

Studienabschlussarbeiten

Fakultät für Mathematik, Informatik
und Statistik

Dankers, Cord Christian:

Die realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit als
erklärende Variablen in einem GARCH-X Modell

Bachelorarbeit, Wintersemester 2016

Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik

Ludwig-Maximilians-Universität München

<https://doi.org/10.5282/ubm/epub.31975>

Die realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit als erklärende Variablen in einem GARCH-X Modell

Bachelorarbeit

Wintersemester 2016/2017



Verfasser: Cord Christian Dankers

Betreuer: Dr. Fabian Spanhel

Prüfer: Prof. Stefan Mittnik Ph.D.

Seminar für Finanzökonometrie

Institut für Statistik

Ludwig-Maximilians-Universität München

Abgabedatum: 30.11.2016

Inhaltsverzeichnis

Abstract	2
1. Einleitung.....	3
2. Zeitreihenanalyse	4
2.1 Theoretische Grundlagen bei Finanzmarktzeitreihen	4
2.1.1. Schwache Stationarität von Zeitreihen	4
2.1.2 Autokorrelation bei Zeitreihen.....	7
3. Modellierung von Finanzmarktzeitreihen	10
3.1 Einführung in die Modellierung.....	10
3.2. Einführung in die GARCH-Modelle	12
3.3 Das GARCH-X Modell.....	14
3.4 Die realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit	15
3.5 Die realisierte Volatilität im GARCH – X Modell	18
4. Risikomanagement anhand des Value at Risk.....	19
4.1 Parametrische Schätzung des Value at Risk	21
4.2 Testverfahren zur Beurteilung der Ergebnisse des VaR	22
4.2.1 Unconditional Coverage Test	23
4.2.2 Unabhängigkeitstest.....	24
4.2.3 Conditional Test.....	25
5. Datenvorstellung und Analyse	26
5.1 Vorstellung und Aufbereitung der Daten.....	26
5.2 Deskriptive Analyse	26
5.3 Auswertung der Daten anhand des Value at Risk	29
6. Zusammenfassung und Fazit	34
Literaturverzeichnis.....	35
Anhang	36

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: tägliche Schlusskurse des S&P 500 aus dem Jahr 2010	6
Abbildung 2: tägliche log-Renditen des S&P 500 aus dem Jahr 2010	7
Abbildung 3: ACF-Plots der quadrierten log-Renditen und der normalen log-Renditen	8
Abbildung 4: Grafische Verdeutlichung des VaR (eigene Darstellung)	19
Abbildung 5: tägliche Schlusskurse des S&P 500 (2006-2011).....	26
Abbildung 6: tägliche log Renditen des S&P 500 (2006-2011).....	27
Abbildung 7: ACF-Plots der log-Renditen und quadr. log Renditen des S&P 500 von 2006-2011	27
Abbildung 8: Expanding Window Forecast (eigene Darstellung)	29
Abbildung 9: Verläufe der Parameter Gamma0 und Gamma1 von 2009-2011.....	31
Abbildung 10: VaR Standard GARCH t-Verteilung.....	32
Abbildung 11: VaR GARCH mit RV als externem Regressor und t- Verteilung.....	33
Abbildung 12: GARCH mit zwei externen Regressoren und t-Verteilung	33

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Kennzahlen des S&P 500	28
Tabelle 2: Parameter der GARCH-Modelle.....	30
Tabelle 3: Anzahl der Verstöße des Value at Risk	31

Abstract

Diese Bachelorarbeit beschäftigt sich mit der realisierten Volatilität und ihrer Messgenauigkeit, welche als erklärende Variablen in das GARCH-X Modell einfließen.

Nach einer Einleitung, welche die Motivation für diese Bachelorarbeit darlegen soll, werden zuerst die Grundlagen der Zeitreihenanalyse aufgegriffen und näher erläutert um anschließend zur Modellierung von Finanzmarktzeitreihen überzugehen. Hierbei wird besonderer Wert auf das hier benutzte GARCH-X Modell gelegt. Außerdem wird besonders auf den Ansatz von Bollerslev, Patton und Quaedvlieg zur Nutzung der realisierten Volatilität und ihrer Messgenauigkeit zur Volatilitätsvorhersage eingegangen.

Im Weiteren wird der Value-at-Risk vorgestellt, sowie auf seine Evaluierungsmethoden eingegangen um die Grundlagen für die anschließende Auswertung der Daten zu legen.

Die Datenbasis bilden hierbei Fünf-Minuten-Kurse des S&P 500 vom Jahr 2006 bis 2011. Im ersten Schritt werden die Daten deskriptiv ausgewertet und vorgestellt. Anschließend wird sowohl für das GARCH als auch für verschiedene GARCH-X Modelle eine Value-at-Risk Vorhersage durchgeführt und deren Ergebnisse mit unterschiedlichen Evaluierungsmethoden bewertet.

Abschließen wird diese Arbeit mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse, sowie einem Ausblick auf eventuelle weitere Vorgehensweisen.

1. Einleitung

Bei Anlageentscheidungen spielt in der Finanzwelt neben der möglichen Rendite vor allem auch das Risiko eine sehr große Rolle. Das Risiko lässt sich durch die Schwankungen der jeweiligen Kurse ausdrücken und wird als Volatilität bezeichnet.

Die Volatilität wird im Rahmen dieser Bachelorarbeit anhand der bedingten Standardabweichung der logarithmierten Renditen berechnet. Diese Schwankungen sind jedoch im Zeitverlauf nicht konstant, sondern Phasen mit starken und Phasen mit schwachen Kursveränderungen wechseln sich ab. Das Auftreten dieser unterschiedlichen Phasen wird als Volatilitätsclustering bezeichnet. Auf diesen stilisierten Fakt von Finanzmarktzeitreihen wird in der Einführung zu diesem Thema noch genauer eingegangen.

Die Bildung von Volatilitätsclustern ist dabei kein Phänomen, das nur zu besonderen Zeitpunkten wie beispielsweise den Boomzeiten der DotCom-Blase, oder zu extremen Krisen wie der Weltfinanzkrise ab 2007 auftritt, sondern eine kontinuierlich stattfindende Eigenschaft von Finanzmarktzeitreihen (Tsay, 2013, S. 170) .

Lange Zeit wurde die Volatilität jedoch als statisch angenommen. Erst durch Engle wurden im Jahr 1982 die Prozesse zur autoregressiven bedingten Heteroskedastizität, und damit das sogenannte ARCH – Modell, vorgestellt. Dieses Modell war das Erste, welches die bedingte Varianz zur Modellierung der Renditen von Finanzmarktanlagen hinzuzog und damit in der Lage war, die Volatilitätscluster zu beschreiben. Welchen Stellenwert diese Arbeit für die Finanzökonometrie hatte lässt sich auch daran ablesen, dass Engle für diese im Jahr 2003 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt.

Auf Basis dieser ersten ARCH-Modelle, veröffentlichte Bollerslev im Jahr 1986 seine generalisierten ARCH-Modelle, die sogenannten GARCH-Modelle. Im Laufe der Jahre wurden aber auch diese GARCH-Modelle immer weiterentwickelt und erweitert. In dieser Bachelorarbeit wird dabei auf die GARCH-X Modelle eingegangen, welche exogene Variablen zur Modellierung aufnehmen können.

Neben eben jenen GARCH-X Modellen liefert das Paper von Bollerslev et al. aus dem Jahr 2016 die zweite Grundlage für diese Bachelorarbeit. In ihrem Paper stellen Bollerslev et al. einen neuen Ansatz zur Volatilitätsvorhersage vor. Dieser beruht auf hochfrequenten Intra-Day-Daten und den sich daraus ergebenden realisierten Volatilitäten und beinhaltet als Erweiterung zu den bisherigen Ansätzen die Miteinbeziehung der Messgenauigkeit dieser realisierten Volatilitäten. Die Grundidee hinter diesem Paper besteht darin, dass das Gewicht der realisierten Volatilität in Abhängigkeit von ihrer Messgenauigkeit variiert.

Das Ziel dieser Bachelorarbeit ist nun, die realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit als exogene Variablen in das GARCH-X Modell zu implementieren.

2. Zeitreihenanalyse

2.1 Theoretische Grundlagen bei Finanzmarktzeitreihen

Gerade im Bereich der Finanzmärkte kommt der Zeitreihenanalyse eine besondere Bedeutung zu, da die meisten Informationen in diesem Fachgebiet als zeitabhängige Datenpunkte vorliegen - jeder kennt die bekannten Anzeigen der Kursverläufe an den großen Börsen wie zum Beispiel an der Börse Frankfurt oder der New York Stock Exchange, der größten Börse der Welt.

Es wird in zeitlich kontinuierlichen Abständen der aktuelle Kurs der jeweiligen Anlage berechnet. Mit Hilfe der Zeitreihenanalyse kann man die sich daraus ergebende Datenfolge auswerten. Hierbei wird versucht in den Daten Muster oder Auffälligkeiten zu entdecken, um ein für die Datensituation passendes Modell zu entwickeln und zukünftige Entwicklungen prognostizieren zu können.

Dies spielt besonders im Risikomanagement von Finanzanlagen eine besondere Rolle – da hier im Zuge der Weltfinanzkrise die Regulierungsvorschriften für Banken und Versicherungen und damit die Notwendigkeit der Optimierung des Risikomanagements zugenommen haben.

2.1.1. Schwache Stationarität von Zeitreihen

Um eine Zeitreihe analysieren und aus ihr ein Modell entwickeln zu können, muss diese in bestimmter Form vorliegen. Für gewöhnlich ist dabei gefordert, dass die Zeitreihe schwach stationär ist.

Inhaltlich bedeutet Stationarität, dass die stochastischen Eigenschaften des Prozesses $(X_t)_{t=1,2,\dots}$ sich unter einer Zeitverschiebung nicht verändern.

Für schwache Stationarität ist es dabei ausreichend, dass der Erwartungswert und die Varianz zeitlich konstant sind und die Kovarianz nur vom zeitlichen Abstand abhängt. Dies bedeutet, dass X_1 und X_4 die selbe Kovarianz besitzen wie X_2 und X_5 , da sie jeweils einen *lag* von 3 haben. Daraus folgt, dass auch die Korrelation von X_t und X_s nur vom zeitlichen Abstand h , dem sogenannten *lag*, abhängt. Der Startzeitpunkt t ist nicht entscheidend.

Schwach stationäre Prozesse sind gewünscht, da man sie mit wenigen Parametern modellieren kann. Bei einem schwach stationären Prozess hat man einen von t unabhängigen Mittelwert μ , welcher durch \bar{y} erwartungstreu geschätzt werden kann (Ruppert & Matteson, 2015, S. 309).

Schwache Stationarität wird also folgendermaßen definiert:

Sei X_1, X_2, \dots eine schwach stationäre Zeitreihe, dann gilt:

$$E(X_t) = \mu, \text{ konstant für alle } t$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma, \text{ positiv konstant für alle } t$$

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(|t - s|) \text{ für alle } t \text{ und } s \text{ für die Funktion } \gamma(h)$$

Wie bereits erwähnt, reicht es für die schwache Stationarität aus, wenn Mittelwert, Varianz und Kovarianz als stationär angenommen werden können. Weitere Eigenschaften wie zum Beispiel die Kurtosis oder die Quantile sind von dieser Annahme nicht betroffen (Ruppert & Matteson, 2015, S. 308).

Die Funktion $\gamma(s)$ stellt dabei die Autokovarianzfunktion dar. Diese ist Bestandteil der Autokorrelationsfunktion:

$$p_t = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-s})}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \times \text{Var}(X_{t-s})}} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-s})}{\text{Var}(X_t)} = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

Es gilt aufgrund schwacher Stationarität, dass $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-s})$. Aus der Definition ergibt sich, dass $p_0 = 1$, $p_t = p_{-t}$ und $-1 \leq p_t \leq 1$. Die Folge p_t wird Autokorrelationsfunktion (ACF) genannt. Eine schwach stationäre Zeitreihe ist genau dann seriell unkorreliert, wenn für alle s gilt: $p = 0$ (Tsay, 2013, S. 45).

Für eine zufällige Stichprobe $\{X_t | t = 1, \dots, T\}$ ist die geschätzte Autokorrelationsfunktion (ACF) definiert als

$$\hat{p}_s = \frac{\sum_{t=s+1}^T (X_t - \bar{y})(X_{t-s} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{y})^2}, \quad 0 \leq s < T - 1$$

mit Stichprobenmittelwert $\bar{y} = \sum_{t=1}^T X_t / T$ (Tsay, 2013, S. 45).

