van de *Sinus* ons tot de kennisse der derde zyde A C brengen zoude.

Q, E, D.

Dit toond ons aan dat *twee Driehoeken kunnen hebben twee wederzyds aan elkander gelyke zyden, met een gelyke hoek tegengesteld aan de zelve zyde; en nogtans zeer verschillende zyn.*

Bewys.

Laatenwe de Driehoek A D C neemen, waar van de zyde D C kleinder is als de zyde D A. Laatenwe uyt het punct D met de straal D C de boog C O *c* beschryven, welke de zyde A C in het punct *c* snyd, en laatenwe D *c* trekken. Het is blykbaar dat de Driehoek A D C twee zyden gelyk heeft aan twee zyden van de Driehoek A D *c*; dewyl A D een gemeene zyde is, aan die twee Driehoeken, dat de zyde D C = de zyde D *c* is, en dat daar en boven de hoek A, in de beide Driehoeken gemeen, aan gelyke zyden tegengesteld is. Het is nu zichtbaar dat de Driehoek A D C zeer verschillende is van de Driehoek A D C; by gevolg kunnen twee Driehoeken, twee wederzyds aan elkander gelyke zy- Plaat II. Fig. 10.

den

den hebben, en een gelyke hoek, tegengesteld aan een wederzyds gelyke zyde, zonder de derde zyde gelyk aan de derde zyde te hebben;

Q, E, D.

Nogtans, indien men by de gegeevens van het III. *Voorstel*, het zoort van de hoek D C A tegengesteld aan de zyde A D, voegd, dan zal dit *Voorstel* gantschelyk bepaald zyn, schoon men de waarde van die hoek niet weet.

Bewys.

Plaat II. Fig. 10. Laat ons onderstellen dat eenige omstandigheden te kennen geeven dat de hoek D C A scherp is, neemende wederom de evenredigheid: C D : A D = *Sin.* D A C : *Sin.* D C A, waar in de drie eerste *Termen* bekend zyn, zoo zal men de waarde van de *Sinus* D C A verkrygen, welke men in de Tafelen zal vinden, en by gevolg zal men zonder dubbelzinnigheid de waarde van de hoek D C A, welke aan die *Sinus* beantwoordt, vinden, om dat men die hoek onderstelde scherp te zyn; en zoo men ze onderstelde stomp te zyn zou de hoek, welke aan de gevonden *Sinus* beantwoorden zou, de stompe hoek D *c* A zyn, zynde het *Complement* tot twee regte van de scherpe hoek D C A.

Bygevolg, zal, na dat de hoek D C A scherp of stomp zal zyn, de gezogte derde zyde A C grooter of kleinder zyn: want

want de hoek D C A ſcherp zynde, zal daar door de hoek A D C grooter zyn, waar uyt een grooter zyde A C voortſpruyt; en indien de hoek D c A ſtomp is, zal daar door de hoek A D c kleinder zyn, het welk een kleinder zyde A c met zig brengt.

Q, E, D.

Tot hier toe hebbenwe alleenlyk in 't oog gehad, om tot de kenniſſe der drie zyden van een Driehoek te geraaken, waar in eene zyde en twee hoeken, of twee zyden en eene hoek gegeeven waaren: Daar blyft derhalven nog over om te doen zien, hoe men de drie hoeken van een Driehoek bepaalen kan, waar van men de lengte der drie zyden bekendt heeft.

Voorſtel IV.

De drie zyden van den Driehoek A D C bekend zynde, de waarde van ieder hoek derzelve te bepaalen. Plaat II. Fig. 11.

Oploſſing.

I. Indien de voorgeſtelde Driehoek gelykzydig is, zyn derzelver drie hoeken gelyk, en by gevolg is ieder het derdendeel van 180 graaden = 60 graaden. Plaat II. Fig. 11.

II. Wanneer die Driehoek gelykbeenig is, dat is, wanneer men onderſteldt dat de twee zyden D A, D C gelyk zyn, zoo moet men zig een *perpendiculair* D F verbeelden, welke uyt de hoek D op Plaat II. Fig. 12.

de derde zyde A C valdt. Men ziet wel dat deeze *perpendiculair* op het midden van de gegeeven zyde A C valdt; by gevolg is A F of F C de helft van A C ook bekend: aldus zal de regthoekige Driehoek D F C deeze evenredigheid voortbrengen: D C : F C = *Sin.* T : *Sin.* F D C, waar in de drie eerste bekende *Termen*, de vierde *Term* bekend zullen maaken, welke de *Sinus* van de scherpe hoek F D C is; deeze hoek zal dan door de Tafelen bekend worden, en by gevolg zal men de waarde van de derde hoek C hebben: nu is de hoek C = de hoek A, om dat de Driehoek A D C gelykbeenig gesteldt is; aldus kan men de derde hoek A D C bekend krygen.

Plaat II. Fig. 13. III. Indien de Driehoek A D C ongelykzydig is, dat is, indien de drie zyden van die Driehoek ongelyk zyn, zal men noch een *perpendiculair* C F verbeelden, welke uyt de grootste hoek A C D op de grootste zyde A D valdt; deeze *perpendiculair* zal de zyde A D in twee ongelyke stukken A F, F D verdeelen, welke men moet trachten te bepaalen: want hunne bepaaling zal ieder der hoeken van de voorgestelde Driehoek bekend maaken.

Laat derhalven $AD = a$, $CD = b$, $AC = c$, $AF = x$, $DF = a - x$, $CF = y$ zyn; en laaten we de regthoekige Driehoek C F A beschouwen: zoo zullen we hebben $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$, of $cc = xx + yy$.

Door

Door dezelve reden, brengt ons de rechthoekige Driehoek C F D voort, $\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$, of $bb = aa - 2ax + xx + yy$: Laatenwe in deeze laatſte vergelyking, cc in plaats van $xx + yy$ ſtellen; zoo zal men de volgende vergelyking hebben $bb = aa + cc - 2ax$; en met te veranderen, vind men $2ax = aa + cc - bb$; waar uyt men trekt $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; het geen betekendt, dat het kleinſte ſtuk A F bepaaldt wordt, als men het vierkant van de zyde C D van de zom der vierkanten der zyden A D, A C trekt, en de reſt door het dubbeld der grootſte zyde A D deeldt. Wanneer het kleinſte ſtuk A F bekend is, heeft men het maar van de grootſte zyde A D te trekken; deeze Aftrekkinge zal het grootſte ſtuk F D bekend maaken.

Daar na, beſchouwende de regthoekige Driehoek A F C, zal men deeze evenredigheid hebben: A C : A F = *Sin.* T : *Sin.* A C F, welke de hoek A C F bekend zal maaken, en by gevolg de hoek C A D.

Van 's gelyken, brengt de regthoekige Driehoek C F D deeze evenredigheid voort: C D : F D = *Sin.* T : *Sin.* F C D, waar uyt de hoek F C D bekend wordt, en by gevolg meede de hoek C D A.

Men heeft nu derhalven in de Driehoek

hoek ACD de hoek CAD, en de hoek CDA bekend; aldus is de derde hoek ACD ook bekend. De bepaaling der drie zyden van een Driehoek, maakt derhalven derzelver hoeken bekend; by gevolg zyn we gekomen, tot het geene wy ons voorgesteld hadden te vinden;

Q, E, D.

Wanneer men de hoeken van een ongelykzydige Driehoek weeten wil, waar van de drie zyden gegeeven zyn, ziet men dat de gantsche zwaarigheid bestaat, om een der twee stukken AF, FD * te bepaalen, en dat men, om het kleinste AF van die beide stukken te vinden, de grootste zyde AD moet *Quadrateren*, als mede de kleinste zyde AC, die beide vierkanten t'zaam vergaaren, van die zom het vierkant op de middenste zyde CD trekken, en eindelyk die rest door het dubbeld' van de grootste zyde AD deelen: want het *Quotient* van deeze Deeling geeft de waarde van het kleinste stuk AF, zoo als de *Vergelykinge*

$$x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$$

zulks uytwyst. Maar dit alles is van een redelyke groote omslag. Indien men tot de kennisse van een dier beide stukken door een kortere weg geraaken konde, zou daar door de *Practycq* der *Trigonometria* te volmaakter zyn. Laatenwe derhalven eens beproeven, of we niet eenig middel kunnen

vin-

* Plaat II. Fig. 13.

vinden, welke minder Reekening als de voorgaande manier vereiſcht.

Het is blykbaar dat de twee ſtukken A F, F D bekend zynde, hun verſchil ook bekend is. Nu hebbenwe door de voorgaande Rekening bevonden dat het kleinſte ſtuk $AF = \frac{aa + cc - bb}{2a}$ is. Aldus is het grootſte ſtuk $FD = AD - AF = a - \frac{aa - cc + bb}{2a} = \frac{2aa - aa - cc + bb}{2a}$; waar uyt men trekt, het grootſte ſtuk $FD = \frac{aa - cc + bb}{2a}$. Bygevolg het verſchil van die ſtukken, of $FD - AF = \frac{aa - cc + bb}{2a} - \frac{aa + cc - bb}{2a} = \frac{2bb - cc}{2a} = \frac{bb - cc}{a}$; dat is te zeggen, dat de uytdrukking van het verſchil der beide ſtukken F D, A F, $\frac{bb - cc}{a}$ is. Laaten we dit verſchil d noemen; zoo zal men derhalven hebben $\frac{bb - cc}{a} = d$: nu $\frac{bb - cc}{a} = \frac{\overline{b + c} \times \overline{b - c}}{a}$; aldus $d = \frac{\overline{b + c} \times \overline{b - c}}{a}$; derhalven $a \times d = \overline{b + c}$

$\overline{\times b - c}$, het geen deeze evenredigheid voortbrengt: $a : b + c = b - c : d$; dat is, dat men het verſchil der twee ſtukken door deeze eenvoudige evenredigheid vind: *de grootſte zyde* A D (a) *is tot de zom der twee andere zyden* C D, A C ($b + c$) *gelyk het verſchil* C D — A C ($b - c$) *van die beide zelve zyden, is tot een vierde* Term d, *welke het gezogte verſchil is.*

Maar, volgens de voorwaardens van het *Voorſtel*, is de zom A D der beide ſtukken gegeeven, en door deeze laatſte evenredigheid vind men hun verſchil; bygevolg zal men de waarde van ieder ſtuk gemakkelyk vinden; dewyl het grootſte, gelyk is aan de helft van de zom der ſtukken, meer de helft van hun verſchil, en het kleinſte is gelyk aan de helft van de zom der zelve ſtukken, min de helft van hun verſchil. *

Dus, in plaats van de waarde van een der ſtukken te zoeken, gelyk wy in het eerſt gedaan hebben, zal het veel beter uyt te voeren zyn, als we het verſchil van die ſtukken bepaalen, maakende gebruyk van de evenredigheid $a : b + c = b - c : d$, welke we hier voren door de rekening gevonden hebben.

Die geene welke nieuwsgierig zyn, om

* Dit is gemakkelyk door ſtelkonſt te bewyzen, want nemende twee grootheden $x + y$ en $x - y$, zoo is hun halve zom x en hun halve verſchil y, derhalven &c.

om te zien hoe de Meetkonst hier met de rekeninge overeenkomt, hebben maar op de volgende *Constructie* agt te geeven.

Beschryft uyt het punct C met de kleinste zyde C A een Cirkel, en verlengd D C tot dat hy de omtrek in H ontmoet. Het is klaar, 1°. dat D H de zom der beide zyden D C, A C is, dewyl A C = C H is 2°. Dat D M het verschil van die beide zelve zyden D C, A C is: want, om dat M C = A C is, is D C — A C = D C — M C = D M. 3°. D T is het verschil der stukken D F, A F: Men moet zig 'erinneren dat een *perpendiculair*, uyt het centrum van een Cirkel, op een van zyne peezen A T getogen, deeze pees in twee gelyke deelen snydt; dus A F = F T; bygevolg is D T het verschil tusschen het grootste stuk D F en het kleinste A F. Plaat II. Fig. 14.

Men moet derhalven bewyzen dat de grootste zyde D A is tot de zom D H der twee andere zyden D C, A C, gelyk D M, het verschil van die beide zelve zyden, is tot D T, het verschil der stukken D F, A F, gemaakt door de *perpendiculair* C F, getogen uyt de grootste hoek op de grootste zyde A D.

Nu dit alleen is door de *Constructie* beweezen: want indien men uyt een punct D, buyten een Cirkel genomen, twee snylynen D A, D H trekt, zullen deeze geheele lynen wederzyds onder elkander zyn, gelyk hunne deelen DT, DM, welke buyten de Cirkel zyn; bygevolg DA : DH = DM : DT; dat is, dat de grootste zyde DA is tot de zom DH (DC + AC) van de twee andere zyden, gelyk hun verschil DM is tot het verschil DT der twee stukken DF, AF. De Meetkonst komt derhalven met de rekeninge over een, of misschien is het de rekeninge, welke de *geometrische constructie* heeft doen vinden.

VERHANDELING

OVER DE

SPHERISCHE

DRIEHOEKSMEETKUNDE.

Definitien.

I.

Een grootſte rond van een *Sphere*, is een ſnyding van de *Sphere* door een vlak, gaande door deszelfs centrum.

II.

De *Axis* van een grootſte rond, is een regte lyn, gaande door het Centrum, *perpendiculair* tot het vlak van de Cirkel: En de twee puncten, waar in de *Axis* de oppervlakte der *Sphere* ſnyd, worden de aſpunten der Cirkel genaamd.

III.

Een *Spheriſche* hoek is de neiging van twee grootſte ronden.

IV.

Een *Spherische* Driehoek is een deel van de oppervlakte der *Sphere*, besloo- ten door de boogen van drie grootste ronden: welke boogen de zyden van de driehoek genaamd worden.

V.

Plaat III. Fig. I. Indien door de aspunten A en F van twee grootste ronden DF en DA, regthoekig staande, twee andere grootste ronden ACE, FCB, begreepen worden te passeren, en daar door twee *Spherische* Driehoeken ABC en FCE voortkomen, wordt de laatste van deeze gevormde Driehoeken, gezegd het *Complement* van de voorgaande te zyn.

Corollariums.

1. Het is openbaar (*door Def.* I) dat de snyding van twee grootste ronden (als die door het Centrum gaat) de *Diameter* van de *Sphere* zal zyn; en bygevolg, dat hunne omtrekken elkander altyd in twee puncten, op de afstand van eene halve Cirkel, of 180 graaden, snyden zullen.

2. Het blykt alzoo (*uyt Def.* II.) dat alle grootste ronden, gaande door het aspunt van een gegeeven Cirkel, die Cirkel in regte hoeken snydt, nadien zy door de *Axis* gaan, of daar mede over-

overeenkomen, zynde de *Axis perpendiculair* op dezelve.

3. Daar uyt volgdt daarenboven, dat de omtrek van een grootste rond, overal 90 graaden van deszelfs aspunt gelegen is; en dat de maat van een *Spherische* hoek C A D * een boog van een grootste rond is, begreepen door de twee Cirkelen A C B, A D B, welke de hoek formeren, en welkers aspunt het hoekig punt A is. Want, laat de *Diameter* A B de snyding van de grootste ronden A D B en A C B zyn, (*Zie Coroll.* I.) en laat de platte, of groote Cirkel D E C, begreepen worden *perpendiculair* op den *Diameter* te zyn, snydende de oppervlakte der *Sphere* in de boog C D; dan is het openbaar, dat A D = B D = 90°, en A C = B C = 90° is (*Coroll.* I.) en dat C D de maat is van de hoek D E C (of C A D) de neiging der twee voorgestelde Cirkels. Plaat III. Fig. 2.

4. Hier uyt is het openbaar, dat de Hoeken B en E, van de *Complementale* Driehoeken A B C en F C E, beide regte hoeken zyn; en dat C E het *Complement* van A C, C F van B C, B D (*of de hoek* F) van A B, en E F van E D (*of de Hoek* A) is. Plaat III. Fig. 1.

Theo-

* Alhoewel een *Spherische* hoek, eigentlyk de neiging van twee grootste ronden is, nogtans wordt dezelve gemeenelyk door de neiging van hunne omtrekken, tot het punct alwaar zy elkander snyden, uytgedrukt.

Theorema I.

In ieder regthoekige Spherische *Driehoek, is, gelyk de* Radius *is tot de* Sinus *van de hoek op de bazis, alzoo de* Sinus *van de* Hypothenusa *tot de* Sinus *van de* perpendiculair; *en gelyk de* Radius *tot de* Co-Sinus *van de hoek op de* bazis, *alzoo is de* Tangens *van de* Hypothenusa *tot de* Tangens *van de* Bazis.

Bewys.

Plaat III. Fig. 3. Laat ADL en AEL twee grootste ronden van de *Sphere* zyn, snydende elkander in de *Diameter* AL, en maakende een hoek DOE, gemeeten door de boog ED; wordende DOE ondersteld *perpendiculair* op de *Diameter* AL, in het centrum O te zyn.

Laat AB de bazis van de voorgestelde Driehoek zyn, BC de *perpendiculair*, AC de *Hypothenusa*, en BAC (of DAE = DE = DOE) de hoek op de bazis: Laat daarenboven CG de *Sinus* der *Hypothenusa* zyn, AK deszelfs *Tangens*, AI de *Tangens* van de bazis, CH de *Sinus* van de *perpendiculair*, en EF de *Sinus* van de Hoek op de bazis; en laat I, K en G, H met lynen t'zaamen gevoegd worden.

