ОБРАСЦИ

ИЗ

МАТЕМАТИКЕ

ЗА

УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

БЕОГРАД

ПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

1894.

Цена: 70 пара дин.

ОБРАСЦИ

ИЗ

МАТЕМАТИКЕ

ЗА

УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

БЕОГРАД
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1894.

САДРЖИНА

СТРАНА

ДОДАТАК

АРИТМЕТИКА

Знаци дељивости бројева са 2 и 5; 4 и 25; 8 и 125; 9, 3, 7, 11, 13.

Број је дељив са:

2 или *5* кад је цифра на месту јединица дељива са *2* или *5*.

4 или 25 кад је број начињен из последње две цифре дељив са 4 или са 25.

8 или 125 кад је број начињен из последње три цифре дељив са 8 или са 125.

9 или 3 кад је збир цифара дељив са 9 или са 3.

6 кад је број дељив са 2 и са 3.

7 или 13 кад је број подељен на класе по три цифре с десна у лево, па је збир класа на непарним местима умањен за збир класа на парним местима дељив са 7 или са 13.

11 кад је збир цифара на непарним местима умањен за збир цифара на парним местима дељив са 11.

Највећи заједнички делитељ (мера) и најмањи заједнички дељеник (множина).

Пример: $9072 = 2^4.3^4.7$
$1188 = 2^2.3^3.11$
$360 = 2^3.3^2.5$
$156 = 2^2.3.13$

Највећи заједнич. делитељ $= 2^2.3 = 12$
Најмањи заједнич. дељеник $= 2^4.3^4.5.7.11.13 =$

6486480.

Бројеви којима треба покушати, да се сазна, да ли је дати број прост.

За бројеве између 10 и 100 треба пробати са: **2**, 3, 5 и 7.

За бројеве између 100 и 1000 треба пробати са: 2, 3. 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31.

Преобраћање обичних разломака у десетне.

(Претпоставља се, да је разломак сведен на најпростији облик).

a) Кад у именитељу нема других чинитеља сем *2* и *5*, тада се разломак преобраћа потпуно у десетни.

b) Кад је именитељ прост број наспрам 10, тада се добива периодан разломак.

c) Кад је именитељ облика: $2^m.5^n.p$, разломак је мешовито периодан.

Преобраћање периодних разломака у обичне.

Прост периодан разломак:

$$0{,}636363\ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

Мешовито периодан разломак:

$$0{,}32615615\ldots\ldots = \frac{32615-32}{99900} = \frac{32583}{99900}$$

Обрасци за прост интересни рачун.

к, капатал; п, проценат; и, интерес; в, време.

$$и = \frac{к.\ п.\ в.}{100},\quad к = \frac{и.\ 100}{п.\ в.}$$

$$п. = \frac{и.100}{к.в},\quad в = \frac{и.100}{к.п.}$$

АЛГЕБРА

Сабирање.

$ma + na + pa = (m + n + p)\ a$

$a + (\pm b) = a \pm b$

$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$

$(+ a) + (+ b) = + (a + b)$

$(- a) + (- b) = - (a + b)$

$(+ a) + (- b) = + (a - b)$

$(- a) + (+ b) = - (a - b).$

Одузимање.

$(c - a) + a = c$

$(a + b) - a = b$

$a - (\pm b) = a \mp b$

$ma - na = (m - n)\ a$

$(+ a) - (+ b) = + (a - b) = - (b - a)$

$(- a) - (- b) = - (a - b) = + (b - a)$

$$(+a) - (-b) = +(a + b)$$
$$(-a) - (+b) = -(a + b)$$
$$A - (a + b - c) = A - a - b + c.$$

Множење.

$$ab = b \cdot a$$
$$3ab \cdot 6cd = 3 \cdot 6abcd$$
$$(+a)(+b) = +ab$$
$$(-a)(-b) = +ab$$
$$(+a)(-b) = -ab$$
$$(-a)(+b) = -ab$$
$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$
$$-a(b \pm c) = -ab \mp ac.$$

Дељење.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$
$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$
$$a : \pm b = \pm \frac{a}{b}$$
$$-a : \pm b = \mp \frac{a}{b}$$
$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$
$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a + b + c}{m}$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$$

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{an \pm bm}{mn}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc} = \frac{a : c}{b}$$

$$\frac{a}{1 \pm x} = a \mp ax + ax^2 \mp ax^3 + ax^4 \mp \ldots.$$

$$\frac{a}{x \pm 1} = \frac{a}{x} \mp \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} \mp \frac{a}{x^4} + \ldots$$

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2} x + \frac{a-b}{b^3} x^2 - \frac{a-b}{b^4} x^3 + \ldots.$$

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a-b}{b^2} x + \frac{a-b}{b^3} x^2 + \frac{a-b}{b^4} x^3 + \ldots.$$

$x^m - a^m$ увек је дељив са: $(x - a)$

$x^m - a^m$ дељив је са: $(x + a)$, кад је m паран број.

$x^m + a^m$ није никад дељив са: $(x - a)$.

$x^m + a^m$ дељив је са: $(x + a)$, кад је m непаран број.

Степени.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

$$(\pm a)^{2m} = + a^{2m}$$

$$(\pm a)^{2m+1} = \pm a^{2m+1}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$
$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$
$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4.$

Корени.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{mp}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt{a^2} = \pm a\ ,\ \sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$$

$$\sqrt[2.n]{(-a)} = b \sqrt{(-1)}$$

$$\sqrt[2n+1]{\pm a} = \pm a^{\frac{1}{2n+1}}$$

$$\sqrt[-n]{\frac{a^m}{b^p}} = \frac{a^{-\frac{m}{n}}}{b^{-\frac{p}{n}}} = \frac{b^{\frac{p}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\frac{z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{z \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$$

$$\frac{z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{z\,[\sqrt{a} \mp \sqrt{b}]}{a - b}$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$a \cdot i \pm b \cdot i = (a \pm b) \cdot i$$

$$ai \cdot bi = -ab$$

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}$$

$$(a \cdot i)^n = a^n \cdot i^n$$

$$i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i$$

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

Сразмере.

$$a : b = c : x \quad ; \quad x = \frac{bc}{a}$$

$$a : b = x : c \quad ; \quad x = \frac{ac}{b}$$

Ако je: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, онда je: $\frac{a + a_1}{a - a_1} = \frac{b + b_1}{b - b_1}$

" " $\frac{a}{a^1} = \frac{b}{b^1}$, " " $\frac{a \pm b}{a} = \frac{a_1 \pm b_1}{b}$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots = \frac{a + b + c + \ldots}{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots} = \frac{ma + nb + pc + \ldots}{ma_1 + nb_1 + pc_1 + \ldots}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \ldots}} = \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + \ldots}}{\sqrt[n]{a_1^n + b_1^n + c_1^n + \ldots}}$$

Ако је: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots = \frac{r}{r_1}$ онда је:

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} + \ldots + \sqrt{r.r_1} =$$
$$\sqrt{(a + b + c + \ldots + r)(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + r_1)}.$$

Логаритмовање.

$$\log.ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \,.\, \log a$$

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log\,.\,a}{m}$$

Таблица квадратних и кубних корена свију бројева од 1—100.