Man stellt fest, dass an den Finanzmärkten viele Zeitreihen keine schwache Stationarität aufweisen. Die hier gezeigte Zeitreihe der Schlusskurse des S&P 500 für das Jahr 2010 weist offensichtlich einen steigenden Trend auf und schwankt nicht um einen festen Wert. (Abbildung 1: tägliche Schlusskurse des S&P 500 aus dem Jahr 2010)

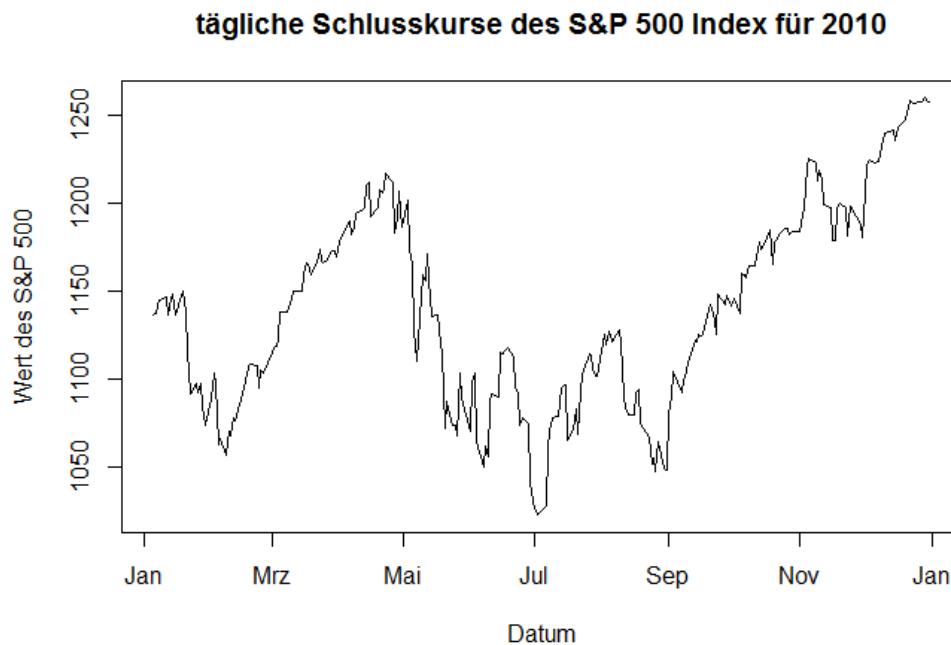


Abbildung 1: tägliche Schlusskurse des S&P 500 aus dem Jahr 2010

Um schwache Stationarität zu erreichen werden daher häufig die Renditen der Zeitreihe benutzt, welche die Änderungen der Preise darstellen.

Es werden also nicht die Preise $P_t, t = 0,1,2, \dots$ die den jeweiligen Kurswert darstellen zur Analyse benutzt, sondern die Renditen, wobei in der Finanzmathematik zwei unterschiedliche Renditebegriffe vorkommen (Tietze, 2002). Zum einen die logarithmierten Differenzen der Preise:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

Diese Log-Renditen, auch als stetige Renditen bezeichnet, beschreiben approximativ die relative Preisänderung zum Zeitpunkt t , die sogenannte diskrete Rendite:

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Diese Arbeit nimmt nur stetige Renditen zur Grundlage weiterer Analysen.

2.1.2 Autokorrelation bei Zeitreihen

In diesem Kapitel wird auf die Autokorrelation bei Zeitreihen eingegangen. Anhand der in Abbildung 2 gezeigten täglichen log-Renditen des S&P 500 wird verdeutlicht, was mögliche Instrumente sind, um Autokorrelation zu identifizieren. In Abbildung 2 erkennt man, dass kein Trend mehr vorliegt. Die Renditen schwanken um den Wert Null und es sind die in der Einführung erwähnten Volatilitätscluster zu erkennen. Die Zeit von Mai bis Juli ist von deutlich stärkeren Ausschlägen geprägt als zum Beispiel die Phase von März bis Mai.

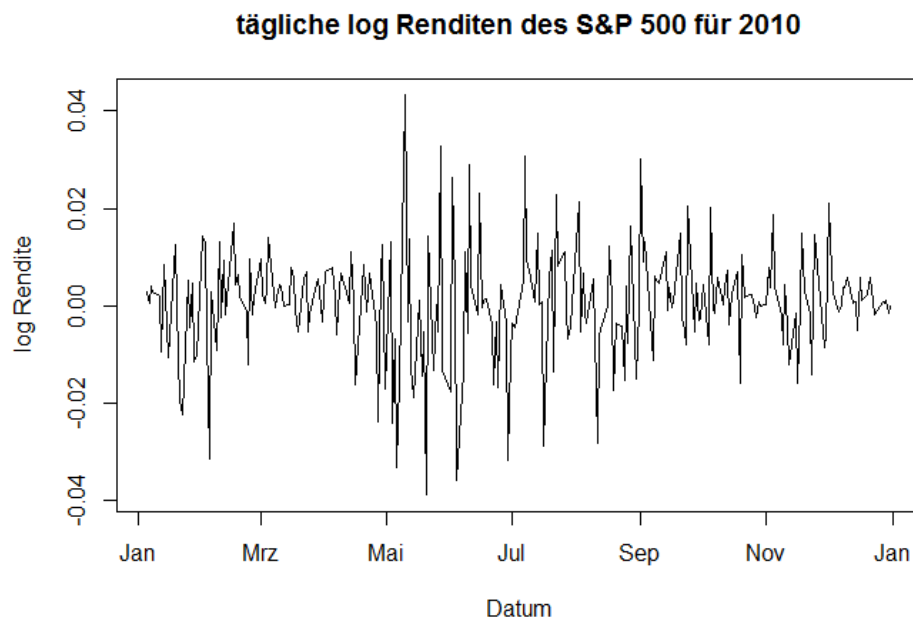


Abbildung 2: tägliche log-Renditen des S&P 500 aus dem Jahr 2010

Um nun beurteilen zu können, ob bei dieser Zeitreihe Autokorrelation vorliegt, ist es eine Möglichkeit, sich die ACF-Plots anzuschauen. In Abbildung 3 sind die ACF-Plots sowohl für die log-Renditen, als auch für die quadrierten log-Renditen aufgeführt.

Autokorrelationsfunktionen der log-Renditen des S&P 500 für 2010

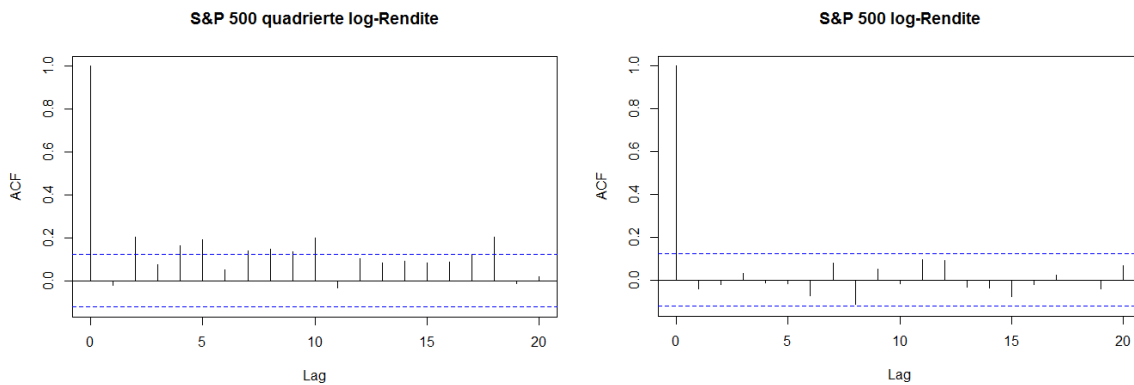


Abbildung 3: ACF-Plots der quadrierten log-Renditen und der normalen log-Renditen

Die beiden gestrichelten Linien stellen dabei Fehlergrenzen dar, welche sich bei $\pm 2/\sqrt{T}$ befinden (Tsay, 2013, S. 45). Anhand dieser Grenzen lässt sich prüfen, ob die Nullhypothese, dass der Autokorrelationskoeffizient Null ist, abgelehnt werden kann. Sollten diese Linien zu häufig überschritten werden, wird die Nullhypothese abgelehnt. Ein Signifikanzniveau von 5% wird eingehalten, wenn 5% der Lags (Lag beschreibt den Abstand der Datenpunkte voneinander) nicht über diese gestrichelten Linien reichen. Dies würde bei 20 Lags bedeuten, dass ein Lag über die Linien reichen dürfte, ohne dass die Nullhypothese verworfen wird (Ruppert & Matteson, 2015, S. 312+313).

Das linke Diagramm stellt dabei die ACF der quadrierten log-Renditen dar. Offensichtlich liegt hier Autokorrelation vor, da die gestrichelten Linien bei neun Lags überschritten werden. Im rechten Diagramm werden die ACF der log-Renditen dargestellt. Hier wird das Fehlerband an keiner Stelle überschritten – dies spricht dafür, dass keine Autokorrelation vorliegt.

Eine weitere Methode um zu überprüfen, ob Autokorrelation vorliegt, ist der sogenannte Ljung-Box-Test:

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{p}_l^2}{T - l}$$

Die Nullhypothese ist dabei $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 0$. Falls $Q(m) > \chi_\alpha^2$ ist, wird sie zugunsten der Alternativhypothese $H_\alpha: p_l \neq 0 \exists l \in \{1, \dots, m\}$ verworfen. χ_α^2 stellt das $100(1 - \alpha)$ -Quantil einer Chi-Quadrat-Verteilung mit m Freiheitsgraden dar (Tsay, 2013, S. 47+48).

Wendet man den Ljung-Box-Test auf die bereits vorgestellten log-Renditen an, ergeben sich folgende Werte:

Ljung-Box-Test für log-Renditen mit lag=21: p-Wert: 0.78

Ljung-Box-Test für quadrierte log-Renditen mit lag=21: p-Wert: 0.00002

Um die Nullhypothese zu verwerfen, wird der p-Wert von $Q(m)$ überprüft. Der Ljung-Box-Test bestätigt unsere Annahmen und zeigt, dass die log-Renditen keine Autokorrelation aufweisen; die quadrierten log>Returns hingegen schon.

Grundsätzlich kann man feststellen, dass die Zeitreihe abhängig ist, aber keine Autokorrelation aufweist, da die quadrierten Werte im Gegensatz zu den normalen Renditen Autokorrelation zeigen (Tsay, 2013, S. 178). Dieser Zusammenhang äußert sich auch in dem Auftreten von Volatilitätsclustern hinsichtlich der Renditen.

3. Modellierung von Finanzmarktzeitreihen

3.1 Einführung in die Modellierung

Dieses Kapitel hat zum Ziel die Modellierung von Finanzmarktzeitreihen näher zu bringen. Hierbei wird zunächst mit den Grundlagen angefangen – welche dann erweitert werden und letztendlich zum in dieser Bachelorarbeit benutzten Modell führen.

Die Grundlage bilden dabei lineare stochastische Prozesse. Beispiele hierfür sind der Autoregressive Prozess (AR-Modell), der Moving Average Prozess (MA-Modell) und die Zusammenführung dieser beiden Modelle, der Autoregressive Moving Average Prozess, das sogenannte ARMA-Modell.

Im AR-Modell setzt sich das Signal aus einem geglätteten Signal seiner n vorhergegangenen Werte und einem Rauschterm zusammen.

$$y_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^n a_i y_{t-i}$$

Das MA-Modell modelliert das Signal anhand eines durch ein gleitendes Mittel (Moving Average) der Länge m geglätteten Signals einer anderen Zeitreihe und einem Rauschterm ($j=0$)

$$y_t = \sum_{j=0}^m b_j \epsilon_{t-j}$$

Die Kombination aus beiden Modellen stellt nun der ARMA-Prozess dar.

$$y_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^n a_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^m b_j \epsilon_{t-j}$$

Der aktuelle Wert hängt also sowohl von den vorhergegangenen Werten (AR-Modell) als auch von gegenwärtigen und vergangenen Störthermen (MA-Modell) ab.

Was hingegen keines dieser Modelle abbilden kann, ist das vorher schon beschriebene Auftreten von Volatilitätsclustern. Volatilität tritt in der Realität nicht konstant auf, sondern große und kleine Fehler tendieren dazu in Gruppen aufzutreten – wie wir bereits im vorherigen Kapitel kurz gezeigt haben. Um dies abbilden zu können, wurden die ARMA-Modelle weiterentwickelt zu sogenannten ARCH-Modellen.

Diese wurden von Engle im Jahr 1982 vorgestellt. Er entwickelte einen Prozess, welcher die bedingte Varianz aus Informationen der vorherigen Perioden darstellen konnte. Diese Modelle mit autoregressiv bedingter Heteroskedastie werden ARCH-Modelle genannt und stellen eine sehr wichtige Weiterentwicklung für die Risikosteuerung von Anlageentscheidungen dar – was sich auch im 2003 verliehenen Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften zeigt: ARCH-Modelle bilden Finanzmarktdaten deutlich besser ab, als die vorher erwähnten ARMA-Modelle.