Nadien CH *perpendiculair* op het platte der bazis is, zoo is het blykbaar, dat het platte GHC *perpendiculair* op het platte der bazis zal zyn, en van 's gelyken

lyken *perpendiculair* op de *Diameter* A L, dewyl G C, zynde de *Sinus* van A C, *perpendiculair* op A L is. Daarenboven, aangezien beide de platte O I K en A I K *perpendiculair* op het platte der bazis zyn, zal alzoo hunne snyding I K *perpendiculair* op dezelve, en gevolgelyk de hoek A I K een regte Hoek zyn. Aangezien derhalven de Hoeken O F E, G H C en A I K alle regte hoeken zyn, en dat de platte der drie Driehoeken O F E, G H C en A I K alle *perpendiculair* op de *Diameter* A L zyn, zullenwe, *door overeenkomstige Driehoeken*,

hebben $\left\{ \begin{array}{l} OE : EF = GC : CH \\ OE : OF = AK : AI \end{array} \right\}$

dat is $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Radius} : \textit{Sinus} \text{ van } EOF \text{ (of } BAC) \\ \quad = \textit{Sinus} \text{ van } AC : \textit{Sinus} \text{ van } BC. \\ \textit{Radius} : \textit{Cosinus} \text{ van } EOF \text{ (of } BAC) \\ \quad = \textit{Tangens } AC : \textit{Tangens } AB. \end{array} \right.$

Q, E, D.

Corollarium I

Hier uyt volgdt, dat de *Sinus* der Hoeken, van ieder scheeve *Spherische* Driehoek A D C, *direct* tot een andere zyn, gelyk de *Sinus* der overgestelde zyden.

Want, laat B C *perpendiculair* op A D zyn. Plaat III. Fig. 4.

Dan aangezien $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Radius} : \textit{Sin}.A = \textit{Sin}\ AC : \textit{Sin}.BC \\ \textit{Radius} : \textit{Sin}.D = \textit{Sin}.DC : \textit{Sin}.BC \end{array} \right\}$

door het voorgaande deel van het Theorema;

zoo

zoo zullenwe hebben, *Sin.* A × *Sin.* A C (= *Radius* × *Sin.* B C) = *Sin.* D × *Sin.* D C, en gevolgelyk *Sin.* A : *Sin.* D = *Sin.* D C : *Sin.* A C; of *Sin.* A : *Sin.* D C = *Sin.* D : *Sin.* A C.

Corollarium II.

Hier uyt volgdt daarenboven, dat, in regthoekige *Spherische* Driehoeken A B C, D B C, hebbende een been B C gemeen, de *Tangens* der *Hypothenusen* tot elkander zyn, gelyk de *Co-Sinen* der daar toebehoorende Hoeken.

wantaangezien $\left\{\begin{array}{l} \textit{Rad.} : \textit{Co-Sin.}\ ACB = \textit{Tang.}\ AC : \textit{Tang.}\ BC \\ \textit{Rad.} : \textit{Co-Sin.}\ DCB = \textit{Tang.}\ DC : \textit{Tang.}\ BC \end{array}\right\}$

door het laatste deel van het Theorema; zullenwe (*door een bewys als boven*) hebben, *Co-Sinus* A C B : *Co-Sinus* D C B = *Tang.* D C : *Tang.* A C.

Theorema II.

Plaat III. Fig. 1. *In ieder regthoekige Spherische Driehoek* (A B C) *is, gelyk de* Radius *tot de* Co-Sinus *van één been is, alzoo de* Co-Sinus *van het ander been, tot de* Co-Sinus *der* Hypothenusa.

Bewys.

Laat C E F de *Complementaale* Driehoek van A B C zyn, welke reeds byzonder uytgedrukt is; dan is, *door Theor.* I. Geval

val 1. *Radius* : *Sin.* F = *Sin.* C F : *Sin*: C E ; dat is *Radius* : *Co-Sinus* B A = *Co-Sinus* C B : *Co-Sinus* A C (*Zie Cor.* 4. *pag.* 235)

Q, E, D.

Corollarium.

Hier uyt, indien twee regthoekige *Spherische* Driehoeken A B C, C B D, dezelfde *perpendiculair* B C hebben, zullen de *Co-Sinus* der *Hypothenusen* tot elkander zyn, gelyk de *Co-Sinus* van hunne bazen. Plaat III. Fig. 4.

want aangezien { *Rad.* : *Co Sin.* B C = *Co-Sin.* A B : *Co-Sinus* A C
Rad. : *Co-Sin.* B C = *Co-Sin.* D B : *Co-Sinus* D C. }

derhalven door vergelyking en verwisseling, *Co-Sinus* A B : *Co-Sinus* D B = *Co-Sinus* A C : *Co-Sinus* D C.

Theorema III.

In ieder regthoekige Spherische *Driehoek* (A B C) *is, gelyk* Radius *is tot de* Sinus *van ieder hoek, alzoo de* Co-Sinus *van het toegevoegde been, tot de* Co-Sinus *van de tegengestelde hoek.*

Bewys.

Laat C E F als in het voorgaande voorstel zyn; dan is (*volgens Theor.* I *Geval* 1.) *Radius* : *Sinus* C = *Sinus* C F : *Sinus* E F; dat is, *Radius* : *Sinus* C = *Co-Sinus* B C : *Co-Sinus* A.

Q, E, D.

Co-

Corollarium.

Hier uyt, hebbende in regthoekige *Spherische* Driehoeken A B C, C B D, dezelfde *perpendiculair* B C (*Zie de laatste Figuur*) zullen de *Co-Sinus* der hoeken op de bazis, *direct* tot elkander zyn, gelyk de *Sinus* van de tophoeken:

wantaan gezien $\begin{cases} \textit{Radius} : \textit{Sin.}\ BCA = \textit{Co-Sinus}\ CB : \textit{Co-Sin.}\ A \\ \textit{Radius} : \textit{Sin.}\ BCD = \textit{Co-Sinus}\ CB : \textit{Co-Sin.}\ D, \end{cases}$

derhalven, *door vergelyking en verwisseling*, *Co-Sinus* A : *Co-Sinus* D = *Sin.* B C A : *Sin.* B C D.

Theorema IV.

In ieder regthoekige Spherische Driehoek (A B C) *is*, *gelyk* Radius *is tot de* Sinus *van de bazis*, *alzoo* Tangens *van de hoek op de bazis*, *tot de* Tangens *van de* perpendiculair.

Plaat III. Fig. 1. Want, stellende C E F als voren,

Zoo is, gelyk *Radius* : *Co-Sinus* van F = *Tang.* C F : *Tang.* F E (*door het laatste deel van Theor.* I.) dat is, *Radius* : *Sinus* A B = *Co-tangens* B C : *Co-tangens* A = *Tang.* A : *Tang.* B C.

Q, E, D.

Corollarium.

Plaat III. Fig. 4. Hier uyt volgdt, dat, in regthoekige *Spherische* Driehoeken A B C, D B C, hebbende dezelfde *perpendiculair* B C, de *Sinus*

Sinus der bazen tot elkander zyn, gelyk de *Tangens* der hoeken op de bazen: want indien $\left\{\begin{array}{l} Radius: Sin. AB = Tang. A : Tang. BC \\ Radius: Sin. DB = Tang. D : Tang. BC \end{array}\right\}$ zoo zullen we (*door eene redenering als in Cor. I. Theor. I.*) hebben : *Sin.* AB : *Sin.* DB = *Tang.* D : *Tang.* A.

Theorema V.

In ieder regthoekige Spherische *Driehoek, is gelyk* Radius *is tot de* Co-Sinus *der* Hypothenusa, *alzoo is de* Tangens *van ieder hoek tot de* Co-tangens *van de andere hoek.*

Want (CEF *zynde gelyk in het laatste*) is, gelyk *Radius* : *Sin.* CE = *Tang.* C : *Tang.* EF (*door Theorema* IV.) dat is, *Radius* : *Co-Sinus* AC = *Tang.* C : *Co-tang.* A.

Q, E, D.

Lemma.

Gelyk de zom der Sinus *van twee ongelyke bogen, is tot hun verschil, alzoo is de* Tangens *van de halve zom dier boogen, tot de* Tangens *van hun halve verschil: En, gelyk de zom der* Co-Sinus, *is tot hun verschil, zoo is de* Co-Tangens *van de halve zom der boogen, tot de* Tangens *van het halve verschil der zelfde boogen.*

Want, laat AB en AC de twee voorgestelde boogen zyn, en laat BG en CH hunne *Sinus* zyn, en OG en OH hunne *Co Sinus*: Daar beneven, laat de boog BC gelykelyk in D gedeeld zyn, zoo dat CD het halve verschil, en AD de halve zom, van A B en A C kan zyn: Laat de *Radii* O D en O C getrokken worden, en van 's gelyken de pees C B, ſnydende O D in E en O A in P; trekt E S *parallel* met A O, ſnydende C H in S; en E F en O K *perpendiculair* op A O, en laat het laatſte E C in I zaamenkomen, laatſtelyk, trekt Q D K *perpendiculair* op O D, ſnydende O A, O C en O I, in Q, L en K.

Nadien nu $CD = BD$ is, zoo is het openbaar dat O D niet alleen *perpendiculair* op de pees B C is, maar ook *biſect* in E is; waar uyt dus, E F *biſect* H G is, en derhalven $CH + BG = 2EF$, en $CH - BG = 2CS$; dus $OG + OH = 2OF$, en $OG - OH = 2HF$: Maar $2EF$ $(CH + BG)$: $2CS$ $(CH - BG)$ $= EF : CS = EP : EC = DQ$ (de *Tangens* van A D) : D L (de *Tangens* van D C.) En $2OF$ $(OG + OH)$: $2HF$ $(OG - OH) = EI : EC = DK$ (de *Co-Tangens* van A D) : D L (de *Tang.* D C)

Q, E, D.

Theorema VI.

In ieder Spheriſche *Drieboek* A B C, *is, gelyk de* Co Tangens *der halve zom der twee zyden, is tot de* Tangens *van hun halve verſchil, alzoo is de* Co-Tangens *der halve bazis, tot de* Tangens *van de afſtand* (D E) *van de* perpendiculair *van het midden der bazis.*

Be-

Bewys.

Aangezien, *Co-Sinus* A C : *Co-Sinus* B C = *Co-Sinus* A D : *Co-Sinus* B D (*door Cor. Theor.* II) daarenboven, door zaamenstelling en Deeling, *Co-Sinus* A C + *Co-Sinus* B C : *Co-Sinus* A C − *Co-Sinus* B C = *Co-Sinus* A D + *Co-Sinus* B D : *Co-Sinus* A D − *Co-Sinus* B D. Maar (*door het voorgaande Lemma*) *Co-Sinus* A C + *Co-Sinus* B C : *Co-Sinus* A C − *Co-Sinus* B C = *Co-Tangens* $\frac{AC+BC}{2}$: *Tang.* $\frac{AC-BC}{2}$; en *Co-Sinus* A D + *Co-Sinus* B D : *Co-Sin.* A D − *Co-Sin.* B D = *Co-Tang.* van A E $\left(\frac{AD+BD}{2}\right)$: *Tang.* D E $\left(\frac{AD-BD}{2}\right)$; waar uyt, door vergelykinge, *Co-Tang.* $\frac{AC+BC}{2}$: *Tang.* $\frac{AC-BC}{2}$ = *Co Tang.* A E : *Tang.* D E.

Plaat III. Fig. 6.

Corollarium.

Aangezien de laatste evenredigheid, door verwisseling wordt, *Co-Tangens* $\frac{AC+BC}{2}$: *Co-Tang.* A E = *Tang.* $\frac{AC-BC}{2}$: *Tang.* D E, en het gebleeken is, dat de *Tangens* van twee boogen, *Universeel* gelyk hunne *Co-Tangens* zyn; zoo volgdt 'er daarenboven nog uyt, dat *Tang.* A E :

 Tang.

$$Tang.\ \frac{AC+BC}{2} = Tang.\ \frac{AC-BC}{2} :$$

Tang. DE; of, dat *de* Tangens *der halve bazis, is tot de* Tangens *van de halve zom der zyden, gelyk de* Tangens *van het halve verschil der zyden, tot de* Tangens *van de afstand der* perpendiculair *van het midden der bazis.*

Theorema VII.

Plaat III. *In ieder* Spherische *Drieboek* ABC, *is, gelyk de* Co-Tangens *van de halve zom der boeken op den bazis, is tot de* Tangens *van hun halve verschil, alzoo is de* Tangens *der halve* verticaale *boek, tot de* Tangens *der boek welke de* perpendiculair ED *met de lyn* CF, *rakende de* verticaale *boek, maakt.*

Bewys.

Gelyk (*door Coroll. van Theor.* III) *Co-Sinus* A : *Co-Sin.* B = *Sin.* ACD : *Sin.* BCD; en daarenboven, *Co-Sin.* A + *Co-Sin.* B : *Co-Sin.* A — *Co-Sin* B = *Sin.* ACD + *Sin.* BCD : *Sin.* ACD — *Sin.* BCD. Maar (*door het Lemma*) *Co-Tang.* $\frac{B+A}{2}$: *Tang.* $\frac{B-A}{2}$ = (*Co Sin.* A + *Co-Sin.* B : *Co-Sin.* A — *Co Sin.* B = *Sin.* ACD + *Sin.* BCD : *Sin.* ACD — *Sin.* BCD) *Tang.* ACF : *Tang.* DCF.

Q, E, D.

De

De oplossinge der gevallen van regthoekige Spherische *Driehoeken.*

Geval	Het gegeevene.	het gezogte.	Oplossing
1	De *Hyp.* A C en een Hoek A.	het overstaande been BC.	Gelyk *Radius* : *Sin Hyp.* AC = *Sin.* A : *Sin.* B C (*door het voorgaande deel van Theor.* I.)
2	De *Hyp.* A C en een Hoek A.	het toegevoegde been AB.	Gelyk *Radius* : *Co-Sin.* van A = *Tang.* A C *Tang* A B (*door het laatste deel van Theor.* I.)
3	De *Hyp* A C en een hoek A	De andere Hoek C.	Gelyk *Radius* : *Co-Sin* van A C = *Tang.* A : *Co-Tang.* C (*door Theorem* V.)
4	De *Hyp* A C en een been AB.	Het ander been BC.	Gelyk *Co-Sin* A B : *Radius* = *Co-Sin.* A C : *Co-Sin.* B C (*door Theorem.* II)
5	De *Hyp.* A C en een been A B.	De tegengestelde Hoek C	Gelyk *Sin.* AC : *Radius* = *Sin.* A B : *Sin.* C (*door het voorgaande deel van Theor.* I)
6	De *Hyp* A C en een been A B	De toegevoegde hoek A.	Gelyk *Tang.* A C : *Tang.* A B = *Radius* : *Co-Sinus* A (*door Theor.* I)
7	Een been A B en de toegevoegde Hoek A,	Het ander been B C.	Gelyk *Radius Sin* AB = *Tang.* A : *Tang.* B C (*door Theor.* IV.)
8	een been A B , en de toegevoegde Hoek A	De tegengestelde Hoek C.	Gelyk *Radius* : *Sin.* A = *Co-Sin.* van A B : *Co-Sin.* van C (*door Theor.* III)
9	een been A B en de toegevoegde hoek A.	De *Hyp.* A C.	Gelyk *Co-Sin.* van A : *Radius* = *Tang.* A B : *Tang.* A C (*door Theor.* I.)

Plaat III. Fig. 8.

Geval	Het gegeevene.	Het gezogte.	Oplossing.
10	een been BC en de tegengestelde hoek A.	het ander been AB.	Gelyk *Tang.* A : *Tang.* BC = *Radius* : *Sin.* AB (*door Theor.* IV.)
11	een been BC en de tegengestelde hoek A.	de toegevoegde Hoek C.	Gelyk *Co-Sinus* BC : *Radius* = *Co-Sin.* van A : *Sin.* C. (*door Theor.* III.)
12	een been BC en de tegengestelde hoek A.	De *Hyp.* AC.	Gelyk *Sin.* A : *Sin.* BC = *Radius* : *Sin.* AC (*door Theor.* I.)
13	De beide beenen AB en BC	De *Hyp.* AC.	Gelyk *Radius* : *Co-Sin.* AB = *Co-Sin.* BC : *Co-Sin.* AC (*door Theor.* II)
14	De beide beenen AB en BC.	een onderstelde hoek A	Gelyk *Sin.* AB : *Radius* = *Tang.* BC : *Tang.* A (*door Theor.* IV.)
15	twee hoeken A en C.	een onderstelde been AB.	Gelyk *Sin.* A : *Co-Sin.* C = *Radius* : *Co-Sin.* AB (*door Theor.* III.)
16	twee hoeken A en C.	De *Hyp.* AC.	Gelyk *Tang* A : *Co-Tang.* C = *Radius* : *Co-Sinus* AC. (*door Theor.* V.)

De

De oplossinge der Gevallen van scheeve Spherische *Driehoeken.*

Geval	Het gegeevene.	Het gezogte.	Oplossing.
1	Tweezyden AC, BC en een hoek A, tegen een van hen overgesteld.	De hoek B, tegen de andere overgesteld.	Gelyk *Sin.* BC : *Sin.* A = *Sin.* AC : *Sin* B (*door Coroll.* 1. *Theor.* I.) NB. dit geval is dubbelzinnig, wanneer BC kleinder als AC is;
2	Tweezyden AC, BC en een hoek A, tegen een van hen overgesteld.	De ingeflooten Hoek ACB.	Op AB (des nodig zynde) laat de *perpendiculair* CD vallen: Dan (*door Theor.* V.) *Rad* : *Co-Sinus* AC = *Tang.* A : *Co-Tang.* ACD; maar (*door Cor.* II. *van Theor.* I.) gelyk *Tang.* BC : *Tang.* AC = *Co Sin.* ACD : *Co-Sin.* BCD. waar uyt ACB = ACD ± BCD bekend is.
3	Tweezyden AC, BC, en een hoek A, tegen een van hen overgesteld.	De andere zyde AB	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin* A = *Tang.* AC : *Tang.* AD (*door Theor* I.) en (*door Cor. van Theor.* II.) gelyk *Co-Sin.* AC : *Co Sin.* BC = *Co Sin.* AD : *Co-Sin.* BD. NB. Dit en het laatste geval zyn beide dubbelzinnig, wanneer het eerste zoo is.
4	Twee zyden AC, AB, en de ingeflote hoek A.	De andere zyde BC.	Gelyk *Rad* : *Co-Sin.* A = *Tang.* AC : *Tang.* AD (*door Theor.* I.) waar uyt dan BD bekendt is: Dan (*door Cor. van Theor.* II.) gelyk *Co Sin.* AD : *Co-Sin.* BD = *Co-Sin.* AC : *Co-Sin.* BC.

