Arch. math. Logik 17 (1975), 55—60

# EIN AUSGEZEICHNETES MODELL FÜR DIE INTUITIONISTISCHE TYPENLOGIK*

Wilfried Buchholz

In [3] beweist Osswald den Hauptsatz (Zulässigkeit der Schnittregel) für den hier mit IT bezeichneten Kalkül von Schütte für die intuitionistische Typenlogik. Schütte (unveröffentlicht) hat diesen Beweis umgeformt, indem er die in [3] definierten „Berechnungsprädikate" $Wt$ und „neuen Variablen" $z(r,q)$ zur Konstruktion eines ausgezeichneten Kripke-Modells verwendete, in welchem genau die in IT herleitbaren Formeln gültig sind, woraus sich sofort auch der Hauptsatz für IT ergibt. Die Beweise von Osswald und Schütte beziehen sich nur auf das $(\rightarrow, \forall)$-Fragment von IT, lassen sich aber nicht ohne weiteres auf das volle System IT (welches auch die Junktoren $\perp \wedge \vee$ und den Quantor $\exists$ als Grundzeichen enthält) ausdehnen. Diese Aufgabe soll hier gelöst werden; und zwar durch Angabe eines ausgezeichneten *algebraischen* Modells $(Q, (I^\tau)_\tau)$. Dabei bezeichnet $Q$ einen vollständigen Pseudo-Boolschen Verband, der sich als Menge von möglichen Wahrheitswerten auffassen läßt, wobei $1 := \max Q$ dem Wert „wahr" und $0 := \min Q$ dem Wert „falsch" entspricht. $I^\tau$ bezeichnet den Bereich der Objekte vom Typ $\tau$; und entsprechend dazu, daß die IT-Terme vom Typ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $n$-stellige Prädikate mit Argumenten der Typen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ darstellen, ist jedes Element von $I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ mit einer Abbildung von $I^{\alpha_1} \times \cdots \times I^{\alpha_n}$ in $Q$ verbunden.

*Zusammenstellung der im Text verwendeten Mitteilungszeichen*

$\tau, \alpha_i$ für Typen; $(\alpha)$ für Typen der Gestalt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;
$a^\tau, x^\tau$ für freie bzw. gebundene Variablen vom Typ $\tau$;
$t^\tau, u^\tau$ für Terme bzw. $I$-Terme von Typ $\tau$;
$a^\alpha$ für die Folge $a_1^{\alpha_1}, \ldots, a_n^{\alpha_n}$ (entsprechend $x^\alpha$, $t^\alpha$, $u^\alpha$);
$A, U$ für Formeln bzw. $I$-Formeln;
$\Gamma, \Delta$ für endliche Formelmengen;
$c$ für $I$-Grundterme, d. h. Elemente von $\bigcup_\tau I^\tau$;

$A[z_1, \ldots, z_n]$ ($U[z_1, \ldots, z_n]$) bezeichne diejenige Zeichenreihe, die sich aus der Formel $A$ ($I$-Formel $U$) ergibt, wenn in ihr gewisse freie Variablen $a_1, \ldots, a_n$ ($I$-Grundterme $c_1, \ldots, c_n$) durch die Zeichenreihen $z_1, \ldots, z_n$ ersetzt werden.

* Eingegangen am 8. 5. 1973.

„$\mathfrak{A} \Rightarrow$ Satz *i*, $Lj\,\mathfrak{B}$“ bedeute, daß sich aus der Aussage $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von Satz *i* und Lemma *j* auf die Aussage $\mathfrak{B}$ schließen läßt.

## Das Formale System IT

*Typen*

1. 0 ist ein Typ.
2. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Typen ($n \geqq 1$), so ist auch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Typ.

*Grundzeichen*

1. Freie und gebundene Variablen eines jeden Typs.
2. Zu jedem Typ eine gewisse (evtl. leere) Menge von Konstanten.
3. Funktionszeichen (jedoch nur für den Typ 0).
4. $\wedge \vee \rightarrow \perp \exists \forall \lambda \in (\ )$.