Es hat sich jedoch gezeigt, dass zur Erzielung guter Ergebnisse mit Hilfe von ARCH-Modellen sehr komplexe Modelle benötigt werden und es schwierig wird einige Restriktionen einzuhalten, wie z.B. die Nicht-Negativitätsbedingung für bestimmte Parameter.

3.2. Einführung in die GARCH-Modelle

Die Problematik hinsichtlich der Komplexität von ARCH-Modellen konnte im Jahre 1986 von Tim Bollerslev durch seine Arbeit über generalisierte ARCH-Modelle gelöst werden.

Der entscheidende Unterschied zum ARCH-Modell ist, dass die bedingte Varianz nicht nur von den verzögerten quadrierten Residuen, sondern auch von der bedingten Varianz der Vorperioden abhängt (Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, 1986).

Die Modellgleichung für ein GARCH-Modell sieht folgendermaßen aus:

Unter der Bedingung, dass $a_t = r_t - \mu_t$ die Ausprägung zum Zeitpunkt t ist, folgt a_t einem GARCH (m,s) Modell, wenn:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen $\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0$, für $i = 1, \dots, m$ und $\beta_j > 0$ für $j = 1, \dots, s$ stellen sicher, dass die bedingte Varianz selbst nicht negativ werden kann, sondern immer positiv bleibt (Tsay, 2013).

Für $s = 0$ entspricht das GARCH-Modell einem ARCH-Modell – woraus sich erkennen lässt, dass das GARCH-Modell die Erweiterung des ARCH-Modells um die früheren Varianzen und Werte des Prozesses ist.

Grundsätzlich lässt sich sagen, dass viele Aussagen über das GARCH (m,s) Modell nur unter der Bedingung der schwachen Stationarität gelten.

Bollerslev selbst stellte in seinem Paper das Theorem auf, dass ein GARCH(m,s) Prozess genau dann schwach Stationär ist, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$$

Um nun das GARCH-Modell auf die Eigenschaften der im vorherigen Kapitel beschriebenen Finanzmarktdaten zu übertragen, wird der bedingte Erwartungswert a_t eines GARCH(m,s) Prozesses betrachtet:

$$\begin{aligned}
 E(a_t | \psi_{t-1}) &= E(\varepsilon_t \cdot \sigma_t | \psi_{t-1}) \\
 &= E(\varepsilon_t | \psi_{t-1}) \cdot \sigma_t, \text{ da } \sigma_t | \psi_{t-1} \text{ konstant ist} \\
 &= E(\varepsilon_t) \sigma_t, \text{ da } \varepsilon_t \text{ unabhängig von } \psi_{t-1} \text{ ist} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dabei steht ψ_t für alle Werte von a_t bis zum Zeitpunkt t. Es folgt also, dass GARCH-Prozesse um den Wert 0 herum schwanken.

Neben dem Erwartungswert ist vor allem die bedingte Varianz im GARCH-Modell von Interesse.

Diese berechnet sich für a_t zum Zeitpunkt t wie folgt:

$$\begin{aligned}
 Var(a_t | \psi_{t-1}) &= Var(\varepsilon_t \cdot \sigma_t | \psi_{t-1}) \\
 &= Var(\varepsilon_t) \cdot \sigma_t^2 \\
 &= \sigma_t^2
 \end{aligned}$$

Man kann nun erkennen, dass die bedingte Varianz im GARCH-Modell von der Zeit abhängt. Diese zeitliche Abhängigkeit der Volatilität wird bedingte Heteroskedastizität genannt und ist namensgebend für die ARCH und GARCH-Modelle.

Man sieht, dass sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz die im vorherigen Kapitel beschriebenen Eigenschaften von Finanzmarktdaten aufweisen (Schwankung um Null, Bildung von Volatilitätsclustern), somit sind GARCH-Modelle sehr gut dazu geeignet, genau dieses Verhalten wiederzugeben.

Zu den GARCH-Modellen gibt es viele sinnvolle Erweiterungen, die jeweils spezifische Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen besser modellieren können als das normale GARCH Modell; zum Beispiel das GJR-GARCH Modell, das EGARCH Modell, oder das GARCH-X Modell, auf das im Folgenden näher eingegangen wird.

3.3 Das GARCH-X Modell

In dieser Arbeit soll es um die Weiterentwicklung des GARCH Modells um exogene Regressoren gehen. Es hat sich gezeigt, dass die Hinzunahme von exogenen Variablen in ein GARCH Modell dessen Prognosegenauigkeit erhöhen kann (Andersen T.G., 2005). Denkbare externe Regressoren sind in diesem Fall alles, was den Prozess besser erklären könnte. Dazu gehören zum Beispiel makroökonomische Kennziffern, ebenso wie weitere Daten, die sich aus der Finanzmarktzeitreihe selbst ziehen lassen – wie die realisierte Volatilität und die zugehörige Messgenauigkeit der realisierten Volatilität, „Realized Quarticity“ genannt, auf die im folgenden Kapitel näher eingegangen wird.

Die allgemeine Modellgleichung eines GARCH-X Modells sieht folgendermaßen aus:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^l \gamma_k x_{t-k}$$

Wenn man nun ein GARCH(1,1) Modell und eine exogene Variable zur Modellierung annimmt, führt dies zu folgender Modellgleichung:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma x_{t-1},$$

x stellt dabei die exogene Variable dar. Im Zuge dieser Arbeit werden zwei exogene Regressoren benötigt. In Kombination mit einem GARCH(1,1) Modell führt dies zu folgender Modellgleichung:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma_0 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1},$$

x und y stellen in diesem Fall die beiden exogenen Regressoren dar.

3.4 Die realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit

Wie bereits erwähnt, werden die exogenen Variablen in dieser Bachelorarbeit durch die Realisierte Volatilität und ihre Messgenauigkeit ausgedrückt. Hierfür wird das Paper von Bollerslev et al. aus dem Jahre 2015 als Grundlage herangezogen.

In ihrem Ende 2015 veröffentlichten Paper stellen Bollerslev, Patton et al. einen neuen Ansatz zur Volatilitätsvorhersage vor. Dieser beruht darauf, die bereits erfolgreich untersuchten und auf hochfrequenten Intra-Day-Daten basierenden realisierten Varianzen (RV) in Abhängigkeit von ihrer Messgenauigkeit zu modellieren. Die Grundidee hinter ihrem Paper besteht darin, dass das Gewicht der RV in Abhängigkeit von ihrer Messgenauigkeit variiert. Die realisierte Volatilität ist dabei die Wurzel der realisierten Varianz:

$$\text{realisierte Volatilität} \approx \sqrt{\text{realisierte Varianz}}$$

Die RV ist abhängig von der nicht direkt beobachtbaren latenten integrierten Varianz (IV) und dem Messfehler.

Hierbei stellt sich das bekannte „Errors-in-Variables-Problem“, was besagt, dass die abhängige und die unabhängige Variable vergleichbare Fehlerterme haben. Häufig wird dieses Problem gelöst, indem die Varianz der Messfehler über die Zeit konstant gehalten wird. Bollerslev et al. erlauben nun aber eine temporäre Variation der Fehler. Hierfür nehmen sie Bezug auf die von Barndorff-Nielsen und Shepard (2002) entwickelte asymptotische Verteilungstheorie für die Messung von realisierten Varianzen.

Die realisierte Varianz eines Tages ist dabei definiert als die Summe der hochfrequenten Renditen dieses Tages:

$$RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2$$

Bisher haben Vorhersageverfahren, welche auf die realisierte Volatilität gesetzt haben, Messfehler ignoriert bzw. es wurde alternativ Homoskedastizität angenommen – dies ist bei Bollerslev et al. nicht mehr der Fall.

Aus der bereits erwähnten asymptotischen Verteilungstheorie ergibt sich für den Schätzfehler von der RV folgende Gleichung:

$$RV_t = IV_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim MN(0, 2\Delta I Q_t)$$

Auch hier lässt sich die „Integrated Quarticity“ analog zur integrierten Varianz über die „Realized Quarticity“ bestimmen.

Um die Messfehler der RV zu erhalten, benötigt man also die „Realized Quarticity“, welche sich wie folgt berechnen lässt:

$$RQ_t = \frac{M}{3} \sum_{i=1}^M r_{t,i}^4$$

Die „Realized Quarticity“ des jeweiligen Tages wird also durch die Summe der vierten Potenz der jeweiligen Renditen bestimmt, welche dann mit der durch drei geteilten Anzahl an Renditewerten des jeweiligen Tages multipliziert wird.

In ihrem Paper gehen Patton et al. nun auf das AR-Modell ein. Sie übertragen die Idee, die Messgenauigkeit als zusätzliches Merkmal zu nutzen, auf einen AR-Prozess.

Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass ein gewöhnlicher auto-regressiver Prozess erster Ordnung (AR(1)) folgendermaßen aussieht:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Übertragen auf die Abhängigkeiten in der integrierten Varianz folgt ein entsprechendes AR(1) Modell:

$$IV_t = \phi_0 + \phi_1 IV_{t-1} + u_t$$

Es wird angenommen, dass die realisierte Varianz folgendem Prozess mit $RV_t = IV_t + \eta_t$ folgt:

$$IV_t + \eta_t = \alpha_0 + \alpha_1 (IV_{t-1} + \eta_{t-1}) + u_t.$$

Der Messfehler (η_t) auf der linken Seite der Gleichung ist nicht vorhersagbar. Der Messfehler auf der rechten Seite jedoch beeinflusst direkt den Parameter α_1 und darüber auch die Ergebnisse des auf dem Modell beruhenden Forecasts. Unter der Annahme, dass sowohl η_t als auch u_t unabhängig und identisch verteilt sind, sodass $Cov(RV_t, RV_{t-1}) = \phi_1 Var(IV_t)$ und $Var(RV_t) = Var(IV_t) + 2\Delta IQ$ gilt, lässt sich α_1 ausdrücken als:

$$\alpha_1 = \phi_1 \left(1 + \frac{2\Delta IQ}{Var(IV_t)} \right)^{-1}$$

Der vorhergesagte autoregressive Koeffizient für RV wird daher kleiner sein als der ϕ_1 Koeffizient für IV. Dieser Unterschied zwischen α_1 und ϕ_1 lässt sich darauf zurückführen, dass Effekte aufgrund des Vorhandenseins von Messfehlern unterschätzt werden.

Der Grad der Dämpfung von α_1 ist direkt abhängig von dem Messfehler:

Wenn $2\Delta IQ = 0$, dann folgt daraus, dass $\alpha_1 = \phi_1$ und umgekehrt; Wenn $2\Delta IQ$ sehr groß wird, dann nähert sich α_1 dem Wert Null und damit wird die RV nicht vorhersagbar.

In obiger Gleichung wird α_1 als konstant angenommen. In der Realität verändert sich die Varianz in Bezug auf die Schätzfehler in der RV aber über die Zeit. Zum Beispiel ist an manchen Tagen IQ klein, woraus folgt, dass die RV ein starkes Signal für die wahre (aber nichtmessbare) IV liefert. An anderen Tagen ist die IQ sehr hoch und damit folglich das Signal, welches von der RV ausgeht ziemlich klein.

Es ist also zu erkennen, dass α_1 als konstant anzunehmen für eine Modellierung nicht optimal ist. Stattdessen wäre es nötig den Parameter $\alpha_{1,t}$ über die Zeit variieren zu lassen. An Tagen an denen nur kleine Messfehler vorkommen, sollte $\alpha_{1,t}$ nah an ϕ_1 und an Tagen an denen der Messfehler groß ist, sollte $\alpha_{1,t}$ klein werden.

Zur Modellierung ihrer realisierten Volatilität nutzen Patton et al. nun das AR(1) Modell, und erweitern es um die „Realized Quarticity“ als Maß für die Messgenauigkeit:

$$RV_t = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_{1,q}\sqrt{RQ_{t-1}})RV_{t-1} + \varepsilon_t$$

Wie zu erkennen ist, wird für den Fall, dass RQ konstant ist, aus diesem Modell wieder das Standard AR(1) Modell.

Analog soll nun im Folgenden dieser Ansatz vom AR Modell auf das GARCH-Modell übertragen werden.

3.5 Die realisierte Volatilität im GARCH – X Modell

Im Unterkapitel zum Standard-GARCH Modell wurde gezeigt, dass GARCH-Modelle Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen sehr gut abbilden können. Hier hat das GARCH-Modell deutliche Vorteile zum eben vorgestellten AR Modell. Daher wird hier darauf eingegangen, wie die zusätzlichen Informationen aus den Intraday-Daten genutzt werden können, um die Vorhersagegüte von GARCH-Modellen zu verbessern.

