Arch. math. Logik **18** (1976), 85—98

ÜBER TEILSYSTEME VON $\bar{\Theta}(\{g\})$*

Von Wilfried Buchholz, München

In der vorliegenden Arbeit wollen wir zeigen, daß die Ordinalzahlbezeichnungssysteme $W(X)$, $Wd(\{1\})$ von Pfeiffer [4], [6] und $O(I)$, $Od(I)$ von Kino [3] in dem System $\bar{\Theta}(\{g\})$ aus [1] enthalten sind. Wir werden dazu Teilsysteme von $\bar{\Theta}(\{g\})$ konstruieren, die sich unmittelbar als isomorphe Bilder jener Systeme erkennen lassen. Im einzelnen werden die folgenden Beziehungen bewiesen:

Für $\|X\|=\|I\|=1+\tau\leqslant\Lambda_0$ *gilt*:

(1) $\bar{\Theta}(\tau)$ *ist Teilsystem von* $\bar{\Theta}(\{g\})$,

(2) $W(X)\cong\bar{\Theta}(\tau)$,

(3) $(O(I), <_0)\leqslant\bar{\Theta}_0(\tau)$ und $(O(I), <_\infty)\leqslant\bar{\Theta}(\tau)$,

(4) $(Od(I), <_0)\leqslant\bar{\Theta}_0(v)$ und $(Od(I), <_\infty)\leqslant\bar{\Theta}(v)$ mit $v:=\Theta\,\Omega_{\Omega_1}\tau$,

(5) $Wd(\{1\})\cong\bar{\Theta}(\{g\})$.

Dabei bezeichnen wir mit $\|\ \|$ die Ordnungstypen von wohlgeordneten Mengen. $\mathfrak{A}\leqslant\mathfrak{B}$ bedeute, daß es eine ordnungstreue Abbildung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ gibt. Ferner sei $\bar{\Theta}_0(\tau):=\{x\in\bar{\Theta}(\tau): Sx=0\}$, $\bar{\Theta}_0(\{g\}):=\{x\in\bar{\Theta}(\{g\}): Sx=0\}$ und $\Lambda_0:=\|\bar{\Theta}_0(\{g\})\|$. Die Bezeichnungssysteme $\bar{\Theta}(\tau)$ wurden in [1], § 5 parallel mit $\bar{\Theta}(\{g\})$ definiert; nach [1] (Lemmata 8b, 9a, 10c und Satz 11a) gilt für sie:

$$\|\bar{\Theta}(\tau)\|\leqslant\bar{\Theta}(\Omega_{1+\tau}+\Omega_{1+\tau})0 \text{ \textit{und} } \|\bar{\Theta}_0(v)\|=\begin{cases} v, & \textit{wenn } v=\Theta\,\Omega_{\Omega_1}\tau \\ \bar{\Theta}\,\Omega_{1+v}0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

Bemerkungen

1. Aus (5) folgt, daß $Wd(\{1\})$ wohlgeordnet ist, was bisher noch nicht gesichert war. (Die in [6] angegebene Skizze eines Wohlordnungsbeweises von $Wd(\{1\})$ ist nicht schlüssig.)
2. Die Beziehungen (2), (3), (4) gelten für beliebige $\tau<\Omega_1$. Wir haben die Behauptungen auf $\tau\leqslant\Lambda_0$ beschränkt, da wir hier nur in $\bar{\Theta}(\{g\})$ arbeiten und somit die Beweise explizit nur für $\tau\leqslant\Lambda_0$ durchführen werden.
3. Nach Pfeiffer [5] gilt $(O(X), <_0)\cong W_0(X)$ und $(O(X), <_\infty)\cong W(X)$.

* Eingegangen am 15.3.1976.

§ 1. Die Teilsysteme $\bar{\Theta}(\tau)$

Wir gehen von der in [1], § 5 gegebenen Definition des Bezeichnungssystems $\bar{\Theta}(\{g\})=(\mathfrak{T}, <)$ aus und verwenden die dort eingeführten Abkürzungen und Mitteilungszeichen. Nach [1] gelten die folgenden Lemmata 1—3.

Lemma 1
a) $Sa \leqslant a$,
b) $Sa < Sb \Rightarrow a < b$.

Lemma 2
a) $K_{Sb} a \cup \{b\} < \bar{\Theta} ab$ (für $\bar{\Theta} ab \in \mathfrak{T}$),
b) $\{a, b\} < gab$.