*Terme und Formeln*

1. Jede freie Variable oder Konstante vom Typ $\tau$ ist ein Term vom Typ $\tau$.
2. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme vom Typ 0, und ist $f$ ein $n$-stelliges Funktionszeichen, so ist $f t_1 \ldots t_n$ ein Term vom Typ 0.
3. Ist $A[a^\alpha]$ eine Formel, so ist $\lambda x^\alpha A[x^\alpha]$ ein Term vom Typ $(\alpha)$.
4. Sind $t_0, \ldots, t_n$ $(n \geqq 1)$ Terme der Typen $(\alpha)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so ist $(t_1, \ldots, t_n \in t_0)$ eine Formel.
5. $\perp$ ist eine Formel. Sind $A$, $B$, $A[a^\tau]$ Formeln, so auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $\forall x^\tau A[x^\tau]$, $\exists x^\tau A[x^\tau]$.

*Axiome*

1. $A \rightarrow A$.
2. $\perp \rightarrow A$.

*Grundschlußregeln*

1. $A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow C \vdash B_1 \rightarrow \cdots \rightarrow B_m \rightarrow C$, falls $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteqq \{B_1, \ldots, B_m\}$.
2. $A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow A,\ A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow B \rightarrow C \vdash A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$.

3.–12. Je zwei Einführungsregeln für jedes der logischen Zeichen $\vee \wedge \exists \forall \lambda$ („Vorderglied-“ und „Hinterglied“-Einführung).[1]

„$\vdash A$“ besage wie üblich, daß die Formel $A$ im System $IT$ herleitbar ist. Ist $\{A_1, \ldots, A_n\} = \{B_1, \ldots, B_m\}$, so gilt $\vdash A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow C$ genau dann, wenn $\vdash B_1 \rightarrow \cdots \rightarrow B_m \rightarrow C$ gilt; deshalb ist „$\vdash \Gamma \rightarrow A$“ eine wohldefinierte Aussage, falls $\Gamma$ eine endliche Formelmenge bezeichnet.

[1] Siehe: Osswald [4], 1.5 (2) (e) (f) (g) (h), Satz 1 (1)–(6).

## Das ausgezeichnete Modell $(Q, (I^\tau)_\tau)$

*Definition von Q*

$p \in Q :\Leftrightarrow p \subseteq \{\Gamma \mid \Gamma$ endl. Formelmenge$\}$, und es gilt (Q 1)–(Q 8);

(Q 1) $\{\perp\} \in p$;
(Q 2) $\Gamma \in p \Rightarrow \Delta \in p$, falls $\Gamma \subseteq \Delta$;
(Q 3) $\Gamma \cup \{B\} \in p \Rightarrow \Gamma \cup \{A \to B\} \in p$, falls $\vdash \Gamma \to A$;
(Q 4) $\Gamma \cup \{A\} \in p \Rightarrow \Gamma \cup \{A \wedge B\}, \Gamma \cup \{B \wedge A\} \in p$, für jede Formel $B$;
(Q 5) $\Gamma \cup \{A\}, \Gamma \cup \{B\} \in p \Rightarrow \Gamma \cup \{A \vee B\} \in p$;
(Q 6) $\Gamma \cup \{A[t^\tau]\} \in p \Rightarrow \Gamma \cup \{\forall x^\tau A[x^\tau]\} \in p$;
(Q 7) $\Gamma \cup \{A[a^\tau]\} \in p$ für jede freie Var. $a^\tau$ vom Typ $\tau \Rightarrow \Gamma \cup \{\exists x^\tau A[x^\tau]\} \in p$;
(Q 8) $\Gamma \cup \{A[t^\alpha]\} \in p \Rightarrow \Gamma \cup \{(t^\alpha \in \lambda x^\alpha A[x^\alpha])\} \in p$.