Zur Erinnerung: Die Modellgleichung des AR-Modells in Verbindung mit der realisierten Volatilität und ihrer Messgenauigkeit hatte folgende Form:

$$RV_t = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_{1,q}\sqrt{RQ_{t-1}})RV_{t-1} + \varepsilon_t$$

Hierbei ist der farblich hervorgehobene Bereich der für diese Arbeit interessante Teil. In Abhängigkeit von α_1 und $\alpha_{1,q}$ haben die vergangenen Werte von RV und RQ einen Einfluss auf den aktuellen Wert von RV.

Dieser Ansatz soll nun auf das GARCH-Modell übertragen werden.

Das Standard-GARCH(1,1) Modell hat folgende Modellgleichung:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Da nun zu dieser Gleichung die exogenen Variablen RQ und RV hinzugefügt werden sollen, würde sich analog zum AR(1) Modell folgende Gleichung ergeben:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{RQ_{t-1}})RV_{t-1} \quad (1)$$

Um diese Gleichung nun auf die im Kapitel zu GARCH-X Modellen vorgestellte Form zu bringen muss diese ausmultipliziert werden:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma_0 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1}$$

Daraus folgt das in dieser Bachelorarbeit genutzte Modell zur Einbeziehung der realisierten Volatilität und ihrer Messgenauigkeit als exogene Variablen in einem GARCH-X Modell:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + (\gamma_0 \times RV_{t-1}) + (\gamma_1 \times \sqrt{RQ_{t-1}} \times RV_{t-1})$$

Auch hier ist analog zum Ansatz im AR(1) Modell zu erkennen, dass, wenn RQ konstant wäre, der gesamte gelb hervorgehobene Bereich sich auf einen einzigen Regressor für RV vereinfachen lassen würde.

4. Risikomanagement anhand des Value at Risk

Im Bereich der Finanzmärkte kommt dem Risikomanagement eine immer größere Bedeutung zu: Sowohl für Banken als auch Versicherungen ist Transparenz über das eingegangene Risiko bei einer Anlage bzw. neuen Anlageentscheidung fundamental. Im Zuge der Finanzkrise hat sich die Bedeutung von Risikomanagement und damit auch die Bedeutung der Risikomaße noch erhöht, da die Anforderungen an die Unternehmen aufgrund von Regulierungsbestrebungen noch weiter angestiegen sind.

Ein sehr etabliertes Risikomaß ist dabei der Value-at-Risk (VaR) – der Wert im Risiko. Dieses Risikomaß soll in der Auswertung der realen Daten in dieser Bachelorarbeit genutzt werden, weswegen an dieser Stelle näher darauf eingegangen wird.

Der Value at Risk wurde vom damaligen CEO von JP Morgan, Dennis Weatherstone, im Jahre 1994 entwickelt. Sein Ziel war es, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine klare Aussage darüber treffen zu können, welches Verlustrisiko in einem festgelegten Zeitrahmen nicht überschritten wird.

Hieraus leiten sich die benötigten Parameter des Value at Risk ab – der Zeitraum T und das Konfidenzniveau $1-\alpha$.

Zum Beispiel bedeutet ein VaR von einer Million Euro, einer Haltedauer von einem Jahr und einem Konfidenzniveau von 95%, dass der potentielle Verlust des betrachteten Portfolios innerhalb eines Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht über einer Million Euro liegen wird. Dies wird in Abbildung 4 grafisch verdeutlicht. In diesem Fall ist die Bezugsgröße nicht Euro, sondern, wie auch bei späteren Modellierungen, die Prozentzahl hinsichtlich der Rendite die nicht unterschritten werden darf – diese lässt sich gewiss mit der Anlagesumme schnell in einen monetären Betrag umrechnen:

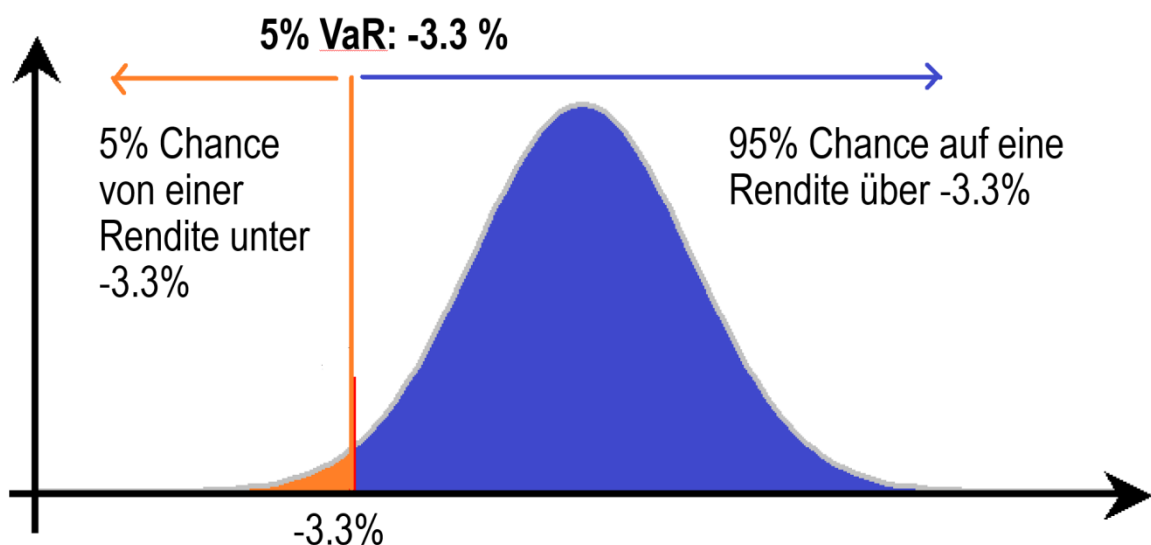


Abbildung 4: Grafische Verdeutlichung des VaR (eigene Darstellung)

Der Verlust wird über den Zeitraum T mit L für Loss angegeben. Der VaR ist in diesem Fall das obere α -Quantil von L. Für eine stetige Verlustverteilung von L ergibt sich der VaR zu $VaR(\alpha) = \inf(x: P(L > x) \leq \alpha)$ (Ruppert & Matteson, 2015, S. 553-555).

Hierbei stellt $\inf(X)$ die größte untere Schranke von X dar, also die größte Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze zur Berechnung des VaR. Auf der einen Seite die historische Simulation – diese ist eine Nicht-Parametrische Simulation, die nicht durch ein statistisches Modell geschätzt wird und auch nicht auf bestimmten Verteilungsannahmen beruht. Die Verwendung der historischen Simulation ist jedoch kritisch, da die Log-Renditen als unabhängig angenommen werden, und wird in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt (Ruppert & Matteson, 2015, S. 555).

In dieser Arbeit wird die zweite Möglichkeit angewendet: Der parametrische Ansatz. Dieser wird im Folgenden genauer vorgestellt, da er die Grundlage für die anschließende Datenauswertung liefert.

Abschließend soll in diesem Kapitel auf verschiedene Evaluierungsmethoden des VaR eingegangen werden.

4.1 Parametrische Schätzung des Value at Risk

Zur Schätzung des Value at Risk von Kapitalanlagen ist eine parametrische Methode basierend auf der Annahme normalverteilter Renditen sehr geläufig. Die nötigen Parameter lassen sich dabei von den in Kapitel 3 erwähnten Modellen schätzen.

Unter der Normalverteilungsannahme für die logarithmierten Renditen ergibt sich der VaR für eine Kapitalanlage zu:

$$VaR_t^{norm}(\alpha) = -\mu_t - \sigma_t \phi^{-1}(\alpha)$$

mit α als die gegebene Wahrscheinlichkeit, $\phi^{-1}(\alpha)$ als α -Quantil aus der Normalverteilung, μ_t als bedingtem Erwartungswert und σ_t als bedingter Standardabweichung.

Um die Leptokurtosis (Steilgipfligkeit) und die schweren Ränder von Finanzmarktzeitreihen passend abzubilden, wird anstelle der Normalverteilungsannahme die t-Verteilung für die Renditen angenommen. Hierbei ist der Value at Risk folgendermaßen definiert:

$$VaR_t^{stud}(\alpha) = -\mu_t - \sqrt{\frac{v-2}{v}} \sigma_t F_v^{-1}(\alpha)$$

$F_v^{-1}(\alpha)$ ist hier das α -Quantil der t-Verteilung mit v Freiheitsgraden. Diese müssen geschätzt werden (Ruppert & Matteson, 2015, S. 564).

4.2 Testverfahren zur Beurteilung der Ergebnisse des VaR

Um die Güte der VaR-Modelle beurteilen zu können, gibt es verschiedene Testmöglichkeiten. In diesem Kapitel werden nun 3 Tests vorgestellt, die später auch zur Anwendung kommen werden. Auf alle drei Tests ist Christoffersen in seinem 1998 erschienenen Paper eingegangen, daher dient dieses als Grundlage für die Evaluierungsmethoden in dieser Bachelorarbeit.

Bei einem gegebenen Konfidenzniveau von $\alpha = 0.05$ erwartet man, dass 5% der realen Werte gegen die Value at Risk- Grenze verstoßen.

Ein Verstoß gegen diese Grenze wird dabei wie folgt definiert:

$$\omega_t = \begin{cases} 1, & \text{wenn } r_t \leq -VaR_t \\ 0, & \text{wenn } r_t \geq -VaR_t \end{cases}$$

ω_t ist eine Folge von bernouliverteiltern Zufallsvariablen, nimmt also ausschließlich die Werte Null und Eins an. W_T (Window) steht für das Zeitfenster in dem der VaR berechnet wurde, also der Anzahl an Werten. Da die Summe von ω_t der Anzahl an Verstößen entspricht, und die Differenz von der Anzahl der VaR-Werte und der Anzahl der Verstöße die Anzahl an Werten liefert die den VaR eingehalten haben, kann man $v_1 = \sum \omega_t$ und $v_0 = W_T - v_1$ definieren (Danielsson, 2011, S. 145).

Ob die Summe an Verstößen nun eine kritische Grenze überschreitet, lässt sich mit dem Unconditional Coverage Test überprüfen.

4.2.1 Unconditional Coverage Test

Unter der Annahme, dass ω eine Bernoulliverteilte Zufallsvariable darstellt, lautet die Nullhypothese für die Verstöße des VaR:

$$H_0 = \omega \sim B(p)$$

Die Bernoulli-Dichte ist definiert als:

$$(1 - p)^{1-\omega_t} p^{\omega_t}, \quad \omega_t = 0 \text{ oder } 1$$

Die Wahrscheinlichkeit p kann durch $\hat{p} = \frac{v_1}{W_T}$ geschätzt werden. Die Likelihoodfunktion lautet:

$$L_U(\hat{p}) = \prod_{t=W_E+1}^T (1 - \hat{p})^{1-\omega_t} (\hat{p})^{\omega_t} = (1 - \hat{p})^{v_0} (\hat{p})^{v_1}$$

Der Datensatz wird in einen Trainings- und einen Testdatensatz aufgeteilt. $W_E + 1$ stellt hierbei den Beginn des Testdatensatzes dar.

Unter H_0 gilt $p = \hat{p}$. Daraus folgt die restringierte Likelihoodfunktion:

$$L_R(p) = \prod_{t=W_E+1}^T (1 - p)^{1-\omega_t} p^{\omega_t} = (1 - p)^{v_0} (p)^{v_1}$$

Anschließend ist es möglich den Likelihood-Ratio-Test durchzuführen:

$$LR = 2 \left(\log L_U(\hat{p}) - \log L_R(p) \right) \underset{\sim}{\text{asymptotisch}} \chi_{(1)}^2$$

Bei einem Signifikanzniveau von 5% wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn $LR > 3.84$ (Danielsson, 2011, S. 154). Bei der Datenanalyse wird sich bezüglich des Verwerfens der Nullhypothese auf den P-Wert bezogen.

4.2.2 Unabhängigkeitstest

Der soeben vorgestellte Unconditional Coverage Test ignoriert die Zeitvariation in den Daten. Da die Verstöße jedoch gleichmäßig über die Zeit verteilt sein sollten – also keine Cluster von Verstößen auftreten sollten, ist es wichtig auch diesen Aspekt der Zeitvariation innerhalb der VaR-Prediktion zu untersuchen.