Lemma 3
a) $v < Sc \Rightarrow K_v Sc \subset K_v c$,
b) $Sc \leqslant v \wedge a \in \mathfrak{H} \Rightarrow (K_v c < a \Leftrightarrow c < a)$.

In üblicher Weise definieren wir die *Summe* $a+b$ und die *natürliche Summe* $a \# b$ von Ordinaltermen a, b. Für $a \leqslant b$ sei $-a+b$ der eindeutig bestimmte Term mit $a+(-a+b)=b$. Ist $n \neq 0$ eine natürliche Zahl, so bezeichne n zugleich den Term $\bar{\Theta} 00 + \ldots + \bar{\Theta} 00$ (n mal).

Lemma 4
a) $K_u b \subset K_u(a+b) \subset K_u a \cup K_u b$,
b) $K_u(a \# b) = K_u a \cup K_u b$.

Definition von Ω_a und $\Theta \Omega_{\Omega_1} b$ für $Sb=0$

$$\Omega_a := \begin{cases} a & \text{, wenn } a=0 \text{ oder } a=g a_1 a_2 \text{ mit } a_1 \neq 0 \\ g0(a_0+n) & \text{, wenn } a=a_0+n+1 \text{, wobei } a_0=0 \text{ oder } a_0=g a_1 a_2 \text{ mit } a_1 \neq 0 \\ g0a & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\Theta \Omega_{\Omega_1} b := \begin{cases} b & \text{, wenn } b=\bar{\Theta} b_1 b_2 \text{ mit } \Omega_{\Omega_1} < b_1 \\ \bar{\Theta} \Omega_{\Omega_1}(b_0+n) & \text{, wenn } b=b_0+n+1 \text{, wobei } b_0=\bar{\Theta} b_1 b_2 \text{ mit } \Omega_{\Omega_1} < b_1 \\ \bar{\Theta} \Omega_{\Omega_1} b & \text{, sonst} \end{cases}$$

$\Theta \Omega_{\Omega_1} \Lambda_0 := \Lambda_0$.

Diese formale Definition von Ω_a und $\Theta \Omega_{\Omega_1} b$ steht offenbar im Einklang mit der inhaltlichen Bedeutung der Funktionszeichen Ω und Θ.

Lemma 5
a) *$a \mapsto \Omega_a$ ist ordnungstreue Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{K}_0$.*
b) *Es gilt $K_u^* \Omega_a = K_u^* a$ und $K_u \Omega_a \subset K_u a \subset K_u \Omega_a \cup \{1\}$ für $u < \Omega_a$.*

Im folgenden sei stets $\tau \in \bar{\Theta}_0(\{g\}) \cup \{\Lambda_0\}$, d.h. τ bezeichnet eine Ordinalzahl $\leqslant \Lambda_0$.

Induktive Definition der Termmenge $\mathfrak{T}(\tau)$

1. $0 \in \mathfrak{T}(\tau)$,
2. $a, b \in \mathfrak{T}(\tau) \Rightarrow a \# b \in \mathfrak{T}(\tau)$,
3. $a, b \in \mathfrak{T}(\tau) \wedge K^*_{Sb} a < a \Rightarrow \bar{\Theta} ab \in \mathfrak{T}(\tau)$,
4. $a < \tau \Rightarrow \Omega_{1+a} \in \mathfrak{T}(\tau)$.

Induktive Definition der Koeffizientenmengen $\tilde{K}_u a$

1. $\tilde{K}_u a := \emptyset$, *wenn* $a = 0$ *oder* $u < a \in \mathfrak{R}$,
2. $\tilde{K}_u a := \{a\}$, *wenn* $a \in \mathfrak{H}$ *mit* $Sa \leqslant u$,
3. $\tilde{K}_u \bar{\Theta} ab := \tilde{K}_u a \cup \tilde{K}_u b$, *wenn* $u < Sb$,
4. $\tilde{K}_u (a \# b) := \tilde{K}_u a \cup \tilde{K}_u b$.