Plaat III Fig. 9 en 10.

Geval	Het gegeevene.	Het gezogte.	Oplossing.
5	Tweezyden A C, A B en de ingeslooten Hoek A	Ieder der andere Hoeken, ondersteldt B.	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin.* A = *Tang.* A C : *Tang.* A D (*door Theor.* I.) waar uyt B D bekend is ; dan (*door Cor. van Theor.* IV) gelyk *Sin.* B D : *Sin.* A D = *Tang.* A : *Tang.* B.
6	Twee hoeken A, A C B ende daar tusschen zynde zyde A C.	De andere hoek B.	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin.* A C = *Tang.* A : *Co-Tang.* A C D (*door Theor* V.) waar uyt dus B C D bekend is : Dan (*door Cor. van Theor.* III) gelyk *Sin.* A C D : *Sin.* B C D = *Co-Sin.* A : *Co-Sin.* B.
7	Twee hoeken A, A C B ende daar tusschen zynde zyde A C.	Een der beide andere zyden, ondersteldt B C.	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin.* A C = *Tang.* A : *Co-Tang* A C D (*door Theor.* V.) waar uyt dus B C D bekendt is : Dan, gelyk *Co-Sin* van B C D : *Co-Sin* A C D = *Tang.* A C : *Tang.* B C (*door Cor.* II. *van Theor.* I.)
8	Twee hoeken A, B en een zyde A C tegen over een van dezelve.	De zyde B C tegen de ander overgesteld.	Gelyk *Sin.* B : *Sin.* A C = *Sin* A : *Sin.* B C. (*door Coroll.* I *van Theor.* I.)
9	Twee hoeken A, B en een zyde A C tegen over een van dezelve.	De zyde A B tusschen dezelve.	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin.* A = *Tang.* A C : *Tang.* A D (*door Theor* I.) en gelyk *Tang.* B : *Tang.* A = *Sin.* A D : *Sin.* B D (*door Cor. van Theor.* IV.) waar uyt A B bekend is.

Geval	Het gegeevene.	Het gezogte	Oplossing.
10	Twee hoeken A, B, en een zyde A C, tegengesteld aan een derzelve.	De andere hoek A C B.	Gelyk *Rad.* : *Co-Sin.* A C $=$ *Tang.* A : *Co-Tang.* A C D (*door Theor.* V.) en gelyk *Co-Sin.* A : *Co-Sin.* B $=$ *Sin.* A C D : *Sin.* B C D (*door Cor. van Theor.* III.) waar uyt dus A C B bekend is.
11	Alle de drie zyden A B, A C en B C.	een hoek ondersteld A	Gelyk *Tang.* $\frac{1}{2}$ A B : *Tang.* $\frac{AC + BC}{2}$ $=$ *Tang.* $\frac{AC - BC}{2}$: *Tang.* D E, de afstand der *perpendiculair* van het midden der bazis (*door Cor. van Theor.* VI.) waar uyt A D bekend is: Dan, gelyk *Tang.* A C : *Tang.* A D $=$ *Rad.* : *Co-Sin* A (*door Theor.* I.)
12	Alle de drie hoeken A, B en A C B.	een zyde ondersteld A C.	Gelyk *Co-Tang.* $\frac{ABC + A}{2}$: *Tang.* $\frac{ABC - A}{2}$ $=$ *Tang.* $\frac{ACB}{2}$: *Tang.* der hoek, besloten door de *perpendiculair* en een lyn, rakende de *verticaale* hoek; waar uyt ACD bekend is: dan (*door Theor* V.) *Tang.* A : *Co-Tang.* ACD $=$ *Rad.* : *Co-Sin.* A C.

Van de Natuur en Conſtructie *der Logarithmus, met hunne toepaſſinge op de evenredigheid der Driehoeken.*

Gelyk het werk der Driehoeks meetkunde op een wonderlyke wyze, door de toepaſſinge der *Logarithmus*, gemakkelyker gemaakt word; welke een rey *Artificiele* getallen zyn, zoo wel onder elkander geſchikt, en tot de natuurlyke getallen 2, 3, 4, 5 &c. gevoegd, als volbrengende alles door vergaaring en Aftrekking, het geen men anders door vermenigvuldiging en deeling doet: Zoo zal ik hier, uyt genegenheid voor den jongen Aanvanger (voor wien dit Werkje voornaamelyk geſchikt is) eenige weinige bladzyden over dit onderwerp byvoegen. Maar we zullen noodzaakelyk eerſt iets in 't algemeen, met opzichte op de *Index* van een *Geometriſche Progres* (meetkonſtige voortgang) waar van de *Logarithmus* een byzonder zoort zyn, voor af laaten gaan.

Laat derhalven, 1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, &c. een *Geometriſche Progres* zyn, welkers eerſte *Term* de eenheid, en welkers gemeene *Ratio* een gegeeven grootheid a is. Dan is openbaar,

I. *Dat de zom der Index van twee* Termen *der* Progres, *gelyk is aan de* Index *van het vermenigvuldigde dier* Termen.

Dus

Dus $2+3$ (5) is $=$ de *Index* van $a^2 \times a^3$, of a^5; en $3+4$ ($=7$) is $=$ de *Index* van $a^3 \times a^4$, of a^7. Dit is in de *Algebra* van *Simpson* pag. 19 algemeen beweezen.

II. *Dat het verschil der* Index *van twee* Termen *der* Progres, *gelyk is aan de* Index *van het* Quotient, *van een derzelve, gedeeld door de andere.* Dus is $5-3=$ de *Index* van $\frac{a^5}{a^3}$ of a^2. Welke alleenlyk het tegendeel van het voorgaande *Artykel* is.

III. *Dat het vermenigvuldigde der* Index *van eenige* Term *met een gegeeven getal* (n) *gelyk is aan de* Index *der Magt, welkers* Exponent *het gemelde getal* (n) *is.* Dus 2×3 (6) is $=$ de *Index* van a^2 verheven tot de derde *Magt* (of a^6).

IV. *Dat het* Quotient *der* Index *van eenige* Term *der* Progres, *door een gegeeven getal* (n) *gelyk is aan de* Index *der wortel uyt de* Term, *bepaald door het zelve getal* (n). Dus is $\frac{6}{3}$ (2) $=$ de *Index* van (a^2) de *Cubicq* wortel van a^6. Welke alleenlyk het tegendeel van het voorgaande *Artykel* is.

Deeze zyn de eygenschappen der *Index* van een *Geometrische Progres*; welke algemeen waarachtig zynde, zoo laat de gemeene *Ratio* nu ondersteld worden onbepaald dicht by die van gelykheid te zyn; of het *Exces* van *a* boven de eenheid, onbepaald klein; zoo dat een der

Ter-

Termen van de *Progres* 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c. zal kunnen gelyk zyn aan, of overeenkomen met, ieder *Term* der reekſen (*Series*) van de natuurlyke getallen 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. *Dus worden de Index van die Termen* Logarithmus *der getallen, aan welke de* Termen *zelfs gelyk zyn, genaamd.*

Dus, indien $a^m = 2$ en $a^n = 3$ is, zoo zullen m en n *reſpectivelyk* de *Logarithmus* der getallen 2, en 3 zyn. *Hier uyt is openbaar, dat wat hier boven, in betrekking tot de eygenſchappen van de* Index *der* Magten, *byzonder uytgedrukt was, te gelyk in de* Logarithmus *der getallen waarachtig is;* aangezien de *Logarithmus* niets anders zyn, als de *Index* van zulke *Magten*, welke met die getallen in waarde overeenkomen. Dus, by voorbeeld, indien de *Logarithmus* van 2 en 3 door m en n verbeeld worden; dat is, indien $a^m = 2$, en $a^n = 3$ is, dan zal de *Logarithmus* van 6, (het vermenigvuldigde van 2 en 3) aan $m + n$ gelyk zyn (overeenkomſtig met Art. I.); nadien 2×3 $(6) = a^m \times a^n = a^{m+n}$ is.

Maar we moeten nu in agt neemen, dat 'er verſcheiden gedaanten of zoorten van *Logarithmus* zyn; om dat het blykbaar is, dat wat tot hier toe gezeid is, in opzichte tot de eigenſchappen der *Index*, te gelyk waarachtig is, in betrekking tot eenige gelyke deelen (*Equimultiples*) derzelve; welke baarblykelyk dezelve

zelve eigenschappen en evenredigheden, met opzicht tot elkander hebben, als de *Index* zelfs. Maar de eenvoudigste zoort van alle is de *Nepperſche*, anders de *Hyperboliſche* genaamd.

De Hyperboliſche Logarithmus van eenig getal, is de Index, *van die* Term *der* Logarithmische (*telkonſtige*) Progres, *overeenkomende met het voorgeſtelde getal, vermenigvuldigd met het exces der gemeene* Ratio *hier boven de eenheid.*

Dus, indien e een onbepaalde kleine grootheid is, zal de *Hyperboliſche Logarithmus* van het natuurlyke getal, overeenkomende met eenige *Term* $\overline{1+e}^{\,n}$ van de *Logarithmiſche Progres* 1, $\overline{1+e}$, $\overline{1+e}^{\,2}$, $\overline{1+e}^{\,3}$, $\overline{1+e}^{\,4}$ &c. door ne uytgedrukt worden.

Voorſtel I.

De Hyperbolische Logarithmus (L) *van een getal, gegeeven zynde, het daar toe paſſende getal zelve te vinden.*

Laat $\overline{1+e}^{\,n}$ de *Term* der *Logarithmiſche Progres* 1, $\overline{1+e}^{\,1}$, $\overline{1+e}^{\,2}$, $\overline{1+e}^{\,3}$, $\overline{1+e}^{\,4}$, &c. zyn, welke aan het vereischte getal (N) gelyk is. Dan, om dat $\overline{1+e}^{\,n}$, algemeen $= 1 + ne + n.\dfrac{n-1}{2}.c^2 + ne$

$n - 1$

$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot e^3$ &c. is, zoo zullenwe dus hebben, $1 + ne + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot e^2 \cdot + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} e^3$ &c. $=$ N. Maar, om dat n (door de Natuur der *Logarithmus*) hier ondersteld is, onbepaald groot te żyn, zoo is het blykbaar, voor eerst, dat de door het teken — verbondene getallen, verworpen mogen worden, tot aan eenig bestemd getal der *Termen*, zynde onbepaald klein in vergelyking van n: Het is alzoo blykbaar, dat zy in alle het overige der *Termen* van de *Serien*; mogen verworpen worden; om dat die *Termen* (ter oorzaake van de onbepaalde kleinheid van e) geen bestemde evenredigheid met de voorgaanden hebben.

Hier uyt hebbenwe $1 + ne + \frac{n^2 e^2}{2} + \frac{n^3 e^3}{2 \times 3} + \frac{n^4 e^4}{2 \times 3 \times 4}$ &c. $=$ N: Maar ne is $(= \text{L})$ de *Hyperbolische Logarithmus* van $\overline{1+e}^{\,n}$ (of N) door het geene we reeds uytgedrukt hebben: Derhalven $1 + \text{L} + \frac{\text{L}^2}{2} + \frac{\text{L}^3}{2 \times 3} + \frac{\text{L}^4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{\text{L}^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$ &c. $=$ N.

Voor-

Voorstel II.

De Hyperbolische Logarithmus (L) *van eenig gegeeven getal* (N) *te bepaalen.*

Het blykt uyt het voorgaande *Voorstel* dat $1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2 \times 3}$ &c. $= N$ is: Indien derhalven $x + 1 = N$ gesteld wordt, zoo zullenwe hebben, $L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2 \times 3} + \frac{L^4}{2 \times 3 \times 4}$ &c. $= x$; en gevolgelyk, $L = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$ &c.

Andere Manier.

Dewyl $\overline{1 + e}^{\,n} = N$ is (door de bepaaling der *Logarithmus*) zoo zullenwe hebben $1 + e = N^{\frac{1}{n}} = \overline{1 + x}^{\,m}$; door het stellen van $1 + x = N$ en $m = \frac{1}{n}$. Derhalven, $\overline{1 + x}^{\,m}$ zynde $= 1 + mx + m . \frac{m-1}{2} . x^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . x^3$ &c.

Zoo hebbenwe $e + mx + m . \frac{m-1}{2} . x^2$

+

$+ m. \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . x^3$ &c. alwaar m in de *Factors* $m-1$, $m-2$, $m-3$ &c. verworpen zynde, als zynde onbepaald klein in vergelyking met 1, 2, 3 &c. Zoo zal men verkrygen, de *Vergelykinge* $e = mx - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^4}{4}$ &c. Waar uyt $\frac{e}{m}$ ($= ne = \mathrm{L}$) $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. het zelfde als voren.

Maar deeze *Sérien*, alhoewel in der daad meeſt gemakkelyk en natuurlyk, zyn, in het bepaalen der *Logarithmus* van groote getallen, van weinig gebruyk. Ik zal hier derhalven de uytvinding van nog andere Leerwyzen geeven.

Laat dan vooreerſt het getal welkers *Logarithmus* men begeerd te vinden, door $\frac{1}{1-x}$ verbeeld worden; waar door openbaar is (hoe groot dat getal weezen kan) dat x altyd kleinder als de eenheid zal zyn: Laat daarenboven $\overline{1+e}^n$ (als voren) de *Term* der telkonſtige (*Logarithmiſche*) *Progres* zyn, overeenkomende met het voorgeſtelde getal, of, dat het zelfde is, laat $\overline{1+e}^n = \frac{1}{1-x}$ zyn: Dan zullenwe (trekkende de wortel aan bei-

beide zyden) hebben, $1+e = \frac{1}{\overline{1-x}^{\frac{1}{n}}}$

$= \overline{1-x}^{-\frac{1}{n}} = \overline{1-x}^{m}$ (maakende $m = -\frac{1}{n}$)

$= 1 - mx + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^2 - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot x^2$ &c. alwaar m (als voren) in de *Factors* $m-1$, $m-2$, &c. verworpen zynde, ons deeze *Vergelykinge* zal geeven $1+e = 1 - mx - \frac{mx^2}{2} - \frac{mx^3}{3}$ &c.

Waar in $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ &c. $= \frac{e}{-m}$ $= ne =$ de *Hyperbolische Logarithmus* van $\frac{1}{1-x}$ is. Van welke *Sérien*, laat de waarde van $\frac{1}{1-x}$ altyd zoo groot zyn; om dat x altoos kleinder als de eenheid is. Maar men moet verders in agt neemen, dat die *Sérien* naauwkeuriglyk dezelve gedaante hebben (behalven in hunne tekenen), met het geene boven voor de *Logarithmus* van $1+x$ is; en dat, indien ze beide te zaamen vergaard worden, zullen de daar uyt voortkomende *Sérien*

$2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ &c. eenvoudiger als ieder derzelve zyn; nademaal daar door eene helft der *Termen* gantſchelyk vernietigd zal zyn. Derhalven, om dat de zom der *Logaritbmus* van twee getallen gelyk is aan de *Logaritbmus* van het *Product* dier getallen (*Zie Artykel* I.) zoo is het openbaar dat $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$ &c. waarlyk de *Logaritbmus* van $\frac{1+x}{1-x}$, of $\frac{1}{1-x} \times \overline{1+x}$ zal uytdrukken. Welke *Séries* ſteeds vaſter als $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ &c. zyn, niet alleen om dat de evene *Magten* alhier vernietigd zyn, maar om dat x, in de vinding der *Logaritbmus* van een gegeeven getal (N), een kleine waarde zal hebben. Maar, om nu te bepaalen, wat die waarde moet zyn, zoo maakt $\frac{1+x}{1-x} = N$, en dan zal $x = \frac{N-1}{N+1}$ gevonden worden; Maar, indien de voorgeſtelde grootheid een breuk $\left(\frac{P}{Q}\right)$, in plaats van een heel getal

getal is, zoo maakt $\frac{P}{Q} = \frac{1+x}{1-x}$, en gy zult hebben $x = \frac{P-Q}{P+Q}$: Ieder van welke waarden, gesteld zynde in de voorgaande *Sérien* $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$ &c. zal de *Hyperbolische Logarithmus* van het *Respective* getal voortbrengen.

Voorbeeld. Laat voorgesteld zyn, de *Hyperbolische Logarithmus* van het getal 2 te vinden.

Alhier $x = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$, en $x^2 = \frac{1}{9}$ zynde; zoo zullenwe hebben.

x	$(= \frac{1}{3})$	$=$, 333333333	&c.
x^3	$(= \frac{1}{9}x)$	$=$, 037037037	&c.
x^5	$(= \frac{1}{9}x^3)$	$=$, 004115226	&c.
x^7	$(= \frac{1}{9}x^5)$	$=$, 000457247	&c.
x^9	$(= \frac{1}{9}x^7)$	$=$, 000050805	&c.
x^{11}	$(= \frac{1}{9}x^9)$	$=$, 000005645	&c.
x^{13}	$(= \frac{1}{9}x^{11})$	$=$, 000000627	&c.
x^{15}	$(= \frac{1}{9}x^{13})$	$=$, 000000069	&c.
&c.		&c.	