Hierbei muss die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden für den Fall, dass an zwei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils Verstöße gegen den VaR vorlagen sowie für den Fall, dass ein Verstoß vorliegt, wenn am vorherigen Tag kein Verstoß beobachtet wurde. Im Allgemeinen wird die Wahrscheinlichkeit definiert als:

$$p_{ij} = P(\omega_t = i | \omega_{t-1} = j),$$

wobei i und j nur die Werte Null oder Eins annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsmatrix erster Ordnung ist nun nach Christoffersen (1998) definiert als:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die restringierte Likelihood-Funktion zu

$$L_R(\Pi_1) = (1 - p_{01})^{v_{00}} (p_{01})^{v_{01}} (1 - p_{11})^{v_{10}} (p_{11})^{v_{11}}$$

Die Maximum Likelihood Schätzung wird nun ermittelt, indem $L_R(\Pi_1)$ maximiert wird:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_{00}}{v_{00} + v_{01}} & \frac{v_{01}}{v_{00} + v_{01}} \\ \frac{v_{10}}{v_{10} + v_{11}} & \frac{v_{11}}{v_{10} + v_{11}} \end{pmatrix}$$

Unter der Annahme der Nullhypothese, dass ein Verstoß heute keinen Einfluss auf einen Verstoß am nächsten Tag hat, folgt $p_{01} = p_{11} = p$. Die Übergangsmatrix ergibt sich zu:

$$\hat{\Pi}_0 = \begin{pmatrix} 1 - \hat{p} & \hat{p} \\ 1 - \hat{p} & \hat{p} \end{pmatrix}$$

wobei gilt:

$$\hat{p} = \frac{v_{01} + v_{11}}{v_{00} + v_{10} + v_{01} + v_{11}}$$

Die unrestringierte Likelihoodfunktion basierend auf der Nullhypothese verwendet die geschätzte Übergangsmatrix und ergibt sich zu:

$$L_U(\hat{\Pi}_0) = (1 - \hat{p})^{v_{00} + v_{10}} \hat{p}^{v_{01} + v_{11}}$$

Der Likelihood-Ratio-Test wird schließlich durch die beiden Likelihoods gebildet (Danielsson, 2011, S. 156):

$$LR = 2 \left(\log L_U(\hat{\Pi}_0) - \log L_R(\Pi_1) \right) \underset{\sim}{\text{asymptotisch}} \chi_{(1)}^2$$

4.2.3 Conditional Test

Nach Christoffersen (1998) kann man aus den beiden soeben vorgestellten Tests einen gemeinsamen Test bilden, welcher eine Aussage darüber trifft, ob die tatsächlichen Verstöße signifikant von den erwarteten Verstößen verschieden sind, und ob die Verstöße in Clustern auftreten.

Dies kann mit folgender Teststatistik beurteilt werden:

$$LR(\text{joint}) = LR(\text{coverage}) + LR(\text{independence}) \sim \chi_{(2)}^2$$

Da dieser Test eine geringere Power hinsichtlich des Ablehnens eines VaR Modells aufweist, reicht es nicht aus nur den Conditional Test durchzuführen. Beispielsweise wenn die tatsächlichen Verstöße nicht signifikant von den erwarteten Verstößen verschieden sind, aber die Unabhängigkeitsannahme der Verstöße verletzt ist, würde der Unabhängigkeitstest das Modell eher ablehnen, als der zusammengesetzte Test (Danielsson, 2011, S. 159).

5. Datenvorstellung und Analyse

5.1 Vorstellung und Aufbereitung der Daten

Der in dieser Bachelorarbeit analysierte Datensatz besteht aus Intraday-Daten des S&P 500 Index.

Namensgebend für diesen Aktienindex ist Standard & Poor's, welche ihn 1957 begründeten. Der S&P 500 Index enthält 500 der größten börsennotierten Unternehmen der USA und ist nach Marktkapitalisierung gewichtet.

Für diese Arbeit liegen die 5-Minuten-Kurse des S&P 500 im Zeitraum von 2006 bis 2011 vor.

Aus diesen Daten wurde mit Hilfe der logarithmierten Renditen im Abstand von 5 Minuten die RV sowie die RQ berechnet. Ebenso wurden die täglichen Renditen bestimmt.

5.2 Deskriptive Analyse

An dieser Stelle wird der Kursverlauf des S&P 500 zunächst deskriptiv untersucht. Hierbei wird auf die eingangs erwähnten Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen eingegangen und ein Überblick über die Datenlage gegeben.

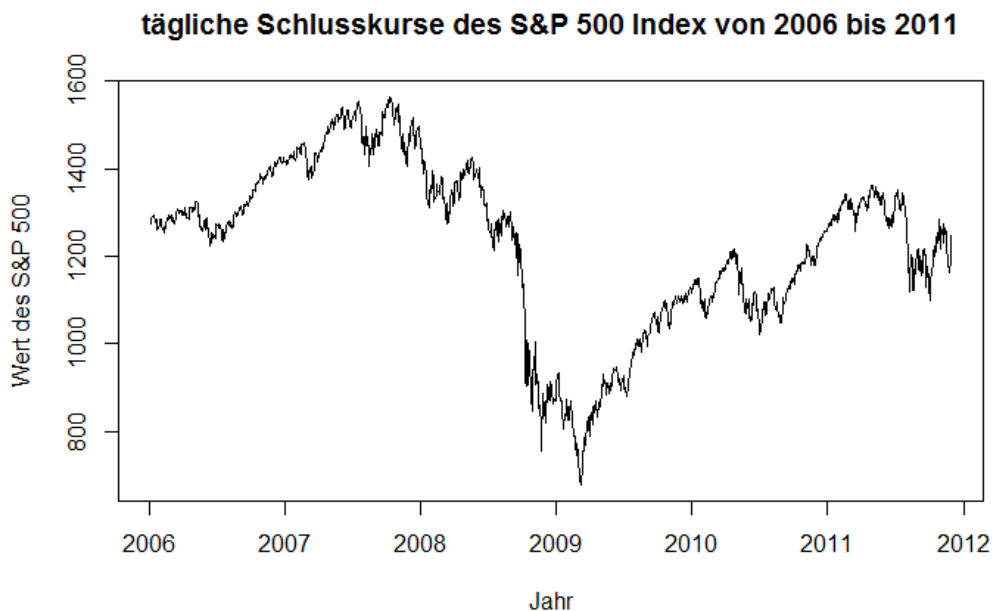


Abbildung 5: tägliche Schlusskurse des S&P 500 (2006-2011)

In dieser Abbildung sind die täglichen Schlusskurse des S&P 500 von den Jahren 2006 bis 2011 abgebildet. Wie im zweiten Kapitel schon erwähnt erkennt man, dass diese Zeitreihe nicht

stationär ist, sondern sich im Zeitverlauf stark wandelt. Besonders auffällig ist der Einbruch des Kurswertes im Zuge der Weltfinanzkrise ab 2008. Nach der Bodenbildung im Jahre 2009 ist eine deutliche Erholung festzustellen.

Da diese Zeitreihe offensichtlich nicht die Eigenschaften der Stationarität aufweist, wird in Abbildung 6 eine Übersicht über die logarithmierten Renditen des S&P 500 im selben Zeitraum gegeben.

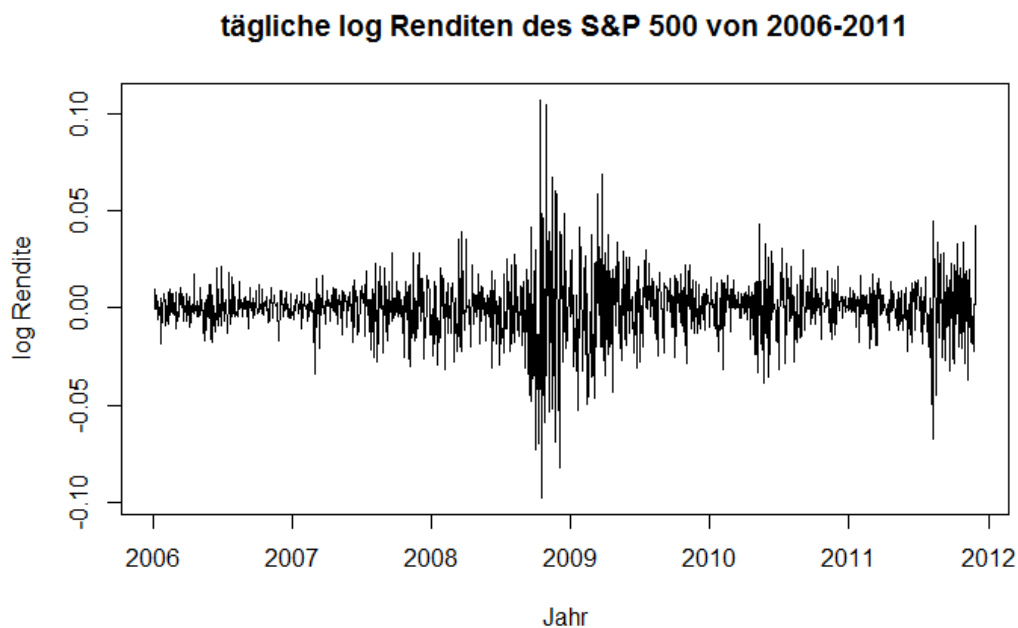


Abbildung 6: tägliche log Renditen des S&P 500 (2006-2011)

Hierbei fällt auf, dass die Werte um Null herum schwanken – es ist also kein Trend erkennbar. Eine weitere Auffälligkeit sind die auftretenden Volatilitätscluster.

Die Zeit um den Jahreswechsel von 2009 ist geprägt von sehr starken Renditeschwankungen, wohingegen die Zeit vor 2007 eine sehr niedrige Volatilität in den Renditen aufweist.

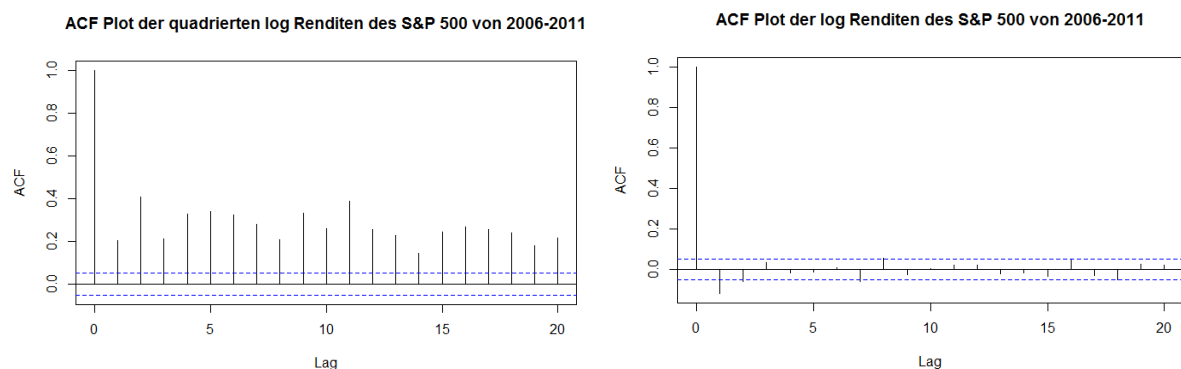


Abbildung 7: ACF-Plots der log-Renditen und quadrierten log Renditen des S&P 500 von 2006-2011

In Abbildung 7 sind die ACF-Plots der quadrierten log Renditen und der log Renditen gegenübergestellt. Auch hier fällt auf, dass die quadrierten logarithmierten Renditen einen sehr starken Zusammenhang aufweisen, die logarithmierten Renditen hingegen deutlich weniger.

Dies ist ein weiteres Anzeichen für das Auftreten von Volatilitätsclustern, wodurch geschlussfolgert werden kann, dass ein GARCH-Modell für die Modellierung angemessen ist.

Abgeschlossen wird die deskriptive Analyse mit einer kurzen Übersicht über wichtige Kennzahlen.

Tabelle 1: Kennzahlen des S&P 500

Index	Mittelwert	Varianz	Kurtosis	<i>Ljung: Q(21)</i>	<i>Ljung: Q_{quad}(21)</i>
S&P 500	0.00001	0.00024	10.38160	0.00136	0.00000

Auffällig ist zum einen, dass der Mittelwert sehr nahe an Null liegt. Normalerweise geht man davon aus, dass Aktienkurse im Laufe der Zeit einen positiven Trend aufweisen. In diesem Fall liegen die Daten in einem Zeitraum voller Turbulenzen an den Weltfinanzmärkten, sodass sich der Mittelwert von fast Null erklärt. Eine weitere Auffälligkeit liegt bei den Werten der Ljung-Box-Tests: Als Lag wurde in diesem Fall 21 gewählt, da dies bei täglichen Renditen der Anzahl der durchschnittlich monatlich vorkommenden Handelstage entspricht (Danielsson, 2011, S. 79). Der Ljung-Box-Test der quadrierten Renditen zeigt wie erwartet sehr starke Autokorrelation, jedoch zeigt der Ljung-Box-Test der normalen log Renditen, dass zumindest eine schwache Autokorrelation vorhanden ist. Grundsätzlich ist das Vorhandensein von Autokorrelation von Aktienrenditen inhaltlich unplausibel, da dies sonst für Handelsstrategien genutzt werden würde und damit risikoloses Geld verdient werden könnte.