*Definition von $p \twoheadrightarrow q$*

Für $p, q \in Q$ sei $p \twoheadrightarrow q := \{\Gamma \mid$ Aus $\Gamma \subseteq \Delta$ und $\Delta \in p$ folgt $\Delta \in q\}$.

*Lemma 1.* Für $p, q \in Q$ gilt: (1) $p \twoheadrightarrow q \in Q$,
(2) $p \cap (p \twoheadrightarrow q) \subseteq q$,
(3) $r \in Q$ und $p \cap r \subseteq q \Rightarrow r \subseteq (p \twoheadrightarrow q)$.

Beweis: klar.

$(Q, \subseteq)$ ist ein vollständiger *Pseudo-Boolescher Verband*, d. h.
1. zu jeder Teilmenge $M$ von $Q$ existiert in $Q$ das $\subseteq$-Infimum $(= \cap M)$ und das $\subseteq$-Supremum $(=: \sqcup M = \cap \{p \in Q \mid \cup M \subseteq p\})$ von $M$,
2. für je zwei Elemente $p, q$ aus $Q$ besitzt die Menge $\{r \in Q \mid p \cap r \subseteq q\}$ ein Maximum, nämlich $p \twoheadrightarrow q$.

*Definition.* $0 := \cap Q$, $1 := \sqcup Q = \{\Gamma \mid \Gamma$ endl. Formelmenge$\}$.

*Definition von QA für jede Formel A*

$QA := \{p \in Q \mid \{A\} \in p$ und $\vdash \Gamma \to A$ für alle $\Gamma \in p\}$.

*Induktive Definition von $I^\tau$* (Induktion nach $\tau$)

1. $I^0 :=$ Menge aller Terme vom Typ 0.
2. $c \in I^{(\alpha)} :\Leftrightarrow c$ ist ein Paar $(t^{(\alpha)}, f)$ mit $f \in Q^{I^{\alpha_1} \times \dots \times I^{\alpha_n}}$ und $f(c_1, \dots, c_n) \in Q(c_1^*, \dots, c_n^* \in t^{(\alpha)})$ für alle $c_i \in I^{\alpha_i}$.

Für $c \in I^\tau$ sei $c^* := \begin{cases} c, & \text{falls } \tau = 0 \\ t^\tau, & \text{falls } \tau \neq 0 \text{ und } c = (t^\tau, f). \end{cases}$

*Lemma 2.* (1) Für jede Formel $A$ gilt $\{\Gamma \mid \vdash \Gamma \to A\} \in QA$.
(2) Zu jedem Term $t^\tau$ gibt es ein $c \in I^\tau$ mit $c^* = t^\tau$.

Beweis: klar.

*Satz 1.* (1) $0 \in Q\bot$.

(2) $p \in QA$ und $q \in QB \Rightarrow p \cap q \in Q(A \wedge B)$

$p \sqcup q \in Q(A \vee B)$

$p \rightarrow q \in Q(A \rightarrow B)$.

(3) $p_c \in QA[c^*]$ für alle $c \in I^\tau \Rightarrow \cap \{p_c | c \in I^\tau\} \in Q \forall x^\tau A[x^\tau]$,

$\sqcup \{p_c | c \in I^\tau\} \in Q \exists x^\tau A[x^\tau]$

(4) $QA[t^\alpha] \subseteq Q(t^\alpha \in \lambda x^\alpha A[x^\alpha])$.

Beweis:

(1) $(Q1) \Rightarrow \{\bot\} \in 0$; $L2(1) \Rightarrow \{\Gamma | \vdash \Gamma \rightarrow \bot\} \in Q \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow \bot$ für $\Gamma \in 0$.

(2) Vorauss.: (i) $\{A\} \in p$, $\{B\} \in q$; $p, q \in Q$.

(ii) $\vdash \Gamma \rightarrow A$ für $\Gamma \in p$, $\vdash \Gamma \rightarrow B$ für $\Gamma \in q$.