Welke waarden respectivelyk door de getallen, 1, 3, 5, 7, 9 &c. gedeeld zynde, en de verscheiden *Quotienten* t'zaamen vergaard, (*Zie de algemeene Sérien*) zoo zullenwe hebben:, 346573500 &c. Welke dubbeld, zynde, 693147180 &c. de *Hyperbolische Logarithmus* van 't getal 2 is.

Laat nu a, b en c drie getallen, in een *Arithmetiſche Progres*, betekenen, welkers gemeen verſchil de eenheid is; dan, $a = b - 1$ en $c = b + 1$ zynde, zoo zullenwe hebben $ac = b^2 - 1$, en gevolgelyk $\frac{b^2}{ac} = \frac{ac + 1}{ac}$. Waar uyt we, door de natuur der *Logarithmus*, van 's gelyken hebben, $2\ Log.\ b - Log.\ a - Log.\ c = Log.\ \frac{ac+1}{ac}$: Maar de *Logarithmus* van $\frac{ac+1}{ac}$, ſtellende $\frac{1}{2ac+1} = x$, zal zyn $\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ &c. (door het geene reeds aangetoond is): welke door S betekend zynde, zoo zullenwe hebben

$$\left\{\begin{array}{l} Log.\ b = \tfrac{1}{2} Log.\ a + \tfrac{1}{2} Log.\ c + \tfrac{1}{2} S. \\ Log.\ a = 2\, Log.\ b - Log.\ c, - S. \\ Log.\ c = 2\, Log.\ b - Log.\ a, - S. \end{array}\right\}$$

Zie hier daar van een Voorbeeld, laat voorgeſteld zyn, de *Hyperboliſche Logarithmus* van 3 te vinden.

Dan, de *Hyperboliſche Logarithmus* van 2 alreede $=, 693147180$ &c. gevonden zynde, zal die van 4, welke deszelfs dubbeld is, ook bekend worden. Neemende derhalven, $a = 2$, $b = 3$, en $c = 4$, zoo zullenwe in dit geval hebben,

ben, $x\left(\frac{1}{2ac+1}\right)=\frac{1}{17}$, en $x^2=\frac{1}{289}$:
waar uyt

$$x\left(=\frac{1}{17}\right)=,058823529 \text{ \&c.}$$
$$x^3\left(=\frac{x}{289}\right)=,000203542 \text{ \&c.}$$
$$x^5\left(=\frac{x^3}{289}\right)=,000000704 \text{ \&c.}$$
&c. &c.

Derhalven $\frac{1}{2}$ S $\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5} \text{ \&c.}\right)$ $=,058891517$ &c. en gevolgelyk *Hyperb. Logar.* 3. $\left(\frac{Hyp.\ Log.\ 2+Hyp.\ Log.\ 4.}{2}+\frac{1}{2}S\right)=1,098612288$ &c.

2. Laat de *Hyperbolische Logarithmus* van 10 begeerd worden. De *Logarithmus* van 8 en 9, zyn door die van 2 en 3 (alreeds gevonden) gegeeven, *a* kan hier $=8$, $b=9$ en $c=10$ zyn; en dan $x\left(\frac{1}{2ac+1}\right)$ zynde $=\frac{1}{161}$, zoo zullenwe hebben $\frac{1}{2}$ S $\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5} \text{ \&c.}\right)$ $=,006211180$ &c. $+,000000079$ &c. &c. $=,006211259$ &c.

En derhalven *Log.* 10 (2 *Log.* 9 — *Log.* 8 — S) $=2,302585092$ &c.

Tot hier toe hebbenwe toezicht gehad

op de *Logarithmus* van het *Hyperboliſche* zoort: Maar die van eenig ander zoort kan uyt deeze afgeleid worden, door, alleenlyk met dezelve vermenigvuldiger (*Multiplicant*) te vermenigvuldigen.

Dus, zal in de gemeene gedaante, waar van een éénheid voor de *Logarithmus* van 10 aangenomen is, de *Logarithmus* van eenig getal gevonden worden, als men de *Hyperboliſche Logarithmus* van het zelve getal met de breuk, 434294481 &c. vermenigvuldigd, welke de eigene vermenigvuldiger dier gedaante is.

Want, indien de *Logarithmus* van alle gedaanten, dezelve evenredigheid ten opzigte van eikanderen behouden, zoo is: gelyk 2, 302585092 &c. de *Hyperboliſche Logarithmus* van 10 (hier boven gevonden) is tot (H) de *Hyperboliſche Logarithmus* van eenig ander getal, alzoo is 1, de gemeene *Logarithmus* van 10, tot $\left(\frac{H}{2,302585092 \ \&c.}\right)$ H ×, 434294481 &c. de gemeene *Logarithmus* van het zelve getal.

Maar, om een verdrietige vermenigvuldiging te ontgaan, welke gedurig vereiſcht zal worden, wanneer 'er een groote graad van naauwkeurigheid op aangedrongen wordt, is de beſte weg om de *Logarithmus* van die gedaante te vinden, uyt de *Sérien* $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$ &c.

&c. $\times$ 0, 434294481 &c. welke de gemeene *Logaritbmus* van $\frac{1+x}{1-x}$ (door het geene we reeds getoond hebben) uytdrukken, en welke, maakende R $=$, 868588963 &c., gevoegelyker dus staan zal, $Rx + \frac{Rx^3}{3} + \frac{Rx^5}{5} + \frac{Rx^7}{7}$ &c.

Tot een voorbeeld hier van, laat de gemeene *Logaritbmus* van 7 geëischt worden: In welk geval (de *Logaritbmus* van 8 en 9, uyt die van 2 en 3 bekend zynde) we zullen hebben *Log.* $7 = 2$ *Log.* $8 -$ *Log.* $9 - S$ (*door de Theor.*), zynde $S = Rx + \frac{Rx^3}{3} + \frac{Rx^5}{5}$ &c. ($=$ de gemeene *Logaritbmus* van $\frac{64}{63}$) en x $\left(= \frac{64-63}{64+63}\right) = \frac{1}{127}$: waar door ($x^2 = \frac{1}{16129}$ zynde) we hebben zullen

$$Rx \left(= \frac{,8685 \text{ \&c.}}{127}\right) = ,00683928З \text{ \&c.}$$

$$Rx^3 \left(= \frac{Rx}{16129}\right) = ,000000424 \text{ \&c.}$$

$$Rx^5 \left(= \frac{Rx^3}{16129}\right) = ,0000000002 \text{ \&c.}$$

&c. &c.

Gevolgelyk $S(Rx + \frac{Rx^3}{3} + \frac{Rx^5}{5}$ &c.$)$ $=, 006839424$ &c. en 2 *Log.* 8 — *Log.* $9 - S =, 845098040$ &c. $=$ de gemeene *Logarithmus* van 7. Maar het zelve beſluyt kan door minder *Termen* der *Sérien* uytgebragt worden, indien de *Logarithmus* der drie eerſte 2, 3 en 5 vooronderſteld worden bekend te zyn; om dat die van 48 en 50 (welke uyt dezelve zaamengeſteld zyn) van 's gelyken bekend zullen worden: Waar uyt de *Logarithmus* van 7 $(= \frac{1}{2}$ *Log.* 49 $= \frac{Log.\ 48 + Log.\ 50, + S}{4})$ zal komen $=, 845098040$ &c. (*als voren*) welke waarde beſtaanbaar zal zyn tot 11 plaatzen of *Figuren*, neemende de eerſte *Term* van de *Sérien* anders.

Hebbende de manier of *Conſtructie* der *Logarithmus* Tafel verklaard, en dat door verſcheiden Leerwyzen, zoo zal ik nu het gebruyk van zulk een Tafel in het Werk der *Trigonometria* aantoonen.

Plaat III. Fig. 10. Voor eerſt, in de regthoekige Platte Driehoek A B C, laat hier gegeeven zyn de *Hypothenuſa* A C $= 17910$ voet, en de Hoek A $= 35°20'$; de *Cathetus* B C en de bazis A B te vinden.

Hier, om dat *Radius* is: *Sin*: $35°20'$ $= 17910$: B C (*door Theor.* II. *pag.* 193) hebbenwe B C $= \frac{Sin.\ 35°20' \times 17910}{Radius}$;

Der-

Derhalven, om dat de vergaaring en Aftrekking der *Logarithmus*, aan de vermenigvuldiging en Deeling der natuurlyke getallen beantwoorden (*Zie pag.* 250 en 251) hebbenwe, *Log.* B C = *Log. Sin.* 35°20′ + *Log.* 17910 — *Log. Radius.*

Maar, door de Tafelen der *Artificiele* of *Logarithmische Sinus*, zal het blyken dat de *Log. Sin.* van 35°20′ zal zyn 9,7621775; tot welke vergaard 4,2530956, de *Logar.* van 17910, en van de zom (14,0152731) trekt 10, de *Logarithmus* der *Radius*, en daar komt 4,0152731 = de *Logarithmus* van B C; welke in de Tafelen, aan 10358, de vereischte lengte van B C, beantwoord.

Wederom, voor A B, zal zyn, gelyk *Radius* : *Sin.* van C (54°40′) = A C (17910) : A B (*door Theor.* II.) waaruyt, vergaarende de *Logarithmus* der tweede en derde *Term* by elkander, en trekkende dat van de eerste (als boven), wy hebben A B = 14611. Zie de bewerking.

Log. Radius	.....	10,
Log. Sin. C	(54°40′)	9,9115844
Log. A C	(17910)	4,2530956
Log. A B = 14611		4,1646800

Laat daarenboven in de scheeve platte Driehoek A B C gegeeven zyn A B = 75, A C = 60, en de ingeslooten Hoek A = 48°; de andere twee hoeken te vinden, dan zal (*door Theor.* V.) zyn. Plaat III, Fig. 11.

Gelyk AB+AC(135) hunne *Log.* 2,1303338

is tot AB—AC (15) hunne *Log.* 11760913

Zoo is T. $\frac{C+B}{2}$ (66°) 10,3514169

11,5275082

Tot de T. $\frac{C-B}{2} = 14°00'$ 9,3971744

Welke 14°, vergaard by 66°, de halve zom der hoeken C en B, geeft de grootste C = 80°; en daar van aftrekkende, geeft de kleinste B = 52°.

Plaat III. Fig. 7. Ten laatsten, laat hier in de regthoekige *Spherische* Driehoek ABC, gegeeven zyn, de *Hypothenusa* AC = 60°, en de Hoek A = 23°29'; de bazis en *perpendiculair* te vinden. Dan (door *Theor.* I *pag.* 236) zal de bewerking de volgende zyn.

Log. Radius 10,

Log. Sin. A (23°29') . . . 9,6004090

Log. Sin. AC (60°) . . . 9,9375306

Log. Sin. BC = 20°11' . 9,5379396

Alzoo, *Log. Radius* . . . 10,

Log. Co-S. A (23°29' . . . 9,9624527

Log. T. AC (60°) . . . 10,2385606

Log. T. AB = 57°49' . 10,2010133

Hebbende de manier der ontbindinge van alle gemeene gevallen der platte en *Spherische* Driehoeken, door de *Logarithmus* en anders, aangetoond; zal ik hier eeni-

eenige *Voorſtellen* voor de oploſſing der zwaardere gevallen, welke zomtyds voorkomen, byvoegen; wanneer in plaats van de zyden en hoeken zelfs, hunne zommen, of verſchillen, &c. gegeeven zyn.

Voorſtel I.

De Sinus, Co-Sinus, *of* verſus Sinus *van een boog gegeeven zynde, de* Sinus *en* Co-Sinus, &c. *van de helft dier boog te vinden.*

Laat uyt de twee einden der Diameter AB, de peezen AE en BE getrokken worden, en laat de *Radius* CQ, AE *perpendiculair* in D ſnyden; Dan zal AD de *Sinus*, en CD de *Co-Sinus*, der hoek ACD, of $\frac{1}{2}$ ACE zyn. Plaat III. Fig. 12.

Maar $4\,AD^2 = AE^2 = AB \times AF = 2\,AC \times AF$; waar uyt $AD^2 = \frac{1}{2} AC \times AF$: Dus $4\,CD^2 = BE^2 = AB \times BF = 2\,AC \times BF$; waar uyt $CD^2 = \frac{1}{2} AC \times BF$. *Waar uyt het openbaar is, dat het* Quadraat *der* Sinus *van een halve boog, of hoek, gelyk is aan een regthoek onder de halve* Radius *en de* Sinus verſus *der geheele; en dat het* Quadraat *van hunne* Co-Sinus, *gelyk is aan een regthoek onder de halve* Radius *en de* Sinus verſus *van het* Supplement *der geheele boog, of hoek.*

Voorſtel II.

De Sinus *en* Co-Sinus *van twee boogen gegeeven zynde, de* Sinus *en* Co-Sinus, *van de* *de zom en het verschil dier boogen te vinden.*

Plaat III. Fig. 13. Laat AC en CD ($=BC$) de twee voorgestelde boogen zyn; laat CF en OF de *Sinus* en *Co-Sinus* van de grootste AC zyn, en laat mD (Bm), en Om, die van de kleinste CD (of BC) zyn; Laat daarenboven, DG en OG de *Sinus* en *Co-Sinus* van de zom AD zyn; en BE en OE, die van het verschil AB. Trekt mn *parallel* met CF, ontmoetende AO in n; van 's gelyken trekt mv en BH *parallel* met AO, ontmoetende GD in v en H: Dan is het klaar, om dat $Dm=Bm$ is, dat $Dv=Hv$, en $mv=nG=En$ is; en dat de Driehoeken OCF, Omn en mDv overeenkomstig zyn; waar door we de volgende evenredigheden zullen hebben.

$$\left\{\begin{array}{l} OC:Om=CF:mn \\ OC:OF=Dm:Dv \\ OC:OF=Om:On \\ OC:CF=Dm:mv \end{array}\right\} \text{waar uyt} \left\{\begin{array}{l} mn\times OC=Om\times CF. \\ Dv\times OC=Dm\times OF. \\ On\times OC=Om\times OF. \\ mv\times OC=Dm\times CF. \end{array}\right.$$

Vergaarende nu de twee eerste van deeze vergelykingen te zaamen, zoo hebbenwe $\overline{mn+Dv}\times OC$ ($DG\times OC$) $=Om\times CF+Dm\times OF$; waar uyt DG bekendt is. Trekkende daarenboven, de laatste van de eerste, zoo krygenwe $\overline{mn-Dv}\times OC$ ($BE\times OC$) $=Om\times CF-Dm\times OF$; waar uyt BE bekendt is.

Op gelyke wyze, vergaarende de derde en vierde vergelykingen te zaamen, zoo hebbenwe $\overline{O\,n + m\,v} \times OC$ ($OE \times OC$) $= O\,m \times OF + D\,m \times CF$; en, trekkende de laatste van de eerste, hebbenwe $\overline{O\,n - m\,v} \times OC$ ($OG \times OC$) $= O\,m \times OF - D\,m \times CF$; waar uyt dus OE en OG bekendt zyn.

Corollarium I.

Hier door, indien de *Sinus* van twee boogen door S en S verbeeld worden; hunne *Co-Sinus* door C en *c*; en *Radius* door R; dan zal zyn.

De *Sinus* van hunne zom $= \dfrac{Sc + sC}{R}$,

De *Sinus* van hun verschil $= \dfrac{Sc - sC}{R}$,

De *Co-Sinus* van hunne zom $= \dfrac{Cc - Ss}{R}$,

De *Co-Sinus* van hun verschil $= \dfrac{Cc + Ss}{R}$,

Corollarium II.

Hier door, zal de *Sinus* van het dubbeld van ieder boog, (wanneer ze gelyk zyn) $\dfrac{2\,CS}{R}$ zyn, en hunne *Co Sinus* $= \dfrac{C^2 - S^2}{R}$: Waar uyt blykt dat *de* Sinus *van het dubbeld van ieder boog gelyk is aan tweemaal den Rechthoek der* Sinus *en* Co-

Co-Sinus *der enkele boog, gedeeld door de* Radius *en dat hunne* Co-Sinus *gelyk is, aan het verſchil der vierkanten van de* Sinus *en* Co-Sinus *der enkele boog, gedeeld door de* Radius.

Voorſtel III.

Gelyk de zom der Tangens *van twee hoeken* B A C, B A D, *is tot hun verſchil, alzoo is de* Sinus *van de zom dier hoeken, tot de* Sinus *van hun verſchil.*

Plaat III. Fig 14. Laat B C en B D de twee voorgeſtelde *Tangens*, tot de *Radius* A B zyn; maakt B *d* = B D, voegd A en *d* te zaamen, en trekt D E en *d* F *perpendiculair* op A C. Het is openbaar, om dat B *d* = B D is, dat A *d* = A D en *d* A B = D A B, en, gevolgelyk, dat C A *d* het verſchil der beide hoeken B A C en B A D is.

Nu zal door betrekking der overeenkomſtige Driehoeken C D E en C *d* F, zyn, C D (C B + B D) : C *d* (C B — B D) = D E : *d* F; maar D E en *d* F zyn *Sinen* van D A E en *d* A F tot de gelyke *Radii* A D en A *d*: *Waar uyt de waarheid van het Voorſtel openbaar is.*

Voorſtel IV.

