Reisert, Pascal:

Die multiplikative Verknüpfung in den Verlinde Algebren über SU(2)

Bachelor, Summer Semester 2009

Gutachter*in: Schottenloher, Martin

Faculty of Mathematics, Computer Science and Statistics
Mathematisches Institut
Mathematik Bachelor

Ludwig-Maximilians-Universität München

https://doi.org/10.5282/ubm/epub.28471

Die multiplikative Verknüpfung in den Verlinde Algebren über SU(2)

Pascal Reisert

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Die multiplikative Verknüpfung in den Verlinde Algebren über SU(2)

Bachelorarbeit
an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der
Ludwig–Maximilians–Universität
München

eingereicht von
Pascal Reisert
April 2009

Betreuer: Prof. Dr. Martin Schottenloher

A Abstract

We give a purely representation theoretic discription of the multiplicative structure of the Verlinde algebras over the representation ring of SU(2).

Zusammenfassung

In der vorliegenden Bachelorarbeit entwickeln wir die multiplikative Struktur der Verlinde Algebren über dem Darstellungsring von SU(2) mit Methoden der Darstellungstheorie.

I Inhaltsverzeichnis

A Abstract **i**

S Symbolverzeichnis **i**

E Einleitung **I**

1 Die Gruppe SU(2) **1**
1.1 Fundamentale Eigenschaften 1

2 Darstellungstheorie von SU(2) **4**
2.1 Darstellungen von SU(2) 4
2.2 Zerlegung von Darstellungen 7
2.3 Irreduzibilität der Darstellungen V_n 11
2.4 Charaktere und Klassenfunktionen 13

3 Der Darstellungsring von SU(2) **22**
3.1 Die Gruppe R(SU(2)) 22
3.2 Basis, $\mathbb{Z}-$Modul- und Ringstruktur 25

4 Die Verlinde Algebra **31**
4.1 Zerlegung von R(SU(2)) 31
4.2 Addition und Multiplikation auf V_k 36

5 Ausblick **40**

L Literaturverzeichnis **41**

S Symbolverzeichnis

Wir setzen einige bekannte Zeichen aus der Linearen Algebra und Analysis, wie z. B. Tensorprodukt ($\otimes$), isomorph ($\simeq$) oder Spur (tr), voraus. Für alle weiteren Zeichen wird jeweils das erste Auftreten im Text vermerkt.

$\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$	Menge der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{C}$, S. 1
$\mathsf{SU}(2)$	spezielle unitäre Gruppe der Dimension 2, S. 1
$\mathbb{S}^n$	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit euklidischer Norm, S. 1
$\mathsf{U}(n)$	unitäre Gruppe der Dimension n, S. 3
$\mathsf{GL}(n)$	lineare Gruppe der Dimension n, S. 3
$\mathsf{O}(n)$	orthogonale Gruppe der Dimension n, S. 3
$\mathsf{SO}(n)$	spezielle orthogonale Gruppe der Dimension n, S. 3
$\exists!$	es existiert genau ein, S. 3
ρ_M	Wirkung einer Gruppe G auf eine Menge M, S. 4
l_g^V	$V \to V,\ v \mapsto gv$ für $g \in G$ Gruppe, V Vektorraum, S. 4
V_n	$\mathbb{C}$ – Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n, S. 5
$\int\ dg$	G – invariantes Haarintegral, S. 7
$\langle u, v\rangle$	G – invariantes Skalarprodukt für $u, v \in V$ Vektorraum, S. 10
$e(t)$	$= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, S. 13
χ_V	Charakter der Darstellung V, S. 14
$\mathbb{K}^M$	Menge der $\mathbb{K}$ – Linearkombinationen von Elementen der Menge M, S. 16
$\mathrm{Hom}(V, W)$	Menge der Homomorphismen $V \to W$, S. 17
V^*	Dualraum von V, S. 17
f^*	duale Abbildung zur Abbildung f, S. 17
V^G	$= \{v \in V : gv = v\ \forall g \in G\}$, S. 18
$\langle \tilde{\chi}, \chi\rangle$	$= \int \tilde{\chi}(g)\overline{\chi(g)}dg$ für $\tilde{\chi}, \chi$ Charaktere von G, S. 18
$\mathrm{Hom}_G(V, W)$	$= \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) : f$ äquivariant$\}$, S. 18
$\overline{V}$	konjugierte Darstellung von V, S. 19

$\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$	Darstellungsring bzw. Darstellungsalgebra von $\mathsf{SU}(2)$, S. 22
$[V]$	Äquivalenzklasse von V, S. 24
φ_z	$= \text{sign}(z)\text{id}$, S. 25
b_n	Basiselement von $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ bzw. $V_k(\mathsf{SU}(2))$, S. 27
$V_k(\mathsf{SU}(2))$	$k-$ te Verlinde Algebra über $\mathsf{SU}(2)$, S. 31
(b_n)	Hauptideal von b_n, S. 31
$\langle b_0, \ldots, b_k \rangle$	von den $b_0, \ldots, b_k$ erzeugter $\mathbb{Z}-$ Untermodul von $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$, S. 32
$\lfloor x \rfloor$	Gaußklammer $-\max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x \in \mathbb{R}\}$, S. 37

E Einleitung

Die Verlinde Algebra hat ihren Ursprung in der konformen Feldtheorie (siehe E. Verlinde [23]), tritt aber in den letzten Jahren zunehmend auch in anderen Bereichen, wie der $K-$Theorie auf.

Grundlage für die Betrachtung der Verlinde Algebra als Teil der konformen Feldtheorie ist die Operatorproduktentwicklung, insbesondere also das zugrunde liegende Axiomensystem[1]. Damit lassen sich sogenannte Fusionsregeln bzgl. einer zugrunde liegenden Gruppe G erklären. Im Allgemeinen ist es nicht trivial bzw. nicht möglich, eine explizite Form dieser Fusionsregeln zu bestimmen.
Für den Spezialfall einer einfachen (kompakten) Lie-Gruppe G reduziert sich das Problem jedoch auf die Betrachtung der Darstellungstheorie von G. Genauer lassen sich die Fusionsregeln durch die multiplikative Verknüpfung in den Verlinde Algebren über G beschreiben. Die Verlinde Algebren wiederum lassen sich aus der Darstellungstheorie der Gruppe ableiten.
Eines der klassischen Beispiele einer einfachen kompakten Lie-Gruppe ist die spezielle unitäre Gruppe $\mathsf{SU}(2)$.
Neben der besonderen Bedeutung, welche die Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ innerhalb der Physik (z. B. weist das heutige Standardmodell $\mathsf{SU}(2)$-Symmetrien auf) einnimmt, sind aus mathematischer Sicht ihre Darstellungen besonders anschaulich.
Wir möchten uns deshalb der Darstellungstheorie und schließlich der Verlinde Algebra im Fall $\mathsf{SU}(2)$ ausführlich widmen und versuchen die algebraische Struktur der Verlinde Algebra $V_k(\mathsf{SU}(2))$ explizit darzulegen.

Im ersten Kapitel legen wir einige Grundlagen, die uns zeigen, dass wir $\mathsf{SU}(2)$ als kompakte Lie-Gruppe behandeln können. Diese Eigenschaften nutzen wir im folgenden Kapitel um zunächst irreduzible Darstellungen von $\mathsf{SU}(2)$ zu bestimmen. Für den Beweis der Irreduzibilität müssen wir etwas ausholen und zunächst

[1] Osterwalder-Schrader-Axiomatik.

einmal klären, dass sich Darstellungen überhaupt in irreduzible Komponenten zerlegen lassen. Dazu werden wir das Haarmaß auf der Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ einführen. Im Anschluss zeigen wir die Eindeutigkeit dieser irreduziblen Darstellungen.

Nach einigen formalen Erweiterungen werden wir in Kapitel 3 schrittweise zeigen, dass die Menge der Darstellungen von $\mathsf{SU}(2)$ eine abelsche Gruppe, ein Ring und ein freier $\mathbb{Z}-$Modul ist. Entscheidend ist dabei die Wahl einer geeigneten Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der wir das Tensorprodukt in eine direkte Summe umschreiben können. Diese Basis besteht gerade aus den im vorangegangenen Abschnitt definierten irreduziblen Darstellungen.

Aus dem Darstellungsring $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ und der so gefundenen Basis b_n lässt sich in Kapitel 4 die Verlinde Algebra als Quotient des Darstellungsrings nach dem von einem Basiselement erzeugten Ideal - $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))/(b_k)$ - definieren. Als Quotient ist die Verlinde Algebra ebenfalls ein Ring.

Um das Produkt in der Verlinde Algebra schließlich aus dem Produkt im Darstellungsring ableiten zu können, werden wir den Darstellungsring $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ in das Hauptideal (b_k) und einen $\mathbb{Z}-$Modul zerlegen. Als Ergebnis erhalten wir eine sehr kompakte Darstellung der gesuchten Multiplikation.

Ein kurzer letzter Abschnitt dient einigen weiter gehenden Bemerkungen zu Eigenschaften der Verlinde Algebra.

1 Die Gruppe SU(2)

1.1. Fundamentale Eigenschaften

In diesem ersten Kapitel werden wir hauptsächlich grundlegende Eigenschaften der Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ auflisten. Dabei setzen wir einige Begriffe aus der Algebra, Topologie und Differentialgeometrie voraus. Diese finden sich z. B. in Bosch [3] (Algebra), Jänich [15] (Topologie, Satz von Heine-Borel), Jost [16] (Differentialgeometrie).

Definition 1.1.1. $U \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ ist in $\mathsf{SU}(2)$ $:\Leftrightarrow \overline{U^T} =: U^* = U^{-1}, \det(U) = 1.$

Folgerung 1.1.2. Aus $U^* = U^{-1}$ folgt für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
&U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SU}(2) \\
&\Rightarrow UU^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & c\overline{c} + d\overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \det(U) = ad - bc = 1 \\
&\Rightarrow a\overline{a} + b\overline{b} = 1 \Rightarrow ad\overline{a} + b\overline{b}d = d \\
&\Rightarrow d = \overline{a}(1 + bc) + b(-\overline{a}c) = \overline{a} + \overline{a}bc - \overline{a}bc = \overline{a} \\
&\Rightarrow c\overline{c} + d\overline{d} = 1 \Rightarrow bc\overline{c} + db\overline{d} = b \\
&\Rightarrow b = (ad - 1)\overline{c} + d(-a\overline{c}) = a\overline{c}d - \overline{c} - a\overline{c}d = -\overline{c} \\
&\Rightarrow U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, a\overline{a} + b\overline{b} = 1
\end{aligned}
$$

Für $a = x_0 + ix_1, b = x_2 + ix_3, x_i \in \mathbb{R}\ \forall 0 \leq i \leq 3$ folgt aus $a\overline{a} + b\overline{b} = 1$: $\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 1$. Somit ist $x := (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^3$. Insbesondere ist

$$
\varphi \quad : \quad \mathsf{SU}(2) \to \mathbb{S}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a + \overline{a}}{2}, \frac{a - \overline{a}}{2i}, \frac{b + \overline{b}}{2}, \frac{b - \overline{b}}{2i} \right)
$$

$$\varphi^{-1} \quad : \quad \mathbb{S}^3 \to \mathsf{SU(2)}, (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus, da komponentenweise C^∞ und linear.

$\mathbb{S}^3$ ist als Sphäre eine Mannigfaltigkeit und $\mathsf{SU(2)}$ eine Gruppe. Außerdem sind die Matrizenmultiplikation und Inversion differenzierbar, d. h. für $a = x_0 + ix_1, b = x_2 + ix_3, c = y_0 + iy_1, d = y_2 + iy_3, x_i, y_i \in \mathbb{R}\ \forall 0 \leq i \leq 3$:

$$\begin{aligned} & A := \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \varphi(AB) = (p_0, p_1, p_2, p_3), \end{aligned}$$

wobei die p_i Polynome in $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ sind. Polynome sind aber beliebig oft differenzierbar und somit auch $\varphi(AB)$. Ebenso gilt für die Inversion

$$\begin{aligned} & A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \varphi(A^{-1}) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \end{aligned}$$

Differenzierbarkeit.
Damit haben wir gezeigt, dass $\mathsf{SU(2)}$ eine Lie-Gruppe ist.

Definition 1.1.3. Eine Lie-Gruppe ist eine glatte reelle oder komplexe Mannigfaltigkeit auf der sich eine Gruppenstruktur so definieren lässt, dass die Gruppenverknüpfung und die Inversion beliebig oft differenzierbar sind.

Bemerkung 1.1.4. Auf $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ existiert eine differenzierbare Struktur. Man erhält zwei Karten (und damit einen Atlas) via stereographer Projektion. Sei $e = (1, 0, \ldots)$:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq e\} \\ \varphi_1 &: U_1 \to \mathbb{R}^n \\ & \quad (x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot x_1, \ldots, \frac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot x_n \right) \\ U_2 &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq -e\} \\ \varphi_2 &: U_1 \to \mathbb{R}^n \\ & \quad (x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{1}{1 + x_{n+1}} \cdot x_1, \ldots, \frac{1}{1 + x_{n+1}} \cdot x_n \right) \\ \varphi_{21} &= \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\big|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$ Homöomorphismen, φ_{21} $C^\infty-$Diffeomorphismus.

Bemerkung 1.1.5. Allgemeiner sind auch die Gruppen $\mathsf{SU(n)}$, $\mathsf{U(n)}$, $\mathsf{GL(n)}$, $\mathsf{O(n)}$, $\mathsf{SO(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Lie-Gruppen.

Folgerung 1.1.6. $\mathsf{SU(2)}$ ist kompakt, denn $\mathbb{S}^3$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^4$ - abgeschlossen als Urbild von 1 unter der stetigen Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, beschränkt, da $\forall x \in \mathbb{S}^3 : \|x\| = 1 < \infty$. Nach dem Satz von Heine-Borel ist $\mathbb{S}^3$ kompakt und somit ist $\mathsf{SU(2)}$ als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung φ^{-1} ebenfalls kompakt.

Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.1.7. $\mathsf{SU(2)}$ ist eine kompakte Lie-Gruppe.

Bemerkung 1.1.8. Wir führen an dieser Stelle noch eine Parameterdarstellung von $\mathbb{S}^3$ und somit von $\mathsf{SU(2)}$ ein, die wir später benötigen werden. Im Folgenden verwenden wir, dass cos auf $[0, \pi]$ injektiv ist und sin nicht negativ auf dem selben Intervall.
Da $1 = \|x\|^2 \geq |x_0|^2 \Rightarrow -1 \leq x_0 \leq 1 \Rightarrow \exists! 0 \leq \theta \leq \pi : x_0 = \cos(\theta)$. Da $1 = \|x\| \geq |x_0|^2 + |x_1|^2 = \cos^2(\theta) + x_1^2 \Rightarrow x_1^2 \leq 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \Rightarrow -\sin(\theta) \leq x_1 \leq \sin(\theta) \Rightarrow \exists! 0 \leq \psi \leq \pi : x_1 = \sin(\theta)\cos(\psi)$.[1] Analog gilt weiter $1 = \|x\|^2 = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\cos^2(\psi) + |x_2|^2 + |x_3|^2 \Rightarrow \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta)\cos^2(\psi) + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow \sin^2(\theta)(1 - \cos^2(\psi)) = \sin^2(\theta)\sin^2(\psi) = x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow \exists! 0 \leq \phi < 2\pi : x_2 = \sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi), x_3 = \sin(\theta)\sin(\psi)\cos(\phi)$.[2]
Zusammengefasst erhält man für jedes $x \in \mathbb{S}^3$ genau ein Tripel $(\theta, \psi, \phi) \in M := [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\setminus (\{0, \pi\} \times]0, \pi] \times]0, 2\pi[\cup ([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \times \{0, \pi\} \times]0, 2\pi[)$:[3]

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\psi) \\ \sin(\theta)\sin(\psi)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\psi)\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \forall U \in \mathsf{SU(2)}\ \exists!\ (\theta, \psi, \phi) \in M$:

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\psi) & \sin(\theta)\sin(\psi)e^{i\phi} \\ -\sin(\theta)\sin(\psi)e^{-i\phi} & \cos(\theta) - i\sin(\theta)\cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

[1] Eindeutigkeit von ψ gilt nicht für den Fall $\theta \in \{0, \pi\}$. In diesem Fall wähle man $\psi = 0$.