(a): (i), $(Q4) \Rightarrow \{A \wedge B\} \in p \cap q$.

$\Gamma \in p \cap q \Rightarrow$(ii)$\vdash \Gamma \rightarrow A$ und $\vdash \Gamma \rightarrow B \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow A \wedge B$.

(b): (i), $(Q5) \Rightarrow \{A \vee B\} \in p \cup q \subseteq p \sqcup q$.

$\Gamma \in p \cup q \Rightarrow$(ii)$\vdash \Gamma \rightarrow A$ oder $\vdash \Gamma \rightarrow B \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow A \vee B$;

also ist $p \cup q \subseteq \{\Gamma | \vdash \Gamma \rightarrow A \vee B\}$; nach L2(1) folgt daraus

$\vdash \Gamma \rightarrow A \vee B$ für alle $\Gamma \in p \sqcup q$.

(c): $\Delta \in p \Rightarrow$(ii), (i), $(Q2) \vdash \Delta \rightarrow A$, $\Delta \cup \{B\} \in q \Rightarrow (Q3)\ \Delta \cup \{A \rightarrow B\} \in q \Rightarrow \Delta \in q$,

falls $\{A \rightarrow B\} \subseteq \Delta$; also ist $\{A \rightarrow B\} \in p \rightarrow q$.

$\Gamma \in p \rightarrow q \Rightarrow$(i)$\,\Gamma \cup \{A\} \in q \Rightarrow$(ii)$\vdash \Gamma \rightarrow A \rightarrow B$.

(3) Vorauss.: (i) $p_c \in Q$ und $\{A[c^*]\} \in p_c$ für alle $c \in I^\tau$.

(ii) $\vdash \Gamma \rightarrow A[c^*]$ für alle $c \in I^\tau$, $\Gamma \in p_c$.

(a): (i), $(Q6) \Rightarrow \{\forall x^\tau A[x^\tau]\} \in \cap \{p_c | c \in I^\tau\}$.

$\Gamma \in \cap \{p_c | c \in I^\tau\} \Rightarrow L2(2)$, (ii) $\vdash \Gamma \rightarrow A[a^\tau]$,

$a^\tau$ nicht in $\Gamma \rightarrow \forall x^\tau A[x^\tau] \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow \forall x^\tau A[x^\tau]$.

(b): (i), $L2(2) \Rightarrow \{A[t^\tau]\} \in \sqcup \{p_c | c \in I^\tau\}$ für jeden Term $t^\tau$

$\Rightarrow (Q7)\ \{\exists x^\tau A[x^\tau]\} \in \sqcup \{p_c | c \in I^\tau\}$.

$\Gamma \in \cup \{p_c | c \in I^\tau\} \Rightarrow$(ii)$\vdash \Gamma \rightarrow A[t^\tau]$ für einen Term $t^\tau \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow \exists x^\tau A[x^\tau]$;

also ist $\cup \{p_c | c \in I^\tau\} \subseteq \{\Gamma | \vdash \Gamma \rightarrow \exists x^\tau A[x^\tau]\}$; daraus folgt nach L2(1)

$\vdash \Gamma \rightarrow \exists x^\tau A[x^\tau]$ für $\Gamma \in \sqcup \{p_c | c \in I^\tau\}$.

(4) Sei $p \in QA[t^\alpha]$;

$\{A[t^\alpha]\} \in p \Rightarrow (Q8)\ \{(t^\alpha \in \lambda x^\alpha A[x^\alpha])\} \in p$;

$\Gamma \in p \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow A[t^\alpha] \Rightarrow \vdash \Gamma \rightarrow (t^\alpha \in \lambda x^\alpha A[x^\alpha])$.

*Definition der I-Formeln und I-Terme*

Die Elemente von $I^\tau$ heißen $I$-Grundterme vom Typ $\tau$. Eine $I$-Formel (ein $I$-Term vom Typ $\tau$) entsteht aus einer Formel (einem Term vom Typ $\tau$), wenn alle darin auftretenden freien Variablen durch $I$-Grundterme entsprechender Typen ersetzt werden.