In ieder Platte Driehoek A B C, *is, gelyk de zom der twee zyden* meer *den bazis, is tot de zom der twee zyden* min *den bazis, alzoo de* Cotangens *der helft van ieder hoek* op *op den bazis, tot de* Tangens *van de helft der andere hoek op den bazis.*

Verlengd AC zoo lang, tot dat CD = BC is, en laat BD getrokken worden: dan zal zyn AD + AB : AD − AB = Plaat III. Fig. 15.

$$Tang. \frac{ABD+D}{2} \left(\frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2} A\right)$$

$$Tang. \frac{ABD-D}{2} \left(\frac{ABD-CBD}{2} = \frac{ABC}{2}\right),$$ dat is, AC + BC + AB : AC + BC − AB = *Co-tangens* $\frac{1}{2}$ A : *Tang.* $\frac{1}{2}$ ABC.

Q, E, D.

Voorstel V.

In ieder Platte Driehoek ABC, *is, gelyk de bazis* meer *het verschil der twee zyden, is tot de bazis* min *het zelfde verschil, alzoo is de* Tangens *van de helft der grootste hoek op den bazis, tot de* Tangens *van de helft der kleinste.*

Verlengd de kleinste zyde CA zoo lang, tot dat CD = CB is, zoo dat AD het verschil der twee zyden kan zyn; en laat BD getrokken worden: Dan is het openbaar dat de hoek CBD aan D gelyk zal zyn: maar (*door Theor.* V. *pag.* 195) AB + AD : AB − AD Plaat III. Fig. 16.

$$= Tang. \frac{D+DBA}{2} \left(= \frac{CAB}{2}\right) : Tang.$$

D−

$$\frac{D-DBA}{2}=\frac{CBD-DBA}{2}=\frac{CBA}{2}.$$

Q, E, D.

Voorſtel VI.

Plaat III. Fig. 17. *Gelyk de bazis van een Platte Drieboek* ABC, *is tot de zom der twee zyden, alzoo is de* Sinus *der halve* verticaale *hoek, tot de* Co-Sinus *van het halve verſchil der hoeken op den bazis.*

Verlengt AC, tot dat CD = CB is; voegt B en D te zaamen, en trekt CE *parallel* met AB, en CF *perpendiculair* op BD.

Nadien CD = CB is, derhalven is de hoek D = DBC, en gevolgelyk, $\frac{1}{2}$ der *Verticaale* hoek ACB = $\frac{D+CBD}{2}$ = D.

Daarenboven, aangezien DCB = de zom der hoeken A en CBA, op den bazis is, zoo is het blykbaar dat BCF (of DCF) aan de halve zom gelyk is; en derhalven indien ECF het verſchil van de grootſte ABC (= BCE) en de halve zom (BCF) is, zoo moet dezelve, klaarblykelyk, aan het verſchil derzelve hoeken A en CBA gelyk zyn.

Maar (*door Theor.* III.) AB : AD (AC + BC) = *Sin.* D ($\frac{1}{2}$ ACB) : *Sin.* ABD = *Sin.* CED = *Sin.* FEC = *Co-Sin.* ECF.

Q, E, D.

Voor-

Voorstel VII.

Gelyk de bazis van een Platte Driehoek A B C, *is tot het verschil der twee zyden, alzoo is de* Co-Sinus *der halve tophoek, tot de* Sinus *van het halve verschil der hoeken op den bazis.*

Laat op de grootste zyde C A, C D = C B gemaakt worden, en trekt B D, en van 's gelyken C E *perpendiculair* op B D. Dan is openbaar, om dat C D = C B is, dat C D B en C B D aan elkander gelyk zyn, en dat ieder derzelve, dus gelyk is aan de halve zom der hoeken C B A en A op den bazis; Derhalven moet A B D, zynde dat geene, 't welk de grootste C B A meerder als de halve zom is, gevolgelyk aan het halve verschil derzelve Hoeken gelyk zyn. Plaat III. Fig. 18.

Maar (*door Theor.* III.) A B : A D (A C — B C) = *Sin.* D (*Co-Sin.* D C E of $\frac{1}{2}$ C) : *Sin.* A B D.

Q, E, D.

Voorstel VIII.

Gelyk het verschil der twee zyden A C, B C, *van een platte Driehoek, is tot het verschil van de stukken der bazis* A Q, B Q (*voortkomende door een* perpendiculair, *vallende uyt de regte hoek op de* Hypothenusa), *alzoo is de* Sinus *der halve tophoek, tot de* Co-Sinus *van het halve verschil der hoeken op den bazis.* Plaat IV. Fig. 1.

Want $AC - BC : AQ - BQ = AB : AC + BC = Sin. \frac{ACB}{2} : Co\text{-}Sin. \frac{A - B}{2}$.

Q, E, D.

Voorstel IX.

Indien de betrekking van drie rechte lynen a, b en x, zodanig is, dat $ax - x^2 = b^2$ is; zoo zal zyn, $\frac{1}{2}a : b =$ Radius, *tot de* Sinus *van een boek; en gelyk* Radius, *tot de* Tangens (*of* Co-Tangens) *dier halve boek, zoo is $b : x$.*

Plaat IV. Fig. 2. Maakt AB gelyk aan a, en laat op dezelve de halve Cirkel ADB beschreeven worden; dus laat CD, gelyk aan b, *perpendiculair* op AB zyn, raakende den omtrek in D: Laat daarenboven AD, BD, en de *Radius* OD getrokken worden. Om dat $AC \times CB = CD^2 = b^2$ is, zoo is het klaar dat $AC \times \overline{a - AC}$, of $BC \times \overline{a - BC}$ aldus $= b^2$ is; en derhalven, $x \times \overline{a - x} = b^2$ zynde, is het openbaar dat x gelyk kan zyn, ieder aan AC of BC. Nu (*door Theor.* I.) OD ($\frac{1}{2}a$) : CD (b) $=$ *Radius* : *Sin.* DOC; wiens helft gelyk A, of BDC is. Maar, gelyk *Radius* : *Tang.* $BDC = DC$ (b) : BC; of, gelyk *Radius* : *Co-Tang.* BDC (*Tang.* CDA) $= DC$ (b) : AC.

Q, E, D.

Voor-

Voorstel X.

Indien de betrekking van drie lynen a, b *en* x, *zodanig is, dat* $x^2 \pm ax = b^2$ *is; zoo zal zyn, gelyk* $\frac{1}{2}a : b =$ Radius *tot de* Tangens *van een boek; en gelyk* Radius *is tot de* Tangens, *of* Co-Tangens, *dier halve boek (overeenkomende met het teken van* ax *het zy* Positif *of* Negatif) $= b : x$.

Maakt $AB = b$, en AC, *perpendiculair* op AB, gelyk aan a; om welke laatste, als een *Diameter*, laat een Cirkel beschreeven worden; en door deszelfs centrum O, laat BD getrokken worden, raakende den omtrek in E en D; laat dus A, E, en C, E, t'zaamen getrokken worden, en trekt BF *parallel* met AC, ontmoetende AE in deszelfs verlengde F. Dan, indien $BE \times BD$ ($= BE \times \overline{BE + a} = BD \times \overline{BD - a}$) $= AB^2$ (b^2) en $x \times \overline{x \pm a} = b^2$, door onderstelling is, dan is het openbaar dat $BE = x$ zal zyn, wanneer $x \times \overline{x + a} = b^2$; en $BD = x$ is, dus $x \times \overline{x - a} = b^2$. Plaat IV. Fig. 3.

Daarenboven, dewyl de Hoek $F = OAE = OEA = BEF$ is, zoo is het blykbaar dat $BF = BE$, en dat de hoeken BAF en C (zynde de *Complementen* der gelyke hoeken F en OAE) van 's gelyken gelyk zyn.

Nu (*door Theor.* II.) AO ($\frac{1}{2}a$) : AB (b) $=$ *Radius* : *Tang.* AOB; wiens helft aan C, of B A F gelyk is. Maar, gelyk *Radius* : *Tang.* B A F = A B (b) : B F (B E) de waarde van x in het eerste geval, alwaar $x^2 + a x = b^2$ is. Wederom, *Radius* : *Co Tang.* B A F (*Tang.* F) = B F (B E) : A B (*door Theor.* II.); en B E : A B = A B : B D; waar uyt, door vergelyking, *Radius* : *Co-Tangens* B A F = A B (b) : B D; welke de waarde van x in het tweede geval is; alwaar $x^2 - a x = b^2$ is.

Q, E, D.

Voorstel XI.

In een platte Driehoek A B C, *is, gelyk de lyn* C E, *snydende de* Verticaale *hoek in tweëen, is tot de bazis* A B, *alzoo is de* Secans *der halve* Verticaale *hoek* A C B, *tot de* Tangens *van een hoek, en gelyk de* Tangens *van de zelfs dier hoek is tot de* Radius, *alzoo is de* Sinus *der halve* Verticaale *hoek, tot de* Sinus *van ieder hoek, welke de snylyn met de bazis maakt.*

Plaat IV. Fig. 4. Laat A C B D een Cirkel zyn, om den Driehoek beschreeven, en laat het verlengde van C E den omtrek in D raaken; laat daarenboven A D en B D, en van 's gelyken D F, *perpendiculair* op den bazis A B, getrokken worden; welke alzoo *biseƈt* is, om dat (B C D = A C D zynde) B D en A D gelyk zyn. Daarenboven, indien de Hoek D B E = A C D = D C B is, zoo zyn de Driehoeken D E B en D B C (hebbende D gemeen) gelykhoekig, en derhalven D E x D C = D B^2, of of dat het zelfde is $DE^2 + DE \times CE = DB^2$. Dus $\frac{1}{2} CE : DB =$ *Radius* : *Tangens* van een hoek (welke wy Q zullen noemen); en, gelyk *Radius* : *Tang.* $\frac{1}{2} Q = DB : DE$.

Maar $DB : BF$ ($\frac{1}{2}AB$) $=$ *Secans* FBD (BCE) : *Radius*; derhalven, ftellende deeze, met de eerfte evenredigheid te zaamen, hebbenwe, $\frac{1}{2}CE \times DB : \frac{1}{2}AB \times DB =$ *Radius* $\times$ *Secans* BCE : *Radius* $\times$ *Tang.* Q; en gevolgelyk $CE : AB =$ *Secans* BCE : *Tang.* Q. Wederom, $DE : DB =$ *Sin.* DBE (BCE) : *Sin.* van DEB (of van CEB); waar uyt, door vergelyking, *Tang.* $\frac{1}{2}$ Q : *Radius* $=$ *Sinus* BCE : *Sin.* CEB.

Q, E, D.

Voorftel XII.

De Hypothenufa AC, *en de zom of het verfchil, der beenen* AB, BC, *van een regthoekige Spherifche Driehoek* ABC, *gegeeven zynde, de Driehoek te bepaalen.*

Laat AE de zom, en AF het verfchil der beide beenen zyn, om dat, *Radius* : *Co-Sin.* AB $=$ *Co-Sin.* BC : *Co Sin.* AC (*door Theor.* II.) derhalven *Co Sin.* AB $\times$ *Co Sin.* BC $=$ *Rad.* $\times$ *Co Sin.* AC; maar de voorgaande van deeze, is $= \frac{1}{2}$ *Rad.* Plaat IV. Fig. 5.

$\times$ *Co-Sin.* AE $+$ *Co-Sin.* AF; Derhalven $2 \times$ *Co-Sin.* AC $=$ *Co-Sin.* AE $+$ *Co Sin.* AF. Waar uyt blykt, *dat, indien van tweemaal de* Co-Sinus *der* Hypothenufa, *de* Co-Sinus *der gegeeven zom, of verschil, der beenen, getrokken word, het overschot de* Co Sinus *van een boog zal zyn, welke vergaard, by de genoemde zom of verschil, het dubbeld van het grootste geëischte been voortbrengt.*

Voorstel XIII.

De boek op den bazis en de zom, of verschil der Hypothenusa *en bazis, van een regthoekige* Spherische *Drieboek gegeeven zynde, de Drieboek te bepaalen.*

Plaat III. Fig. 7. Voor eerst zal zyn, *Rad.* : *Co-Sin.* A $=$ *Tang.* A C : *Tang.* A B (*door Theor.* I.) en derhalven *Rad.* $+$ *Co-Sin.* A : *Rad.* $-$ *Co-Sin.* A $=$ *Tang.* A C $+$ *Tang.* A B : *Tang.* A C $-$ *Tang.* A B. Waar door blyken zal, dat, *Co-Tang.* $\frac{1}{2}$ A : *Tang.* $\frac{1}{2}$ A $=$ *Rad.* $+$ *Co-Sin.* A : *Rad.* $-$ *Co-Sin.* A ($=$ *Tang.* A C $+$ *Tang.* A B : *Tang.* A C $-$ *Tang.* A B) $=$ *Sin.* $\overline{\text{A C} + \text{A B}}$: *Sin.* A C $-$ A B. Hier uyt is openbaar, dat, *Gelyk de* Co-Tangens *der halve gegeeven hoek, is tot deszelfs* Tangens, *alzoo is de* Sinus *der zom van de* Hypothenusa *en het toegevoegde been, tot de* Sinus *van hun verschil.*

Voorstel XIV.

De Hypothenusa A C *en de zom, of verschil der twee toegevoegde Hoeken gegeeven zynde, de Hoeken te vinden.*

Plaat IV. Fig. 6. Laat E C *perpendiculair* op B C zyn en dan zal zyn, *Rad.* : *Co-Sin.* A C $=$

Tang.

Tang. A : *Tang.* ACE. Waar door we alzo zullen hebben, *Co-Tang.* $\frac{1}{2}$ AC : *Tang.* $\frac{1}{2}$ AC = *Sin.* $\overline{A + ACE}$: *Sin.* $\overline{A - ACE}$, waar van de twee laaste *Termen*, stellende $90^{\circ} - ACB$ voor ACE, zullen zyn *Sin.* $\overline{90^{\circ} + A - ACB}$ (*Co-Sin.* ACB—A) en *Sin.* $\overline{A + ACB - 90^{\circ}}$ *respectivè* Waar uyt blykt, dat, *Gelyk de* Co-Tangens *der halve* Hypothenusa, *is tot deszelfs* Tangens, *alzoo is de* Co-Sinus *van het verschil der hoeken op de* Hypothenusa, *tot de* Sinus *van het geene hun zom, meer als een regte hoek is.*

Voorstel XV.

In twee regthoekige Spherische *Driehoeken* ABC, ADE, *hebbende één hoek* A *gemeen, laat alhier gegeeven zyn, de twee perpendiculairen* BC, DE, *en de zom, of het verschil der* Hypothenusen AC, AE *de Driehoeken te bepaalen.*

Het is klaar (*uyt Theor.* I.) dat *Sin.* DE : *Sin.* BC = *Sin.* AE : *Sin.* AC; derhalven *Sin.* DE + *Sin.* BC : *Sin.* DE — *Sin.* BC = *Sin.* AE + *Sin.* AC : *Sin.* AE — *Sin.* AC. Waar uyt (*door vergelyking*) *Tang.* $\frac{DE+BC}{2}$: *Tang.* $\frac{DE-BC}{2}$ = *Tang.* $\frac{AE+AC}{2}$: *Tang.* $\frac{AE-AC}{2}$ Plaat IV. Fig. 7.

 : *Dat*

: *Dat is, gelyk de* Tangens *der halve zom van de twee* perpendiculairen, *is tot de* Tangens *van hun halve verschil, alzoo is de* Tangens *der halve zom van de twee* Hypothenusen *tot de* Tangens *van hun halve verschil.*

Voorstel XVI.

Het vermenigvuldigde van het vierkant der Radius *en de* Co-Sinus *der* bazis, *van een* Spherische *Drieboek* ABC, *is gelyk aan het vermenigvuldigde der* Sinen *van de twee zyden, en de* Co-Sinus *der* Verticaale *Hoek, t'zaamen met het vermenigvuldigde der* Radius *en de* Co-Sinen *der zelve zyden.*

Plaat IV. Fig. 8. Want laat AD *perpendiculair* op BC zyn: Dan, indien *Co-Sin.* BD $=$

$$\frac{Sin.\ CB \times Sin.\ CD + Co\text{-}Sin.\ CB \times Co\text{-}Sin.\ CD}{Rad.}$$

is, zoo is het blykbaar, dat *Co-Sin.* BD : *Co-Sin.* CD $= \ldots\ldots$

$$\frac{Sin.\ CB \times Sin.\ CD + Co\text{-}Sin.\ CB \times Co\text{-}Sin.\ CD}{Rad.}$$

$$: Co\text{-}Sin.\ CD = \frac{Sin.\ CB \times Sin.\ CD}{Co\text{-}Sin.\ CD}$$

$+$ *Co-Sin.* CB : *Rad.* (vermenigvuldigende ieder *Term* met $\frac{Rad.}{Co\text{-}Sin.\ CD}$).

Maar $\frac{Sin.\ CD}{Co\text{-}Sin.\ CD} = \frac{Tang.\ CD}{Rad.}$, derhalhalven zal onze evenredigheid zyn $\frac{Sin.\ CB \times Tang.\ CD}{Rad.} + Co\text{-}Sin.\ CB :$ $Rad.$ ($= Co\text{-}Sin.\ BD : Co\text{-}Sin.\ CD$) $= Co\text{-}Sin.\ AB : Co\text{-}Sin.\ AC.$ Waar door, vermenigvuldigende de middenften en uyterften, we hebben, $Co\text{-}Sin.\ AB \times Radius = \frac{Sin.\ CB \times Co\text{-}Sin.\ AC \times Tang.\ CD}{Rad.}$ $+ Co\text{-}Sin.\ AC \times Co\text{-}Sin.\ BC.$ Maar (*door Theor.* I.) *Radius* : $Co\text{-}Sin.\ C = Tang.\ AC$: $Tang.\ CD = \frac{Co\text{-}Sin.\ C \times Tang.\ AC}{Rad.}$ $= \frac{Co\text{-}Sin.\ C \times Sin.\ AC}{Co\text{-}Sin.\ AC}$, welk laatfte in plaats van deszelfs gelyke gefteld zynde, zullen we hebben, $Co\text{-}Sin.\ AB\ Rad.$ $= \frac{Sin.\ CA \times Sin.\ CB \times Co\text{-}Sin.\ C}{Rad.} + Co\text{-}Sin.\ AC \times Co\text{-}Sin.\ BC$; waar uyt, indien ieder *Term* met de *Radius* vermenigvuldigd word, de waarheid van het *Voorftel* klaarlyk blyken zal.