Број	Квадратни корен	Кубни корен	Број	Квадратни корен	Кубни корен
1	1, 0000000	1, 0000000	16	4, 0000000	2, 5198421
2	1, 4142136	1, 2599210	17	4, 1231056	2, 5712816
3	1, 7320508	1, 4422496	18	4, 2426407	2, 6207414
4	2, 0000000	1, 5874011	19	4, 3588989	2, 6684016
5	2, 2360680	1, 7099759	20	4, 4721460	2, 7144177
6	2, 4494897	1, 8171206	21	4, 5825757	2, 7589243
7	2, 6457513	1, 9129312	22	4, 6904158	2, 8020393
8	2, 8284271	2, 0000000	23	4, 7958315	2, 8438670
9	3, 0000000	2, 0800838	24	4, 8989795	2, 8844991
10	3, 1622777	2, 1544347	25	5, 0000000	2, 9240177
11	3, 3166248	2, 2239801	26	5, 0990195	2, 9624960
12	3, 4641016	2, 2894286	27	5, 1961524	3, 0000000
13	3, 6055513	2, 3513347	28	5, 2915026	3, 0365889
14	3, 7416574	2, 4101422	29	5, 3851648	3, 0723168
15	3, 8729833	2, 4662121	30	5, 4772256	3, 1072325

Број	Квадратни корен	Кубни корен	Број	Квадратни корен	Кубни корен
31	5, 5677644	3, 1413806	66	8, 1240384	4, 0412401
32	5, 6568542	3, 1748021	67	8, 1853528	4, 0615480
33	5, 7445626	3, 2075343	68	8, 2462113	4, 0816551
34	5, 8309519	3, 2396118	69	8, 3066239	4, 1015661
35	5, 9160798	3, 2710663	70	8, 3666003	4, 1212853
36	6, 0000000	3, 3019272	71	8, 4261498	4, 1408178
37	6, 0827625	3, 3322218	72	8, 4852814	4, 1601676
38	6, 1644140	3, 3619754	73	8, 5440037	4, 1793392
39	6, 2449980	3, 3912114	74	8, 6023253	4, 1983364
40	6, 3245553	3, 4199519	75	8, 6602540	4, 2171633
41	6, 4031242	3, 4482172	76	8, 7177979	4, 2358236
42	6, 4807407	3, 4760266	77	8, 7749644	4, 2543210
43	6, 5574385	3, 5033981	78	8, 8317609	4, 2726586
44	6, 6332496	3, 5303483	79	8, 8881944	4, 2908404
45	6, 7082039	3, 5568933	80	8, 9442719	4, 3088695
46	6, 7823300	3, 5830479	81	9, 0000000	4, 3267187
47	6, 8556546	3, 6088261	82	9, 0553851	4, 3444815
48	6, 9282032	3, 6342411	83	9, 1104336	4, 3620707
49	7, 0000000	3, 6593057	84	9, 1651514	4, 3795191
50	7, 0710678	3, 6840314	85	9, 2195445	4, 3968296
51	7, 1414284	3, 7084298	86	9, 2736185	4, 4140049
52	7, 2111026	3, 7325111	87	9, 3273791	4, 4310476
53	7, 2801099	3, 7562858	88	9, 3808315	4, 4479602
54	7, 3484692	3, 7797631	89	9, 4339811	4, 4647451
55	7, 4161984	3, 8029525	90	9, 4868330	4, 4814047
56	7, 4833148	3, 8258624	91	9, 5393920	4, 4979414
57	7, 5498344	3, 8485011	92	9, 5916630	4, 5143574
58	7, 6157731	3, 8708766	93	9, 6436508	4, 5306549
59	7, 6811457	3, 8929965	94	9, 6953597	4, 5468359
60	7, 7459667	3, 9148676	95	9, 7467943	4, 5629026
61	7, 8102497	3, 9364972	96	9, 7979590	4, 5788570
62	7, 8740079	3, 9578915	97	9, 8488578	4, 5947009
63	7, 9372539	3, 9790571	98	9, 8994949	4, 6104363
64	8, 0000000	4, 0000000	99	9, 9498744	4, 6260650
65	8, 0622577	4, 0207256	100	10, 0000000	4, 6415888

Таблица квадрата и кубова свију бројева од 1—100.

Број	Квадрат	Куб	Број	Квадрат	Куб	Број	Квадрат	Куб	Број	Квадрат	Куб
1	1	1	26	676	17576	51	2601	132651	76	5776	438976
2	4	8	27	729	19683	52	2704	140608	77	5929	456533
3	9	27	28	784	21952	53	2809	148877	78	6084	474552
4	16	64	29	841	24389	54	2916	157464	79	6241	493039
5	25	125	30	900	27000	55	3025	166375	80	6400	512000
6	36	216	31	961	29791	56	3136	175616	81	6561	531441
7	49	343	32	1024	32768	57	3249	185193	82	6724	551368
8	64	512	33	1089	35937	58	3364	195112	83	6889	571787
9	81	729	34	1156	39304	59	3481	205379	84	7056	592704
10	100	1000	35	1225	42875	60	3600	216000	85	7225	614125
11	121	1331	36	1296	46656	61	3721	226981	86	7396	636056
12	144	1728	37	1369	50653	62	3844	238328	87	7569	658503
13	169	2197	38	1444	54872	63	3969	250047	88	7744	681472
14	196	2744	39	1521	59319	64	4096	262144	89	7921	704969
15	225	3375	40	1600	64000	65	4225	274625	90	8100	729000
16	256	4096	41	1681	68921	66	4356	287496	91	8281	753571
17	289	4913	42	1764	74088	67	4489	300763	92	8464	778688
18	324	5832	43	1849	79507	68	4624	314432	93	8649	804357
19	361	6859	44	1936	85184	69	4761	328509	94	8836	830584
20	400	8000	45	2025	91125	70	4900	343000	95	9025	857375
21	441	9261	46	2116	97336	71	5041	357911	96	9216	884736
22	484	10648	47	2209	103823	72	5184	373248	97	9409	912673
23	529	12167	48	2304	110592	73	5329	389017	98	9604	941192
24	576	13824	49	2401	117649	74	5476	405224	99	9801	970299
25	625	15625	50	2500	125000	75	5625	421875	100	10000	1000000

Једначине.

Решавање једначина 1. степена са две непознате.

Дато: $ax + by = c$

$a_1x + b_1y = c_1$

Реш. $x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b}$, $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$

Решавање једначина 1. степена са три непознате.

Дато: $ax + by + cz = d$

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ Реш. Општи именитељ за све три непознате је: $ab_1c_2 - ac_1b_2 + ca_1b_2 - ba_1c_2 + bc_1a_2 - cb_1a_2$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

Бројитељ за x изводи се из именитеља замењујући a, a_1, a_2 са d, d_1, d_2.

Бројитељ за y изводи се из именитеља замењујући b, b_1, b_2 са d, d_1, d_2.