Folgerungen

Für $a \in \mathfrak{T}(\tau)$ *gilt*:

$$a < \Omega_{1+\tau},\ \tilde{K}_u a \subset \mathfrak{T}(\tau),\ \tilde{K}_u a \subset K_u a,\ K_u a \setminus \tilde{K}_u a < \Omega_1 \quad , \quad a \neq \Theta\, \Omega_{\Omega_1} b.$$

Lemma 6

$$\{c\} \cup K^*_0 c < \Omega_{\bar{\Theta} ab} \wedge \tilde{K}_0 c < \bar{\Theta} ab \Rightarrow K_0 c < \bar{\Theta} ab$$

Beweis durch Induktion nach Gc.
Ist $Sc = 0$, so gilt $K_0 c = \tilde{K}_0 c$. Ist $c \in \mathfrak{R}$, so gilt nach L. 5 (*Lemma 5*) $c = \Omega_d$ mit $d < \bar{\Theta} ab$ und $K_0 c \subset K_0 d$, also $K_0 c < \bar{\Theta} ab$. Ist $c \notin \mathfrak{R}$ und $Sc > 0$, so folgt die Behauptung mit I.V. (*Induktionsvoraussetzung*).

Lemma 7

Für $e = \Theta\, \Omega_{\Omega_1} y < \Omega_1$ *gilt*:

a) $c = \bar{\Theta} c_1 c_2 \wedge c_1 < \Omega_e \wedge \tilde{K}_0 c_1 \cup \{c_2\} < e \Rightarrow c < e$,
b) $c \in \mathfrak{T}(\tau) \wedge c < \bar{\Theta}\, \Omega_e 0 \qquad \Rightarrow c < e$.

Beweis.
a) Wegen $\bar{\Theta} c_1 c_2 \in \mathfrak{T}$ und $Sc_2 = 0$ gilt $K^*_0 c_1 < c_1$; außerdem ist $e = \bar{\Theta} ab$ mit $\Omega_{\Omega_1} \leqslant a$. Mit L. 6 folgt nun $c_1 < a \wedge K_0 c_1 \cup \{c_2\} < \bar{\Theta} ab$, d.h. $c = \bar{\Theta} c_1 c_2 < \bar{\Theta} ab = e$.
b) Beweis durch Induktion nach Gc. Sei $c = \bar{\Theta} c_1 c_2 < \bar{\Theta}\, \Omega_e 0$. Dann ist nach L. 2a $\tilde{K}_0 c_1 \cup \{c_2\} < \bar{\Theta}\, \Omega_e 0$ und nach I.V. $\tilde{K}_0 c_1 \cup \{c_2\} < e$. Für $c_1 < \Omega_e$ folgt nun die Behauptung mit L. 7a. Andernfalls muß $c \leqslant K_0 \Omega_e = \{e\}$ und wegen $c \in \mathfrak{T}(\tau)$, $e \notin \mathfrak{T}(\tau)$ sogar $c < e$ sein.

Satz 1

Sind $\bar{\Theta} a_1 b_1$, $\bar{\Theta} a_2 b_2 \in \mathfrak{T}(\tau)$ *und ist* $a_1 < a_2$, *so gilt*:

$$\tilde{K}_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < \bar{\Theta} a_2 b_2 \Leftrightarrow \bar{\Theta} a_1 b_1 < \bar{\Theta} a_2 b_2.$$

Beweis.
Sei $\tilde{K}_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < \bar{\Theta} a_2 b_2$. Dann ist $Sb_1 \leqslant Sb_2$. Für $Sb_2 \neq 0$ gilt $K_{Sb_1} a_1 < \bar{\Theta} a_2 b_2$ wegen $K_{Sb_1} a_1 \setminus \tilde{K}_{Sb_1} a_1 < \Omega_1$. Für $Sb_1 = Sb_2 = 0$ gilt $K^*_0 a_1 < a_1 < a_2$ und $\tilde{K}_0 a_1 < \bar{\Theta} a_2 b_2$. Wegen $\bar{\Theta} a_2 b_2 \in \mathfrak{T}(\tau)$ ist $a_2 < \Omega_{\Omega_1}$, woraus mit den Lemmata 1, 2, 3, 5

$a_2 < \Omega_{\bar{\Theta} a_2 b_2}$ folgt. Mit L. 6 folgt nun $K_0 a_1 < \bar{\Theta} a_2 b_2$. — Da außerdem $\tilde{K}_{Sb_1} a_1 \subset K_{Sb_1} a_1$ ist, erhalten wir:

$$\tilde{K}_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < \bar{\Theta} a_2 b_2 \Leftrightarrow K_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < \bar{\Theta} a_2 b_2 \Leftrightarrow \bar{\Theta} a_1 b_1 < \bar{\Theta} a_2 b_2 .$$

Bemerkung

Nach Satz 1 ist das System $(\mathfrak{T}(\tau), <)$ identisch mit dem Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\tau)$ aus [1], § 5, wenn man die dort in der Definition vorkommende Menge X gleich $\{\Omega_{1+x} : x < \tau\}$ wählt. (Die Mengen $\tilde{K}_u a$ entsprechen den Koeffizientenmengen $K_u a$ des Systems $\bar{\Theta}(\tau)$ in [1], § 5.) Wir schreiben deshalb im folgenden $\bar{\Theta}(\tau)$ statt $\mathfrak{T}(\tau)$.