Voorftel XVII.

Indien AE *de zom, en* AF *het verfchil, der twee zyden van een* Spherifche *Driehoek* A B C *is, en* v *gefteld word, de* Sinus verfus *der verticaale hoek te betekenen, en* R *de* Radius zoo zal zyn v

$$= \frac{R^2 \times \overline{Co\text{-}Sin.\ AF - Co\text{-}Sin.\ AB}}{Sin.\ AC \times Sin.\ BC}$$

$$= \frac{2R \times \overline{Co\text{-}Sin.\ AF - Co\text{-}Sin.\ AB}}{\overline{Co\ Sin.\ AF - Co\ Sin.\ AE}}$$

$$= \frac{2R \times Sin.\ \overline{\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AF} \times Sin.\ \overline{\tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AF}}{Sin.\ AC \times Sin.\ BC.}$$

Plaat IV. Fig. 9. Het blykt uyt het laatſte *Voorſtel*, dat *Co-Sin.* A B × R is $=$ *Co-Sin.* A C × *Co-Sin.* B C + $\frac{Sin.\ AC \times Sin.\ BC \times Co\text{-}Sin.\ C}{R}$;

Laat daar in, voor *Co-Sin* C deszelfs gelyke R — v geſteld worden, en dan zullenwe hebben *Co-Sin.* A B × R $=$ *Co-Sin.* A C × *Co-Sin.* B C + *Sin.* A C × *Sin.* B C — $\frac{Sin.\ AC \times Sin.\ BC \times v}{R}$: Maar de zom der twee voorgaande van de drie laatſte *Termen* is $=$ *Co-Sin.* A F × R; derhalven zal zyn *Co-Sin.* A B × R $=$ *Co-Sin.* A F × R — $\frac{Sin.\ AC \times Sin.\ BC \times v}{R}$, en gevolgelyk, $v = \frac{R^2 \times \overline{Co\text{-}Sin.\ AF - Co\text{-}Sin.\ AB}}{Sin.\ AC \times Sin.\ BC}$.

Welke het eerſte Geval is. Wederom, dewyl *Sin.* A C × *Sin.* B C is $=$ ½ R × $\overline{Co\text{-}Sin.\ AF - Co\ Sin.\ AE}$, zoo zullenwe alzoo hebben $v = \frac{2R \times \overline{Co\text{-}Sin.\ AF - Co\text{-}Sin.\ AB}}{Co\text{-}Sin\ AF - Co\text{-}Sin.\ AE}$.

Wel-

Welke het tweede Geval is. Daarenboven Indien $\frac{1}{2} R \times \overline{Co\text{-}Sin.\ AB} - \overline{Co\text{-}Sin.\ AB}$ is $= Sin.\ \frac{AB + AF}{2} \times Sin.\ \frac{AB - AF}{2}$, zoo volgd van s'gelyken dat $v =$

$$\frac{2R \times Sin.\ \overline{\tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} AF} \times Sin.\ \overline{\tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2} AB}}{Sin.\ AC \times Sin.\ BC}.$$

Q, E, D.

EINDE.

TAFEL

TAFEL

Der voornaamste

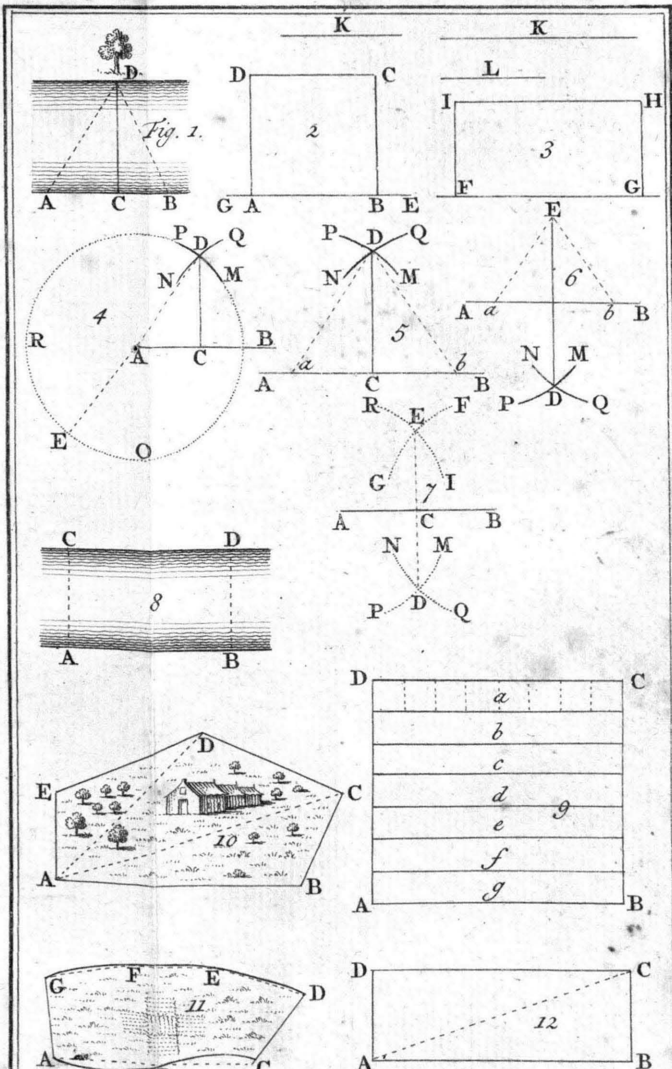
ZAAKEN

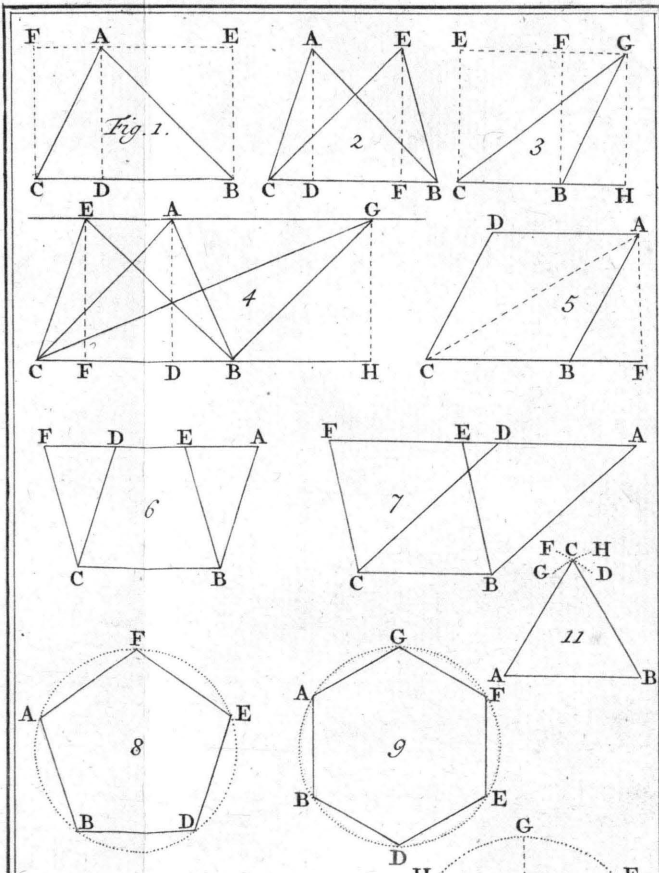
In de Trigonometria verhandeld.

De

De

Van


D
Fig. 1.
A
C
B
K
D
C
2
G
A
B
E
K
L
I
H
3
F
G
E
P
D
Q
N
M
4
R
B
A
C
E
O
P
D
Q
N
M
5
a
b
A
C
B
6
A
a
b
B
N
M
P
D
Q
R
E
F
G
I
7
A
C
B
N
M
P
D
Q
C
D
8
A
B
D
C
a
b
c
d
9
e
f
g
A
B
D
E
C
10
A
B
G
F
E
D
11
A
B
C
D
C
12
A
B



F A E
Fig. 1.
C D B
A E
2
C D F B
E F G
3
C B H
E A G
4
C F D B H
D A
5
C B F
F D E A
6
C B
F E D A
7
C B
F C H
G D
11
A B
F
A E
8
B D
G
A F
9
B E
D
G
H F
C
10
A E
K
B D
A
H
E B
12
G
F
D C

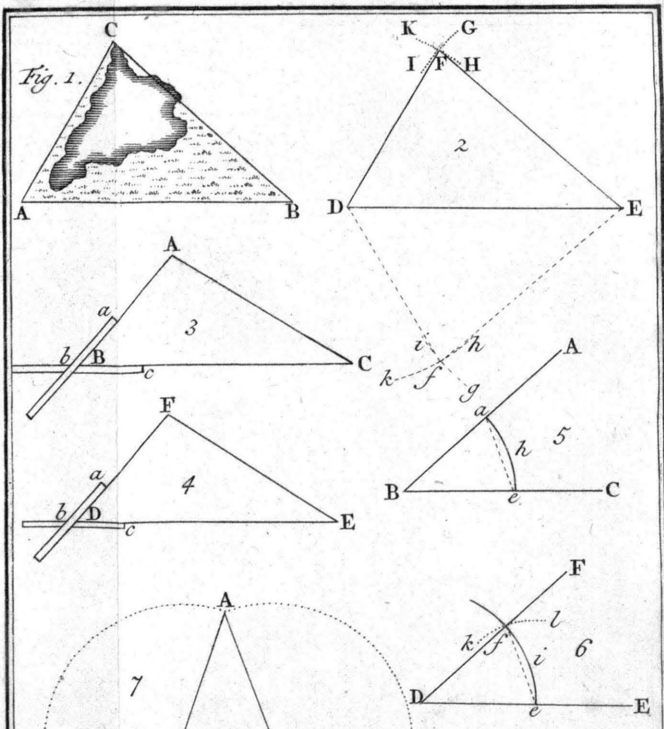


Fig. 1.
C
A
B
K G
I F H
2
D
E
A
a
3
b B
C
c
i h
k f
g
A
F
a
h 5
4
B e C
b D
c
E
F
A
l
k f
6
i
7
D
E
e
D
B
C
E
K
I
C
L
D
9
B
E
8
O
F
G
A

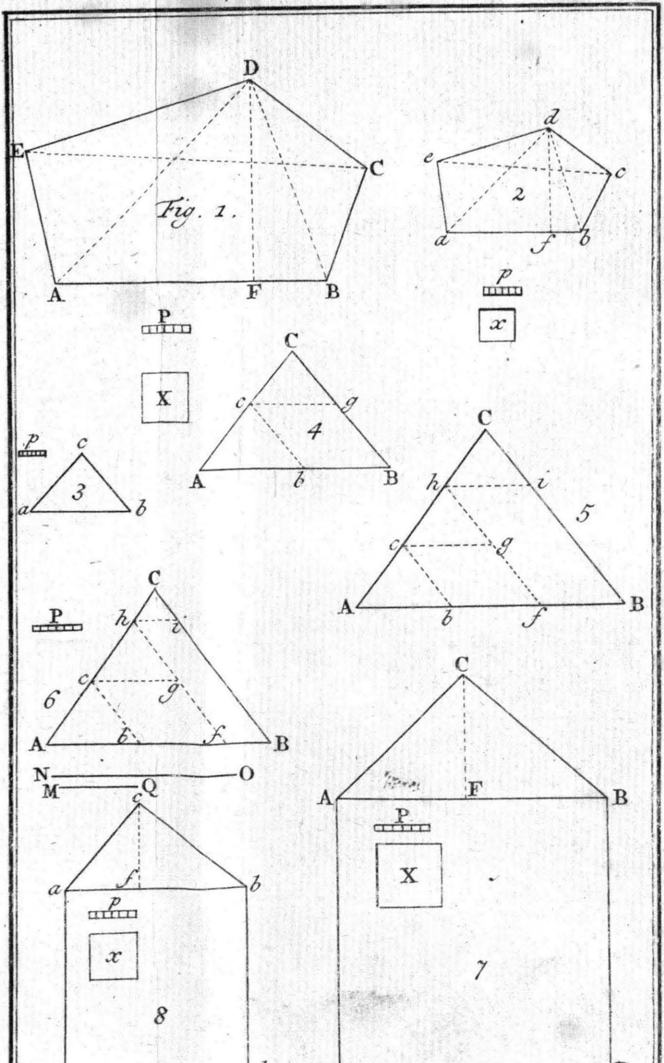


Fig. 1.
D
E
C
A
F
B
P
X
d
e
c
2
a
f
b
p
x
C
c
g
4
A
b
B
p
c
3
a
b
C
h
i
5
c
g
A
b
f
B
C
P
h
i
c
g
6
A
b
f
B
N
O
M
Q
c
a
f
b
p
x
8
e
d
C
A
F
B
P
X
7
E
D

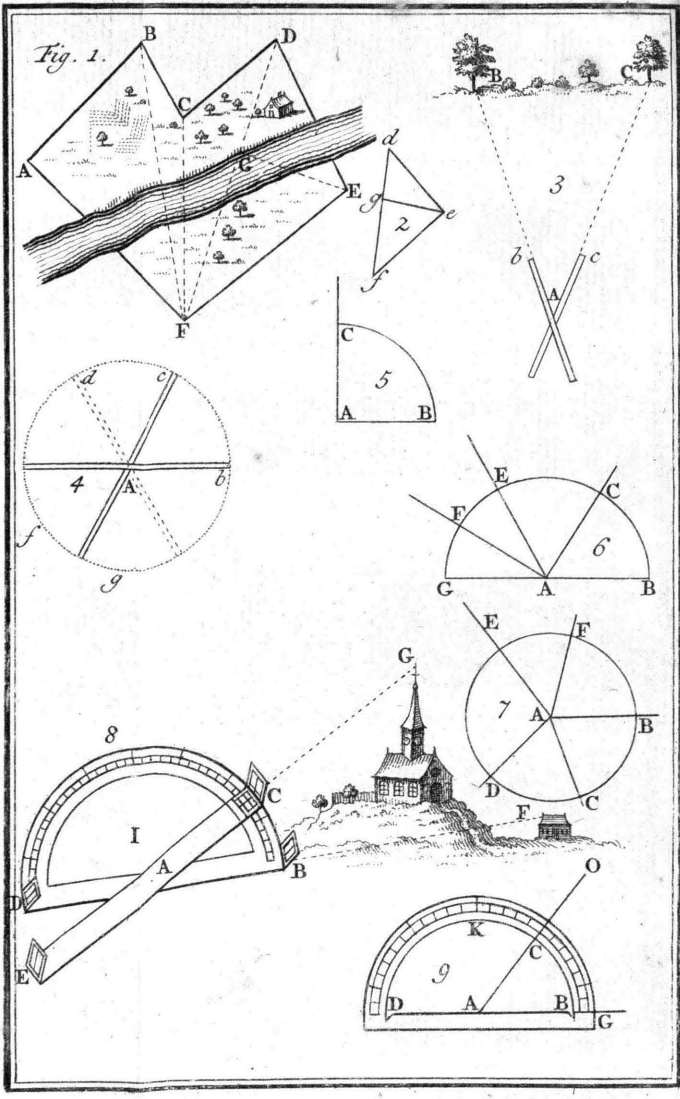


Fig. 1.
A
B
C
D
E
F
G
d
g
e
f
2
B
C
3
b
c
A
C
5
A
B
d
c
4
A
b
f
g
E
C
F
6
G
A
B
E
F
7
A
B
D
C
G
8
C
I
A
B
D
E
F
O
K
C
9
D
A
B
G