Бројитељ за z изводи се из именитеља замењујући c, c_1, c_2 са d, d_1, d_2.

Решавање једначина другог степена с једном непознатом.

Дато је: $x^2 + px + q = o$

Реш. $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Дато је: $ax^2 + bx + c = o$

Реш. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Однос између корена и сачинитеља.

За једначину: $x^2 + px + q = o$, однос је: $x' + x'' = - p$ и $x'x'' = q$.

За једначину: $ax^2 + bx + c = o$ однос је:

$$x' + x'' = - \frac{b}{a} \text{ и } x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Прогресије.

а) *Аритметичне прогресије.*

Општи члан: $a_n = a_1 + (n - 1) d$.

Збирни образац: $S = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} =$

$$[2a_1 + (n - 1) d] \frac{n}{2}$$

Разлика уметнутог реда: $\delta = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{d}{m + 1}$

Геометријске прогресије.

Општи члан: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Збир за прогресије које расту: $S = \frac{a_n q - a_1}{1 - q}$

Збир за прогресије које опадају:

$$S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

Збир прогресије, која бескрајно опада:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Количник уметнуте прогресије:

$$k = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{q}$$

Сложени интерес (интерес на интерес).

a капитал; r интерес од 1. дин. за 1 годину; *n* број година; *A* вредност капитала *a* после *n* година; *d* делови од године.

$$A = a\,(1 + r)^n$$

$$A = a\,(1 + r)^n\,(1 + dr).$$

Ануитет.

Капитал *a* улаже се у почетку сваке године:

$$S = a\,(1 + r)\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Капитал *a* улаже се крајем сваке године:

$$S = a.\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Кад се капиталу додаје крајем сваке године *a* динара:

$$S' = k\,(1 + r)^n + a\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Кад се *a* динара одузима сваке године:

$$S' = k\,(1 + r)^n - a\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Ако је a ануитет, који се плаћа крајем сваке године, па да се дуг A отплати за n година:

$$a = \frac{Ar(1+r^n)}{(1+r)^n - 1}$$

Комбинаторика.

Број свију пермутација из n елемената:

$$P_n = 1.2.3.4\ldots.(n-1).\,n$$

Број свију пермутација из n елемената, међу којима има α једнаких:

$$P\frac{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!} = (\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots.(n-1).\,n$$

Број свију комбинација из n елемената r. класе:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.[n-r+2]\,[n-r+1]}{1.\,2.\,3\ldots(r-1)\,r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

Биномни образац:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots$$

$$+\binom{n}{r}a^rx^{n-r} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x + \binom{n}{n}a^n$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{r}x^r$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n;$$ кад је изложитељ разломак мора бити $x < 1$.

Биномни сачинитељи за бином на

1.	степен јесу:	1, 1
2.	» »	1, 2, 1
3.	» »	1, 3, 3, 1
4.	» »	1, 4, 6, 4, 1
5.	» »	1, 5, 10, 10, 5, 1
6.	» »	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
7.	» »	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
8.	» »	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
9.	» »	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
10.	» »	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

ГЕОМЕТРИЈА.

а) **ПЛАНИМЕТРИЈА.**

Збир S унутрашњих углова полигона од n страна

$$S = (n - 2)\,2R$$

Збир S спољашњих углова добивених продужењем његових страна у истом смислу,

$$S = 4.\,R.$$

Збир S спољашњих углова у полигону

$$S = (n + 2)\,2R.$$

Унутрашњи угао A правилног полигона од n страна

$$A = \frac{(n - 2)\,2R}{n}.$$

Средишни угао у правилном полигону $C = \frac{4R}{n}$

Збир *S* углова у троуглу: $S = 2R$

Број дијагонала у полигону из једног темена:

$$D = n - 3$$

Број свију дијагонала $D_1 = \frac{n}{2}(n - 3)$

Број саставака *N* за одређеност ма каквог полигона $N = 2n - 3$

За сличност полигона постоје $2n - 4$ једначине.

За обиме сличних полигона:

$$\frac{O}{O_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

За површине сличних полигона:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B_1C_1}^2}$$

Однос између страна *a*, *b*, *c* једног троугла и пројекције *p* стране *b* на *c*:

Ако је $\sphericalangle$ A прав . . . . $a^2 = b^2 + c^2$

" " " " оштар . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$

" " " " туп . . . . $a^2 = b^2 + c^2 + 2pc$

Ако је *m* средња линија стране *a*

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

Ако су у правоуглом троуглу *p* и *q* пројекције страна *b* и *c* на хипотенузу, *h* висина хипотенузина, *m* средња линија стране *a*, *r* и *ϱ* полупречници описаног и уписаног круга, онда је:

$$2r = 2m = a$$
$$b + c = r + \varrho$$
$$h^2 = p.q$$
$$b^2 = ap$$
$$c^2 = aq$$
$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{p}{q}$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Односи код круга.

Ако је α периф. угао а β средишни на истом луку, онда је $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

За тетиве AB и CD, које се секу у M:

$$AM.\,BM = CM.\,DM.$$

Ако је α угао између тетиве и дирке а β угао периф. на тетивином луку, тада је $\alpha = \beta$

За дирку TP и сечицу AT: $\overline{TP}^2 = AT.\,BT.$

Ако су *r* и *ϱ* полупречници кругова, *c* централа онда:

Кругови имају *једну* заједничку тачку, кад је,

$$c = r \pm \varrho$$

Кругови имају *две* заједничке тачке кад је

$$c > r - \varrho \text{ или } c < r + \varrho$$

Кругови немају ниједне заједничке тачке кад је

$$c < r - \varrho \text{ или } c > r + \varrho$$

Растојање S спољашње тачке сличности:

$$S = \frac{r.c}{r - \varrho}$$

Растојање Т унутрашње тачке сличности:

$$T = \frac{r.c}{r + \varrho}$$

Правилни полигони.

Ако је r полупречник описаног круга, ϱ полупречник уписаног круга а s_3, s_4, s_5, . . . стране правилних полигона од 3, 4, 5.. страна, онда је за:

Равностран троугао

$$s_3 = r\sqrt{3} = 1,7320508.r.$$

Квадрат

$$s_4 = r\sqrt{2} = 1,4142136.r$$

Петоугао

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 1,1755705.r$$

Шестоугао

$$s_6 = r$$

Седмоугао

$$s_7 = 0,8673182.r$$

Осмоугао

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0,7653668.r$$

Деветоугао

$$s_9 = 0,6840402.r$$

Десетоугао

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = 0,6180214.r.$$

Равностран троугао

$$\varrho = \frac{r}{2}$$

Квадрат

$$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

Петоугао

$$\varrho = \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

Шестоугао

$$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Осмоугао

$$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Десетоугао

$$\varrho = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Кад је S страна уписаног правилног полигона од $2n$ страна, а s страна таквог полигона од n страна, онда је:

$$S = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

$$s = \frac{S}{r}\sqrt{4r^2 - S^2}$$

Ако је T страна правилног описаног полигона од n страна, а s страна уписаног полигона од толико исто страна, онда је:

$$T = \frac{2rs}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$$

$$s = \frac{2rT}{\sqrt{4r^2 + T^2}}$$

Бројне вредности израза на које се често наилази.