[2] Eindeutigkeit von ϕ gilt nicht für die Fälle $\theta \in \{0, \pi\}$ oder $\psi \in \{0, \pi\}$. In diesen Fällen wähle man $\phi = 0$.

[3] Die Menge M kommt dadurch zustande, dass für den Fall $\theta \in \{0, \pi\}$ die Parameter ψ, ϕ nicht eindeutig festgelegt sind und für $\psi \in \{0, \pi\}$ der Parameter ϕ nicht eindeutig festgelegt ist. Da wir Eindeutigkeit später noch benötigen, stellen wir diese durch die Wahl von M sicher. Tatsächlich wird der Anteil, der von $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ abgezogen wird kein Rolle mehr spielen.

2 Darstellungstheorie von SU(2)

Das Ziel dieses zweiten Kapitels ist die Klassifikation der Darstellungen der Gruppe $\mathsf{SU}(2)$.
Nachdem wir zunächst gewisse Darstellungen von $\mathsf{SU}(2)$ einführen (siehe Bröcker & tom Dieck [5], S.84f oder Schottenloher [18], S.176ff) müssen wir im zweiten Abschnitt auf allgemeinere Aussagen der Darstellungstheorie eingehen, um den Begriff der Zerlegbarkeit einer Darstellung, insbesondere der Irreduzibilität, verwenden zu können. Dazu werden wir das Haarmaß auf $\mathsf{SU}(2)$ einführen. Dieses findet man bei Bröcker & tom Dieck [5], S.40ff für Lie-Gruppen und allgemeiner bei Barut & Rączka [2], S.67ff, Hilgert & Ross [12], S.232ff und Hewitt & Neeb [11], S.184ff für lokal-kompakte Gruppen.
Die Irreduzibilität der Darstellungen folgt schließlich aus der Betrachtung äquivarianter Endomorphismen; Endomorphismen, die mit der Wirkung der Gruppe G kommutieren.
Der Charakter einer Darstellung, der wie wir sehen werden alle Informationen über deren Isomorphieklasse enthält, wird nicht nur die Frage der Eindeutigkeit lösen, sondern auch beim Beweis der Clebsch-Gordon-Formel am Anfang des nächsten Kapitels Verwendung finden.

2.1. Darstellungen von SU(2)

Definition 2.1.1. Eine Darstellung der Lie-Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist eine stetige Wirkung $\rho : G \times V \to V$ von G auf V sodass $\forall g \in G$ die Translation $l_g : v \mapsto \rho(g, v)$ eine lineare Abbildung ist.
ρ ist Wirkung von G auf $V \Leftrightarrow \rho(e, v) = v,\ \rho(g, \rho(h, v)) = \rho(gh, v)\ \forall v \in V, \forall g, h \in G, e \in G$ neutrales Element.
Vereinfacht schreiben wir $\rho(g, v) = gv$.

Bemerkung 2.1.2. Wir werden im Folgenden nur endlich-dimensionale Darstellungen, d. h. der zugrunde liegende Vektorraum ist endlich-dimensional, betrachten.

Definition 2.1.3. Sei V $G-$Modul. Ein $G-$invarianter Untervektorraum $U \subset V$, d. h. $gu \in U, \forall g \in G, \forall u \in U$, heißt Untermodul oder Unterdarstellung von V. Eine nicht leere Darstellung V heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und V keinen weiteren Untermodul gibt.

Wir betrachten den $\mathbb{C}-$Vektorraum V_n der homogenen Polynome in zwei Variablen z_1, z_2 vom Grad n, d. h. alle Monome eine Polynomes in V_n haben den gleichen Grad n.[1] Offensichtlich ist eine Basis dieses Raums gegeben durch $P_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$. Damit hat V_n Dimension $n+1$.

Lemma 2.1.4. Definiere eine Wirkung von $G = \mathsf{SU(2)}$ auf V_n durch $(gP)(z) = P(zg)$ $\forall P \in V_n, \forall g \in G$ und $z = (z_1, z_2)$. Mit dieser Wirkung ist V_n eine Darstellung im Sinne von Definition 2.1.1.

Beweis.

Behauptung. $l_g : P(z) \mapsto (gP)(z) = P(zg)$ ist linear.
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k},\ Q(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n b_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n$:

$$\begin{aligned}
l_g(\alpha P + \beta Q)(z) &= (g(\alpha P + \beta Q))(z) = (\alpha P + \beta Q)(zg) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n (\alpha a_k) z_1^k z_2^{n-k} + \sum_{k=0}^n (\beta b_k) z_1^k z_2^{n-k} \right) ((zg)_1, (zg)_2) \\
&= \sum_{k=0}^n (\alpha a_k)(zg)_1^k (zg)_2^{n-k} + \sum_{k=0}^n (\beta b_k)(zg)_1^k (zg)_2^{n-k} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \right) (zg) + \beta \left(\sum_{k=0}^n b_k z_1^k z_2^{n-k} \right) (zg) \\
&= \alpha l_g(P)(z) + \beta l_g(Q)(z)
\end{aligned}$$

□

Behauptung. $V_n \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ist Unterraum.

Es gilt $0 = 0 \cdot z_1^n \in V_n$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ $\forall P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n$:

$$\lambda P = \sum_{k=0}^n \underbrace{\lambda a_k}_{=:c_k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^n c_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n.$$

[1] $0 \in V_n$ wegen $0 \cdot z_1^n = 0$ obwohl $\deg(0) = -\infty$.

Schließlich gilt für $P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}$, $Q(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} b_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n$:

$$\begin{aligned} P + Q &= \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_k z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k + b_k)}_{=:c_k} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n. \end{aligned}$$

□

Behauptung. $V_n \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ist $\mathsf{SU(2)}$−invariant.
Sei $P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k} \in V_n$,

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SU(2)},$$

dann gilt

$$zg = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + cz_2 & bz_1 + dz_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} (gP)(z) &= P(zg) = P(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (az_1 + cz_2)^k (bz_1 + dz_2)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{i} a^i z_1^i c^{k-i} z_2^{k-i}}_{=:v_i} \right) \left(\sum_{i=0}^{n-k} \underbrace{\binom{n-k}{i} b^i z_1^i d^{n-k-i} z_2^{n-k-i}}_{=:w_i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} v_i w_{j-i} \right) \qquad (2.1.4.1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j-i} a^i z_1^i c^{k-i} z_2^{k-i} b^{j-i} z_1^{j-i} d^{n-k-j+i} z_2^{n-k-j+i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j-i} a^i c^{k-i} b^{j-i} d^{n-k-j+i} z_1^{i+j-i} z_2^{k-i+n-k-j+i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j-i} a^i c^{k-i} b^{j-i} d^{n-k-j+i} \right) z_1^j z_2^{n-j} \in V_n, \end{aligned}$$

da $\deg(z_1^j z_2^{n-j}) = n$ für alle $0 \leq j \leq n$. Insbesondere haben wir bei (2.1.4.1) das Cauchyprodukt für Polynome verwendet. $\square$

Da $(gP)(z) = P(zg)$ auch komponentenweise stetig ist, ist V_n eine Darstellung von $\mathsf{SU}(2)$. $\square$

Bemerkung 2.1.5. (i) V_0 ist die triviale Darstellung auf $\mathbb{C}$, da Polynome von Grad 0 gerade die Elemente des Körpers sind, G also als Identität wirkt.

(ii) V_1 ist die Standarddarstellung auf $\mathbb{C}^2$, wobei die Wirkung durch Matrizenmultiplikation gegeben ist, d. h. für

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SU}(2), P(z_1, z_2) = a_1 z_1 + a_2 z_2$$
$$\Rightarrow (gP)(z) = P(zg) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die V_n sind paarweise nicht isomorph, da sich ihre Dimensionen unterscheiden, $\dim(V_n) = n + 1$.

2.2. Zerlegung von Darstellungen

Lemma 2.2.1. Sei G eine kompakte Gruppe und sei U ein $G-$Modul mit Untermodul V. Dann existiert ein komplementärer Untermodul W, sodass $U = V \oplus W$ ist. Weiter ist jeder $G-$Modul direkte Summe von irreduziblen Untermodulen.

Bemerkung 2.2.2. Die direkte Summe von zwei Darstellungen V, W ist mit der Wirkung $G \times V \oplus W \to V \oplus W, (g, (v, w)) \mapsto (gv, gw)$ ebenfalls eine Darstellung, denn $e(v, w) = (ev, ew) = (v, w)$, $g(h(v, w)) = g(hv, hw) = (ghv, ghw) = (gh)(v, w)$ und Linearität von $l_g^{V \oplus W}$ und Stetigkeit der Wirkung folgen komponentenweise.

Um Lemma 2.2.1 zu beweisen, ist es notwendig ein $G-$invariantes Skalarprodukt auf U zu definieren. Die Existenz eines solchen Skalarproduktes zeigt man mittels der Existenz eines Haarmaßes auf G.[2] Wir werden uns dabei auf den Spezialfall $G = \mathsf{SU}(2)$ beschränken.

Definition 2.2.3. Ein Integral auf der Lie-Gruppe G heißt links-invariant, wenn für alle $h \in G$ gilt:

$$\int_G f(hg)dg = \int_G f(g)dg, \quad \forall f \text{ integrierbar.}$$

[2] Für die allgemeine Konstruktion auf Lie-Gruppen siehe Bröcker & tom Dieck [5], S.40ff oder für lokalkompakte topologische Gruppen siehe Barut & Rączka [2], S.67ff, Hilgert & Neeb [12], S.232ff oder Hewitt & Ross [11], S.184ff.

Ein Integral ist normiert, wenn $\int_G 1 dg = 1$.
Ein (links-)invariantes normiertes reguläres Borelmaß auf G heißt (linkes) Haarmaß.

Bemerkung 2.2.4. Wie bereits erwähnt ist ein Haarmaß bis auf einen konstanten Faktor eindeutig. Auf einer Lie-Gruppe folgt mit der Links-Invarianz auch schon die Rechts-Invarianz. Im Folgenden werden nur Haarmaße auftreten, die sowohl links- als auch rechts-invariant sind.

Lemma 2.2.5. Auf $\mathsf{SU}(2)$ existiert ein normiertes Haarmaß.

Beweis. Man verwende die Parameterdarstellung von $\mathsf{SU}(2)$ aus Bemerkung 1.1.8. Weiter definieren wir

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2(\theta) \sin(\psi) d\theta d\psi d\phi.$$

Dies ist gerade das $n-$dimensionale Volumenmaß für $n = 4$ und eingeschränkt auf die Sphäre $\mathbb{S}^3$ - Radius $r = 1$ - mit einem zusätzlichen Normierungsfaktor.
$d\mu$ ist ein reguläres Borelmaß auf $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$, da die Lebesguemaße $d\theta, d\psi, d\phi$ reguläre Borelmaße sind. Wir zeigen Normiertheit:

$$\begin{aligned} \int_G 1 dg &=^3 \int_M \frac{1}{2\pi^2} \sin^2(\theta) \sin(\psi) d\theta d\psi d\phi \\ &= \int_{[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{2\pi^2} \sin^2(\theta) \sin(\psi) d\theta d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4\pi^2} \sin(\psi) d\psi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\phi = 1 \end{aligned}$$

Die Linksmultiplikation $g \mapsto l_h(g)$ für $x_i, y_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq 3$,

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} y_0 + iy_1 & y_2 + iy_3 \\ -y_2 + iy_3 & y_0 - iy_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow hg = \begin{pmatrix} (y_0+iy_1)(x_0+ix_1)+(y_2+iy_3)(-x_2+ix_3) & (y_0+iy_1)(x_2+ix_3)+(y_2+iy_3)(x_0-ix_1) \\ (-y_2+iy_3)(x_0+ix_1)+(y_0-iy_1)(-x_2+ix_3) & (-y_2+iy_3)(x_2+ix_3)+(y_0-iy_1)(x_0-ix_1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(hg)^t = \begin{pmatrix} \frac{2y_0x_0+iy_1\cdot(2ix_1)-2y_2x_2+iy_3\cdot(2ix_3)}{2} \\ \frac{2x_0iy_1+2ix_1y_0-2x_2iy_3+2ix_3y_2}{2i} \\ \frac{2y_2x_0+iy_3\cdot(-2ix_1)+2y_0x_2+iy_1\cdot(2ix_3)}{2} \\ \frac{2x_0iy_3-2ix_1y_2+2x_2iy_1+2ix_3y_0}{2i} \end{pmatrix}$$

[3]Mit $M := [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\setminus (\{0, \pi\} \times]0, \pi] \times]0, 2\pi[\cup ([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \times \{0, \pi\} \times]0, 2\pi[)$, wobei $\{0, \pi\} \times]0, \pi] \times]0, 2\pi[\cup ([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \times \{0, \pi\} \times]0, 2\pi[$ Maß 0 hat.

$$\Rightarrow \varphi(hg)^t = \begin{pmatrix} y_0x_0 - y_1x_1 - y_2x_2 - y_3x_3 \\ y_1x_0 + y_0x_1 - y_3x_2 + y_2x_3 \\ y_2x_0 + y_3x_1 + y_0x_2 - y_1x_3 \\ y_3x_0 - y_2x_1 + y_1x_2 + y_0x_3 \end{pmatrix},$$

ist auf $\mathbb{S}^3$ gegeben als

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto U(y)x = \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_1 & y_0 & -y_3 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_0 & -y_1 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Für $U(y)$ gilt wegen $\sum_{i=0}^3 y_i^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
U(y)U^t(y) &= \begin{pmatrix} y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_1 & y_0 & -y_3 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_0 & -y_1 \\ y_3 & -y_2 & y_1 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & y_0 & y_3 & -y_2 \\ -y_2 & -y_3 & y_0 & y_1 \\ -y_3 & y_2 & -y_1 & y_0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} \sum_{i=0}^3 y_i^2 & y_0y_1 - y_0y_1 + y_2y_3 - y_2y_3 \\ y_1y_0 - y_0y_1 + y_2y_3 - y_3y_2 & \sum_{i=0}^3 y_i^2 \\ y_2y_0 - y_1y_3 - y_0y_2 + y_3y_1 & y_1y_2 + y_0y_3 - y_0y_3 - y_1y_2 \\ y_3y_0 + y_2y_1 + y_2y_1 - y_3y_0 & y_3y_1 - y_2y_0 - y_1y_3 + y_0y_2 \end{matrix} \right. \cdots \\
&\qquad \cdots \left. \begin{matrix} y_0y_2 - y_1y_3 - y_2y_0 + y_1y_3 & y_0y_3 + y_1y_2 - y_2y_1 - y_0y_3 \\ y_1y_2 + y_0y_3 - y_0y_3 - y_1y_2 & y_1y_3 - y_0y_2 - y_1y_3 + y_0y_2 \\ \sum_{i=0}^3 y_i^2 & y_2y_3 - y_3y_2 + y_0y_1 - y_1y_0 \\ y_3y_2 - y_2y_3 + y_1y_0 - y_0y_1 & \sum_{i=0}^3 y_i^2 \end{matrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det(U(y)) &=^4 y_0 \det \begin{pmatrix} y_0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & y_0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & y_0 \end{pmatrix} - y_1 \det \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_3 & y_0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & y_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + y_2 \det \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_0 & -y_3 & y_2 \\ -y_2 & y_1 & y_0 \end{pmatrix} - y_3 \det \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ y_0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & y_0 & -y_1 \end{pmatrix} \\
&= y_0 \left(y_0 \left(\sum_{i=0}^3 y_i^2 \right) \right) - y_1 \left(-y_1 \left(\sum_{i=0}^3 y_i^2 \right) \right) \\
&\quad + y_2 \left(y_2 \left(\sum_{i=0}^3 y_i^2 \right) \right) - y_3 \left(-y_3 \left(\sum_{i=0}^3 y_i^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{3} y_i^2 = 1.$$