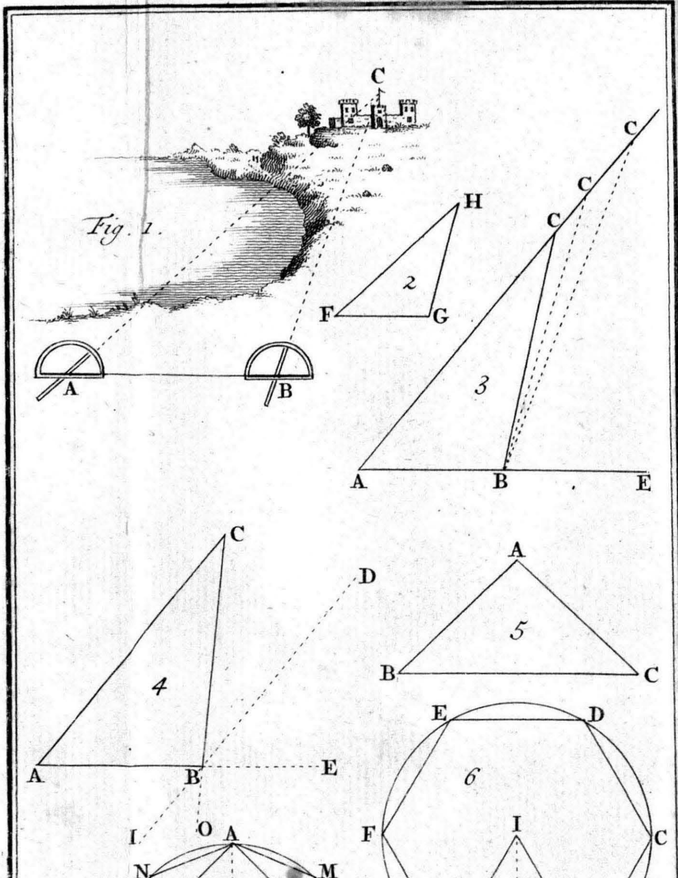


Fig. 1.
C
A
B
H
2
F
G
C
C
C
3
A
B
E
C
D
4
A
B
E
I
O
A
5
B
C
E
D
6
F
C
I
A
B
K
O
N
M
P
L
A
N
M
C
I
E
7
K
L
B

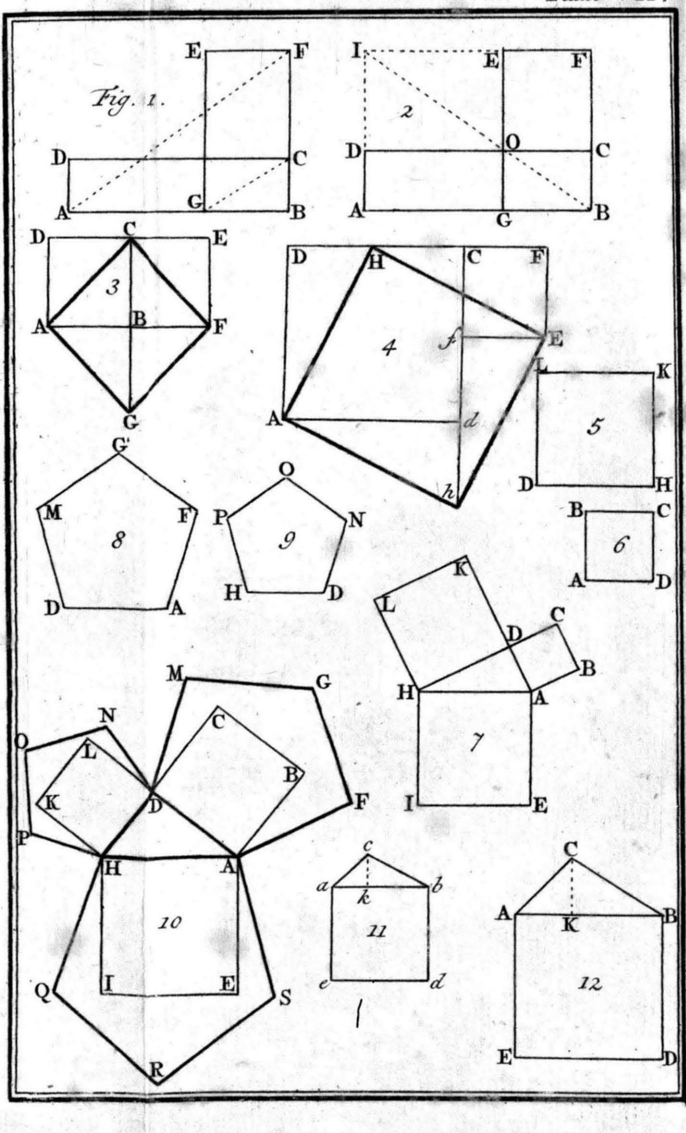


Fig. 1.
E F D C A G B
2
I E F D O C A G B
3
D C E A B F G
4
D H C F f E A d h
5
L K D H
6
B C A D
7
K L C D B H A I E
8
G M F D A
9
O P N H D
10
M G N C O L B K D F P H A I E Q S R
11
c a b k e d
12
C A B K E D

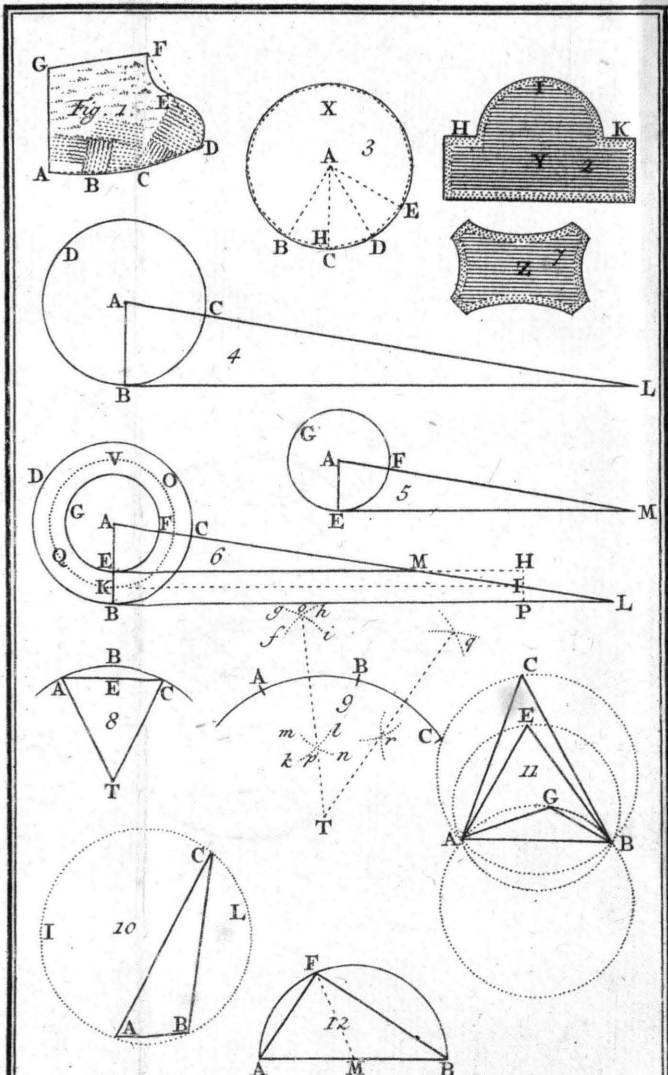


Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

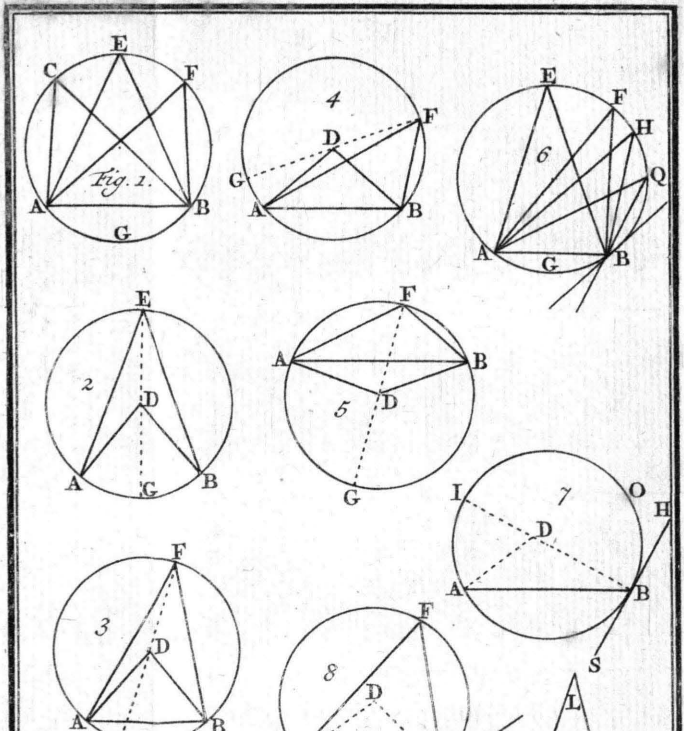


Fig. 1.
C E F A B G
4
D F G A B
6
E F H Q A G B
2
E D A G B
F
A B
5
D G
7
I O H D A B S
3
F D A B G
8
F D A G B S
L
9
B
A C
D
10
b c a d
11

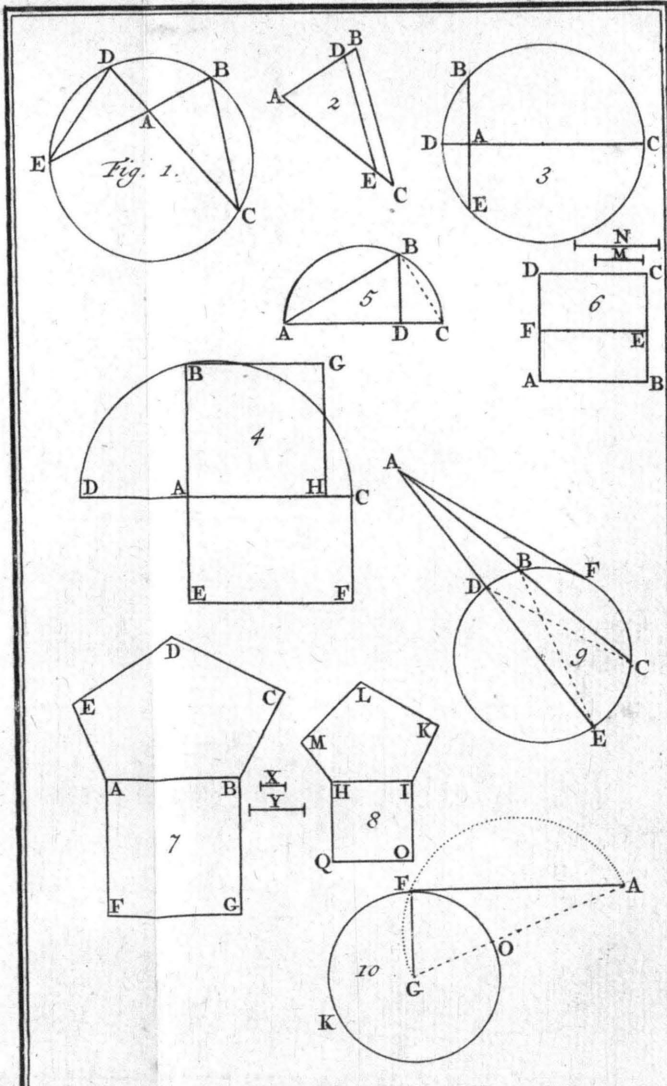


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10

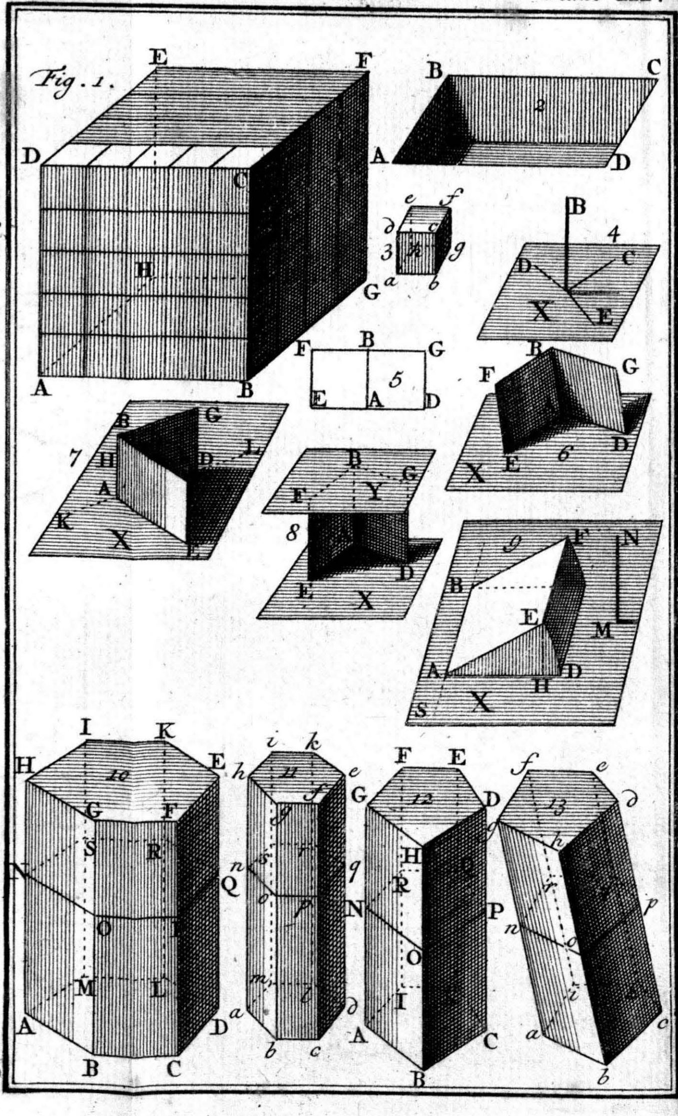


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
X
Y

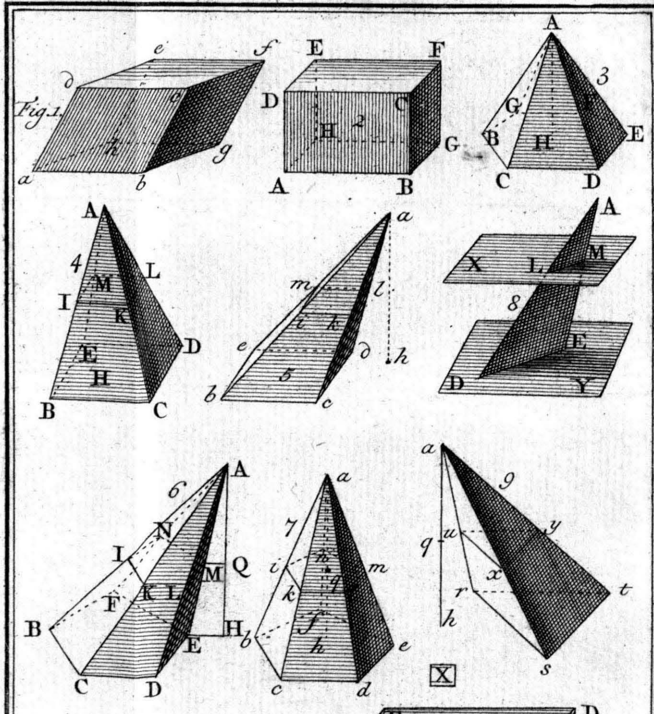


Fig. 1.
a b c d e f g h
A B C D E F G H 2
A B C D E G H 3
A B C D E H I K L M 4
a b c d e h i k l m 5
A B C D E F H I K L M N Q 6
a b c d e f h i k m 7
A D E L M X Y 8
a h q r s t u x y 9
X
A B C D E G L M N O 10
A O S T V X Y 11
A B C D E F G H L O 12
K L M N O S T V 13

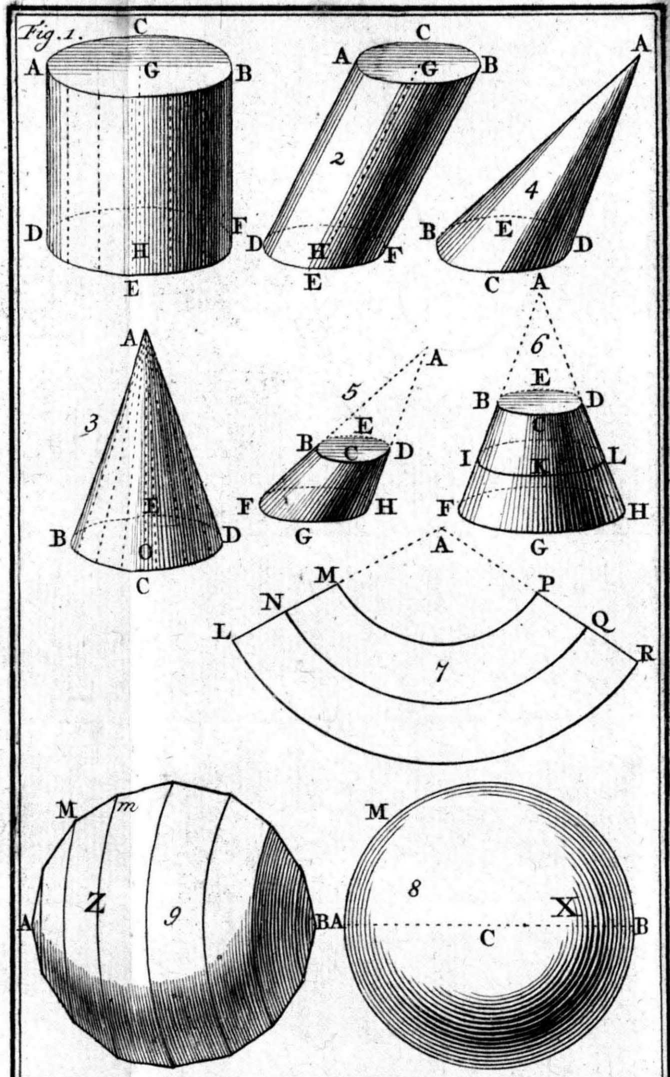
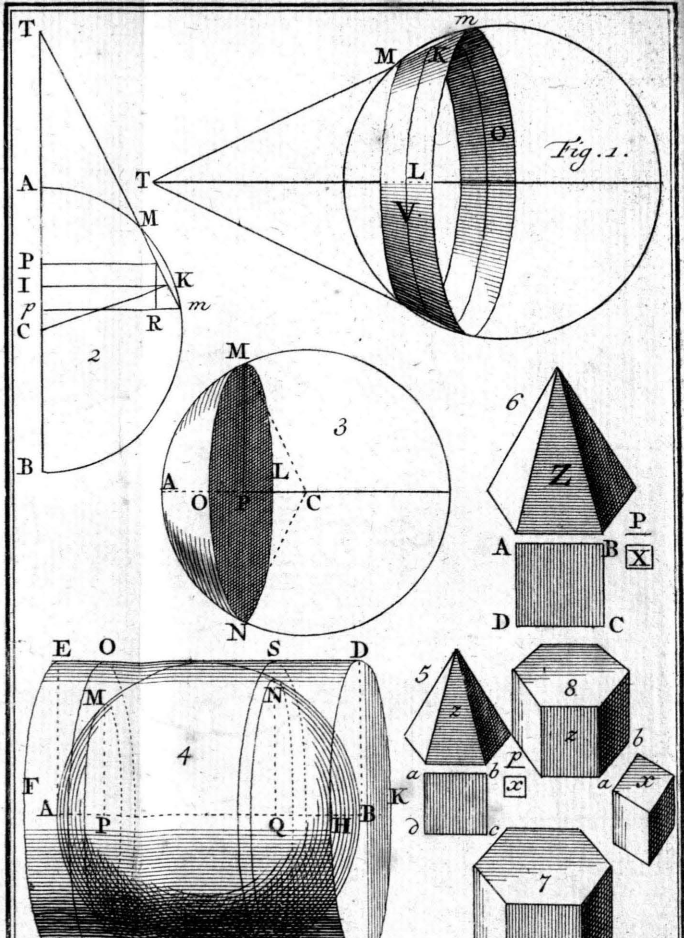