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1,847759;$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 2,613126$$

$$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 3,804226$$

$$\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 8,506508$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0,765367$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{2}} = 1,082392$$

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2,351141$$

$$\sqrt{50-10\sqrt{5}} = 5,161329$$

Дужина обима кружног.

Ако је O обим, r полупречник, а d пречник

$$O = 2r\pi = d.\pi$$

Приближна вредност за

$$\pi = 3,141592653589793 \ldots.$$

$\log \pi = 0,4971499$ $\qquad \frac{1}{\pi} = 0,3183099$

$\log \frac{1}{\pi} = \bar{1},5028501$ $\qquad \sqrt{\pi} = 1,7724539$

$\log \sqrt{\pi} = 0,2485749$ $\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,5641896$

$\log \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \overline{1},7514251$ $\pi^2 = 9,8696044$

$\log \pi^2 = 0,9942997$

Дужина лука од α^0 $l = \frac{r \pi \alpha}{180}$

За обиме два круга вреди $\frac{0}{0_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{2r}{2r_1}$

Површине слика.

Паралелограм (*b* основа, *h* висина)

$$P = b.h$$

Квадрат (страна *a*)

$$P = a^2$$

Троугао (*b* основа, *h* висина)

$$P = \frac{1}{2} bh$$

Троугао (*2s* обим, ϱ полупречник уписаног круга)

$$P = \varrho . s$$

Троугао (*a*, *b*, *c* стране, *r* полупр. оп. круга)

$$P = \frac{abc}{4r}$$

Троугао (*a*, *b*, *c* стране, *r* полупреч. оп. круга)

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Троугао (m, m_1, m_2 дужине средњих линија)

$$P = \frac{1}{3} \sqrt{(m + m_1 + m_2)(m + m_1 - m_2)(m - m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - m)}$$

Троугао (ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 полупречници кругова који додирују троугао

$$P = \sqrt{\varrho\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3}.$$

Равностран троугао

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

Равностран троугао (*h* висина)

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Трапез (*a* и *b* основице, *h* висина)

$$P = \frac{a + b}{2} . h$$

Трапез (обим $2s = a - b + c + d$)

$$P = \frac{a + b}{a - b} \sqrt{s(s - c)(s - d)(s + b - a)}$$

Четвороугао уписан

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Површина правилних полигона из познатог полупречника r описаног круга.

Равностран троугао . . $P = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$

Квадрат . . . . $P = 2r^2$

Петоугао . . . . . . $P = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Шестоугао . . . . . . $P = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$

Осмоугао . . . . . . $P = 2r^2 \sqrt{2}$

Десетоугао . . . . . . $P = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Дванаестоугао . . . $P = 3r^2$

Ако је ϱ полупречник уписаног круга.

Равностран троугао . . $P = 3\varrho^2 \sqrt{3}$

Квадрат . . . . . . $P = 4\varrho^2$

Петоугао . . . . . . $P = 5\varrho^2 \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Шестоугао . . . . . . $P = 2\varrho^2 \sqrt{3}$

Осмоугао . . . . . . $P = 3\varrho^2 (\sqrt{2}-1)$

Десетоугао . . . . . $P = 2\varrho^2 \sqrt{5} \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Дванаестоугао . . . . $P = 12\varrho^2 (2-\sqrt{5})$

Површина ма каквог правилног полигона.

a страна, ϱ полупречник уписаног круга, *n* број страна . . . $P = \frac{1}{2} na . \varrho$

l дужина стране прав. полиг. од два пута мање страна, *r* полупр. оп. кр. $P = \frac{1}{4} lnr$.

Површина круга, сектора, сегмента.

r полупречник, d пречник, α средишни угао, l дужина лука, $p_\triangle$ површина троугла, ком је основа лукова тетива.

Круг . . . $P = r^2\pi = \frac{1}{4} d^2\pi$

Сектор . $P = r^2\pi \frac{\alpha}{360^0} = \frac{1}{4} d^2\pi \frac{\alpha}{360^0} = \frac{1}{2} lr$

Сегменат $P = S_c \mp p_\triangle$

Прстенова површина $P = (R^2 - r^2)\pi$

b) СТЕРЕОМЕТРИЈА.

Полиедри.

Површина правилног тела (p површина једне његове стране, n број страна), $P = np$

Површина управне призме ($2s$ обим основин, h дужина ивице = висини) $P = 2s \cdot h$

Запремина призме (B површина основе, h вис.)

$$V = B \cdot h$$

Пирамида.

Огртачка површина (h висина стране, $2s$ обим основин) $p = s \cdot h$

Целокупна површина (S збир површина троуг. страна, B основа) $P = S + B$

Запремина пирамиде $V = \frac{1}{3} B \cdot h$.

Зарубљена пирамида.

Површина (*S* огртачка површина, *B* и *b* основе)

$$P = S + B + b$$

Побочна површина правилне заруб. пирамиде (*2s* и *2s₁* обими основа, *h* висина трапеза)

$$p = (s + s_1)\, h$$

Запремина $V = \frac{1}{3} h \left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$

Правилни тетраедар.

Површина (а ивица) $P = a^2 \sqrt{3}$

Запремина $V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$

Односи између хомологих ивица или висина сличних пирамида, њихових основа или запремина

$$\frac{V}{V_1} = \frac{a^3}{a_1^{\,3}} = \frac{h^3}{h_1^{\,3}}$$

$$\frac{B}{B_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{h^2}{h_1^{\,2}}$$

Округла тела.

Облица (*r* полупречник, *h* висина)

Огртачка површина . . . . $p = 2r\pi h$

Целокупна површина . . . $P = 2r\pi\,(h + r)$

Запремина . . . . $V = r^2\pi h$

Управни конус (*s* кон. страна).

Огртачка површина . . . $p = r \,.\, \pi \,.\, s$

Целокупна површина . . $P = r\pi\,(s + r)$

Запремина . . . . $V = \frac{1}{3} r^2 . \pi \,.\, h$

Однос између стране, висине и полупречника . . $s^2 = r^2 + h^2$

Управни зарубљени конус с паралелним основама (*R* и *r* полупречници, *h* висина, *s* страна).

Огртачка површина . $p = (R + r)\,\pi\,.\,s$

Целокупна „ . $P = [R\,(R+s) + r(r+s)]\,\pi$

Запремина . . . . $V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr).$

Обртнице.