$U(y)$ bzw. $g \mapsto l_h(g)$ ist also eine Drehung. Mit der Rotationsinvarianz des Lebesguemaßes folgt nun die $\mathsf{SU(2)}$−Invarianz des Integrals.
Somit ist μ ein normiertes Haarmaß. □

Behauptung. Auf einer Darstellung V einer kompakten Gruppe G lässt sich ein G−invariantes Skalarprodukt erklären, d. h. $\exists V \times V \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$: $\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle \; \forall g \in G, \forall u, v \in V$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $G = \mathsf{SU(2)}$: Sei $b : V \times V \to \mathbb{C}$ ein beliebiges Skalarprodukt und definiere

$$c(u,v) = \int_G b(gu, gv)dg$$

wobei das Integral normiert und G−invariant ist (siehe Lemma 2.2.5). Dann ist c ein Skalarprodukt:

(i) c ist linear in u, da b in u linear ist und das Integral ebenfalls linear ist. c ist konjugiert linear in v, da b diese Eigenschaft hat und das Integral linear ist. Folglich ist c sesquilinear.

(ii) c ist hermitesch, da

$$\overline{c(v,u)} = \overline{\int_G b(gv, gu)dg} = \int_G \overline{b(gv, gu)}dg = \int_G b(gu, gv)dg = c(u,v).$$

(iii) c is positiv definit:

$$\begin{aligned} c(0,0) &= \int_G b(g \cdot 0, g \cdot 0)dg = \int_G b(0,0)dg = \int_G 0\, dg = 0. \\ c(x,x) &=^5 \int_G \underbrace{b(g \cdot x, g \cdot x)}_{>0} dg > \int_G 0\, dg = 0, \quad \text{für } x \neq 0. \end{aligned}$$

Schließlich ist c auch G−invariant, da das Integral G-invariant ist, d. h. $\forall h \in G$

$$c(hu, hv) = \int_G b(gh \cdot u, gh \cdot v)dg = \int_G b(g \cdot u, g \cdot v)dg = c(u,v).$$

□

[4] Entwicklung nach der ersten Spalte.
[5] l_g invertierbar ($l_g \circ l_{g^{-1}}(x) = g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = ex = x$) und linear $\Leftrightarrow \{gx = 0 \Rightarrow x = 0\}$. Es folgt $b(gx, gx) = b(0,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bemerkung 2.2.6. Eine Darstellung V mit einem $G-$invarianten Skalarprodukt heißt auch unitäre Darstellung. Dieser Term wird jedoch zumeist verwendet, wenn man an V zusätzlich die Bedingung der Vollständigkeit stellt, d. h. V Hilbertraum mit $G-$invariantem Skalarprodukt. Im Fall von unitären Darstellungen liefert der bekannte Satz von Peter und Weyl schon eine Zerlegung jeder (auch unendlich-dimensionaler) Darstellung in endlich-dimensionale irreduzible Darstellungen. Einen Beweis, der unser Vorgehen verallgemeinert findet man in Bröcker & tom Dieck [5], S.133ff. Einen weiteren Beweis gibt Sugiura [20]. Dieser benutzt unter anderem die Sätze von Banach-Steinhaus und Hilbert-Schmidt.

Schließlich können wir Lemma 2.2.1 für den Fall $G = \mathsf{SU}(2)$ zeigen.

Beweis von Lemma 2.2.1. Man wähle ein $G-$invariantes Skalarprodukt c auf U und sei W das orthogonale Komplement von V in U. Dann ist W ein $G-$Untermodul, denn für $w_1, w_2 \in W, v \in V, g \in G$ gilt

(i) $c(0, v) = 0 \Rightarrow 0 \in W$.[6]

(ii) $c(w_1 + w_2, v) = c(w_1, v) + c(w_2, v) = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$.

(iii) $c(-w_1, v) = -c(w_1, v) = 0 \Rightarrow -w_1 \in W$.

(iv) $c(gw_1, v) = c(w_1, \underbrace{g^{-1}v}_{\in V}) = 0 \Rightarrow gw_1 \in W$.

Behauptung. Jeder $G-$Modul ist direkte Summe von irreduziblen Untermodulen.

Diese zweite Aussage des Lemmas zeigen wir mittels Induktion nach der Dimension von U. Für $\dim U = 1$ folgt mit $\dim U = \dim V + \dim W$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\dim V = 1, \dim W = 0 \Rightarrow W = \{0\} \Rightarrow V = U$. Folglich ist U schon irreduzibel.
Für $n = \dim U$, $n \to n + 1$: Wenn U irreduzibel ist, sind wir fertig. Sei U reduzibel, d. h. $\exists V, W \subset U : U = V \oplus W$, $0 < \dim V, \dim W < \dim U$. Nach Induktionsvoraussetzung zerfallen V und W in irreduzible Untermodule. Folglich zerfällt auch U in irreduzible Darstellungen. □

2.3. IRREDUZIBILITÄT DER DARSTELLUNGEN V_n

Definition 2.3.1. Sei G eine Gruppe, X, Y Mengen und

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

[6]Nach Definition von W bereits erfüllt, aber zur Vollständigkeit angegeben.

eine Wirkung von G auf X. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $G-$äquivariant, wenn für alle $g \in G, x \in X$: $f(gx) = gf(x)$ gilt.

Lemma 2.3.2. Jeder $\mathsf{SU}(2)-$äquivariante Endomorphismus von V_n ist $\lambda \cdot \mathrm{id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei A äquivarianter Endomorphismus und

$$g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathsf{SU}(2), \quad a \in \mathsf{U}(1) = \{x \in \mathbb{C} : x\overline{x} = 1\}.$$

Seien $P_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$ die Basispolynome von V_n, $z = (z_1, z_2)$, dann folgt

$$\begin{aligned} (g_a P_k)(z) &= P_k(z g_a) = P_k\left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = P_k\begin{pmatrix} z_1 a & z_2 a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= (z_1 a)^k (z_2 a^{-1})^{n-k} = a^{k-(n-k)} z_1^k z_2^{n-k} = a^{2k-n} P_k(z). \end{aligned}$$

$\Rightarrow a^{2k-n}$ ist Eigenwert von g_a zum Eigenvektor P_k.
Man wähle a, sodass alle a^{2k-n}, $0 \leq k \leq n$, paarweise verschieden sind, z. B. $a = e^{i/n}$.[7] Die Eigenräume zu den Eigenwerten $a^{2k-n}, 0 \leq k \leq n$, sind folglich $1-$dimensional.
A äquivariant $\Rightarrow g_a A P_k = A g_a P_k = A a^{2k-n} P_k = a^{2k-n} A P_k \Rightarrow A P_k$ Eigenvektor zum Eigenwert a^{2k-n}. Da der Eigenraum die Dimension 1 hat existiert $c_k \in \mathbb{C}$: $A P_k = c_k P_k$.
Betrachte ebene Drehmatrizen $r_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \in \mathsf{SU}(2)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A r_t P_n(z) &= A(z_1 \cos(t) + z_2 \sin(t), z_2 \cos(t) - z_1 \sin(t)) \\ &= A(z_1 \cos(t) + z_2 \sin(t))^n (z_2 \cos(t) - z_1 \sin(t))^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(t) \cdot \sin^{n-k}(t) \cdot A z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(t) \cdot \sin^{n-k}(t) \cdot c_k P_k \\ r_t A P_n(z) &= r_t c_n P_n(z) = c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(t) \cdot \sin^{n-k}(t) \cdot P_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(t) \cdot \sin^{n-k}(t) \cdot c_n P_k. \end{aligned}$$

[7] $-1 \leq \frac{2k-n}{n} = \frac{2k}{n} - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{2k-n}{n} \in [-1, 1] \subset [-\pi/2, \pi/2]$ - Eindeutigkeit mit $\exp(ix)$ $2\pi-$periodisch.

Aus $Ar_tP_n = r_tAP_n, \forall t \in \mathbb{R}$ folgt $c_k = c_n, \forall 0 \leq k \leq n$ und $A = c_n \cdot \mathrm{id}$, da A linear ist und somit für ein beliebiges $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(z) \in V_n$:

$$AP(z) = A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(z)\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k AP_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k c_n P_k(z) = c_n P(z).$$

□

Satz 2.3.3. Die Gruppe der homogenen Polynome vom Grad n, V_n, ist irreduzibel für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Angenommen V_n ist reduzibel, dann existieren nach Lemma 2.2.1 Unterdarstellungen $U, W : V_n = U \oplus W$. Wir können $v \in V_n$ eindeutig zerlegen in $v = u + w, u \in U, w \in W$. Man erhält einen äquivarianten Endomorphismus f, $f(v) := f(u+w) = f(u)+f(w) = \lambda u + \lambda' w$ für $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}, \lambda \neq \lambda'$. f ist tatsächlich äquivariant, denn $\forall g \in \mathsf{SU}(2) : f(gv) = \lambda gu + \lambda' gw = g\lambda u + g\lambda' w = gf(v)$. Aber f lässt sich nicht als $\mu \cdot \mathrm{id}$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ schreiben - ein Widerspruch zu Lemma 2.3.2. □

2.4. Charaktere und Klassenfunktionen

Bemerkung 2.4.1. (i) $\forall A \in \mathsf{SU}(2)$ gilt:

$$A \sim e(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix},$$

d. h. $\exists Q_t \in \mathsf{GL}(2) : Q_t^{-1}AQ_t = e(t)$. Denn für $A \in \mathsf{SU}(2) : AA^* = E = A^*A \Rightarrow A$ normal. Mit dem Spektralsatz[8] folgt die Existenz von $U_t \in \mathsf{U}(2) : U_t^* A U_t = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) =: B,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Da $A, U_t \in \mathsf{U}(2) \Rightarrow B = U_t^* A U_t \in \mathsf{U}(2)$. Aber $\det(B) = \det(U_t^* A U_t) = \det(U_t^*)\det(A)\det(U) = \det(A)\det(E) = 1 \Rightarrow B \in \mathsf{SU}(2)$. Folglich gilt $\lambda_j \overline{\lambda_j} = 1, j \in \{1,2\} \Rightarrow \exists t_j \in [-\pi, \pi[, j \in \{1,2\} : \lambda_j = e^{it_j}$. Mit $\det(B) = 1$ folgt weiter $e^{it_1}e^{it_2} = e^{i(t_1+t_2)} = 1 \Rightarrow t := t_1 = -t_2$.

(ii) $e(t)$ und $e(s)$ sind genau dann ähnlich, wenn $s = \pm t \bmod 2\pi$, denn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}(2)$ mit

$$A^{-1}e(s)A = e(t) \Leftrightarrow A = e(-s)Ae(t) = \begin{pmatrix} e^{i(t-s)}a & e^{-i(s+t)}b \\ e^{i(s+t)}c & e^{i(s-t)}d \end{pmatrix}$$

existiert genau dann wenn $s = \pm t \bmod 2\pi$, da für $s \neq \pm t \bmod 2\pi : e^{\pm i(t \pm s)} \neq 1$; somit gilt $e^{\pm i(t\pm s)}x = x \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \{a,b,c,d\}$ - ein Widerspruch zu $A \in \mathsf{GL}(2)$.

[8] siehe Bosch [3], S. 268.

Definition 2.4.2. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt Klassenfunktion, wenn sie auf den Konjugationsklassen konstant ist.

Folgerung 2.4.3. $f : \mathsf{SU}(2) \to \mathbb{C}$ Klassenfunktion $\Rightarrow f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto f(e(t))$ ist eine gerade $2\pi-$periodische Funktion. Gerade weil $e(t)$ und $e(-t)$ nach der vorangegangen Bemerkung konjugiert sind, also $f(e(t)) = f(e(-t))$ für f Klassenfunktion; $2\pi-$periodisch, da $e(t)$ und $e(t + 2\pi)$ konjugiert sind.
Umgekehrt wird jede gerade $2\pi-$periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion $\tilde{g}$ auf $\mathsf{SU}(2)$, in dem man für alle $A \in \mathsf{SU}(2)$: $\tilde{g}(A) = \tilde{g}(e(t)) := g(t)$ setzt für $e(t) \sim A$.

Somit kann man den Raum der stetigen geraden $2\pi-$periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (bijektiv) mit dem Raum der stetigen Klassenfunktionen auf $\mathsf{SU}(2)$ identifizieren.

Definition 2.4.4. Der Charakter einer Darstellung V von G ist die Funktion

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \operatorname{tr}(l_g),$$

wobei $\operatorname{tr}(l_g)$ die Spur der linearen Abbildung $l_g : V \to V, v \mapsto gv$ ist.
Der Charakter einer irreduziblen Darstellung heißt irreduzibler Charakter.

Bemerkung 2.4.5. V ist endlich-dimensional und l_g nach Definition einer Darstellung linear. Es existiert also für jede Basis $(v_i)_i$ von V eine Darstellungsmatrix von l_g. Da die Spur unabhängig von der Wahl der Basis ist, lässt sie sich direkt aus jeder Darstellungsmatrix ablesen. Weiter ist $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ stetig, da die Wirkung einer Darstellung nach Definition stetig ist und somit die Spur als Summe stetiger Komponentenfunktionen ebenfalls stetig ist.

Lemma 2.4.6. Der Charakter χ_n von V_n nimmt an der Stelle $e(t)$ den Wert $\chi_n(e(t)) = \sum_{k=0}^{n} \cos((n-2k)t)$ an.