Ist $U$ eine $I$-Formel (ein $I$-Term), so bezeichne $U^*$ diejenige Formel (denjenigen Term), die (der) aus $U$ entsteht, wenn jeder in $U$ auftretende $I$-Grundterm $c$ durch $c^*$ ersetzt wird.

*Induktive Definition von $WU$ und $Wu^\tau$ für jede I-Formel $U$ und jeden I-Term $u^\tau$*

Ist $c_0 = (t^{(\alpha)}, f) \in I^{(\alpha)}$ und $(c_1, \ldots, c_n) \in I^{\alpha_1} \times \cdots \times I^{\alpha_n}$,
so sei $c_0''(c_1, \ldots, c_n) := f(c_1, \ldots, c_n)$.
$f$ bezeichne stets Abbildungen mit Def.bereich $I^{\alpha_1} \times \cdots \times I^{\alpha_n}$.

(W 1) $Wc := c$, für jeden $I$-Grundterm $c$;
(W 2) Sei $k$ eine Konstante vom Typ $\tau$:

$$Wk := \begin{cases} k & \text{, falls } \tau = 0 \\ (k, f), \text{ mit } f(c_1, \ldots, c_n) := \{\Gamma \mid \vdash \Gamma \to (c_1^*, \ldots, c_n^* \in k)\}, & \text{falls } \tau = (\alpha); \end{cases}$$

(W 3) $W\lambda x^\alpha U[x^\alpha] := (\lambda x^\alpha U[x^\alpha]^*, f)$ mit $f(c_1, \ldots, c_n) := WU[c_1, \ldots, c_n]$;
(W 4) $W(u^\alpha \in u_0^{(\alpha)}) := (Wu_0^{(\alpha)})''(Wu_1^{\alpha_1}, \ldots, Wu_n^{\alpha_n})$
(W 5) $W\bot := 0$
(W 6) $W(U \underset{\to}{\overset{\wedge}{\vee}} V) := WU \underset{\to}{\overset{\cap}{\sqcup}} WV$
(W 7) $W\overset{\forall}{\exists}x^\tau U[x^\tau] := \overset{\cap}{\sqcup} \{WU[c] \mid c \in I^\tau\}$.

Aus dem folgenden Satz 2 geht hervor, daß diese Definition tatsächlich *jeder* $I$-Formel $U$ einen Wert $WU$ zuordnet. Bis jetzt ist ja noch nicht gesichert, daß jedes gemäß (W 3) definierte $Wu^{(\alpha)}$ ein Element von $I^{(\alpha)}$ ist; andernfalls wäre aber ($W4$) nicht in jedem Falle anwendbar.

*Satz 2.* Für jeden $I$-Term $u^\tau$ gilt $Wu^\tau \in I^\tau$.
Für jede $I$-Formel $U$ gilt $WU \in QU^*$.

Beweis durch Ind. nach der Def. von $W$:
(W 1) klar; (W 2) siehe L 2(1); (W 5–7) siehe Satz 1 (1)–(3);
(W 3) Ind. vor., Satz 1 (4) $\Rightarrow WU[c_1, \ldots, c_n] \in QU[c_1, \ldots, c_n]^*$ und

$$QU[c_1, \ldots, c_n]^* \subsetneqq Q(c_1^*, \ldots, c_n^* \in \lambda x^\alpha U[x^\alpha]^*).$$

(W 4) Nach Ind. vor. gilt $Wu_0^{(\alpha)} \in I^{(\alpha)}$, $Wu_i^{\alpha_i} \in I^{\alpha_i}$; wie man sich leicht überlegt ist außerdem $(Wu^\tau)^* = u^{\tau *}$; also gilt:

$$(Wu_0)''(Wu_1, \ldots, Wu_n) \in Q((Wu_1)^*, \ldots, (Wu_n)^* \in (Wu_0)^*) = Q(u_1, \ldots, u_n \in u_0)^*.$$

*Lemma 3.* (1) $WU[u^\tau] = WU[Wu^\tau]$ für jede $I$-Formel $U[u^\tau]$.
(2) $WU[u^\alpha] = W(u^\alpha \in \lambda x^\alpha U[x^\alpha])$.
(3) $W(U_1 \to \cdots \to U_n \to V) = 1 \Leftrightarrow \cap \{WU_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subsetneqq WV$.