Обртница, добивена обртањем праве око сталне осовине у истој равни (*p* пројекција праве на осовини, *r* дужина управне из средине праве до пресека с осовином):

$$O = 2r\pi \,.\, p.$$

Овај образац представља и *обртницу добивену обртањем неког дела правилне полигоналне линије око осовине, кроз средиште полигоново а да не пролази кроз обим полигонов;* овде је *r* полупречник уписаног круга, *p* пројекција полиг. линије

Запремина тако добивена је (S обртница полигонске линије):

$$V = \frac{Sr}{3} = \frac{2r^2\pi p}{3}$$

Запремина добивена обртањем троугла око осовине у његовој равни; осовина пролази кроз једно теме и она је ван површине $\triangle$ (S обртница стране према темену кроз које осовина пролази, *h* висина те стране):

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

Лопта: $\begin{cases} \text{површина} \cdot \quad \cdot \quad \cdot P = 4r^2\pi \\ \text{запремина} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot V = \dfrac{4r^3\pi}{3} \end{cases}$

Лоптин појас—зона: · · · $P = 2r\pi\, h$

Запремина произведена обртањем кружн. сегмента око пречника ван Sg (*a* тетива сегмен., *p* његова пројекц. на осов.):

$$V = \frac{1}{6} \pi a^2 p.$$

Запремина произведена обртањем кружн. сектора око пречника ван S_c (Z зона коју производи лук S_c, r полупр., *h* висина зоне):

$$V_{sc} = \frac{Zr}{3} = \frac{2\pi r^2 h}{3}.$$

Запремина лоптин. појаса — сегменат с паралелним основама (*h* висина појаса, *b* и b_1 управне из крајње тачке лука на пречник):

$$V_{sg} = \frac{h\pi}{2}(b^2 + b_1^2) + \frac{h^3\pi}{6}.$$

Кад је $b_1 = 0$ имамо сегменат лоптин с једном основом:

$$V_{sg} = \frac{h\pi}{6}(3b^2 + h^2).$$

Запремина гомиле песка, т. ј. запремина ограничена са два паралелна правоугаоника, чије су стране a, b, и a_1, b_1, њихово растојање h — и са 4 трапеза:

$$V = \frac{h}{6}[b(a_1 + 2a) + b_1(a + 2a_1)]$$

c) ТРИГОНОМЕТРИЈА.

Знаци геометриских функција.

ФУНКЦИЈА	I квадрант	II квадрант	III квадрант	IV квадрант
sinus , cosecans	+	+	—	—
tangens , cotangens	+	—	+	—
cosinus , secans	+	—	—	+

Односи између тригонометриских функција извесних лукова.

$\sin(90+\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(90+\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}(90-\alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(90+\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(90-\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$

$\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180+\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(180+\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}(180-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(180+\alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(180-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$

$\sin(270+\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(270-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270+\alpha) = +\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(270-\alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(270+\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}(270-\alpha) = +\mathrm{cotg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(270+\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(270-\alpha) = +\mathrm{tg}\alpha$

$\sin(360+\alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\sin(360-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(360+\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\cos(360-\alpha) = +\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(360+\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}(360-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(360+\alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$ $\quad$ $\mathrm{cotg}(360-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$

Луци који одговарају датој тригоном. функцији.

Из: $\sin x = \sin\alpha$, изводи се $x = \begin{cases} 2n\pi + \alpha \\ (2n+1)\pi - \alpha \end{cases}$

$\cos x = \cos\alpha$, $\quad x = 2n\pi \pm \alpha$

$\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\alpha$, $\quad x = n\pi + \alpha$

$\mathrm{cotg}x = \mathrm{cotg}\alpha$, $\quad x = n\pi + \alpha$

Основни обрасци.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{cosec}^2\alpha - \mathrm{cotg}^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\mathrm{cosec}\alpha}$$

Обрасци који се изводе из претходних.

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\alpha = 1 \quad , \quad \sin\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\alpha = 1$$

$$\cos\alpha \,.\, \sec\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\pm\,\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\pm\,\mathrm{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Тригонометриске функције збира или разлике два лука.

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$
$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg}a\operatorname{cotg}b - 1}{\operatorname{cotg}a + \operatorname{cotg}b}$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$
$$\operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg}a\operatorname{cotg}b + 1}{\operatorname{cotg}b - \operatorname{cotg}a}$$
$$\sin(a+b+c) = \sin a\cos b\cos c + \sin b\cos a\cos c + \sin c\cos a\cos b - \sin a\sin b\sin c$$
$$\cos(a+b+c) = \cos a\cos b\cos c - \sin b\sin c\cos a - \sin a\sin c\cos b - \sin a\sin b\sin c$$
$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b - \operatorname{tg}b\operatorname{tg}c - \operatorname{tg}c\operatorname{tg}a}$$

Вредности функција неколиких особених лукова.

лукови	sinus	cosinus	tangens	cotangens
15°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{70+26\sqrt{5}}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Збирови и разлике тригоном. функција удешени за логаритамско рачунање.

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b)$$

$$\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b)$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

Ако је $a+b+c=180^0$, онда је:

$$\cot g\frac{a}{2}+\cot g\frac{b}{2}+\cot g\frac{c}{2}=\cot g\frac{a}{2}\,.\,\cot g\frac{b}{2}\,.\,\cot g\frac{c}{2}$$

$$\sin a+\sin b=2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\sin^2 a-\sin^2 b=\sin(a-b)\sin c$$

$$\sin a+\sin b-\sin c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos a-\cos b=2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\cos^2 a-\cos^2 b=\sin(b-a)\sin c$$

$$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos a+\cos b-\cos c=-1+4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$tga+tgb=\frac{\sin c}{\cos a\cos b}$$

$$\cot ga+\cot gb=\frac{\sin c}{\sin a\sin b}$$

$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2(1+\cos a\cos b\cos c)$$

$$(\sin a-\sin b)^2+(\cos a+\cos b)^2=4\sin^2\frac{c}{2}$$

$$(\sin a+\sin b)^2-(\cos b-\cos a)^2=4\cos^2\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=1$$

$$\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b+\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} c+\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c=1$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$=1+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

Ако је $a+b+c=90^0$, *онда је:*

$$\operatorname{tg}a \operatorname{tg}b+\operatorname{tg}a \operatorname{tg}c+\operatorname{tg}b \operatorname{tg}c=1$$

$$\sin a+\cos b=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin a-\cos b=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{1}-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$1+\sin a=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

$$1 - \sin a = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}$$

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

Други обрасци удешени за логаритамско рачунање.

ОБРАСЦИ	ПОГОДБЕ	ПОМОЋНИ УГЛОВИ	УДЕШЕНИ ОБРАСЦИ ЗА ЛОГАРИТ.
$a + b$	*a* и *b* ма какви	1. *начин*: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$	$a + b = \frac{a \sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ \cos\varphi}$
	$a > 0, \; b > 0$	2. *начин*: $\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{b}{a}$	$a + b = \frac{a}{\cos^2\varphi}$
	$a > b > 0$	3. *начин*: $\cos\varphi = \frac{b}{a}$	$a + b = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$
$a - b$	$a > 0, \; b > 0$	1. *начин*: $\sin^2\varphi = \frac{b}{a}$	$a - b = a\cos^2\varphi$
	$a > b > 0$	2. *начин*: $\cos\varphi = \frac{b}{a}$	$a - b = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
$\sqrt{a^2 + b^2}$	$a > 0, \; b > 0$	$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$	$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos\varphi}$
$\sqrt{a^2 - b^2}$	$a > b > 0$	$\sin\varphi = \frac{b}{a}$	$\sqrt{a^2 - b^2} = a \cos\varphi$

Множење и дељење лукова.