Beweis. Für $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k \in V_n$ gilt

$$\begin{aligned}(e(t)P)(z) &= P(ze(t)) = P(z_1 e^{it}, z_2 e^{-it}) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kit-(n-k)it} P_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k e^{(2k-n)it} P_k.\end{aligned}$$

Das heißt, dass der Linksmultiplikation mit $e(t)$ bzgl. der Basis P_k gerade die folgende Matrix entspricht

$$\begin{pmatrix} e^{-int} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i(n-2)t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{int} \end{pmatrix}$$

Die Spur dieser Matrix ist $\chi_n(e(t)) = \sum_{k=0}^n e^{i(n-2k)t} = \sum_{k=0}^n (\cos((n-2k)t) + i\sin((n-2k)t)) = \sum_{k=0}^n \cos((n-2k)t)$, da $\sum_{k=0}^n \sin(n-2k)t = \sin(-n) + \ldots + \sin(n) = 0$, wegen $\sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$ und $\sin(0) = 0$. □

Folgerung 2.4.7. Mit $\cos(x) = \cos(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ kann man weiter vereinfachen zu

$$\chi_n(e(t)) = \begin{cases} 2\cos(nt) + \ldots + 2\cos(2t) + 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2\cos(nt) + \ldots + 2\cos(t) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Insbesondere ist der von den $\chi_k, 0 \leq k \leq n$ erzeugte $\mathbb{C}-$Vektorraum genau der Vektorraum, der von $1, \cos(t), \ldots, \cos(nt)$ erzeugt wird.

Satz 2.4.8. Der von $\cos(nt), n \in \mathbb{N}$ erzeugte $\mathbb{C}-$Vektorraum W liegt (gleichmäßig) dicht im Raum der geraden $2\pi-$periodischen Funktionen V.

Beweis. Wir werden den Beweis dieses Lemmas auf den bekannten Satz von Weierstraß zurückführen. Einen Beweis dazu findet sich z. B. in Reed & Simon [17], S.102ff.

Satz von (Stone-)Weierstraß 2.4.9. Sei $K \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ kompakt. Dann liegen die Polynome dicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ in $C_\mathbb{R}(K)$.

Man assoziiere jede Funktion $\tilde{f}$ in V eindeutig mit einer Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ via $f := \tilde{f}|_{[0,\pi]}$.[9] Da $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ bijektiv und stetig ist, existiert $\forall f \in C_\mathbb{R}([0, \pi])\ \exists! g \in C_\mathbb{R}([-1, 1]) : g = f \circ \arccos$ bzw. $g \circ \cos = f$.
Die Basis $\cos(nt), n \in \mathbb{N}$ von W transformiert sich aufgrund der Additionstheoreme wie folgt:[10]

$$\begin{aligned}
\cos(n \arccos(x)) &= \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} (-1)^j \binom{n}{2j} (\sin(\arccos(x)))^{2j} (\cos(\arccos(x)))^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} (-1)^j \binom{n}{2j} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2j} x^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n}{2j} \left(x^2-1\right)^j x^{n-2j},
\end{aligned}$$

wobei wir $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ wegen $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ genutzt haben. $\cos(n \arccos(x))$ ist somit ein Polynom vom Grad

$$\deg(\cos(n \arccos(x))) = \deg\left(\left(x^2-1\right)^j\right) + \deg\left(x^{n-2j}\right) = 2j + n - 2j = n.$$

[9] Da $\tilde{f}$ gerade ist, gibt es genau eine gerade Fortsetzung von f auf $[-\pi, \pi]$ und wegen Periodizität genau eine eindeutige gerade $2\pi-$periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$.

[10] siehe Brontein u. a. [6], Seite 81.

Somit sind die $\cos(n \arccos(x)), n \in \mathbb{N}$ paarweise linear unabhängig und damit Basis des Vektorraums der Polynome auf $[-1, 1]$. Diese liegen nach dem Satz von (Stone-)Weierstraß dicht in $C_{\mathbb{R}}([-1, 1])$. Folglich existiert für jedes $g \in C_{\mathbb{R}}([-1, 1])$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sodass $\forall x \in [-1, 1] : g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\cos(k \arccos(x)))$. Da für jedes $f \in C_{\mathbb{R}}([0, \pi])$ $\exists! g \in C_{\mathbb{R}}([-1, 1])$, $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = g \circ \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\cos(k \arccos(\cos(x)))) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

liegt W dicht in V. □

Definition 2.4.10. Zwei Darstellungen heißen isomorph, wenn es eine äquivariante, bijektive, lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt.

Lemma 2.4.11. Sind V, W isomorphe Darstellungen, dann gilt $\chi_V = \chi_W$.

Beweis. Sei $f : V \to W$ Isomorphismus im Sinne der vorausgegangenen Definition. Dann gilt $l_g^W f(v) = gf(v) = f(gv) = fl_g^V(v)$, wobei $l_g^V : V \to V, v \mapsto gv, l_g^W : W \to W, w \mapsto gw$. Es folgt die Aussage mit

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}(l_g^V) = \mathrm{tr}(f^{-1} l_g^W f) = \mathrm{tr}(f^{-1} g f) = \mathrm{tr}(g f f^{-1}) = \mathrm{tr}(l_g^W) = \chi_W(g).$$

□

Definition 2.4.12. Das Tensorprodukt zweier Darstellungen V und W ergibt sich aus dem Tensorprodukt der Vektorräume. Dieses ist gegeben als Quotient $\mathbb{C}^{V\times W}/N$, wobei $\mathbb{C}^{V\times W}$ die Menge der formalen Linearkombinationen $\sum c_{v,w}(v, w), v \in V, w \in W$ und $N \subset \mathbb{C}^{V\times W}$ der von $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), (\lambda v, w) - \lambda(v, w), (v, \lambda w) - \lambda(v, w)$ erzeugte Unterraum ist. Sei $\varphi : \mathbb{C}^{V\times W} \to V \otimes W$ die kanonische Abbildung, dann definiere man das Tensorprodukt als Einschränkung $V\times W \to V\otimes W : v\otimes w = \varphi|_{V\times W}(v, w)$. Insbesondere ergeben sich aus der Äquivalenzrelation auf $V \otimes W$ die folgenden Regeln für $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$,

(ii) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$,

(iii) $(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$.

Kommen wir nun zu Darstellungen: Für V, W Darstellungen mit $\rho_V : G\times V \to V$, $\rho_W : G \times W \to W$. Dann ist durch $\rho_{V\otimes W} : G \times (V \otimes W) \to (V \otimes W), (g, v \otimes w) \to \rho_V(g, v) \otimes \rho_W(g, w)$ eine Darstellung gegeben: $\rho_{V\otimes W}$ als Kombination stetiger Abbildungen stetig und $l_g^{V\otimes W}$ mit der Linearität des Tensorprodukts ebenfalls linear. Weiter gilt $\rho_{V\otimes W}(e, v \otimes w) = \rho_V(e, v) \otimes \rho_W(e, w) = v \otimes w$, $\rho_{V\otimes W}(g, \rho_{V\otimes W}(h, v \otimes w)) = \rho_{V\otimes W}(g, \rho_V(h, v) \otimes \rho_W(h, w)) = \rho_V(g, \rho_V(h, v)) \otimes \rho_W(g, \rho_W(h, w)) = \rho_V(gh, v) \otimes \rho_W(gh, w) = \rho_{V\otimes W}(gh, v \otimes w)$.

Lemma 2.4.13. Seien V und W Darstellungen.

(i) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$ und $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$.

(ii) $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$.

Beweis. (i) Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der Spur: Die Darstellungsmatrix von g hat bzgl. der Basis $(v_i, w_j)_{\substack{1\leq i\leq n=\dim V\\ 1\leq j\leq m=\dim W}}$ von $V\oplus W$ - $(v_i)_i$ Basis von V, $(w_i)_i$ Basis von W - Blockdiagonalgestalt mit zwei Blöcken, einem für V und einem für W. Die Spur von g ist somit gerade die Summe der Blöcke: $\mathrm{tr}(l_g^{V\oplus W}) = \mathrm{tr}(l_g^V) + \mathrm{tr}(l_g^W)$. Sei $l_g^V(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i, l_g^W(w_l) = \sum_{k=1}^m b_{kl} w_k$, insbesondere
$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ bzw. $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ darstellende Matrix von l_g^V bzw. l_g^W. Dann folgt mit der Linearität des Tensorprodukts

$$\begin{aligned} l_g^{V\otimes W}(v_j\otimes w_l) &= l_g^V(v_j)\otimes l_g^W(w_l) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i\right)\otimes\left(\sum_{k=1}^m b_{kl}w_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m a_{ij}b_{kl}(v_i\otimes w_k) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Darstellungsmatrix von $l_g^{V\otimes W}(v_j\otimes w_l)$ sind $a_{ij}b_{kl}$, wobei auf der Diagonale gerade die Koeffizienten liegen für die $i = j$ und $l = k$ gilt:

$$\mathrm{tr}\left(l_g^{V\otimes W}\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m a_{ii}b_{kk} = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^m b_{kk}\right) = \mathrm{tr}(l_g^V)\,\mathrm{tr}(l_g^W).$$

(ii) G wirkt auf $\mathrm{Hom}(V,W)$ mit $(gf)v := gfg^{-1}v$ für $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$, da $(1\cdot f)(v) = f(v), (g\cdot(h\cdot f))(v) = (g\cdot(hfh^{-1}))(v) = ghfh^{-1}g^{-1}(v) = ghf((gh)^{-1})(v) = (gh)\cdot f(v)$.
Für $W = \mathbb{K}$ ist W eine Darstellung mit der trivialen Wirkung, d. h. $G\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}, gv = v$. Dies ist tatsächlich eine Darstellung. Damit ergibt sich für die Translation l_g auf $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$: $l_g^{V^*}(f)(v) = (gf)(v) = gfg^{-1}(v) = f(g^{-1}v) = f(l_{g^{-1}}^V v)$ für $f\in V^*$.
Es gilt somit $l_g^{V^*} = (l_{g^{-1}}^V)^*$, wobei $(l_{g^{-1}}^V)^*$ die duale Abbildung[11] zu $l_{g^{-1}}^V$ ist, d. h. $(l_{g^{-1}}^V)^*(f) = f(l_{g^{-1}}^V)$. Die Spur ist jedoch invariant unter dem Wechsel zur dualen Abbildung, da $\mathrm{tr}(f^*v) = \mathrm{tr}(vf) = \mathrm{tr}(fv)$. Es ergibt sich

$$\mathrm{tr}(l_g^{V^*}) = \mathrm{tr}((l_{g^{-1}}^V)^*) = \mathrm{tr}(l_{g^{-1}}^V).$$

Folglich $\chi_{V^*}(g) = \mathrm{tr}(l_g^{V^*}) = \mathrm{tr}(l_{g^{-1}}^V) = \chi_V(g^{-1})$.

□

[11] Nach Definition gilt für die duale Abbildung $f^*: W^*\to V^*$ der linearen Abbildung $f: V\to W$: $f^*(w^*) = w^*\circ f$, $\forall w^*\in W^*$ - V, W endlich-dimensionale Vektorräume.

Lemma 2.4.14. Für V und W endlich-dimensional gilt $\mathrm{Hom}(V,W) \simeq V^* \otimes W$ mit dem kanonischen Isomorphismus $\varphi : v^* \otimes w \to (u \mapsto v^*(u)w)$.

Beweis. Linearität folgt unmittelbar aus der Definition von φ. Für W endlich-dimensional, d. h. $(w_i)_{1\leq i\leq n=\dim W}$ Basis von W mit dualer Basis $(w_i^*)_{1\leq i\leq n}$ von W^* definiere man

$$\varphi' : \mathrm{Hom}(V,W) \to V^* \otimes W, \quad f \mapsto \sum_{i=1}^{n} (w_i^* \circ f) \otimes w_i.$$

φ' ist offensichtlich auch linear. Außerdem ist φ invers zu φ': Mit $w = \sum_{i=1}^n w_i^*(w)w_i$ folgt

$$\begin{aligned}
\varphi'(\varphi(v^* \otimes w)) &= \sum_{i=1}^{n} (w_i^* \circ (u \mapsto v^*(u)w)) \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} (u \mapsto v^*(u)w_i^*(w)) \otimes w_i \\
&= v^* \otimes \sum_{i=1}^{n} w_i^*(w)w_i = v^* \otimes w. \\
\varphi(\varphi'(f)) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (w_i^* \circ f) \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (u \mapsto w_i^*(f(u))w_i) \\
&= \left(u \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_j^*(f(u))w_i\right) = (u \mapsto f(u)) = f.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.15. Für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum lässt sich im Allgemeinen keine duale Basis konstruieren.

Satz 2.4.16. Seien V und W endliche Darstellungen.

(i) $\int \chi_V(g)dg = \dim V^G$ für $V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall g \in G\}$.

(ii) $\langle \chi_V, \chi_W \rangle := \int \chi_V(g)\overline{\chi_W}(g)dg = \dim \mathrm{Hom}_G(V,W)$ mit $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) : f$ äquivariant$\}$.

(iii) Für V und W irreduzibel: $\int \overline{\chi_V}\chi_W \, dg = \begin{cases} 1 & \text{für } V \simeq W, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. (i) Definiere $p : V \to V^G$, $v \mapsto \int gv \, dg$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, d. h. $\forall h \in G : hp(v) = \int hgv \, dg = \int gv \, dg = p(v)$, wegen den $G-$Invarianz des Integrales. Weiter gilt für $\tilde{v} \in V^G : p(\tilde{v}) = \int g\tilde{v}dg = \int \tilde{v} \, dg = \tilde{v} \int dg = \tilde{v}$ wegen Normiertheit des Integrales. p ist somit eine

Projektion von V auf V^G. Man erweitere eine Basis $(e_i)_{1\leq i\leq d}, d = \dim V^G$ zu einer Basis von V. Damit ist die darstellende Matrix von p aufgefasst als Abbdildung $V \to V$ bzgl. dieser Basis von V eine Blockmatrix mit zwei Diagonalblöcken - E und 0. Folglich $\mathrm{tr}(p) = \dim V^G$.

$$\Rightarrow \dim V^G = \mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}\left(\int l_g dg\right) = \int \mathrm{tr}(l_g)dg = \int \chi_V(g)dg,$$

da tr linear ist und somit mit dem Integral kommutiert. Dies zeigt (i).

(ii) Es gilt $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}^G(V,W)$, denn mit der Wirkung aus dem Beweis zum Lemma 2.4.13 gilt für $f \in \mathrm{Hom}_G(V,W) : (gf)(v) = gfg^{-1}(v) = fgg^{-1}(v) = f(v)$ und für $f \in \mathrm{Hom}^G(V,W) : f(gv) = (gf)(gv) = gf(g^{-1}gv) = gf(v)$. Mit Teil (i):

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = \int \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)dg.$$

Mit Lemma 2.4.13 folgt nun

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) &= \int \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)dg = \int \chi_{V^*\otimes W} dg \\ &= \int \chi_V(g^{-1})\chi_W(g)dg = \int \overline{\chi_V}(g)\chi_W(g)dg,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\overline{V} \simeq V^*$ mit Isomorphismus $v \mapsto \langle\,\cdot\,,v\rangle$ uns Lemma 2.4.11 anwenden lässt. Hierbei entsteht $\overline{V}$ indem man die Skalarmultiplikation auf V, d. h. $\mathbb{C}\times V \to V, (z,v) \mapsto zv$, nach $\mathbb{C}\times V \to V, (z,v) \mapsto \overline{z}v$ abändert. $\overline{V}$ heißt konjugierte Darstellung von V.[12]

(iii) Für den letzten Teil verwende man das Lemma von Schur unten. Teil (ii) von Satz 2.4.16 und Teil (iii) des Lemma's von Schur zeigen nun die Aussage.