Satz 2

Für $v = \Theta \Omega_{\Omega_1} \tau$ *gilt* $\bar{\Theta}_0(v) \subset \{x \in \mathfrak{T} : x < v\}$.

Beweis.

Für $\tau = \Lambda_0$ ist die Behauptung trivial. Ansonsten erfolgt der Beweis durch Induktion nach Ga: Ist $a = \bar{\Theta} a_1 a_2 \in \bar{\Theta}_0(v)$, so gilt $a_1 < \Omega_{1+v} = \Omega_v$ und nach I.V. $\tilde{K}_0 a_1 \cup \{a_2\} < v$; daraus folgt mit L. 7a $a < v$.

§ 2. Die Terme (a, b)

In Verallgemeinerung von [2], § 2 werden im folgenden Funktionen $h_u : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ eingeführt, für die gilt:

$K_u^*(h_u a) < h_u a$

$K_w(h_u a) = K_w a$, falls $w \leqslant u$

$v = u^+_{a_1, a_2} \wedge \bar{\Theta}(h_v a_1) v < \bar{\Theta}(h_v a_2) v \Rightarrow h_u a_1 < h_u a_2$.

Daraus folgt für $(a, b) := \bar{\Theta}(h_{Sb} a) b$:

$K_{Sb} a \cup \{b\} < (a, b) \in \mathfrak{T}$

$K_u(a, b) = K_u a \cup K_u b$, falls $u < Sb$

$$\left.\begin{array}{l} u = Sb_1 = Sb_2 \wedge v = u^+_{a_1, a_2} \wedge \\ (a_1, v) < (a_2, v) \wedge K_u a_1 \cup \{b_1\} < (a_2, b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2).$$

Definition der Termmengen Ya

1. $Y0 := \{0\}$,
2. $Y(a \# b) := Ya \cup Yb$,
3. $Y\bar{\Theta} ab := \{y \in Ya : y < Sb\} \cup Yb$,
4. $Ygab := \{gab\} \cup Ya \cup Yb$.

Lemma 1

a) $0 \in Ya \subset \mathfrak{K}_0 \wedge Sa = max\, Ya$,

b) $v \in Ya \wedge w < v \Rightarrow Yv \subset Ya \wedge K_w v \subset K_w a$,

c) $YK_u a = \{y \in Ya : y \leqslant u\} \wedge Y\bar{\Theta} ab = Y(K_{Sb} a \cup \{b\})$.

Beweise durch Induktion nach Ga.

[$YK_u a$ ist Abkürzung für $\cup\{Yx : x \in K_u a\}$, analog $Y(K_{Sb} a \cup \{b\})$.]

Definition von $u^+_{a_1,a_2}$ und u^+_a

$$u^+_{a_1,a_2} := \begin{cases} u & \text{, wenn } \{y \in Ya_1 \cup Ya_2 : u < y\} = \emptyset \\ \min\{y \in Ya_1 \cup Ya_2 : u < y\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$u^+_a := u^+_{a,a}$.

Folgerungen

$Sa \leqslant u \Leftrightarrow u = u^+_a$,

$u < Sa \Rightarrow u < u^+_a \leqslant Sa \wedge u^+_a \in Ya$.

Definition von v^+: Ist $v = \Omega_a$, so sei $v^+ := \Omega_{a+1}$.

Lemma 2

a) $K^*_u(v^+) = K^*_u v$,

b) $\bar{\Theta} v^+ v \in \mathfrak{T}$,

c) $\bar{\Theta} a v \in \mathfrak{T} \wedge v^+ \leqslant a \Rightarrow \bar{\Theta} v^+ v \leqslant \bar{\Theta} a v$.

Beweis.

a) folgt aus § 1, L. 5b wegen $K^*_u(a+1) = K^*_u a$. b) folgt aus a) wegen $K^*_v v = \emptyset$.

c) gilt wegen $K_v v^+ \leqslant \{v, 1\} < \bar{\Theta} a v$.