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \quad , \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \quad , \quad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\mathrm{tg}2a = \frac{2\mathrm{tg}a}{1 - \mathrm{tg}^2 a} \quad , \quad \mathrm{cotg}2a = \frac{\mathrm{cotg}^2 a - 1}{2\mathrm{cotg}\, a}$$

$$\mathrm{tg}3a = \frac{3\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}^3 a}{1 - 3\mathrm{tg}^2 a} \quad , \quad \mathrm{cotg}3a = \frac{\mathrm{cotg}^3 a - 3\mathrm{cotg}\, a}{3\mathrm{cotg}^2 a - 1}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} , \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} , \quad \mathrm{cotg}\frac{a}{b} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{2} ,$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}}{\mathrm{tg}a} ;$$

$$\mathrm{cotg}\frac{a}{2} = \mathrm{cotg}a \pm \sqrt{\mathrm{cotg}^2 a + 1}$$

Simpson-ови обрасци.

$$\sin(a + 10'') = \sin a + [\sin a - \sin(a - 10'')] - k\sin a$$

$$\cos(a + 10'') = \cos a + [\cos a - \cos(a - 10'')] - k\cos a$$

Замењујући у њима $a = 10'', 20'', 30'', \ldots\ldots$ до $161990''$ одређују се sinus — i и cosinus — i лукова до 45^0. ($k = 0{,}000000023504$)

Збир синуса и косинуса лукова кад су они у аритметичкој прогресији.

$$\sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r) + \ldots + \sin[a+(n-1)r]$$

$$= \frac{\sin\frac{nr}{2}\sin\left[a + \frac{(n-1)r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}$$

$$\cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \ldots + \cos[a+(n-1)r]$$

$$= \frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left[a + \frac{(n-1)r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}$$

Однос између саставака правоуглог троугла.

($A = 90^0$; h_a, h_b, h_c, висине; m средња линија; l половача унутрашњег угла, l' половача спољашњег угла).

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\cos B}\ , \quad h_a = \frac{a\sin 2B}{2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2 + 4ac\cos B}\ ;$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 + 4ab\cos C}\ .$$

$$l_b = \frac{c}{\cos\frac{B}{2}} \quad , \quad l_c = \frac{b}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$l'_b = \frac{c}{\sin\frac{B}{2}} \quad , \quad l'_c = \frac{b}{\sin\frac{C}{2}}$$

Однос између саставака ма каквог троугла.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$a = s\,\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ , \ \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ , \quad \sin A = \frac{a}{2r}$$

$$h_a = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A} \quad , \quad l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

$$l'_a = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b-c} \quad , \quad r = \frac{a}{2\sin A}$$

$$\varrho = (s - a)\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,, \quad \varrho_a = s\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$P = ar\sin B\sin C = r\,.\,h_a\sin A = \frac{1}{2}l_a\,(b + c)\sin\frac{A}{2}$$

$$P = r\varrho(\sin A + \sin B + \sin C) = \varrho\varrho_a\mathrm{cotg}\frac{A}{2} = \varrho_b\varrho_c\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$P = \varrho^2\mathrm{cotg}\frac{A}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$$

$$P = s^2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$P = \sqrt{s\,.\,abc\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\,.\,\mathrm{tg}B\,.\,\mathrm{tg}C$$

$$\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2 + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$$

Решавање правоуглих троуглова.

СЛУЧАЈ	ДАТО	ТРАЖИ СЕ	ОБРАСЦИ
1	a B	C, b, c, P	$C = 90^0 - B$, $b = a \sin B$, $c = a \cos B$ $P = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B$
2	a, b	B, C, c, P.	$\sin B = \frac{b}{a}$, $C = 90^0 - B$, $c = a \sin C = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, $P = \frac{1}{2} ab \sin C$
3	b, B.	C, a, c	$C = 90^0 - B$, $a = \frac{b}{\sin B}$, $c = b \operatorname{cotg} B$
4	b, c	B, C, a.	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$, $a = \frac{b}{\sin B}$

Решавање ма каквих троуглова.

СЛУЧАЈ	ДАТО	ТРАЖИ СЕ	ОБРАСЦИ
1	a, B, C.	A, b, c, P.	$b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}$ $A = 180^0 - (B+C)$, $P = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}$
2	a, b, C.	A, B, c, P.	$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ $C = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$, $P = \frac{ab \sin C}{2}$
3 (сумњив)	a, b, A.	C, B, c, P.	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, $C = 180^0 - (A+B)$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, $P = \frac{ab \sin C}{2}$

СЛУЧАЈ	ДАТО	ТРАЖИ СЕ	ОБРАСЦИ
3 (сумњив)	a, b, A	C, B, c, P.	1. $A < 90^0 \begin{cases} a \geqq b \quad \ldots \ldots \quad 1 \text{ решење } B \text{ оштар} \\ a < b \begin{cases} a < b\sin A, \quad 0 \quad " \\ a = b\sin A, \quad 1 \quad " \quad B \text{ прав} \\ a > b\sin A, \; 2 \text{ реш. } B' \text{ ошт. } B'' \text{ туп} \end{cases} \end{cases}$ 2. $A \geqq 90^0 \begin{cases} a \leqq b \quad \ldots \ldots \quad 0 \text{ решење} \\ a > b \quad \ldots \ldots \quad 1 \quad " \quad B \text{ оштар.} \end{cases}$
4	a, b, c,	A, B, C, P.	$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}, \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

d) АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА.

Растојање двеју тачака P_1 и P_2, ако су њихове координате x_1 y_1, x_2 y_2:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координате тачке, која је на средини растојања двеју тачака

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Површина троуглова, ако су координате темена: $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$

$$P = \frac{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}{2}$$

$$P = \frac{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}{2}$$

Површина четвороугла, чије су координате темена: $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$, $(x_4\, y_4)$

$$P = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_4 - y_2) + (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)\right]$$

Једначина праве

$$y = Ax + b \qquad \text{или}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Једначина праве, која пролази кроз координатни почетак

$$y = Ax$$

Једначина праве која је || са апсц. осовином

$$y = b$$

Једначина праве која је || са ординат. осовином

$$x = a$$

Једначина праве која пролази кроз две дате тачке: $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Координате пресека двеју правих

$$x_1 = \frac{b_1 - b}{A - A_1}\ ,\quad y_1 = \frac{Ab_1 - A_1 b}{A - A_1}$$

Погодба да три праве имају заједнички пресек:

$$A(b_1 - b_2) + A_1(b_2 - b) + A_2(b - b_1) = 0$$

Угао што га склапају две праве:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 - A}{1 + AA_1}$$

Погодба, да су две праве управне једна на другој:

$$1 + AA_1 = 0 \quad \text{или} \quad A = -\frac{1}{A_1}$$

Једначина праве, која је управна на датој правој

$$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1)$$

Координате пресека двеју управних

$$x_2 = \frac{x_1 + Ay_1 - Ab}{1 + A^2}\ , \quad y_2 = \frac{Ax_1 + A^2y_1 + b}{1 + A^2}$$