□

Lemma von Schur 2.4.17. Sei G eine Gruppe, V und W irreduzible Darstellungen. Dann gilt:

(i) Eine lineare äquivariante Abbildung $f : V \to W$ ist entweder 0 oder ein Isomorphismus.

(ii) Jede lineare äquivariante Abbildung $f : V \to V$ hat die Form $f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

[12] $v \mapsto \langle\,\cdot\,,v\rangle$ ist tatsächlich linear, da das Skalarprodukt im zweiten Argument semilinear ist, also $\lambda\cdot v \mapsto \langle\,\cdot\,,\overline{\lambda}v\rangle = \overline{\overline{\lambda}}\langle\,\cdot\,,v\rangle = \lambda\langle\,\cdot\,,v\rangle$.

(iii) $\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = 1$ für $V \simeq W$, $\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = 0$ für $V \not\simeq W$.

Beweis. Einen Beweis für dieses grundlegende Lemma der Darstellungstheorie findet sich z. B. in Bröcker & tom Dieck [5], S.69, James & Liebeck [14], S.78ff. □

Bemerkung 2.4.18. Allgemein kann man $\langle\cdot,\cdot\rangle$ als Abbildung $C(G,\mathbb{C}) \times C(G,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definieren, wobei $C(G,\mathbb{C})$ die Menge der stetigen Abbildungen von G nach $\mathbb{C}$ ist. Damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sesquilinear ($\chi,\psi,\zeta \in C(G,\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
\langle\lambda(\chi+\psi),\zeta\rangle &= \int \lambda(\chi+\psi)(g)\overline{\zeta(g)}dg \\
&= \lambda\int \chi(g)\overline{\zeta(g)} + \lambda\int \psi(g)\overline{\zeta(g)}dg \\
&= \lambda\langle\chi,\zeta\rangle + \lambda\langle\psi,\zeta\rangle \\
\langle\chi,\lambda(\psi+\zeta)\rangle &= \int \chi(g)\overline{\lambda(\psi+\zeta)}(g)dg \\
&= \overline{\lambda}\int \chi(g)\overline{\psi(g)} + \overline{\lambda}\int \chi(g)\overline{\zeta(g)}dg \\
&= \overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle + \overline{\lambda}\langle\chi,\zeta\rangle.
\end{aligned}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist auch hermitesch:

$$\langle\chi,\psi\rangle = \int \chi(g)\overline{\psi(g)}dg = \int \overline{\overline{\chi(g)}\psi(g)}dg = \overline{\int \overline{\chi(g)}\psi(g)dg} = \overline{\langle\psi,\chi\rangle}.$$

Schließlich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch positiv semidefinit, denn $\int \chi(g)\overline{\chi(g)}dg$ $= \int \underbrace{|\chi(g)|^2}_{\geq 0} dg \geq 0$.

Satz 2.4.19. Eine Darstellung ist durch ihren Charakter eindeutig festgelegt.

Beweis. Sei $V = \bigoplus_j a_j\tilde{V}_j, a_j \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von V in paarweise nicht isomorphe irreduzible Darstellungen $\tilde{V}_j$. Dann gilt mit Lemma 2.4.13 $\chi_V = \sum_j a_j\chi_{\tilde{V}_j}$ und $a_j = \langle\chi_V,\chi_{\tilde{V}_j}\rangle$. Dies wird deutlich, wenn man $a_j\tilde{V}_j = \underbrace{\tilde{V}_j \oplus \ldots \oplus \tilde{V}_j}_{a_j-\text{mal}} \Rightarrow$ $\langle\chi_{a_j\tilde{V}_j},\chi_{\tilde{V}_i}\rangle = \langle\chi_{\tilde{V}_j}+\ldots+\chi_{\tilde{V}_j},\chi_{\tilde{V}_i}\rangle = a_j\langle\chi_{\tilde{V}_j},\chi_{\tilde{V}_i}\rangle = a_j\delta_{ij}$ schreibt. □

Bemerkung 2.4.20. Jeder Charakter ist eine Klassenfunktion, da $\chi(ghg^{-1}) = \mathrm{tr}(ghg^{-1}) = \mathrm{tr}(g^{-1}gh) = \mathrm{tr}(h) = \chi(h)$.

Satz 2.4.21. Jede irreduzible Darstellung von $\mathsf{SU}(2)$ ist isomorph zu einem der V_n.

Beweis. Angenommen es existiert eine Darstellung mit Charakter χ, die nicht isomorph zu einem der $V_n, n \in \mathbb{N}$ ist, d. h. insbesondere $\langle\chi,\chi_n\rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$\langle \chi, \chi \rangle = 1$ nach Satz 2.4.16 (iii). Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge die χ gleichmäßig approximiert, $f_n : \mathsf{SU(2)} \to \mathbb{C}, f_n(A) := f_n(e(t)) = \tilde{f}_n(t), \tilde{f}_n \in W := \langle (\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ mit der Bijektion aus Folgerung 2.4.3. Diese existiert, da jeder Charakter nach Bemerkung 2.4.20 Klassenfunktion ist und man jede stetige Klassenfunktion nach Folgerung 2.4.3 mit einer stetigen geraden $2\pi-$periodische Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ identifizieren kann. W liegt nach Satz 2.4.8 jedoch dicht im Raum der stetigen geraden $2\pi-$periodischen Funktionen.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n = \sum_{i=0}^{k_n} \lambda_{n_i} \chi_i, \quad k_n \in \mathbb{N}, \lambda_{n_i} \in \mathbb{C}, \forall n, i \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \langle \chi, f_n \rangle = \langle \chi, \sum_{i=0}^{k_n} \lambda_{n_i} \chi_i \rangle = \sum_{i=0}^{k_n} \overline{\lambda_{n_i}} \langle \chi, \chi_i \rangle = 0.$$

Wir zeigen, dass $\langle \chi, \cdot \rangle$ stetig bzgl. Supremumsnorm ist. Die Aussage folgt dann aus dem Widerspruch

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \langle \chi, f_n \rangle = \langle \chi, \lim_{n\to\infty} f_n \rangle = \langle \chi, \chi \rangle.$$

Sei $f_n \to \tilde{\chi}$ gleichmäßig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\langle \chi, \tilde{\chi} \rangle - \langle \chi, f_n \rangle| &= |\langle \chi, \tilde{\chi} - f_n \rangle| \leq^{13} \sqrt{\underbrace{|\langle \chi, \chi \rangle|}_{=1}} \sqrt{|\langle \tilde{\chi} - f_n, \tilde{\chi} - f_n \rangle|} \\ &= \sqrt{\int |(\chi - f_n)(g)|^2 dg} \end{aligned}$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |(\tilde{\chi} - f_n)(g)| < \varepsilon$ $\forall g \in \mathsf{SU(2)}$.

$$\Rightarrow \int_{\mathsf{SU(2)}} |(\chi - f_n)(g)|^2 dg < \int_{\mathsf{SU(2)}} \varepsilon^2 dg = \varepsilon^2 \int_{\mathsf{SU(2)}} dg = \varepsilon^2$$
$$\Rightarrow |\langle \chi, \tilde{\chi} \rangle - \langle \chi, f_n \rangle| < \varepsilon \to 0, \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

□

[13] Verwende die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Da wir nicht gezeigt haben, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist, werden wir diese Ungleichung zeigen. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, χ, ψ Charaktere, also insbesondere $\langle \psi, \psi \rangle \neq 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \chi - \lambda\psi, \chi - \lambda\psi \rangle = \langle \chi, \chi \rangle - \langle \chi, \lambda\psi \rangle - \langle \lambda\psi, \chi \rangle + \langle \lambda\psi, \lambda\psi \rangle \\ &\leq \langle \chi, \chi \rangle - \overline{\lambda} \langle \chi, \psi \rangle - \lambda \langle \psi, \chi \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Man wähle nun $\lambda = \frac{\langle \chi, \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}$. Es ergibt sich

$$0 \leq \langle \chi, \chi \rangle - \frac{\langle \chi, \psi \rangle \langle \psi, \chi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \Rightarrow |\langle \chi, \psi \rangle|^2 \leq |\langle \chi, \chi \rangle| |\langle \psi, \psi \rangle|.$$

3 Der Darstellungsring von SU(2)

In diesem dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Struktur des Darstellungsrings $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$, welcher eine formale Erweiterung der Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen darstellt. Dies ist besonders deshalb lohnenswert, da wir im folgenden Kapitel daraus die Struktur der Verlinde Algebra ableiten können.
Die Clebsch-Gordon-Formel werden wir, wie schon am Anfang von Kapitel 2 erwähnt, mit Hilfe von Charakteren und mit Hilfe der geometrischen Reihe beweisen. Sie wird die Grundlage für die explizite Beschreibung des Tensorprodukts in $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ legen. Zuvor jedoch kann auf $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ eine abelsche Gruppenstruktur sowie eine $\mathbb{Z}-$Modulstruktur und insbesondere auch eine Basis erklärt werden.[1]

3.1. Die Gruppe R(SU(2))

Lemma: Clebsch-Gordon-Formel 3.1.1.

$$V_k \otimes V_l = \bigoplus_{j=0}^{m} V_{k+l-2j}, \quad m = \min\{k, l\}.$$

Beweis. Es genügt sich auf Charaktere zu beschränken (siehe Satz 2.4.19). Da die Charaktere von $\mathsf{SU}(2)$ bereits durch ihre Werte auf $e(t)$ eindeutig bestimmt sind[2] reicht es aus die Identität

$$\left(\sum_{i=0}^{k} x^{k-2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{l} x^{l-2j}\right) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{k+l-2j} x^{k+l-2j-2i}\right)$$

[1] Zumeist wird in der Literatur der Darstellungsring als solcher nicht explizit beschrieben, insbesondere nicht für den Spezialfall $\mathsf{SU}(2)$ mit zusätzlicher $\mathbb{Z}-$Modulstruktur. Wir werden deshalb in diesem Kapitel auf weitere Quellenangaben verzichten.

[2] siehe Folgerung 2.4.3.

für $x = e^{it}$ zu zeigen. Dabei haben wir die im Beweis von Lemma 2.4.6 hergeleitete Formel $\chi_n(e(t)) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t} = \sum_{k=0}^{n} \cos((n-2k)t)$ für den Charakter verwendet. Im Folgenden nutze man unter anderem, dass $x \neq 0$ für $x = e^{it}, t \in \mathbb{R}$. Mit der geometrischen Reihe und o. B. d. A. $k \leq l$, also $m = k$:

$$\begin{aligned}
\left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} x^{k-2i}\right) &= x^k \left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} (x^{-2})^i\right) &&= x^k \left(\frac{(x^{-2})^{k+1}-1}{x^{-2}-1}\right) \\
& &&= x^k \left(\frac{x^{-2k-2}-1}{x^{-2}-1}\right) \\
\left(\textstyle\sum_{i=0}^{l} x^{l-2i}\right) &= x^l \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l} (x^{-2})^i\right) &&= x^l \left(\frac{(x^{-2})^{l+1}-1}{x^{-2}-1}\right) \\
& &&= x^l \left(\frac{x^{-2l-2}-1}{x^{-2}-1}\right) \\
\Rightarrow \left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} x^{k-2i}\right) &\cdot \left(\textstyle\sum_{j=0}^{l} x^{l-2j}\right) &&= \frac{x^{k+l}\left(x^{-2(k+l)-4}-x^{-2k-2}-x^{-2l-2}+1\right)}{(x^{-2}-1)^2}
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k+l-2j} x^{k+l-2j-2i} = x^{k+l-2j} \left(\sum_{i=0}^{k+l-2j} (x^{-2})^i\right) \\
&= \frac{x^{k+l-2j}\left(x^{-2(k+l-2j+1)} - 1\right)}{x^{-2} - 1} \\
\Rightarrow &\sum_{j=0}^{k} \frac{x^{k+l-2j}}{x^{-2} - 1}\left(x^{-2k-2l+4j-2} - 1\right) \\
&= \frac{x^{-k-l-2}}{x^{-2} - 1} \sum_{j=0}^{k} x^{2j} - \frac{x^{k+l}}{x^{-2} - 1} \sum_{j=0}^{k} x^{-2j} \\
&= \frac{x^{-k-l-2}}{(x^{-2} - 1)^2}\left((-x^{-2})(x^{2(k+1)} - 1)\right) - \frac{x^{k+l}}{(x^{-2} - 1)^2}\left(x^{-2(k+1)} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{k+l}}{(x^{-2} - 1)^2}\left(x^{-2k-2l-4}(1 - x^{2(k+1)})\right) - \frac{x^{k+l}}{(x^{-2} - 1)^2}\left(x^{-2k-2} - 1\right) \\
&= \frac{x^{k+l}}{(x^{-2} - 1)^2}\left(x^{-2k-2l-4}(1 - x^{2(k+1)}) - x^{-2k-2} + 1\right) \\
&= \frac{x^{k+l}}{(x^{-2} - 1)^2}\left(x^{-2(k+l)-4} - x^{-2l-2} - x^{-2k-2} + 1\right) \\
\Rightarrow &\left(\sum_{i=0}^{k} x^{k-2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{l} x^{l-2j}\right) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{k+l-2j} x^{k+l-2j-2i}\right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.2. Setzt man $V(k/2) := V_k$ so liest sich die Clebsch-Gordon-Formel in der symmetrischen Form

$$\begin{aligned} V(k) \otimes V(l) &= V_{2k} \otimes V_{2l} = \bigoplus_{j=0}^{2m} V_{2k+2l-2j}, \quad m = \min\{k,l\} \\ &= V(k+l) \oplus V(k+l-1) \oplus \ldots \oplus V(|k-l|).^3 \end{aligned}$$

Diese Notation ist in der Literatur ebenfalls gebräuchlich, wird von uns aber nicht weiter benötigt.

Definition 3.1.3. Sei $\overline{\mathsf{R(SU(2))}}$ die Menge der formalen Differenzen $[V]-[W]$ von Isomorphieklassen endlich-dimensionaler Darstellungen V und W mit der folgenden Äquivalenzrelation: $[V]-[W] \sim [\tilde{V}]-[\tilde{W}] \Leftrightarrow V \oplus \tilde{W} \oplus Z \simeq \tilde{V} \oplus W \oplus Z$ für eine weitere Darstellung Z.
Die Isomorphieklasse einer Darstellung V bezeichnen wir im Weiteren mit $[V]$.

Wir zeigen zunächst, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Dabei gelten Reflexivität und Symmetrie nach Definition. Transitivität ergibt sich wie folgt: Sei $[V]-[W] \sim [\tilde{V}]-[\tilde{W}]$, $[\tilde{V}]-[\tilde{W}] \sim [\widehat{\tilde{V}}]-[\widehat{\tilde{W}}]$, d. h. es gibt Darstellungen Z, $\hat{Z}$ mit $V \oplus \tilde{W} \oplus Z \simeq \tilde{V} \oplus W \oplus Z$ und $\tilde{V} \oplus \hat{W} \oplus \hat{Z} \simeq \hat{V} \oplus \tilde{W} \oplus \hat{Z}$. Dann gilt $V \oplus \hat{W} \oplus \tilde{Z} \simeq \hat{V} \oplus W \oplus \tilde{Z}$ für $\tilde{Z} = \tilde{V} \oplus Z \oplus \hat{Z}$ oder auch für $\tilde{Z} = \tilde{W} \oplus Z \oplus \hat{Z}$. Wir erhalten $[V]-[W] \sim [\hat{V}]-[\hat{W}]$.