Zuletzt ist noch die Kurtosis erwähnenswert. Sie zeigt mit einem Wert von über 10 deutlich leptokurtische (steilgipflige) Eigenschaften an, was auf schwere Ränder in der Verteilung der Renditen hinweist. Eine Normalverteilung würde im Vergleich dazu den Wert Drei annehmen (Tsay, 2013, S. 22+23), daher wird bei der Berechnung des VaR neben der Normalverteilung auch die t-Verteilung getestet, da diese in der Lage ist schwere Ränder abzubilden.

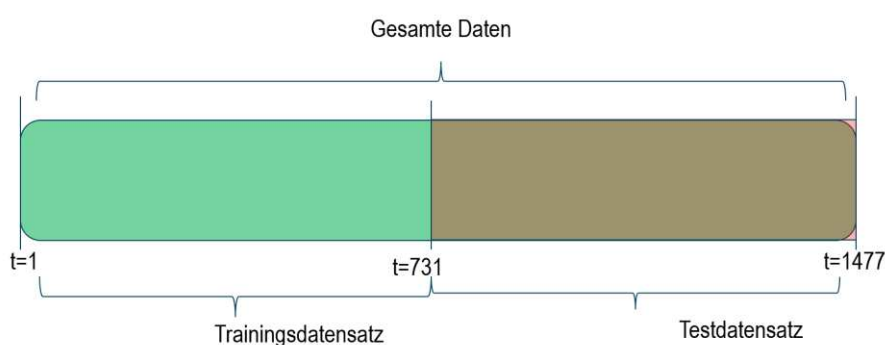
5.3 Auswertung der Daten anhand des Value at Risk

Um nun die in Kapitel 3 vorgestellten Modelle auf den Value at Risk anzuwenden, soll zunächst das genaue Vorgehen erklärt werden. Insgesamt werden 3 verschiedene Modelle miteinander verglichen – der Standard GARCH(1,1) Modell, das GARCH(1,1)-X Modell mit einem externen Regressor (der RV) und einem GARCH(1,1)-X Modell mit 2 externen Regressoren (der RV und der RQ). Diese werden sowohl für die normal- als auch für die t-Verteilungsannahme auf die Daten angewendet und anschließend der Value at Risk sowohl für das 5%, als auch für das 1% Konfidenzniveau untersucht. Die Ergebnisse für die Normalverteilungsannahme werden nur im Anhang aufgeführt, da wir bereits gezeigt haben, dass die Annahme einer t-Verteilung für die Daten des S&P 500 aufgrund der schweren Ränder besser geeignet ist.

Um nun die Güte der verschiedenen Modelle bewerten und vergleichen zu können, wird ein Backtesting angewendet. Hiermit kann überprüft werden, ob eventuell Schwächen bei der VaR-Schätzung auftreten – ob der VaR zum Beispiel von dem jeweiligen Modell unterschätzt wird (Danielsson, 2011, S. 143).

Zunächst wird der Datensatz dabei in einen Test- und einen Trainingsdatensatz aufgeteilt. In dem hier untersuchten Fall läuft der Trainingsdatensatz vom 01.01.2006 bis zum 31.12.2008 und der Testdatensatz vom 01.01.2009 bis zum 31.12.2011. Da in dieser Bachelorarbeit ein rekursives Verfahren verwendet wird, erhöht sich der Trainingsdatensatz mit jedem abgeschlossenen Vorgang um einen Wert.

Es wird nun mit dem ersten Zeitpunkt nach dem Trainingsdatensatz begonnen. Für diesen wird anhand der Daten des Trainingsdatensatzes der VaR berechnet. Anschließend startet der Vorhersagevorgang neu. Es wird also in jedem Schritt das Modell neu an die Daten angepasst. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 8 grafisch erläutert:



Start Forecast	End Forecast	Value at Risk
t=1	t=731	VaR (732)
t=1	t=732	VaR (733)
....
t=1	t=1476	VaR (1476)

Abbildung 8: Expanding Window Forecast (eigene Darstellung)

Bevor auf die Ergebnisse der jeweiligen Modelle genauer eingegangen wird, sollen an dieser Stelle exemplarisch die Schätzer für die jeweiligen Modelle, bezogen auf den gesamten Datensatz gezeigt werden.

Tabelle 2: Parameter der GARCH-Modelle

Modell	α_1	β_1	γ_0	γ_1	AIC
GARCH	0.0920	0.9024	-	-	-6.1447
GARCH-X (nur RV)	0.0006	0.3416	1.1666	-	-6.3007
GARCH-X	0.0015	0.3628	1.2304	-92.6203	-6.3047

Alle Parameter zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ signifikant

Das GARCH-X Modell mit beiden externen Regressoren ist laut dem AIC-Kriterium am besten an die Daten angepasst. Das Aikake Informationskriterium ist dabei ein Maß für die Güte des Modells. Es setzt sich zusammen aus der Log-Likelihood der Daten und der Anzahl der Parameter. Dabei wird das AIC so modelliert, dass eine hohe Log Likelihood zu einem niedrigen AIC und eine große Anzahl an Parametern zu einem hohen AIC führt (Ruppert & Matteson, 2015, S. 109). Insgesamt ist zu sehen, dass sich das AIC bei allen drei Modellen auf einem ähnlichen Niveau befindet, jedoch das Standard-GARCH Modell etwas abfällt.

Desweiteren fällt auf, dass der Einfluss des ARCH-Parameters (α_1) unter Hinzunahme der RV deutlich geringer wird. Um die aktuelle Volatilität vorherzusagen, ist anscheinend in diesen Fällen die Volatilität der Vorperiode (β_1) und die RV (γ_0) entscheidender.

Gleiches gilt für das Modell mit sowohl der RV als externem Regressor, als auch $RV \times \sqrt{RQ}$ als zweitem externen Regressor. Hier gilt es jedoch anzumerken, dass die Werte für RQ sehr klein werden, da sich RQ, wie in Kapitel 3 gezeigt, aus der vierten Potenz der Renditen zusammensetzt. Dies erklärt den hohen negativen Wert von γ_1 .

In Kapitel 3 haben wir gezeigt, dass im Ansatz von Bollerslev, Patton et. al. sich die „Realized Quarticity“ dahingehend auf die RV auswirkt, dass bei einer hohen Messungengenauigkeit (also hohem RQ) RV einen schwächeren Einfluss haben soll. Umgekehrt gilt natürlich, falls die Messungengenauigkeit von RV sehr gering ist, dann soll RV einen starken Einfluss auf die bedingte Volatilität haben. Diesen Einfluss kann man anhand der Parameter im GARCH-X Modell mit beiden externen Regressoren erkennen. Der Regressor γ_0 ist positiv – das heißt, dass sich der Wert von RV positiv in der bedingten Varianz niederschlägt. Der Regressor γ_1 ist hingegen negativ und beruht auf einer Kombination aus RV und RQ. Da RV und RQ nur positive Werte annehmen können, hat dieser Wert immer einen negativen Einfluss auf die bedingte Varianz. Das Produkt aus $RV \times \sqrt{RQ}$ verdeutlicht den Einfluss von RQ. Sollte RQ sehr klein werden (nahe 0), dann wird auch das Produkt sehr klein (nahe 0) und der Einfluss verschwindet. Sollte RQ jedoch einen sehr großen Wert annehmen, dann wird auch das Produkt einen großen Wert annehmen, somit wird in Kombination mit γ_1 ein negativer Einfluss auf die bedingte Varianz entstehen und in Zusammensetzung mit $\gamma_0 \times RV$ ein abgeschwächter Einfluss von RV auf die bedingte Varianz.

$(\gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{RQ_{t-1}})RV_{t-1}$ wird also mit höherer RQ kleiner und mit kleinerer RQ größer.

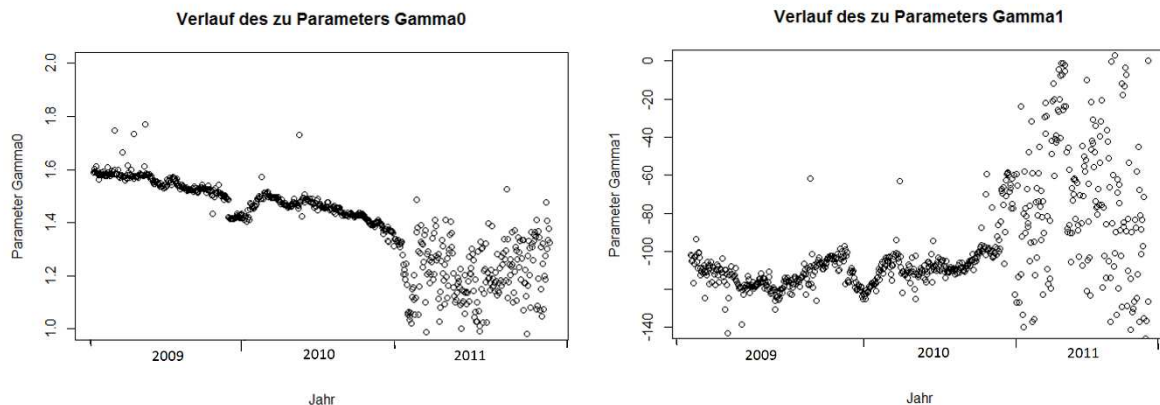


Abbildung 9: Verläufe der Parameter Gamma0 und Gamma1 von 2009-2011

In Abbildung 8 sieht man die Verläufe der Parameter Gamma0 und Gamma1 von 2009-2011.

Es fällt auf, dass der Verlauf sehr gleichförmig ist: Gamma0 fällt im Zeitverlauf leicht ab, Gamma1 bleibt im Zeitverlauf sehr konstant. Dies spricht dafür, dass der Informationsgehalt der Parameter eher gering ist. Einzig auffällig ist bei beiden Diagrammen der Bereich um den Zeitpunkt Ende 2009. Dies ist in Bezug auf die Rendite des S&P 500 eine Phase in der die Renditen sehr niedrig ausfallen (vgl. Abbildung 6). Es ist ferner zu sehen, dass in Abbildung 6 die Renditen auch ab Anfang 2011 sehr niedrig ausfallen – was sich jedoch in den Verläufen von Gamma0 und Gamma1 nicht widerspiegelt. Hier fällt auf, dass die Werte ab 2011 viel stärker variieren ohne ein Muster erkennen zu lassen.

Nun sollen die Ergebnisse der verschiedenen Modelle genauer vorgestellt werden.

Zunächst wird an dieser Stelle eine Übersicht über die Modelle und deren Anzahl an Verstößen gegen die VaR-Annahme gegeben.

Tabelle 3: Anzahl der Verstöße des Value at Risk

Modell (jeweils t-Verteilung)	Erwartete Verstöße	Tatsächliche Verstöße	Prozentualer Anteil	LR_C	LR_{unab}	LR_{UC}
GARCH-X 95%	37	39	0.053 %	0.913	0.943	0.674
GARCH-X 99%	8	7	0.009 %	-	-	0.910
GARCH-X nur RV 95%	37	46	0.063 %	0.250	0.551	0.120
GARCH-X nur RV 99%	8	9	0.010 %	-	-	0.542
GARCH 95%	37	32	0.044 %	0.673	0.708	0.430
GARCH 99%	8	5	0.007 %	-	-	0.362

Der Conditional Test und der Test auf Unabhängigkeit haben für das 99% Konfidenzintervall keine Ergebnisse ausgegeben. Ansonsten lässt sich sagen, dass die Ergebnisse in allen Modellen die Unabhängigkeit und die korrekte Anzahl an Verstößen bestätigen. Das heißt, dass alle 3 Modelle grundsätzlich in der Lage sind den Value at Risk adäquat zu berechnen. Jedoch fällt auf, dass die Ergebnisse in diesem Fall zeigen, dass das GARCH-Modell die Anzahl an Verstößen eher unterschätzt, der Value at Risk also als zu niedrig angenommen wird, wohingegen das GARCH-X Modell mit nur der RV als exogener Variable für das 95% Konfidenzintervall die Anzahl an Fehlern überschätzt, bei 99% aber sehr gute Ergebnisse liefert. Das in dieser Arbeit vorgestellte GARCH-X Modell mit zwei exogenen Regressoren bietet in Bezug auf diesen Untersuchungszeitraum und auf den S&P 500 für beide Konfidenzintervalle gute Einschätzungen hinsichtlich des VaR.