Die folgenden Lemmata 3—7 werden vollkommen analog wie die Lemmata 1—4 und der Satz 1 aus [2] bewiesen. Man beachte jedoch, daß dort (a, b) für $\bar{\Theta} ab$ geschrieben wird, während der Ausdruck (a, b) hier eine andere Bedeutung hat (siehe Seite 88 und Seite 91).

Lemma 3

Für $u \leqslant v$ *gilt* $K^*_u a = K^*_v a \cup K^*_u K_v a$, $K_u K^*_v a \subset K_u a$, $K^*_u K^*_v a \subset K^*_u a$.

Lemma 4

Sei $Sa \leqslant u < v$ *oder* $u < v = u^+_a = Sa$; *dann gilt*:

a) $K^*_u a < c \Rightarrow a < \bar{\Theta} c v$, *falls* $\bar{\Theta} c v \in \mathfrak{T}$,

b) $K^*_u c < c \wedge a < \bar{\Theta} c v \Rightarrow K^*_u a < c$,

c) $K^*_u a < c + v^+ \Rightarrow K^*_u a < c + a$.

Definition von $q_v a$

1. $q_v 0 := 0$.
2. *Ist* $a = a_1 + \ldots + a_n$ *mit* $n \geqslant 1$, $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathfrak{H}$, *so sei*

$$q_v a := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } a_1 < v^+ \\ a_1 + \ldots + a_k, & \text{wenn } k \text{ größter Index mit } v^+ \leqslant a_k. \end{cases}$$

Definition von $k^*_u a$

$$k^*_u a := \begin{cases} \max K^*_u a, & \text{wenn } K^*_u a \neq \emptyset \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Lemma 5

a) $K^*_u k^*_u a < k^*_u a$,

b) $K^*_u a < a \Rightarrow K^*_u q_v a < q_v a$.

Lemma 6

Sei $u < v = u_a^+ = u_{a_1}^+ = u_{a_2}^+$; *dann gilt:*

a) $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant a < v^+ \Rightarrow v^+ \leqslant q_v k_u^* a \wedge \bar{\Theta}(q_v k_u^* a) v \leqslant a$,

b) $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant a_1 < a_2 < v^+ \Rightarrow q_v k_u^* a_1 \leqslant q_v k_u^* a_2$.

Definition von h_u^* für a mit $u < u_a^+ = Sa$

Ist $u < v = u_a^+ = Sa$, *so sei*

$$h_u^* a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } a < \bar{\Theta} v^+ v \\ q_v k_u^* a + (-\bar{\Theta}(q_v k_u^* a) v + a), & \text{wenn } \bar{\Theta} v^+ v \leqslant a. \end{cases}$$

Definition von $\Delta_{u,v}$

$\Delta_{u,v} := \{a \in \mathfrak{T} : u < v = u_a^+ = Sa\}$.

Lemma 7

Für $a, a_1, a_2 \in \Delta_{u,v}$ *gilt:*

a) $K_u^* h_u^* a < h_u^* a$,

b) $K_w h_u^* a = K_w a$ *für* $w \leqslant u$,

c) $a_1 < a_2 \Rightarrow h_u^* a_1 < h_u^* a_2$.

Definition von $h(a)$

1. $h(a) := a$, *wenn* $a \in \mathfrak{K}_0$ *ist.*
2. *Ist* $a \notin \mathfrak{K}_0$ *und* $-Sa + a = a_1 \# \ldots \# a_n$ *mit* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathfrak{H}$, *so sei* $h(a) := \varphi_{Sa}(a_1) \# \ldots \# \varphi_{Sa}(a_n)$, *wobei*

$$\varphi_v(a_k) := \begin{cases} \bar{\Theta} 0 (v + a_k), & \text{wenn } a_k < \bar{\Theta} 1 v \\ a_k & , \text{ wenn } \bar{\Theta} 1 v \leqslant a_k. \end{cases}$$

Lemma 8

a) $Yh(a) = Ya$ *und* $K_w h(a) = K_w a$, $q_w h(a) = h(a)$ *für* $w < Sa$.

b) $v \leqslant a_1 < a_2 < \bar{\Theta} v^+ v \Rightarrow v \leqslant h(a_1) < h(a_2) < \bar{\Theta} v^+ v$.

Beweis klar.

Definition von $h_u a$

$$h_u a := \begin{cases} h_u^* (\bar{\Theta}(h_v a) v), & \text{wenn } u < u_a^+ = v,\ \bar{\Theta} v^+ v \leqslant a \text{ und } \bar{\Theta}(h_v a) v \in \Delta_{u,v} \\ h(a) & , \text{ wenn } u < u_a^+ = v \leqslant a < \bar{\Theta} v^+ v \\ a & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Definition von $h_u a$ erfolgt durch Induktion nach der Anzahl der $y \in Ya$ mit $y > u$, kurz Y-Induktion genannt.