Lemma 3.1.4. $\mathsf{R(SU(2))} := \overline{\mathsf{R(SU(2))}}/\!\sim$ ist mit der Verknüpfung

$$\begin{aligned} + \;:\; & \mathsf{R(SU(2))} \times \mathsf{R(SU(2))} \to \mathsf{R(SU(2))}, \\ & ([V]-[W],[\tilde{V}]-[\tilde{W}]) \mapsto [V \oplus \tilde{V}]) - ([W \oplus \tilde{W}] \end{aligned}$$

eine abelsche Gruppe.

Beweis. (i) Die Addition ist wohldefiniert, da mit V, $\tilde{V}$ bzw. W, $\tilde{W}$ auch $V \oplus \tilde{V}$ bzw. $W \oplus \tilde{W}$ Darstellungen sind und für $[V]-[W] \sim [V']-[W'] \Rightarrow V \oplus W' \oplus Z \simeq V' \oplus W \oplus Z$, $[\tilde{V}]-[\tilde{W}] \sim [\tilde{V}']-[\tilde{W}'] \Rightarrow \tilde{V} \oplus \tilde{W}' \oplus \tilde{Z} \simeq \tilde{V}' \oplus \tilde{W} \oplus \tilde{Z}$:

$$\begin{aligned} V \oplus \tilde{V} \oplus W' \oplus \tilde{W}' \oplus Z \oplus \tilde{Z} &\simeq V \oplus W' \oplus Z \oplus \tilde{V} \oplus \tilde{W}' \oplus \tilde{Z} \\ &\simeq V' \oplus W \oplus Z \oplus \tilde{V}' \oplus \tilde{W} \oplus \tilde{Z} \\ &\simeq V' \oplus \tilde{V}' \oplus W \oplus \tilde{W} \oplus Z \oplus \tilde{Z} \end{aligned}$$

Es folgt $[V \oplus \tilde{V}]-[W \oplus \tilde{W}] \sim [V' \oplus \tilde{V}']-[W' \oplus \tilde{W}']$.

[3] Auch diese direkte Summe soll nur als Summe über $2(\min\{k,l\}+1)$ Summanden verstanden werden.

(ii) Die Verknüpfung ist assoziativ, da für $[V]-[W], [\tilde{V}]-[\tilde{W}], [\widehat{V}]-[\widehat{W}] \in$ $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$:

$$\begin{aligned}
&([V]-[W])+(([\tilde{V}]-[\tilde{W}])+([\widehat{V}]-[\widehat{W}]))\\
&=([V]-[W])+([\tilde{V}\oplus\widehat{V}]-[\tilde{W}\oplus\widehat{W}])\\
&=[V\oplus\tilde{V}\oplus\widehat{V}]-[W\oplus\tilde{W}\oplus\widehat{W}]\\
&=([V\oplus\tilde{V}]-[W\oplus\tilde{W}])+([\widehat{V}]-[\widehat{W}])\\
&=(([V]-[W])+([\tilde{V}]-[\tilde{W}]))+([\widehat{V}]-[\widehat{W}]).
\end{aligned}$$

(iii) $+$ ist kommutativ:

$$\begin{aligned}
([V]-[W])+([\tilde{V}]-[\tilde{W}]) &= ([V\oplus\tilde{V}])-([W\oplus\tilde{W}])\\
&=^{4}([\tilde{V}\oplus V])-([\tilde{W}\oplus W])\\
&= ([\tilde{V}]-[\tilde{W}])+([V]-[W]).
\end{aligned}$$

(iv) $[0]-[0]$ is neutrales Element:[5]

$$([V]-[W])+([0]-[0])=[V\oplus 0]-[W\oplus 0]=[V]-[W]$$

(v) $\forall[V]-[W]\in\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))\ \exists[\tilde{V}]-[\tilde{W}]\in\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$:

$$([V]-[W])+([\tilde{V}]-[\tilde{W}])= ([V\oplus\tilde{V}])-([W\oplus\tilde{W}])=[0]-[0]$$

Wähle $\tilde{V}=W$, $\tilde{W}=V : V\oplus W\oplus 0\simeq W\oplus V\oplus 0 \Rightarrow ([V\oplus\tilde{V}])-([W\oplus\tilde{W}]) =$ $[0]-[0]$ in $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$.[5]

□

3.2. Basis, $\mathbb{Z}-$Modul- und Ringstruktur

Lemma 3.2.1. $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ ist ein $\mathbb{Z}-$Modul, wobei die Skalarmultiplikation durch

$$\begin{aligned}
\cdot\ :\ &\mathbb{Z}\times\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))\to\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))\\
&(z,[V]-[W])\mapsto\sum_{i=1}^{|z|}\varphi_z([V]-[W])
\end{aligned}$$

gegeben ist. Hierbei definieren wir $\varphi_z=\operatorname{sign}(z)\,\mathrm{id}$ für $z\in\mathbb{Z}$, d.h $\forall[V]-[W]\in$ $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)), z<0 : \varphi_z([V]-[W])=[W]-[V]; \varphi_0=0$ und für $z>0:\varphi_z=\mathrm{id}$.
Für die leere Summe erhält man: $\sum_{i=1}^{0}([V]-[W])=[0]-[0]$.

[4] Verwende $V\oplus\tilde{V}\simeq\tilde{V}\oplus V\Rightarrow[V\oplus\tilde{V}]=[\tilde{V}\oplus V]$.
[5] Mit Kommutativität folgt aus linksneutral/linksinvers schon rechtsneutral/rechtsinvers.

Beweis. Für φ_z gilt $\varphi_{z_1 z_2} = \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Außerdem ist φ_z als Vielfaches der Identität homomorph.

(i) „$\cdot$“ ist wohldefiniert, denn wegen der Kommutativität der Addition ist dies gerade die Addition von Termen $[V]-[W]$, $[W]-[V]$ und $[0]-[0]$.

(ii) Assoziativität:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot [V] - [W]) &= z_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{|z_2|} \varphi_{z_2}([V]-[W]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{|z_1|} \varphi_{z_1} \left(\sum_{j=1}^{|z_2|} \varphi_{z_2}([V]-[W]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{|z_1||z_2|} \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}([V]-[W]) \\
&= \sum_{i=1}^{|z_1 z_2|} \varphi_{z_1 z_2}([V]-[W]) \\
&= (z_1 z_2) \cdot ([V]-[W]).
\end{aligned}$$

(iii) Distributivität:

$$\begin{aligned}
& z \cdot (([V]-[W]) + ([\tilde{V}]-[\tilde{W}])) = z \cdot \left([V \oplus \tilde{V}] - [W \oplus \tilde{W}] \right) \\
&=^{6} \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} (V \oplus \tilde{V}) \right] - \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} (W \oplus \tilde{W}) \right] \\
&= \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} V \oplus \bigoplus_{i=1}^{|z|} \tilde{V} \right] - \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} W \oplus \bigoplus_{i=1}^{|z|} \tilde{W} \right] \\
&= \left(\left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} V \right] - \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} W \right] \right) + \left(\left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} \tilde{V} \right] - \left[\bigoplus_{i=1}^{|z|} \tilde{W} \right] \right) \\
&= \sum_{i=1}^{|z|} \varphi_z([V]-[W]) + \sum_{i=1}^{|z|} \varphi_z([\tilde{V}]-[\tilde{W}]) \\
&= z \cdot ([V]-[W]) + z \cdot ([\tilde{V}]-[\tilde{W}]).
\end{aligned}$$

Man beachte weiter, dass $|z_1+z_2| = \operatorname{sign}(z_1+z_2)(\operatorname{sign}(z_1)|z_1| + \operatorname{sign}(z_2)|z_2|)$

[6] Für $z<0$ vertausche ab dieser Stelle $V \leftrightarrow W$, $\tilde{V} \leftrightarrow \tilde{W}$. Der Fall $z=0$ ist trivial.

für z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)\cdot([V]-[W]) &= \sum_{i=1}^{|z_1+z_2|} \varphi_{z_1+z_2}([V]-[W])\\ &= \operatorname{sign}(z_1+z_2)\operatorname{sign}(z_1)\sum_{i=1}^{|z_1|}\varphi_{z_1+z_2}([V]-[W])\\ &\quad+\operatorname{sign}(z_1+z_2)\operatorname{sign}(z_2)\sum_{i=1}^{|z_2|}\varphi_{z_1+z_2}([V]-[W])\\ &= \sum_{i=1}^{|z_1|}\varphi_{z_1}([V]-[W])+\sum_{i=1}^{|z_2|}\varphi_{z_2}([V]-[W])\\ &= z_1\cdot([V]-[W])+z_2\cdot([V]-[W]).\end{aligned}$$

Somit ist $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ ein $\mathbb{Z}-$Modul. □

Lemma 3.2.2. $b_n = [V_n] - [0], n \in \mathbb{N}$ bilden eine Basis des $\mathbb{Z}-$Modul $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$. $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ wird so zu einem freien $\mathbb{Z}-$Modul.

Beweis. Die $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden ein linear unabhängiges System, da V_n paarweise nicht isomorph sind. Genauer $\sum_{i=1}^k a_i b_{j_i} = 0, a_i \in \mathbb{Z}$ für $j_i \in \mathbb{N}$ genau dann wenn $a_i = 0$. Um dies zu zeigen definiere man die Dimension eines Elementes $[V] - [W] \in \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ als Differenz der Dimensionen von V und W - $\dim_{[\,]}([V]-[W]) := |\dim V - \dim W|$ -, insbesondere $\dim_{[\,]} b_n = \dim V_n$.[7] Somit $\dim_{[\,]}\left(\sum_{i=1}^k a_i b_{j_i}\right) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^k a_i V_{j_i}\right) = \sum_{i=1}^k a_i \dim(V_{j_i}) = \dim_{[\,]}([0]-[0]) = 0$. Wegen $\dim(V_{j_i}) = j_i + 1 > 0$ muss also $a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ gelten.
Wegen Lemma 2.2.1 wissen wir, dass jede Darstellung V von $\mathsf{SU}(2)$ direkte Summe irreduzibler Darstellungen ist, also direkte Summe von V_n.
Es gilt für $[V] - [W] \in \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ und o. B. d. A. $k \geq m$:[8]

$$[V]-[W] = \left[\bigoplus_{i=1}^k \tilde{V}_{j_i}\right] - \left[\bigoplus_{i=1}^m \tilde{W}_{j_i}\right] = \sum_{i=1}^k([\tilde{V}_{j_i}] - [\tilde{W}_{j_i}]),$$

[7] $\dim_{[\,]}$ ist wohldefiniert, denn für $[V]-[W] \sim [\tilde{V}]-[\tilde{W}] \Leftrightarrow V\oplus\tilde{W} \simeq \tilde{V}\oplus W \Rightarrow \dim(V)+\dim(\tilde{W}) = \dim(\tilde{V})+\dim(W) \Rightarrow \dim(V)-\dim(W) = \dim(\tilde{V})-\dim(\tilde{W})$.

[8] Setze $\tilde{W}_i = 0$ für $m+1 \leq i \leq k$: $\bigoplus_{i=1}^k \tilde{W}_{j_i} = \bigoplus_{i=1}^m \tilde{W}_{j_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-m}(0) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \tilde{W}_{j_i} \Rightarrow \left[\bigoplus_{i=1}^k \tilde{W}_{j_i}\right] = \left[\bigoplus_{i=1}^m \tilde{W}_{j_i}\right]$.

$\tilde{V}_{j_i}$, $\tilde{W}_{j_i}$ irreduzibel und nach Satz 2.4.21 für gewisse nicht notwendigerweise verschiedene j_i, l_i, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$:[9]

$$\begin{aligned}
[V]-[W] &= \sum_{i=1}^{k}([\tilde{V}_{j_i}]-[\tilde{W}_{j_i}]) = \sum_{i=1}^{k}([V_{j_i}]-[V_{l_i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{k}([V_{j_i}]-[0])+([0]-[V_{l_i}]) = \sum_{i=1}^{k}(b_{j_i}+(-1)\cdot b_{l_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{2k} a_i b_{m_i}, \quad a_i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ erzeugt.
Als linear unabhängiges Erzeugendensystem ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis. □

Lemma 3.2.3. $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ ist mit dem Tensorprodukt

$$\begin{aligned}
\times \ : \ & \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) \times \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) \to \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) \\
& ([V]-[W],[V']-[W']) \mapsto [V\otimes V']-[W\otimes W']
\end{aligned}$$

ein kommutativer Ring.

Beweis. Offensichtlich ist $[0\otimes 0]=[0]$, da schon $0\times 0 \simeq 0$. Die Clebsch-Gordon-Formel überträgt sich von den $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
b_k \times b_l &= ([V_k]-[0])\otimes([V_l]-[0]) = [V_k\otimes V_l]-[0] \\
&= \left[\bigoplus_{j=0}^{\min\{k,l\}} V_{k+l-2j}\right]-[0] = \sum_{j=0}^{\min\{k,l\}}([V_{k+l-2j}]-[0]) = \sum_{j=0}^{\min\{k,l\}} b_{k+l-2j}
\end{aligned}$$

Mit den in Definition 2.4.12 beschriebenen Eigenschaften (i) und (ii) erhält man Distributivität zwischen Addition und Multiplikation. Zusammen mit der Distributivität der Skalarmultiplikation lässt sich die Struktur von der Basis auf ganz $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ fortsetzen, d. h. für $[V]-[W]$, $[V']-[W'] \in \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$:

$$\begin{aligned}
([V]-[W])\times([V']-[W']) &= \left(\sum_{i=0}^{k} a_{m_i} b_{m_i}\right)\times\left(\sum_{j=0}^{l} c_{n_j} b_{n_j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{m_i} c_{n_j}\left(b_{m_i}\times b_{n_j}\right)
\end{aligned}$$

[9]Um die Notation zu erleichtern setze man $V_{-1} := 0$, $b_{-1} := [0]-[0]$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{m_i} c_{n_j} \sum_{r=0}^{\min\{m_i,n_j\}} b_{m_i+n_j-2r} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \sum_{r=0}^{\min\{m_i,n_j\}} a_{m_i} c_{n_j} b_{m_i+n_j-2r},
\end{aligned}
$$

für gewisse $k, l \in \mathbb{N}$, $m_i, n_j \in \mathbb{N}$ und $a_{m_i}, c_{n_j} \in \mathbb{Z}$.

(i) Daraus folgt unmittelbar die Kommutativität:

$$
\begin{aligned}
([V'] - [W']) \times ([V] - [W]) &= \left(\sum_{j=0}^{l} c_{n_j} b_{n_j}\right) \times \left(\sum_{i=0}^{k} a_{m_i} b_{m_i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{m_i} c_{n_j} \left(b_{n_j} \times b_{m_i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{m_i} c_{n_j} \sum_{r=0}^{\min\{m_i,n_j\}} b_{m_i+n_j-2r} \\
&= ([V] - [W]) \times ([V'] - [W']).
\end{aligned}
$$

(ii) Das Einselement ist b_0, denn $b_0 \times ([V] - [W]) = \sum_{i=0}^{k} a_{m_i}(b_0 \times b_{m_i}) = \sum_{i=0}^{k} a_{m_i} b_{m_i} = [V] - [W]$.