Zum Abschluss wird die Verteilung der Fehler in grafischer Form dargestellt. Nach den Testergebnissen ist zu erwarten, dass auch optisch keine Abhängigkeit der Fehler erkennbar ist.

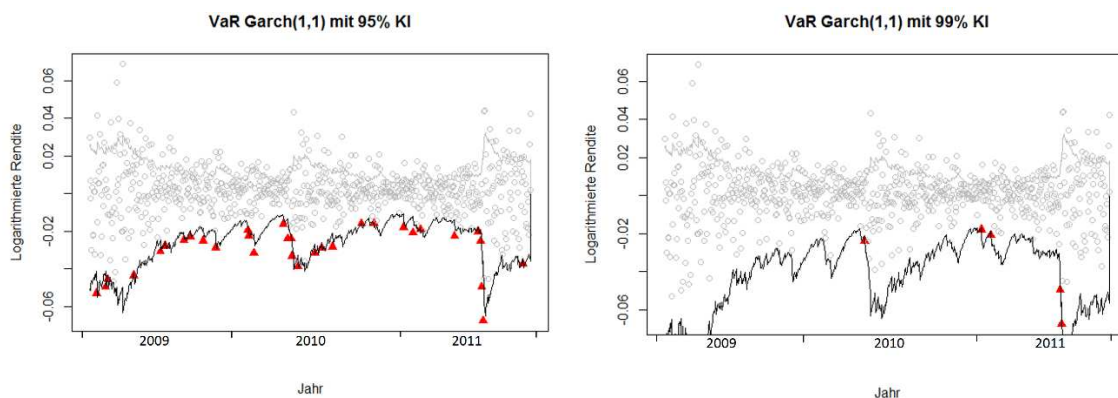


Abbildung 10: VaR Standard GARCH t -Verteilung

Den Anfang macht die Darstellung für das Standard-GARCH Modell ohne externe Regressoren. Es ist keine Besonderheit hinsichtlich der Verteilung erkennbar. Bei nur fünf auftretenden Fehlern beim 99% Konfidenzintervall ist es schwer eine Aussage zu treffen. Für das 95% Konfidenzintervall sieht die Verteilung der Fehler sehr gleichmäßig aus. Das Modell ist also in der Lage die Volatilitätscluster auszugleichen, sodass die Fehler sowohl in Phasen niedriger Volatilität als auch in Phasen mit hoher Volatilität auftreten.

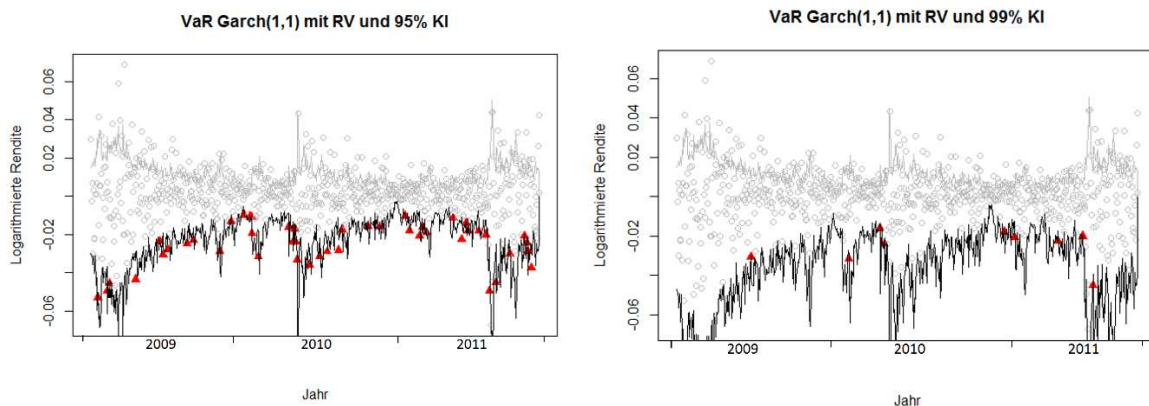


Abbildung 11: VaR GARCH mit RV als externem Regressor und t-Verteilung

Die Verteilung der Fehler sieht hier auch sehr passend aus. Auffällig ist jedoch, dass die Werte der vorhergesagten Renditen sich viel stärker voneinander unterscheiden als bei dem Standard GARCH Modell. Dies ist aber auch inhaltlich zu erwarten, da im Standard GARCH Modell der Wert der Vorperiode einen deutlich stärkeren Einfluss auf die bedingte Varianz der aktuellen Periode hat.

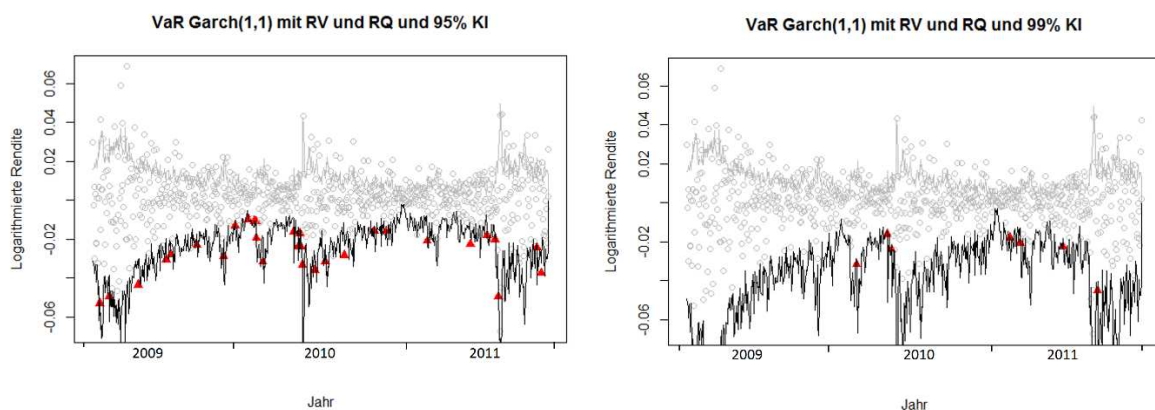


Abbildung 12: GARCH mit zwei externen Regressoren und t-Verteilung

Der Verlauf im GARCH Modell mit zwei externen Regressoren sieht dem im Modell mit nur der RV als exogenem Regressor sehr ähnlich. Auch hier sind die Schwankungen zwischen den einzelnen Werten sehr stark ausgeprägt. Außerdem treten die Fehler an den gleichen, bzw. ähnlichen Stellen auf.

Auch hier sieht die Verteilung der Fehler so aus wie man es erwartet hätte. Es treten keine besonderen Häufungen von Fehlern auf. Zwar erscheint zunächst auffällig, dass im Jahr 2009 bei der Übersicht mit 99% Konfidenzintervall gar keine Fehler auftreten. Bei insgesamt aber nur sieben Fehlern ist dies aber kein klares Indiz für eine Abhängigkeit.

6. Zusammenfassung und Fazit

Nach der Analyse der Daten lassen sich einige Rückschlüsse auf die hier benutzten Modelle ziehen. Grundsätzlich sollte man zunächst einschränken, dass in dieser Arbeit nur der S&P 500 über einen zeitlich eingeschränkten Bereich untersucht wurde. Um bessere Aussagen treffen zu können, wäre es nötig die Verfahren noch auf andere Daten zu übertragen um damit mehr Aussagekraft hinsichtlich der Ergebnisse zu erzielen.

Auffällig ist, dass die Zunahme sowohl der realisierten Volatilität allein als auch ihrer Messgenauigkeit dazu führt, dass die vorhergesagten Werte sich deutlich weniger an denen der Vorperiode orientieren. Es findet eine deutlich größere Schwankung in den Werten statt.

Es fällt auf, dass das Modell sehr gute Werte hinsichtlich des Forecasting des Value at Risk liefert. Jedoch sind in den Plots der Parameter keine besonderen Variationsmuster zu erkennen, sodass nicht ausgeschlossen werden kann, dass dies in diesem Fall einen glücklichen Zufall darstellt.

Weiter ist zu bemerken, dass in diesem Fall zwar die statistischen Kennzahlen sehr positiv aussehen, so ist das AIC besser als in den Vergleichsmodellen und das Forecasting liefert sehr gute Ergebnisse, jedoch ist die Schwankung in den Werten so groß, dass man in vielen Phasen einen deutlich höheren Value at Risk annehmen müsste als bei dem Standard-GARCH Modell.

Die Gründe hierfür liegen vermutlich darin, dass durch das Quadrieren bzw. durch die vierte Potenz der Renditen bei der „Realized Quarticity“ diese Werte extremen Schwankungen unterliegen – besonders in Phasen wie der Wirtschaftskrise und es somit schwierig ist diese in ein lineares Modell zu überführen.

Es wäre daher überlegenswert, die Daten nicht mit einem Standard GARCH Modell als Grundlage auszuwerten, sondern beispielsweise auf ein log-GARCH Modell zurückzugreifen.

Wenn dies die Prognosefähigkeiten erhöhen sollte, ergäben sich weitere mögliche Ansätze daraus, dieses Modell auch auf multivariate Fälle zu übertragen, da Portfolios nicht nur aus einer Aktie oder einem Aktienindex bestehen, sondern meistens aus einer Kombination vieler verschiedener Anlagemöglichkeiten.

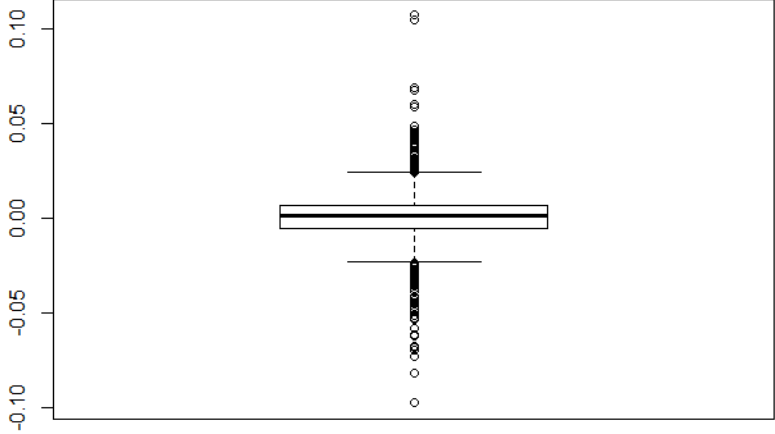
Abschließend lässt sich sagen, dass es sehr interessant war sich mit dieser Fragestellung auseinanderzusetzen, in der Messgenauigkeit hinsichtlich der realisierten Volatilität auch vermutlich nutzbare Informationen enthalten sind, aber für abschließende Bewertungen sicher noch andere Modelle und Verfahren getestet werden müssten.

Literaturverzeichnis

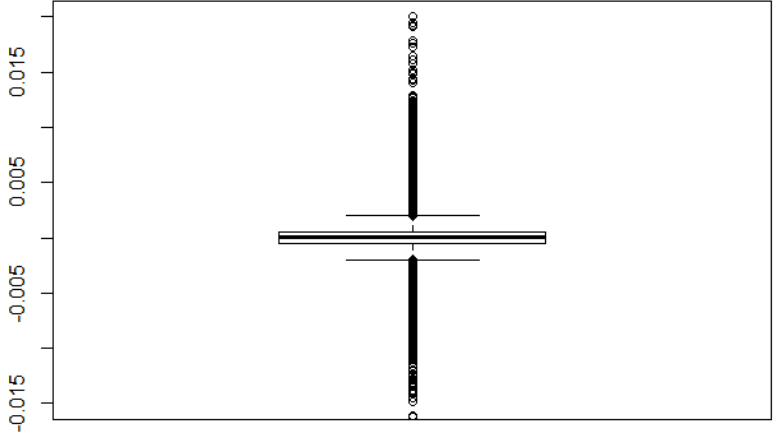
- Andersen T.G., B. T. (2005). Correcting the errors: Volatility forecast evaluation using high-frequency data and realized volatilities. *Econometrica* 73.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* 31.3 , pp. 307-327.
- Bollerslev, T., Patton, A. J., & Quaedvlieg, R. (2016). Exploiting the errors: A simple approach for improved volatility forecasting. *Journal of Econometrics* 192, pp. 1-18.
- Christoffersen, P. F. (1998, November). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, Vol. 39, pp. 841-862.
- Danielsson, J. (2011). *Fianncial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*. Wiley.
- Ghalanos, A. (2015). Package "rugarch". Retrieved from <https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>
- J. Ryan, J. U. (2013). Package "xts". Retrieved from <https://cran.r-project.org/web/packages/xts/xts.pdf>
- J.P. Kreis, G. N. (2010). Einführung in die Zeitreihenanalyse. *Statistik und ihre Anwendungen*.
- Ruppert, D., & Matteson, D. S. (2015). *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*. Springer.
- Schlittgen, R. (2015). *Angewandte Zeitreihenanalyse mit R*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- Tietze, J. (2002). *Einführung in die Finanzmathematik*. Vieweg.
- Tsay, R. S. (2013). *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*. Wiley.