Дужина управне, која је повучена из тачке $(x_1\ y_1)$ на управу $y = Ax + b$

$$r = \pm\frac{y_1 - Ax_1 - b}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Дужина управне, која је повучена из координатног почетка

$$p = \pm\frac{b}{\sqrt{1 + A^2}} = \pm b\cos\alpha$$

Растојање тачке од координатног почетка за косоугли систем

$$r = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1\,y_1 \cos YOX}$$

Растојање двеју тачака за косоугли систем

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos XOY}$$

Једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1\ y_1)$

$$y - y_1 = A(x - x_1)$$

Погодба да три тачке леже у једној правој

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \quad \text{или:}$$

$$(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_1 - x_2) = 0$$

Координате тачке која дели праву у размери m : n

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \quad , \quad x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

Тангента оштрог угла, што га чини права с апсц. осов. за косоугли систем:

$$tg\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$$

Тангента оштрог угла, што га чине две праве за косоугли систем:

$$tg\varphi = \frac{(A - A_1)\sin YOX}{1 + (A + A_1)\cos YOX + AA_1}$$

Погодба, да две праве стоје управно за косоугли систем

$$1 + (A + A_1)\cos YOX + AA_1 = 0.$$

Круг.

Једначина круга

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Темена једначина кружна

$$y^2 = (2r - x)x \quad \text{или:} \quad r^2 = (x - r)^2 + y^2$$

Средишна једначина круга

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Координате пресека круга са правом

$$x_1 = \frac{-Ab \pm \sqrt{r^2(1 + A^2) - b^2}}{1 + A^2}$$

$$y_1 = \frac{b \pm \sqrt{r^2(1 + A^2) - b^2}}{1 + A^2}$$

Погодба, да је права дирка на круг са средишном једначином:

$$r^2(1 + A^2) = b^2$$

Погодба, да је права дирка на круг дат општом једначином:

$$r^2(1 + A^2) = (Aa + b - b_1)^2$$

где је b_1 пресек праве с ордин. осовином.

Једначина дирке на круг у тачки $(x_1\ y_1)$

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad \text{или:} \quad x_1x + y_1y = r^2$$

Једначина нормалина

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \quad \text{или:} \quad y = \frac{y_1}{x_1} . x$$

дужина диркина кроз тачку (x_1 y_1)

$$Tg = \frac{ry_1}{x_1}$$

Дужина нормале

$$Norm = r$$

Дужина суптангенте

$$Subtg = \frac{y_1^2}{x_1}$$

Дужина субнормале

$$Subnorm = x_1$$

Преображај паралелних координата.

Кординате датога система изражене координатама другог паралелног система с другим почетком

$$y = b + y_1 \quad , \quad x = a + x_1$$

Координате датог правоуглог система изражене коорд. другог правоуглог система с истим почетком, али први систем обрнут за дати угао

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$$

Координате правоуглог система изражене координатама косоуглог система

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\alpha_1$$
$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\alpha_1$$

Координате правоуглог система изражене координатама другог правоуглог система с другим почетком

$$y = b + x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha$$
$$x = a + x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha.$$

Парабола.

Једначина параболе

$$y^2 = 2px$$

Координате пресека параболе са правом, која је паралелна с параболином осовином

$$x_1 = \frac{b^2}{2p} \quad , \quad y_1 = b.$$

Координате пресека параболе са правом кад ова има произвољан положај

$$x_1 = \frac{p - Ab \pm \sqrt{p(p - 2Ab)}}{A^2}$$

$$y_1 = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2Ab)}}{A^2}$$

Погодба, да је права дирка на параболу

$$\frac{p}{2} = A \,.\, b$$

Једначина диркина у тачки $(x_1\, y_1)$

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \quad \text{или:} \quad yy_1 = p(x + x_1)$$

Једначина нормалина у тачки $(x_1\, y_1)$

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

Дужина тангенте

$$Tg = \sqrt{2x_1(p + 2x_1)}$$

Дужина суптангенте

$$Subtg = 2x_1$$

Дужина нормале

$$Norm = \sqrt{p(p + 2x_1)}$$

Дужина субнормале

$$Subnorm = p$$

Место средина за више паралелних тетива параболиних

$$\eta = \frac{p}{A}$$

Једначина параболина, ако су коорд. осовине — параболина осовина и управница.

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

Ако су осовине параболина осовина и управна повучена на осовину кроз жижу

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

Ако се ма који пречник узме за апсцисну осовину а за ординатну осовину дирка кроз пречниково теме

$$y_1^2 = 2p_1\, x_1$$

Површина параболиног дела, који је ограничен њеним луком и координатама крајње тачке лукове

$$P = \frac{2}{3}xy$$

Елипса.

Једначина елипсина

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{или:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Погодба, да дата права: $y = Mx + n$ сече елипсу

$$b^2 + a^2\, M^2 > n^2$$

Погодба, да права: $y = Mx + n$ додирује елипсу

$$b^2 + a^2 M^2 = n^2$$

Једначина дирке на елипсу у тачки $(x_1\ y_1)$:

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2 \quad \text{или} \quad y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

Једначина нормалина у тачки $(x_1\ y_1)$

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

Дужина тангенте

$$Tg = \frac{y_1}{bx_1}\sqrt{a^4 - e^2x_1^2}$$

Дужина суптангенте

$$Subtg = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

Дужина нормале

$$Norm = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x_1^2}$$

Дужина субнормале

$$Subnorm = \frac{b^2x_1}{a^2}$$

Место средина за систем паралелних тетива елипсиних

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2 M}\xi$$

Темена једначина елипсина

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

Једначина елипсина, кад су коорд. осовине два спрегнута пречника

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1 \quad \text{или:} \quad b_1^2\xi^2 + a_1^2\eta^2 = a_1^2 b_1^2$$

Површина елипсина

$$P = ab\pi.$$

Хипербола.

Једначина хиперболина

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{или:} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Погодбе да права: $y = Mx$ сече хиперболу

$$b^2 > a^2 M^2$$

Да додирује хиперболу у ∞

$$b^2 = a^2 M^2$$

Једначина асимтота̑ (две праве)

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Погодба да права $y = Mx + n$ додирује хиперб.

$$a^2M^2 - b^2 = n^2$$

Једначина дирке у тачки $(x_1\, y_1)$

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2 \quad \text{или:}$$

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

Једначина нормале у тачки $(x_1\, y_1)$

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

Дужина тангенте

$$Tg = \frac{y_1}{bx_1}\sqrt{e^2x_1{}^2 - a^4}$$

Дужна суптангенте

$$Subtg = \frac{x_1{}^2 - a^2}{x_1}$$

Дужина нормале

$$Norm = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x_1{}^2 - a^4}$$

Дужна субнормале

$$\text{Subnorm} = \frac{b^2 x_1}{a^2}$$

Место средина за систем паралелних тетива хиперболиних

$$MM_1 = \frac{b^2}{a^2}$$

Темена једначина хиперболина ако је $p = \frac{b^2}{a}$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

Једначина хиперболина, кад су коорд. осовине два спрегнута пречника

$$\frac{\xi^2}{a_1^{\,2}} - \frac{\eta^2}{b_1^{\,2}} = 1 \quad \text{или:} \quad b_1^{\,2}\xi^2 - a_1^{\,2}\eta^2 = a_1^{\,2} b_1^{\,2}$$

Асимтотна једначина хиперболина

$$\xi\eta = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{e^2}{4}$$

Полне једначине.