Fig. 1.
A C B G D F H E
2
A C G B D H F E
4
A B E D C
A
6
E
B D
C
I L
K
F H
G
3
A
E
B D
O
C
5
A
E
B D
C
F H
G
A
M P
N Q
L R
7
M m
Z
9
A B
M
8
X
A B
C


T
A
M
P
I
K
p
m
C
R
2
B
T
m
M
K
O
Fig. 1.
L
V
M
3
L
A
O
P
C
N
6
Z
A
B
P
X
D
C
E
O
S
D
M
N
4
F
K
A
P
Q
H
B
G
I
5
z
8
z
b
a
b
p
x
a
x
d
c
7
Z
B
X
A

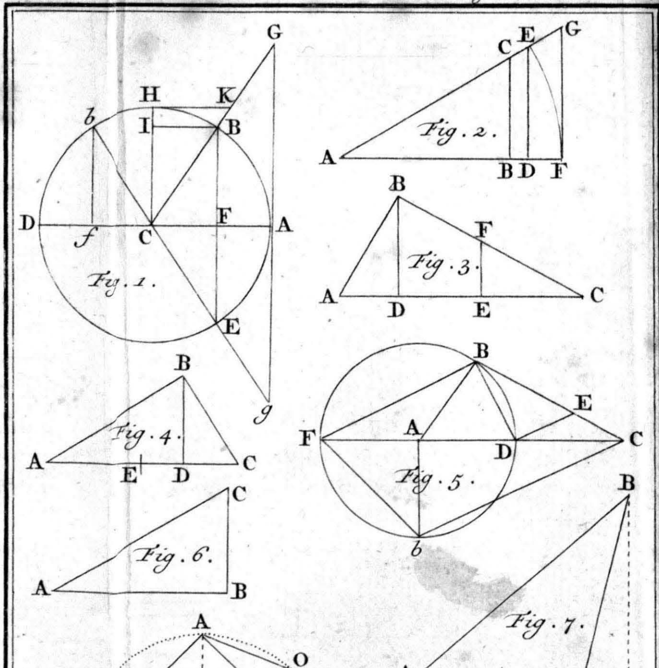


Fig. 1.
G
H
K
b
I
B
D
F
A
f
C
E
g
Fig. 2.
C
E
G
A
B
D
F
Fig. 3.
B
F
A
D
E
C
Fig. 4.
B
A
E
D
C
Fig. 5.
B
E
F
A
D
C
b
Fig. 6.
C
A
B
Fig. 7.
B
A
G
C
D
Fig. 8.
A
O
B
C
D
Fig. 9.
B
T
M
A
O
C
S
L
R
D
Fig. 10.
D
B
S
T
O
R
A
O
C

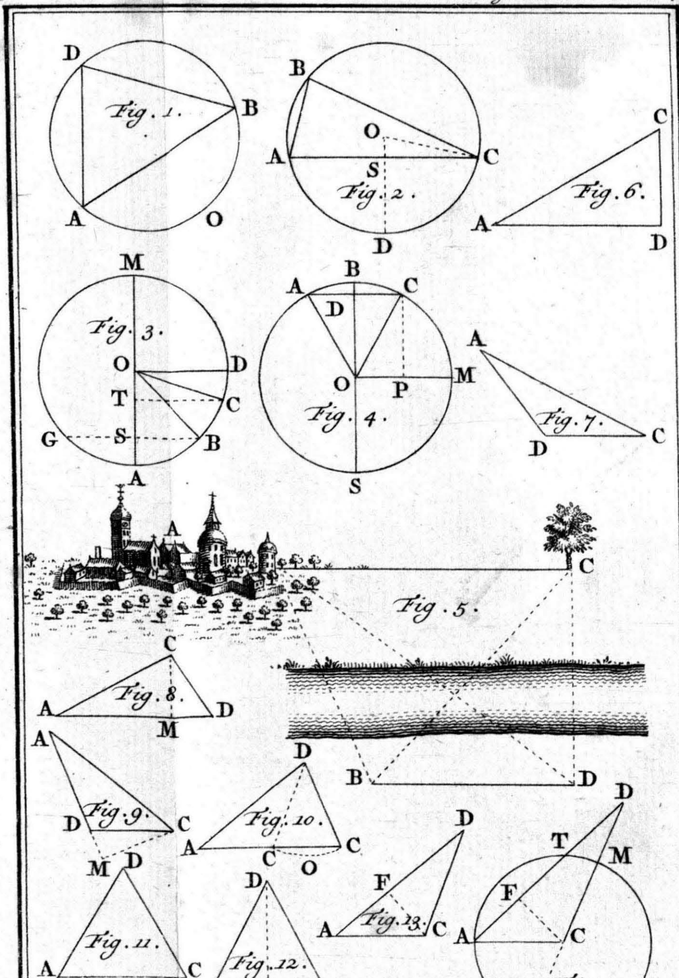


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

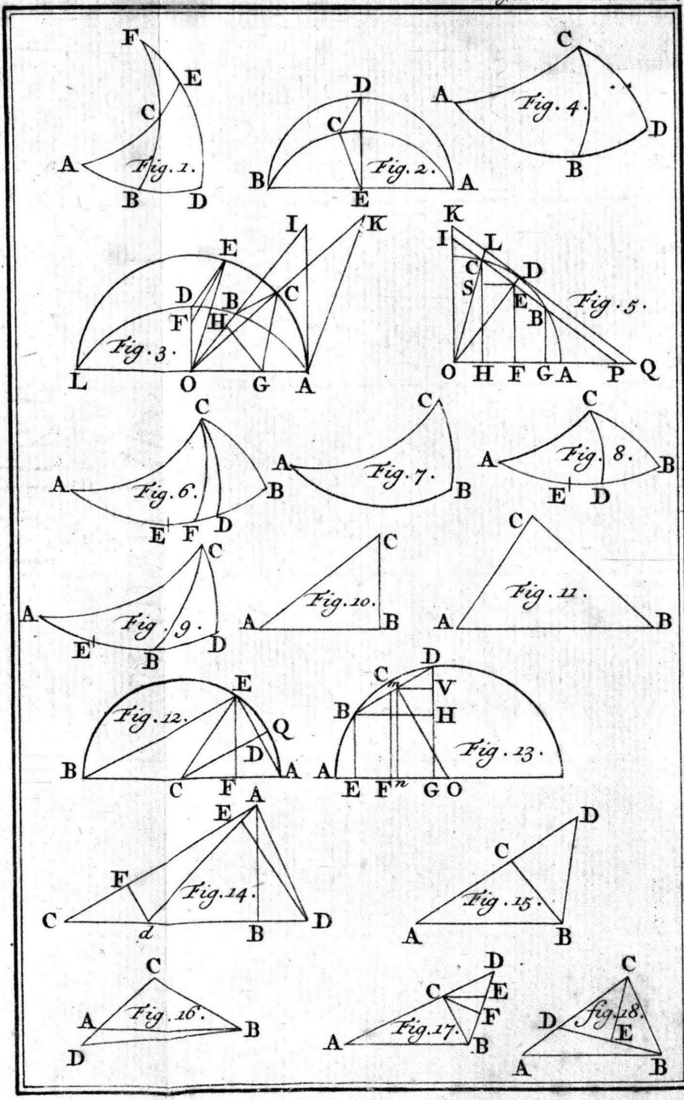
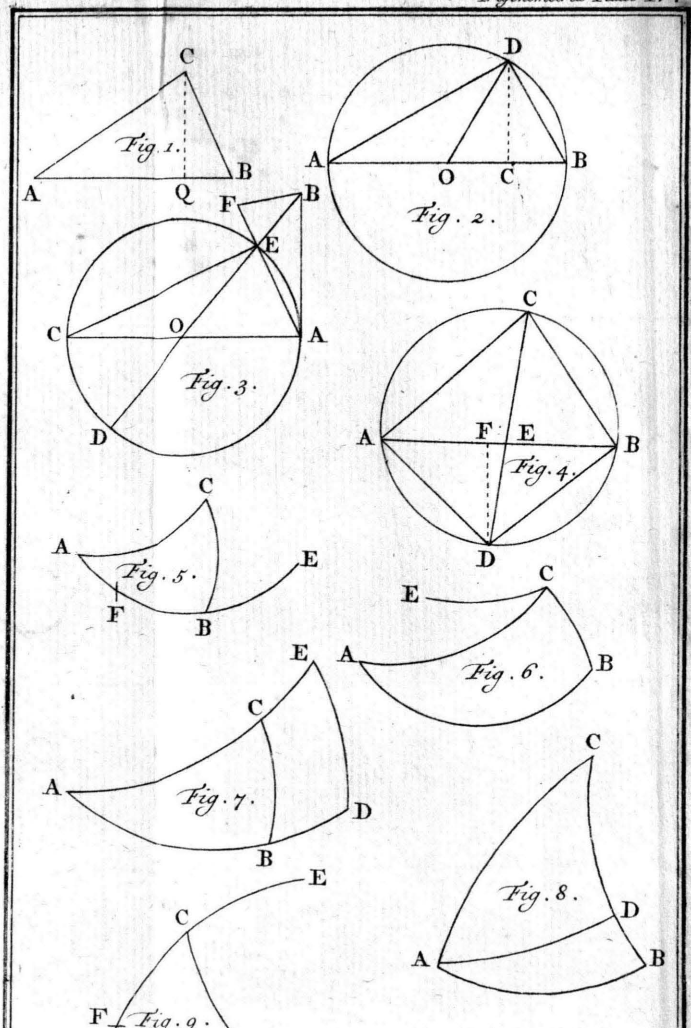


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
fig. 18.



C
Fig. 1.
A
Q
B
D
A
O
C
B
Fig. 2.
F
B
E
C
O
A
Fig. 3.
D
C
A
F
E
B
Fig. 4.
D
C
A
Fig. 5.
E
F
B
E
C
A
Fig. 6.
B
E
C
A
Fig. 7.
D
B
C
Fig. 8.
D
A
B
E
C
F
Fig. 9.
A
B

CATALOGUS van Boeken by *Jan Morterre* Gedrukt of te Bekomen.

J. L. Langhans Zielszuchtinge over het Lyden Christi, met platen.
J. Doutreyn Godgeleertheid van Adam en Moses.
——— Prophetische Godgeleertheid.
——— Korte Schets der Goddelyke Waarheden.
——— Hooningraedt der Verdrukkinge.
——— Godvruchtige Bidder.
W. Sluyter alle zyne Werken.
——— Buiten Leven apart met Aantekeningen.
J. Martinum groote Catechisatie over de Katechismus.
A. van Oostrum Catechisatie over de Katechismus.
F. Ridderus dagelykse Huis-oeffeningen.
——— Christelyke Feestdag.
N. S. V. Leeuwaarden de Godsdienstige Christen in zyn eenzaamheid.
——— de Bekommerde Christen.
——— de Godvreezende Zeeman.
P. Doddridge Oorsprong en Voortgang van Waare Godsdienstigheid.
J. V. Arxhoeck einde der Rechtveerdigen en Godloozen over Psalm LXXIII.
J. Schuts het Bescheiden Deel der Sieken.
De Gereformeerde Schatkamer der Gebeden.
J. Bunjan den Heiligen Oorlog, met vernieuwde fyne platen.
H. Schyn Heilige Keurstoffen.
A. Verduyn Leerredenen
M. Fortgens over de eerste Brief Petri.
W. V. Bevridge Overdenkinge van een Christen.
J. Wilkinson Heilige Pellegrimstrate.
'T Portrait van Martinus Lutherus, cierlyk in 't koper gebragt door P. Tanje.

A. Pauw

A. Pauw het Leven van Martinus Lutherus.
—— —— Europaas Lutherdom, of vervolg op het Leven van M. Lutherus.
J. Arends waare Christendom.
A. Velten Huyspostil, over de Evangelien, op nieuw overzien en met een Voorreeden verrykt van Do. Christianus Tisteyn.
J. Lassenius Heiligen Paarlenschat, 4 deelen.
—— — Hemelsche Morgendauw.
—— — Bybelsche Wierook.
—— — Verliefde Zulamieth.
—— — Over het Lyden Christi.
—— — Gewaarschouwde Capernaum.
—— — Verzoetende Bitterheid.
—— — Overtuygde Atheist.
H. Muller Hemelsche Liefde-kus.
J. Muller Volstrekt Raadbesluyt.
H. G. Masius onderscheid der Luthersche en Gereformeerde, nieuw vermeerderde druk.
Lutherus kleine Schriften, uitgegeeven en met een Voorreeden van J. J. Rambach.
H. Vos Gezangen.
J. Arends Paradys Hofken.
J. E. Blum oude en nieuwe Boetbasuyne.
J. V. Zhener Samenstel der ontschuldiginge, uitgegeven door J. J. Rambach.
N. Hunnius Kort Begrip, nieuw verbeterde druk.
H. Glaserus over de Katechismus.
F. Tatinghof Bybels Bloemhof.
Kamphuyzens Rymen door Butler en Mathieu.
—— —— door Rooleeuw op nieuw van veele fouten gezuivert.
J. Willemse Stichtelyk Zangwerk, of vierde Deel van Kamphuyzen op Nooten.
C. Stapel Lusthof der Zielen.
J. J. Bloems Zedeversen op de Psalmen Davids.
H. Boerhaave Geneeskundige Onderwyzingen.
F. Mauriceau over de Ziektens der swangere Vrouwen, vermeerdert met eenige Verhandelingen en Plaa-

Platen over de Geklemde Hoofden, door Petrus Camper Med. Anat. en Chirurg. Professor te Amsterdam.
L. Heyster Heelkundige Onderwyzingen, 2 deelen.
J. D. Schlichting over de Ongemakken der Teel-deelen, verbeeterde en vermeerderde druk.
A. Titsingh Verdonkerde Heelkonst.
——— Geneeskonst der Heelmeesters.
J. Palfyn Handwerken der Heelkonst.
——— Verhandeling der Oogziektens.
——— Heelkonstige Anatomie of Ontleedkunde.
——— Ostelogie of waare Beschryving der Been-deren.
Moublet Verhandeling over de afzetting der dye in het Gewrigt.
F. Le dran Operatien der Heelkonst.
— over de geschoote wonden.
J. Kouwenburg Zee Chirurgie of Matroozentroost, nieuwe druk, vermeerdert met veele nuttige Aantekeningen en kantekeningen, waar agter gevoegt is een korte verhandeling van de Anatomie en Ostelogie.
A. Houttuyn bescheiden deel der Vroedvrouwen.
J. A. Kulmus Anatomise Tafelen.
T. Sydenham en H. Buysen korte Geneeswysinge der Ziektens.
T. van Gulpen Schakel der Genees- en Heelkunde.
——— Kabinet der Natuurkunde.
C. Herls Examen der Chirurgie.
P. Nyland Nederlandse Herbarius.
J. van der Groen Nederlandse hovenier.
De Verstandige Kok of zorgvuldige Huyshoudster, apart.
M. Clairaut Beginselen der Geometrie, vermeerdert met eene Trigonometrie.
——— Gronden der Algebra, met eenige nutte voorstellen vermeerdert.
A. de Graaf Instructie van het Boekhouden.
——— Wiskundige Arithmetica.

A.

A. de Graaf Exempelaarboekje van de Arithmetica.
F. A. Marci Wiskundig Rekenſpel en van de Tovervierkanten.
Reſtaut Beginzelen der Franſche Spraakkonſt.
G. Leti het Leven van Koningin Eliſabeth, 2 deelen.
Het Leven van Willem den IVde, Prins van Orangien.
Levensgevallen van Robinſon Cruſoe, 3 deelen.
De Saxiſche Robinſon, 2 deelen.
De Sweedſche Robinſon.
De Vermakelyke Avanturier.
De Boerin van Fortuyn, 3 deelen.
Het Leven van Willem Fleertman.
F. Heermans Gulde Annotatien.
K. Elzevier Proeve van den Menſch.
J. B. Wellekens en P. Vlaming Dichtlievende Uitſpanningen.
J. Cats Trouwring, met fyne platen.
Pater Abraham Judas den Aardsſchelm, 3 deelen.
J. v. Neyner Nieuwe Uytdragers Winke.
W. de Brittannie Menſchelyke Wysheid, of de Weg des Fortuyns.
W. van Swanenburg Herbooren Oudheid of Europa in 't Nieuw.
C. Plinius van de Dieren, met vernieuwde fyne platen.

vl 1968
Vl 70
vl 77
Vl 81