Anhang

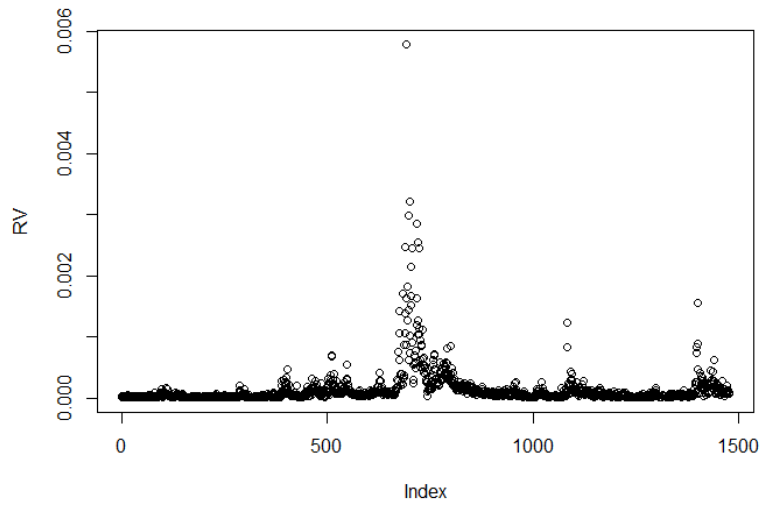
Boxplot der täglichen Renditen des S&P 500 2006-2011



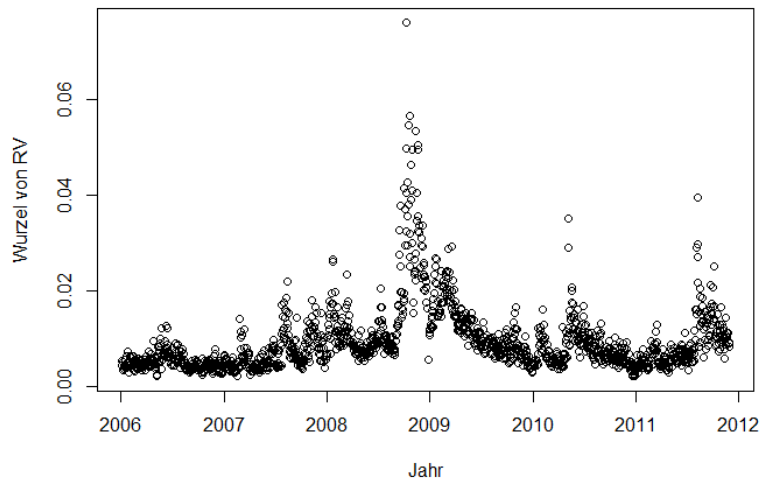
Boxplot der 5-Minuten Renditen von 2006-2011



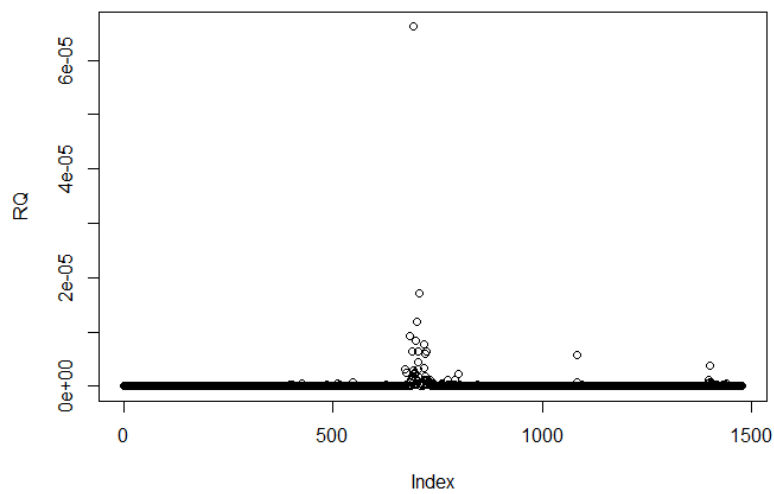
Plot der Werte der realized variance im Zeitverlauf 2006-2011



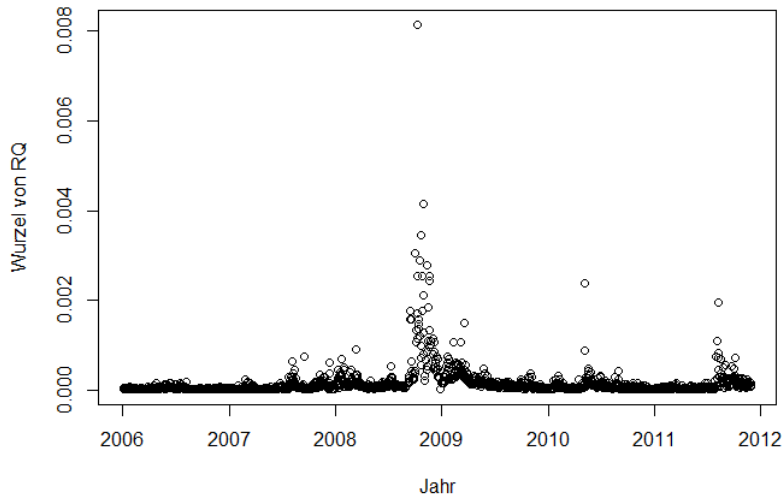
Zeitreihe der Wurzel von RV von 2006-2011



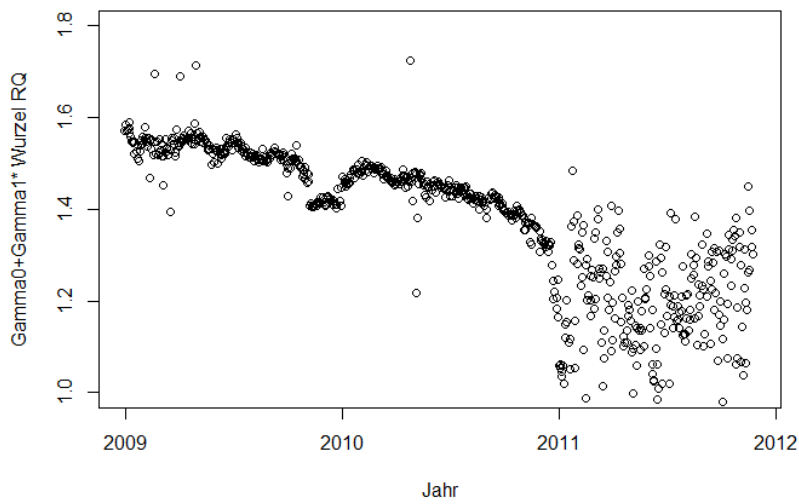
Plot der Werte der realized Quarticity im Zeitverlauf 2006-2011



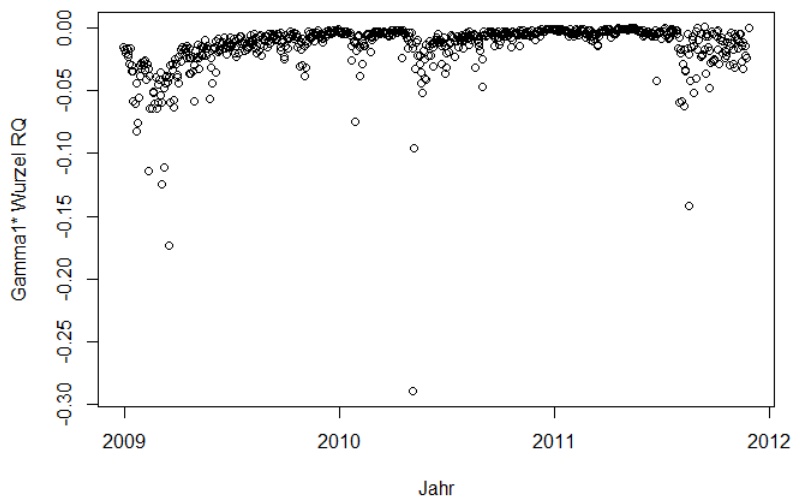
Zeitreihe der Wurzel von RQ von 2006-2011



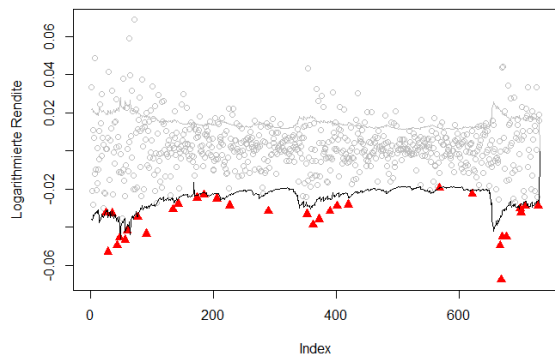
Gamma0 + Gamma1 x Wurzel RQ



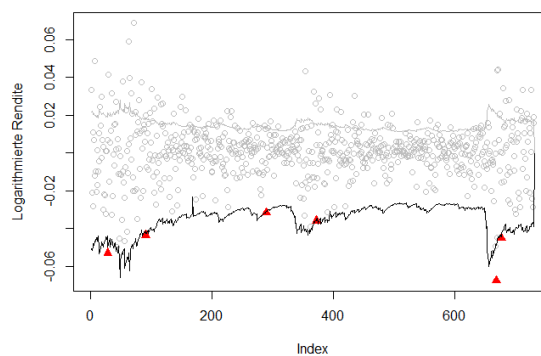
Gamma1 x Wurzel von RQ von 2009 bis 2011



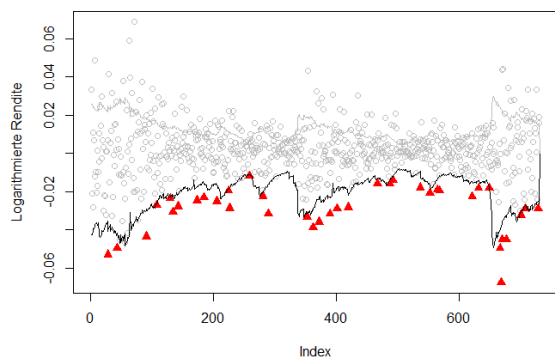
VaR Garch(1,1) Normalverteilung und 95% KI



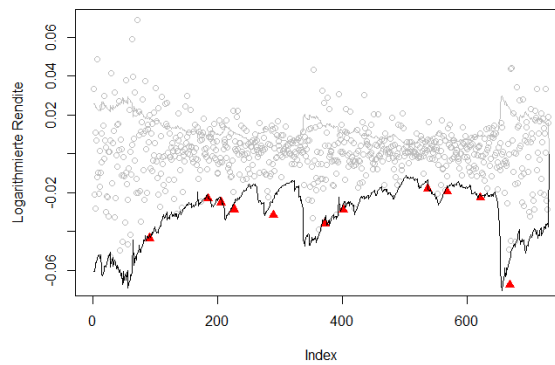
VaR Garch(1,1) unter Normalverteilung und 99% KI



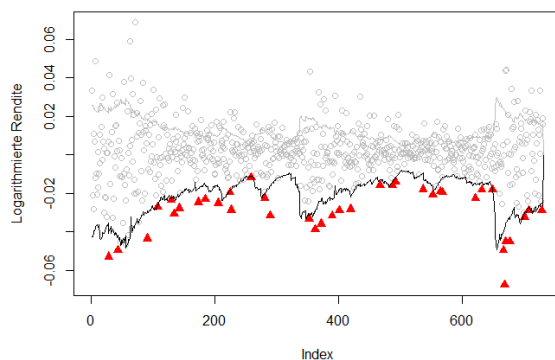
VaR Garch mit RV, Normalverteilung und 95% KI



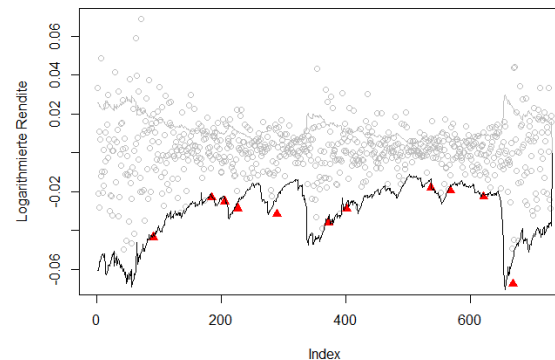
VaR Garch mit RV, Normalverteilung und 99% KI



VaR Garch mit RV und RQ und 95%



VaR Garch mit RV und RQ und 99%



Erklärung zur Urheberschaft

Hiermit bestätige ich, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum

Unterschrift