Правоугле координате изражене полним координатама, ако је r потег а φ аномалија

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Полна једначина параболина

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

Полна једначина елипсина

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

Полна једначина једне хипер. гране

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

Односи између нових и старих мера.

1. за дужину

1 миља = 4 Км. = 4000 м.
1 ступањ = 111111 м.
1 поштанска миља = 4444 м.
1 морска миља = 5555 м.
1 метар = 0,527 бечких хвати.
1 „ = 1,286 рифа
1 „ = 1,502 аршина.
1 хват = 1,896 метра.
1 риф = 0,777 „
1 аршин = 0,666 „
1 прст приближно = 2 см.
1 шака „ = 1 дсм.
10 „ „ = 1 м.
1 корак „ = 0,80 м.
5 корака „ = 4 м.

12 корака	„	=	10 м.
133 „	„	=	100 м.
1333 „	„	=	1 км.
100 „	пређе се за		1 минут.
6000 „	„ „ „		1 час.

2. ЗА ПОВРШИНУ

1 □ хват = 3,597 m^2.
1 m^2 = 0,278 □ хвата.

3. ПОЉСКЕ МЕРЕ

1 дан орања (1600 □ хвата) = 0,5754642 Еа
1 „ „ „ = 57,54642 а
1 „ „ „ = 5754,642 m^2
1 Ектар = 1,7377 дана орања.

4. ЗА ЗАПРЕМИНУ

1 кубни хват = 6,821 m^3
1 m^3 = 0,1466 кубних хвати

5. ЗА ТЕЧНОСТИ

1 оканица = 1,28 л.
1 аков бечки = 0,56589 Ел. = 56,59 л.
1 литар = 0,791 оканице (312,5 драма).
1 Ектолитир = 1,767 акова бечких.

6. ЗА ТЕЖИНУ

1 товар метарски = 100 кг.
1 тона = 1000 кг.

1 ока	=	1,28 кг.
1 драм	=	3,2 гр.
1 килограм	=	0,781 оке = 312,5 др.
1 грам	=	0,3125 драма.
1 стари товар	=	128 кг.
1 нови „	=	78,125 оке.

ГУСТИНЕ НЕКИХ ТЕЛА.

Платина	ковано	21 до 22	Олово	11,352
	ливена	19,362	Калај	7,291
Злато	ковано	19,362	Дијамант	3,531 до 3,501
	ливено	19,258		
Сребро		10,474		
Бакар		8,878	Сумпор	2,033
Никл		8,279	Жива	13,596
Челик		7,816	Вода на 4^0	1,000
Гвожђе		7,788	Морска вода	1,026
Цинк		6,861	Алкохол	0,815
			Зејтин	0,815

НЕКОЛИКИ ПОДАЦИ ИЗ КОСМОГРАФИЈЕ.

а) **Сунце.**

Запремина	1283720 земљине
Маса	324439 „
Густина	0,253
Обртање	$25^{дн}\ 4^{ч}\ 29^{м}$
Паралакса	8,80

Средњи привидан пречник . . . . 32′ 3″,64
Привидна нагнутост еклиптике 31. децембра 1891. год. . . . . . 23° 27′ 16,″ 77
Ексцентричност еклиптике . . . $\frac{1}{60}$

b) Планете.

ПЛАНЕТЕ	ТРАЈАЊЕ обртања сидерског у данима (приближ.)	РАСТОЈАЊЕ од сунца у средњу руку	ЗАПРЕМИНА	МАСА	ТРАЈАЊЕ ротације час.	мин.	сек.
Меркур	87, 969258	0, 3870987	0, 052	0, 061	24	0	50
Венус	224, 700787	0, 7233322	0, 975	0, 787	23	21	22
Земља	365, 256374	1, 0000000	1	1	23	56	4
Марс	686, 979646	1, 5236913	0, 147	0, 105	24	37	23
Јупитер	4332, 588171	5, 202800	1279, 412	308, 980	9	55	37
Сатурно	10759, 236360	9, 538861	718, 883	91, 919	10	14	24
Уран	30688, 39036	19, 18329	69, 237	13, 518			
Нептун	60181, 11316	30, 05508	54, 955	16, 469			

c) Земља.

Растојање од сунца . . . . 23280 полупречнка земљиних.	
Половина велике осовине или полупречник екваторов	6 378393 m
» мале » » » полов . .	6 356549 m
Сплоштеност приближна	$\frac{1}{292}$
Полупречник земљин кад се она узме као лопта	6 371104 m
Дужина једног ступња меридијановог	111196, 8

d) Средње трајање годишњих времена.

Пролеће . . .	$92^{дн}\,21^{ч}$	Јесен . . .	$89^{дн}\,19^{ч}$
Лето . . .	$93^{дн}\,14^{ч}$	Зима	$89^{дн}\,0^{ч}$

e) Пратиоци (сателити) планета.

БРОЈ ПОЗНАТИХ ПРАТИЛАЦА:

Земља : 1	Марс : 2	Јупитер : 4
Сатурно : 8	Уран : 4	Нептун : 1

f) Месец.

Растојање од земље 60, 273 полупреч. земљиних.

Запремина . . . . . $\frac{1}{50}$ земљине запремине.

Маса . . . . $\frac{1}{77}$ „ масе

Сидерско кретање	$27^{дн}\,7^{ч}\,43^{м}\,11^{с}, 5.$
Синодско „	$29^{дн}\,12^{ч}\,44^{м}\,2^{с}, 9.$
Паралакса	57'.
Ексцентричност орбите (пута око сунца)	$\frac{1}{18}$
Средњи привидан пречник	31' 8'', 18.

ПОПРАВКЕ

Стр. 14. ред 5. *оздо* : именитељ треба да је : $q-1$

» 16. » 3. *озго* : бројитељ » » » $Ar(1+r)^n$

» 33. » 1. » место $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ треба: $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

» 33. » 2. *оздо* : последњи чинитељ није sin c већ *cos c*

» 35. » 1. » после оба знака = треба знак —

» 35. » 4. » » знака = треба знак —

» 36. » 6. *озго* : последњи чинитељ није $\sin\frac{c}{2}$ већ $\cos\frac{c}{2}$

» 40. » 7. » место $\mathrm{cotg}\,\frac{a}{b}$ треба: $\mathrm{cotg}\,\frac{a}{2}$

» 50. » 7. *оздо* : у бројитељу место $A - A_1$ треба: $A_1 - A$

» 51. » 7. *озго* : ставити A као чинитељ пред кв. корен

» 53. » 3. *оздо* : именитељ треба да је A место A^2

» 59. » 5. *озго* : место $MM_1 = \frac{b^2}{a^2}$ треба : $\eta = M_1\xi$.