(iii) Wir zeigen Assoziativität zunächst auf der Basis. Dazu induziere man nach n, wobei n der größte Index eines b_i ist. Der Induktionsanfang, $n = 0$ ergibt sich zu $(b_0 \times b_0) \times b_0 = b_0 \times b_0 = b_0 \times (b_0 \times b_0)$. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ verwende man $b_{n+1} = b_n \times b_1 - b_{n-1}$. Für $0 \le l, k \le n$ ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
(b_l \times b_{n+1}) \times b_k &= (b_l \times (b_n \times b_1 - b_{n-1})) \times b_k \\
&= (b_l \times (b_n \times b_1)) \times b_k + (b_l \times (-b_{n-1})) \times b_k \\
&=^{IV} b_l \times ((b_n \times b_1) \times b_k) + b_l \times ((-b_{n-1}) \times b_k) \\
&= b_l \times ((b_n \times b_1 - b_{n-1}) \times b_k) \\
&= b_l \times (b_{n+1} \times b_k).
\end{aligned}
$$

Für die Fälle $l = n+1$ oder $k = n+1$ kann man ebenso zerlegen und die Distributivgesetze ausnutzen. Somit gilt für alle $0 \le j, k, l \le n+1$: $(b_l \times b_j) \times b_k = b_l \times (b_j \times b_k)$. Damit ist die Induktion abgeschlossen und die Verknüpfung somit assoziativ, da sich diese Eigenschaft von der Basis auf ganz $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ überträgt, d. h. für $[V]-[W], [V']-[W'], [\tilde{V}]-[\tilde{W}] \in \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ und gewisse $a_{m_i}c_{n_j}d_{p_t} \in \mathbb{Z}$, $m_i, n_j, p_t \in \mathbb{Z}$, $k, l, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&(([V]-[W]) \times ([V']-[W'])) \times [\tilde{V}]-[\tilde{W}] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{m_i}c_{n_j}(b_{m_i} \times b_{n_j})\right) \times \left(\sum_{t=0}^{q} d_{p_t}b_{p_t}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\sum_{t=0}^{q} a_{m_i}c_{n_j}d_{p_t}((b_{m_i} \times b_{n_j}) \times b_{p_t}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\sum_{t=0}^{q} a_{m_i}c_{n_j}d_{p_t}(b_{m_i} \times (b_{n_j} \times b_{p_t})) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} a_{m_i}b_{m_i}\right) \times \left(\sum_{j=0}^{l}\sum_{t=0}^{q} c_{n_j}d_{p_t}(b_{n_j} \times b_{p_t})\right) \\
&= ([V]-[W]) \times (([V']-[W']) \times [\tilde{V}]-[\tilde{W}])
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.4. Ein Ring der gleichzeitig $\mathbb{Z}-$Modul ist, wird auch $\mathbb{Z}-$Algebra genannt.
Tatsächlich kann man den Ring und die $\mathbb{Z}-$Algebra $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ zu einer $\mathbb{C}-$Algebra $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ erweitern. Wir können $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ als Menge der formalen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von Elementen in $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ auffassen, wobei die $\mathbb{C}$-Skalarmultiplikation „$*$“ die Skalarmultiplikation aus Lemma 3.2.1 auf dem $\mathbb{Z}-$Modul $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ erweitert, d. h. $z * ([V]-[W]) = z \cdot ([V]-[W])$ für $z \in \mathbb{Z}$.
Insbesondere ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis der $\mathbb{C}-$Algebra.

4 Die Verlinde Algebra

Den entscheidenden Schritt auf dem Weg zur expliziten Beschreibung des Produkts in den Verlinde Algebren über $\mathsf{SU}(2)$ wird in diesem Kapitel der Satz 4.1.3 darstellen, der uns eine Zerlegung des Darstellungsrings in ein $\mathbb{Z}-$Untermodul und ein Ideal ermöglicht. Leider liegt mir kein Beweis zu dieser Aussage vor, welche jedoch z. B. von Andras Szenes bewiesen worden sein soll.[1]
Deshalb werden wir versuchen diese Zerlegung elementar zu beweisen. Dieser Satz liefert uns mit der im Beweis von Satz 4.2.3 gezeigten Behauptung schließlich eine explizite Beschreibung der multiplikativen Verknüpfung in den Verlinde Algebren über $\mathsf{SU}(2)$. Die beiden verwendeten Bedingungen (Satz 4.1.3 und die genannte Behauptung) können auf anderem Wege auch aus Überlegungen der $K-$Theorie abgeleitet werden, wie in „Basic Bundle Theory and $K-$Cohomology Invariants“, Seite 270 gezeigt wird. Die explizite Produktdarstellung findet sich bei Schottenloher [19], S. 231.

4.1. Zerlegung von R(SU(2))

Definition 4.1.1. Der Quotientenring $V_k := V_k(\mathsf{SU}(2)) = \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))/(b_{k+1})$ heißt $k-$te Verlinde Algebra. Hierbei bezeichnet (b_k), $k \in \mathbb{N}$ das von b_k erzeugte Ideal in $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$.

Bemerkung 4.1.2. Jeder Quotientenring $\mathcal{R}/\mathcal{I} = \{a + \mathcal{I} : a \in \mathcal{R}\}$ (bzw. Faktorring bzw. Restklassenring) ist mit

$$\begin{aligned} + \ &: \ \mathcal{R}/\mathcal{I} \times \mathcal{R}/\mathcal{I} \to \mathcal{R}/\mathcal{I} \\ &\quad (a+\mathcal{I}, b+\mathcal{I}) \mapsto (a+b)+\mathcal{I}, \\ \cdot \ &: \ \mathcal{R}/\mathcal{I} \times \mathcal{R}/\mathcal{I} \to \mathcal{R}/\mathcal{I} \\ &\quad (a+\mathcal{I}, b+\mathcal{I}) \mapsto (ab)+\mathcal{I}, \end{aligned}$$

[1] siehe Bott [4], S.89.

ein Ring. Im Falle eines kommutativen Ringes $\mathcal{R}$ ist auch der Quotientenring kommutativ.[2]

Satz 4.1.3.

$$\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2)) = (b_{k+1}) \oplus \langle b_0, \ldots, b_k \rangle, \quad k \geq 0$$

wobei $\langle b_0, \ldots, b_k \rangle$ der von den $b_0, \ldots, b_k$ erzeugte $\mathbb{Z}-$Untermodul ist.

Wir zerlegen den Beweis von 4.1.3 in einige Hilfslemmata. Man beachte zunächst, dass für ein $V \in \mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ und $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall 1 \leq i \leq m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&b_n \times b_k = \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j}, \quad \text{für } n < k, \\
&b_n \times b_k = \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}, \quad \text{für } n \geq k, \\
&\Rightarrow V \times b_k = \left(\sum_{n=0}^{m} a_n b_n \right) \times b_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{n=k}^{m} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}, \\
&\Rightarrow (b_k) = \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{n=k}^{m} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j} : a_n \in \mathbb{Z} \right\},
\end{aligned}$$

gilt.

Lemma 4.1.4. $b_i \notin (b_k)$ für $0 \leq i < k$.

Beweis. Angenommen $b_i \in (b_k)$ für $i < k$, dann existieren $a_i \in \mathbb{Z}\,\forall 1 \leq i \leq m \in \mathbb{N}$, sodass

$$b_i = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{n=k}^{m} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j} \tag{4.1.4.1}$$

Wir betrachten zunächst einen Spezialfall ($k = 2$).[3] Der allgemeine Beweis verläuft dann analog. Die Beweisidee liegt darin, dass wir versuchen Gleichung 4.1.4.1 zu erfüllen und dabei schrittweise die a_i festlegen, es aber immer ein $b_j, j \neq i$ auf der rechten Seite von Gleichung 4.1.4.1 gibt, das nicht verschwindet.

[2] Diese Aussage findet sich in den meisten Algebrabüchern, z. B. Bosch [3].

[3] Für $k = 1$ geht man ebenso vor.

(i) Angenommen $b_0 \in (b_2)$, dann lässt sich b_0 wie folgt darstellen:

$$b_0 = a_0 b_2 + a_1(b_1 + b_3) + \sum_{n=2}^{m} a_n(b_{n+2} + b_n + b_{n-2})$$

Es muss $a_2 = 1$ gelten, da nur für $n = 2$, $b_{n+2} + b_n + b_{n-2}$ den Summanden b_0 enthält. Somit existieren auf der rechten Seite der Gleichung auch der Ausdruck $b_4 + b_2$. Da wir a_0 beliebig wählen können, fällt der Term b_2 weg. Damit b_4 nicht länger auftaucht, müssen wir a_4 und a_6 so wählen, dass $a_4 + a_6 = -1$. Somit verschwindet b_4, jedoch erhalten wir einen neuen Term - $-b_6$.

$$\Rightarrow a_8 = 1 \Rightarrow a_{10} = -1 \Rightarrow a_{12} = 0 \Rightarrow a_{14} = 1 \Rightarrow a_{16} = -1 \Rightarrow \dots$$
$$\Rightarrow a_{6t} = -1, a_{6t+2} = 1, a_{8t+4} = 0, \quad \forall t \geq 1.$$

Da wir jedoch nur endliche Linearkombinationen betrachten ($m < \infty$) und offensichtlich $\lim_{i\to\infty} a_i \neq 0$, erhalten wir einen Widerspruch. Folglich kann b_0 nicht in (b_2) sein.
Analog folgt der Fall für b_1: Sei nun $b_1 \in (b_2)$

$$\begin{aligned}
&b_1 = a_0 b_2 + a_1(b_1 + b_3) + \sum_{n=2}^{m} a_n(b_{n+2} + b_n + b_{n-2}) \\
&\Rightarrow a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_5 = -1 \Rightarrow a_7 + a_9 = 1 \Rightarrow a_{11} = -1 \Rightarrow \dots \\
&\Rightarrow a_{6t+1} + a_{6t+3} = -1,\ a_{6t+5} = -1, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich ein Widerspruch zur Endlichkeit der Linearkombination - $b_1 \notin (b_2)$.

(ii) Kommen wir nun zum allgemeinen Fall $k \geq 0$. Angenommen $b_i \in (b_k)$ für ein $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Dann gilt

$$b_i = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{n=k}^{m} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}. \tag{4.1.4.2}$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{Z}$.
Sei

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_n : b_i \text{ Summand von } \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}\} \\
&= \{a_n | \exists j \in \{0, \dots, \max\{n,k\}\} : n + k - 2j = i\}, \\
B_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \in A_1\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n \in B_1} a_n = 1.$$

Sei

$$\begin{aligned} c(1) &:= \max\{n \in B_1 : a_n \neq 0\}, \\ a(1) &:= a_{c(1)}, \\ b(1) &:= b_{c(1)+k}. \end{aligned}$$

Dann ist $a(1)b(1)$ gerade der am höchsten indizierte nicht verschwindende Summand in der Summe

$$\sum_{\substack{n \in B_1 \\ n<k}} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{\substack{n \in B_1 \\ n \geq k}} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}.$$

Er verschwindet nicht, da $a(1) \neq 0$ (nach Definition von $a(1)$) und $b(1)$ kein Summand in

$$\sum_{\substack{n \in B_1 \setminus \{c(1)\} \\ n<k}} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{\substack{n \in B_1 \setminus \{c(1)\} \\ n \geq k}} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}$$

ist und somit wegen der linearen Unabhängigkeit der b_n nicht verschwinden kann. Insbesondere gilt $c(1) + k \geq k > i$.[4]
Definiere nun rekursiv für $l \geq 2$

$$\begin{aligned} A_l &= \{a_n | \exists j \in \{0, \ldots, \max\{n,k\}\} : n + k - 2j = c(l-1) + k\}, \\ B_l &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \in A_l\} \\ \Rightarrow & \sum_{n \in B_l \setminus c(l-1)} a_n = -a(l-1). \\ c(l) &:= \max\{n \in B_l : a_n \neq 0\}, \\ a(l) &:= a_{c(l)}, \\ b(l) &:= b_{c(l)+k}. \end{aligned}$$

Es ist jeweils $a(l)b(l)$ der höchsten indizierte nicht verschwindende Summand in der Summe $\sum_{\substack{n \in B_l \\ n<k}} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{\substack{n \in B_l \\ n \geq k}} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}$.
Wegen $\min\{n : n \in B_l\} \geq c(l-1)$ und $c(l-1)$ durch den vorangegangenen Schritt bereits fest, muss es um den Term $a(l-1)b(l-1)$ auszugleichen ein $n \in B_l, n > c(l-1)$ geben, mit $a_n \neq 0$. Insbesondere $c(l) > c(l-1)$. Es

[4] Diese Aussage unterscheidet die Fälle $i < k$ und $i \geq k$; siehe auch Bemerkung 4.1.5.

existiert somit eine Teilfolge $(a_{c(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{c(l)} \neq 0, \forall l \in \mathbb{N}$. Da wir b_i aber nur als endliche Linearkombination schreiben dürfen $(m < \infty)$ ergibt sich ein Widerspruch zu $b_i \in (b_k)$.

$\square$

Bemerkung 4.1.5. Für $i \geq k$ kann durchaus $b_i \in (b_k)$ gelten, sogar für $i > k$. Ein Beispiel dafür ist z. B. $b_5 \in (b_2)$ weil $b_5 = b_5 + b_3 + b_1 - b_3 - b_1 = b_3 \times b_2 - b_1 \times b_2$. Tatsächlich gibt es damit schon unendlich viele $b_i \in (b_2)$, denn induktiv erhält man $b_{6j-1} \in (b_2), \forall j \geq 1$.
Der Beweis von Lemma 4.1.4 scheitert an der Stelle, an der wir annehmen, dass wir den Anteil $b(1)$ verschwinden lassen müssen, denn ist $i > k$, so kann $b(1) = b_i$ sein und b_i benötigen wir für die Gleichheit in Gleichung 4.1.4.2 - b_i ließe sich in diesem Fall also linear kombinieren.

Folgerung 4.1.6. $V \in \langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle \setminus \{0\} \notin (b_k)$.

Beweis. Die Argumentation verläuft analog zu der im Beweis zu Lemma 4.1.4. Angenommen $V = \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i \in (b_k), c_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \sum_{j=0}^{n} b_{n+k-2j} + \sum_{n=k}^{m} a_n \sum_{j=0}^{k} b_{n+k-2j}.$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{Z}$. Es existiert ein $a_n \neq 0$, da $V \neq 0$. Anstatt einer Menge A_1 wählen wir nun k Mengen, $0 \leq i \leq k-1$

$$\begin{aligned} A_1^i &:= \{a_n \mid \exists j \in \{0, \ldots, \max\{n,k\}\} : n + k - 2j = i\}, \\ B_1 &:= \{n \in \mathbb{N} : \exists i \in \{0, \ldots, k-1\} : a_n \in A_1^i\}, \\ c(1) &:= \max\{n \in B_1 : a_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $c(1) + k \geq k$.
Nach diesen leichten Modifikationen kann der Beweis von Lemma 4.1.4 übernommen werden. $\square$

Folgerung 4.1.7. Folgerung 4.1.6 zeigt auch $\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle \cap (b_k) = \{0\}$, $k \geq 1$, da 0 offensichtlich in beiden Mengen liegt.

Lemma 4.1.8. Jedes Element in $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ lässt sich als Summe von Elementen aus $\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle$ und (b_k) für $k \geq 1$ schreiben.