Beweis: (1) Durch Ind. nach der Def. von $WU[c]$.
(2) $WU[u^\alpha] \underset{(1)}{=} WU[Wu^\alpha] \underset{(W3)}{=} (W\lambda x^\alpha U[x^\alpha])''(Wu^\alpha) \underset{(W4)}{=} W(u^\alpha \in \lambda x^\alpha U[x^\alpha])$.
(3) $W(U \to V) = 1 \Leftrightarrow WU \to WV = 1 \Leftrightarrow WU \subsetneqq WV$, siehe L 1.

*Definition.* Ist $a$ eine freie Variable vom Typ $(\alpha)$, so sei $\bar{a} := (a, f) \in I^{(\alpha)}$ mit $f(c_1, \ldots, c_n) := \{\Gamma \mid \vdash \Gamma \to (c_1^*, \ldots, c_n^* \in a)\}$.
Ist $A$ eine Formel, so sei $\bar{A}$ diejenige $I$-Formel, die entsteht, wenn in $A$ jede freie Variable $a$ eines Typs $\neq 0$ durch $\bar{a}$ ersetzt wird. Offensichtlich ist $\bar{A}^* = A$.

Eine $I$-Formel $U$ heiße Spezialisierung der Formel $A$, wenn $U$ aus $A$ durch Einsetzung von $I$-Grundtermen für sämtliche freien Variablen von $A$ hervorgeht.

*Satz 3.* (1) $\vdash A \Rightarrow WU = 1$, für jede Spezialisierung $U$ von $A$.
(2) $W\bar{A} = 1 \Rightarrow \vdash A$.
(3) $A, A \to B \vdash B$ ist eine zulässige Schlußregel des Systems IT.

Beweis:

(1) Beweis durch Herleitungsind. mit Hilfe von Lemma 3.
(2) $W\bar{A} = 1 \Rightarrow$ Satz 2 $1 \in Q\bar{A}^* = QA \Rightarrow$ (wegen $\phi \in 1$) $\vdash A$ (siehe Def. $QA$).
(3) $\vdash A,\ A \to B \Rightarrow (1)\ W\bar{A} = W(\bar{A} \to \bar{B}) = 1 \Rightarrow \mathrm{L}\,3(3)\ W\bar{B} = 1 \Rightarrow (2) \vdash B$.

## LITERATUR

[1] Girard, J. Y.: Une extension de l'interpretation de Gödel a l'analyse, et son application a l'elimination des coupures dans l'analyse et la theorie des types, Proceedings of the second Scandinavian logic symposium, North Holland, Amsterdam, 63–92 (1971).
[2] Martin-Löf, P.: Hauptsatz for the theory of species, wie in [1], 217–233.
[3] Osswald, H.: Ein syntaktischer Beweis für die Zulässigkeit der Schnittregel im Kalkül von Schütte für die intuitionistische Typenlogik. manuscripta math. **8**, 243–249 (1973).
[4] Osswald, H.: Vollständigkeit und Schnittelimination in der intuitionistischen Typenlogik. manuscripta math. **6**, 17–31 (1972).
[5] Prawitz, D.: Hauptsatz for higher order logic. Journal of symbolic logic **33**, 452–457 (1968).
[6] Takahashi, M.: Cut-elimination theorem and Brouwerian-valued models for the intuitionistic type theory. Comment. math. universitatis Sancti Pauli, Tokyo, 1–18 (1971).