Beweis. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Basis von $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ genügt es zu zeigen, dass sich jedes Basiselement als Summe von Elementen aus $\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle$ und (b_k) schreiben lässt. Für $0 \leq j \leq k-1$ lassen sich die b_j direkt aus $\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle$ wählen. b_k liegt in (b_k). Für $j > k$ induziere man nach j, wobei wir als Induktionsanfang bereits $b_0, \dots, b_k \in \langle b_0, \dots, b_{k-1}\rangle + (b_k)$ gezeigt haben. Zeige $j-1 \to j = k+i, i \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_k \times b_i &= \sum_{l=0}^{\min\{i,k\}} b_{k+i-2l} \\ \Rightarrow b_{k+i} &= \underbrace{b_k \times b_i}_{\in (b_k)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{\min\{i,k\}} (-b_{k+i-2l})}_{\text{siehe IV}} \in \langle b_0, \dots, b_{k-1}\rangle + (b_k). \end{aligned}$$

□

Beweis von 4.1.3. Folgerung 4.1.7 und Lemma 4.1.8 zeigen Satz 4.1.3. □

4.2. Addition und Multiplikation auf V_k

Eine direkte Folgerung aus dem vorangegangenen Satz 4.1.3 ist:

Satz 4.2.1. Die Verlinde Algebra V_k ist als $\mathbb{Z}-$Modul kanonisch isomorph zu $\langle b_0, \dots, b_k\rangle$. Jedes $V \in V_k$ lässt sich darstellen als $V = W + (b_{k+1}) = \sum_{j=0}^k a_j b_j + (b_{k+1})$, $W = \sum_{j=0}^k a_j b_j \in \langle b_0, \dots, b_k\rangle$.

Folgerung 4.2.2. Die Summe auf V_k ist die natürliche additive Abbildung auf einem Quotientenring, wie wir sie in Bemerkung 4.1.2 eingeführt haben.

Satz 4.2.3. Die Multiplikation auf V_k ist die multiplikative Abbildung auf einem Quotientenring (vgl. Bemerkung 4.1.2).
Damit gilt für $m, p \in \mathbb{N}$, $m + p \leq k$, $b_{m+p}, b_p \in V_k$:[5]

$$(b_{m+p} + (b_{k+1})) \times (b_m + (b_{k+1})) =^6 \sum_{j=0}^{m} b_{2m+p-2j} + (b_{k+1}),$$

für $2m + p \leq k$ und

$$(b_{m+p} + (b_{k+1})) \times (b_m + (b_{k+1})) = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + (b_{k+1}),$$

für $2m + p > k$.

[5] Da alle weiteren b_i, $i > k$ nicht in $\langle b_0, \dots, b_k\rangle$ liegen, können wir uns auf $m + p \leq k$ beschränken.

[6] Wegen Kommutativität der b_k lässt sich jedes Produkt $b_n \times b_q$ als $b_{m+p} \times b_m$ schreiben mit $m = \min\{n, q\}, p = |n - q|$.

Beweis. Für $2m + p \leq k$ ist das Produkt, das bereits bekannte Produkt aus $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$, da das Produkt in $\langle b_0, \dots, b_k \rangle$ liegt. Für $2m+p > k$ zeigen wir zunächst:

Behauptung. Für $1 \leq n \leq k$: $b_{k-n} + b_{k+n} \in (b_k)$.

(i) Sei $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Wir führen eine Induktion nach m mit Induktionsanfang $m = 1$: $b_{k+2} + b_{k-2} = b_{k+2} + b_k + b_{k-2} - b_k = b_2 \times b_k - b_k \in (b_k)$. Der Induktionsschritt ergibt sich zu $m \to m+1 \leq k/2$:

$$b_{k-2(m+1)} + b_{k+2(m+1)} = \underbrace{b_{2(m+1)} \times b_k}_{\in (b_k)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (b_{k+2j} + b_{k-2j})}_{\text{siehe } ^7} - \underbrace{b_k}_{\in (b_k)} \in (b_k).$$

(ii) Sei $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Mit Induktion nach m, Induktionsanfang $m = 0$: $b_{k+1} + b_{k-1} = b_1 \times b_k \in (b_k)$. Analog zum Fall zuvor erhalten wir den Induktionsschritt $m \to m+1 \leq k/2$:

$$\begin{aligned} &b_{k-2(m+1)-1} + b_{k+2(m+1)+1} \\ &= \underbrace{b_{2(m+1)+1} \times b_k}_{\in (b_k)} - \underbrace{\sum_{j=0}^{m} (b_{k+2j+1} + b_{k-2j-1})}_{\text{siehe IV}} \in (b_k). \end{aligned}$$

□

In $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$ gilt mit $q = \left\lfloor \frac{2m+p-k+1}{2} \right\rfloor$

$$\begin{aligned} &b_{m+p} \times b_m \\ &= \sum_{j=0}^{m} b_{2m+p-2j} \\ &= \sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} + \sum_{j=0}^{q-1} b_{2m+p-2j} \\ &= \sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} + \sum_{j=0}^{q-1} b_{2m+p-2j-(k+1)+(k+1)} \\ &= \sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} + \sum_{j=0}^{q-1} (z_{(k+1)+(k+1)-2m-p+2j} - b_{(k+1)+(k+1)-2m-p+2j}) \end{aligned}$$

[7] Nach Induktionsvoraussetzung in (b_k).

$$= \sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} - \sum_{j=0}^{q-1} b_{2(k+1)-2m-p+2j} + \sum_{j=0}^{q-1} z_{2(k+1)-2m-p+2j},$$

wobei wir $z_{2(k+1)-2m-p+2j} := b_{2(k+1)-2m-p+2j} + b_{2m+p-2j} \in (b_{k+1})$ gesetzt haben, um die vorangegangene Behauptung anwenden zu können.
Aber für $2m+p-k+1$ gerade:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} - \sum_{j=0}^{q-1} b_{2(k+1)-2m-p+2j}\\
=\ & \big(b_{2m+p-(2m+p-k+1)} + \ldots + b_p\big)\\
&- \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_{2(k+1)-2m-p+(2m+p-k-1)}\big)\\
=\ & (b_{k-1} + \ldots + b_p) - \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_{k+1}\big)\\
=^{8}\ & (b_p + \ldots + b_{2k-2m-p}) + \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_{k-1}\big)\\
&- \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_{k-1}\big) + b_{k+1}\\
=\ & (b_p + \ldots + b_{2k-2m-p}) + b_{k+1}\\
=\ & \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + b_{k+1}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$b_{m+p} \times b_m = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + \underbrace{b_{k+1} + \sum_{j=0}^{q-1} z_{2(k+1)-2m-p+2j}}_{\in (b_{k+1})}$$

$$\Rightarrow (b_{m+p} + (b_{k+1})) \times (b_m + (b_{k+1})) = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + (b_{k+1}).$$

Für $2m+p-k+1$ ungerade $\Rightarrow q = \frac{2m+p-k}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=q}^{m} b_{2m+p-2j} - \sum_{j=0}^{q-1} b_{2(k+1)-2m-p+2j}\\
=\ & \big(b_{2m+p-(2m+p-k)} + \ldots + b_p\big)\\
&- \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_{2(k+1)-2m-p+(2m+p-k-2)}\big)\\
=\ & (b_k + \ldots + b_p) - \big(b_{2(k+1)-2m-p} + \ldots + b_k\big)\\
=^{9}\ & b_p + \ldots + b_{2k-2m-p} = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j}.
\end{aligned}$$

[8]Beachte $k \geq p+m \Rightarrow k-m \geq p \Rightarrow 2k-2m \geq 2p \Rightarrow 2k-2m-p \geq p$.

Wie zuvor erhält man

$$b_{m+p} \times b_m = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + \underbrace{\sum_{j=0}^{q-1} z_{2(k+1)-2m-p+2j}}_{\in(b_1)}$$

$$\Rightarrow (b_{m+p} + (b_{k+1})) \times (b_m + (b_{k+1})) = \sum_{j=2m+p-k}^{m} b_{2m+p-2j} + (b_{k+1}).$$

Dies schließt den Beweis von Satz 4.2.3 ab. □

Folgerung 4.2.4. Das Produkt kann somit explizit in der Form

$$b_i \times b_j + (b_{k+1}) = \sum_{l=0}^{k} N_{ij}^l b_m + (b_{k+1}), \quad N_{ij}^l \in \{0, 1\},$$

dargestellt werden, wobei die N_{ij}^l durch Satz 4.2.3 festgelegt werden.

[9] $m + p \leq k \Rightarrow 2m + 2p < 2(k+1) \Rightarrow p < 2(k+1) - 2m - p$.

5 Ausblick

Addition und Multiplikation in der Verlinde Algebra haben wir im vorangegangenen Kapitel ausführlich beschrieben. Zum Abschluss scheinen mir noch einige weiter gehende Anmerkungen angebracht, die dem interessierten Leser die Möglichkeit bieten sollen sich mit weiteren Eigenschaften und aktuellen Entwicklungen auseinander zusetzen.
Nach dem Erscheinen des Artikels von E. Verlinde [23] galt die Aufmerksamkeit zunächst der von Verlinde aufgestellten und ebenfalls nach ihm benannten Verlinde Formel, die er selbst unbewiesen lies. In den folgenden sechs Jahren wurden verschiedene physikalische und mathematische Beweise dieser Formel gegeben, die mit Faltings [7] einen umfassenden Abschluss fanden. Mit Hilfe der Verlindeformel lassen sich die Dimensionen der Räume konformer Blöcke bzw. die Dimensionen der Räume verallgemeinerter Thetafunktionen berechnen (siehe Faltings [8]). Neben den beiden bereits genannten Quellen findet man eine genaue Beschreibung der Verlindeformel auch in „Basic Bundle Theory and K-Cohomology Invariants“ [13], sowie Szenes [21] und Schottenloher [19]. In allen drei Werken wird im Besonderen auch auf den Spezialfall $\mathsf{SU}(2)$ eingegangen.
Betrachtet man die Verlinde Algebra als $\mathbb{C}-$Algebra (vgl. Bemerkung 3.2.4) so ist sie auch eine Fusionsalgebra[1]. Ebenso kann gezeigt werden, dass die Verlinde Algebra eine Frobeniusalgebra[2] ist.
Wie schon in der Einleitung erwähnt, ergibt sich die Verlinde Algebra nicht nur aus Betrachtungen der konformen Feldtheorie, sondern kann auch mit $K-$Theorie beschrieben werden. Dieser Ansatz ist auf Freed, Hopkins und Teleman zurückzuführen, die verschiedene Arbeiten zu diesem Thema veröffentlicht haben (siehe z. B. [9], [10], [22]). In „Basic Bundle Theory and $K-$Cohomology Invariants“ [13] findet man neben der allgemeinen Betrachtung auch den Spezialfall $\mathsf{SU}(2)$ ausführlich beschrieben.

---

[1] siehe Schottenloher [19], S. 228 für eine Definition.
[2] siehe Anderson & Fuller [1], S. 261 für eine Definition.

L Literaturverzeichnis

[1] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, *Rings and Categories of Module*, Springer, New York, 1992.

[2] Asim O. Barut and Ryszard Rączka, *Theory of Group Reprensentations and Applications*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[3] Siegfried Bosch, *Algebra*, Springer, Berlin, 2006.

[4] Raoul Bott, *On E. Verlinde's Formula in the Context of Stable Bundles*, Trieste Conference on Topological Methods in Quantum Field Theories (1991), 84-95.

[5] Theodor Bröcker and Tamma tom Dieck, *Representations of compact Lie Groups*, Springer, Berlin, 2003.

[6] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 2001.

[7] Gerd Faltings, *A proof of Verlinde formula*, Journal for Algebraic Geometry **3** (1994), 347-374.

[8] Gerd Faltings, *Thetafunktionen auf Modulräumen von Vektorbündeln*, Jahresbericht der DMV **110** (2008), 3-18.

[9] Daniel Freed, *The Verlinde algebra is twisted equivariant K-theory*, Turkish J. Math. **25** (2001), 159-167.

[10] Daniel Freed, Michael Hopkins, Constantin Teleman, *Loop Groups and twisted K-theory III* **26** (2013), 595-644.

[11] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer, Berlin, 1994.

[12] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, 1991.

[13] D. Husemöller, M. Joachim, B. Jurčo, M. Schottenloher, *Basic Bundle Theory and* $K-$*Cohomology Invariants*, Springer, Berlin, 2008.

[14] Gordon James and Martin Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press, 2001.

[15] Klaus Jänich, *Topology*, Springer, Berlin, 2005.

[16] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, Berlin, 2008.

[17] Micheal Reed and Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1: Functional Analysis, Academic Press, INC., London, 1980.

[18] Martin Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg Verlagsgesellschaft, 1995.

[19] Martin Schottenloher, *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Springer, Berlin, 2008.

[20] Mitsuo Sugiura, *Unitary Representations and Harmonic Analysis: An Introduction (North-Holland Mathematical Library)*, Elsevier Science Publishing Co Inc., U.S. Auflage, 1990.

[21] Andras Szenes, *The combinatorics of the Verlinde formula*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[22] Constantin Teleman, *K-theory of the moduli of principal bundles on a surface and deformations of the Verlinde algebra*, Topology, Geometry and Quantum Field Theory: Proceedings of the 2002 Oxford Symposium in Honour of the 60th Birthday of Graeme Segal, CUP, 2004.

[23] Erik Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in two-dimensional conformal field theory*, Nuclear Physics **B 300** (1988), 360-376.

I Index

$G-$äquivariant, 12
$\mathbb{C}$-Algebra, 30
$\mathbb{Z}$-Algebra, 30
äquivarianter Endomorphismus, 12, 13

Clebsch-Gordon-Formel, 22

Darstellung, 4, 5, 7, 10, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 24, 27
    Charakter, 14, 20, 21, 23
    endlich-dimensional, 4, 18
    irreduzible, 5
    isomorphe, 16
    Parameter, 3, 8
    Standard-, 7
    triviale, 7
    Unter-, 5, 13
Darstellungsring $\mathsf{R}(\mathsf{SU}(2))$, 24, 25, 27, 28, 30, 35, 37
Diffeomorphismus, 2
duale
    Abbildung, 17
    Basis, 18

Haarmaß, 8
homogenen Polynome, 5, 13

Klassenfunktion, 20, 21

Lemma von Schur, 19
Lie-Gruppe, 2–4, 7, 8
    $\mathsf{SU}(2)$, 1–3, 8, 14, 20, 22, 27
    kompakte, 3

Maß
    Borelmaß, 8
    Haarmaß, 8
    Lebesguemaß, 8
Mannigfaltigkeit, 2
Modul
    $\mathbb{Z}-$Modul, 25, 27, 30
    irreduzibler, 7
    Untermodul, 7, 32

Quotientenring, 31

Raum der geraden $2\pi-$periodischen Funktionen, 15, 21

Satz
    von Banach-Steinhaus, 11
    von Heine-Borel, 3
    von Hilbert-Schmidt, 11
    von Peter und Weyl, 11
    von Stone-Weierstraß, 15
Skalarprodukt, 10, 19
    G-invariantes, 7, 10, 11

Tensorprodukt, 16, 28

Verlinde Algebra, 31, 36

Wirkung, 19

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die abgegebene Bachelor-Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Reisert, Pascal
Name, Vorname

München, den 29. April 2009
Ort, Datum