Satz 1

a) $K_u^* h_u a < h_u a$,

b) $K_w h_u a = K_w a$, *für* $w \leqslant u$.

Beweis durch Y-Induktion.

1. $Sa \leqslant u$. Dann ist $h_u a = a$, und die Behauptungen sind trivial.

2. $u < u_a^+ = v \leqslant a < \bar{\Theta} v^+ v$. Dann ist $h_u a = h(a) < \bar{\Theta} v^+ v$. Wegen $Yh(a) = Ya$ ist $u_{h(a)}^+ = u_a^+ = v$, somit $h_u^* h(a) = h(a)$ und nach L. 7a $K_u^* h(a) < h(a)$. Behauptung b) folgt mit L. 8a.
3. $u < u_a^+ = v$ und $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant a$. Nach I.V. a) ist $a_1 := \bar{\Theta}(h_v a) v \in \mathfrak{T}$. Nach L. 1b,c und I.V. b) ist $Ya_1 = Y(K_v h_v a \cup \{v\}) = Y(K_v a \cup \{v\}) \subset Ya$, also $a_1 \in \Delta_{u,v}$ und somit $h_u a = h_u^* a_1$. Mit L. 7a, b, L. 1b und I.V. b) folgt $K_u^* h_u a < h_u a$ und $K_w h_u a = K_w a_1 = K_w h_v a \cup K_w v = K_w a$ für $w \leqslant u$.

Definition $(a, b) := \bar{\Theta}(h_{Sb} a) b$.

Satz 2
a) $(a, b) \in \mathfrak{T}$ *und* $S(a, b) = Sb$,
b) $K_u(a, b) = K_u a \cup K_u b$ *für* $u < Sb$,
c) $K_{Sb} a \cup \{b\} < (a, b)$,
d) $b_1 < b_2 \Rightarrow (a, b_1) < (a, b_2)$,
e) $Y(a, b) = \{y \in Ya : y < Sb\} \cup Yb$,
f) $a_1 < a_2 < v^+ \Rightarrow (a_1, v) < (a_2, v)$.
Beweis mit Satz 1, L. 1a,c und § 1 L. 2a, L. 3b.

Lemma 9
a) $K_u^*(u_a^+) = \emptyset$,
b) $u < v < u_a^+ \Rightarrow K_u^* a = K_v^* a$.
Beweis.
a) Nach Definition ist $K_u^* u = \emptyset$. Sei also $u < u_a^+ = g c_1 c_2$. Dann gilt $Yc_1 \cup Yc_2 \subset Yu_a^+ \subset Ya$, also $Sc_1, Sc_2 \leqslant u$ und somit $K_u^*(u_a^+) = \emptyset$.
b) Sei $u < v < u_a^+$. Für $c \in K_v a$ gilt nach L. 1a,c $Sc \in Ya$ und $Sc \leqslant v$, also $Sc \leqslant u$ und deshalb $K_u^* c = \emptyset$. Mit L. 3 folgt die Behauptung.

Lemma 10
a) $min\{a, u^+\} \leqslant h_u a$,
b) $u < v = u_b^+ \leqslant u_a^+ \wedge \bar{\Theta} v^+ v \leqslant a \Rightarrow \bar{\Theta} v^+ v \leqslant (a, v) \in \Delta_{u,v}$ *und* $v^+ \leqslant h_u a = h_u^*(a, v)$.
Beweis.
a) folgt aus den Definitionen von h, h_u^*, h_u.
b) Ist $Sa = v$, so gilt $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant K_v a < (a, v)$. Für $v < Sa$ gilt nach a) und L. 2c $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant \bar{\Theta}(h_v a) v = (a, v)$. — Wegen $v = u_b^+ > u$ gilt $v \in Yb$ und somit $Yv \subset Yb$. Mit Satz 2e folgt $Y(a, v) \subset Ya \cup Yb$, also $(a, v) \in \Delta_{u,v}$. — Aus $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant (a, v) \in \Delta_{u,v}$ folgt mit L. 6a $v^+ \leqslant h_u^*(a, v)$. — Ist $v = u_a^+$, so gilt $h_u a = h_u^*(a, v)$ wegen $(a, v) \in \Delta_{u,v}$. — Es sei nun $v < u_a^+ =: z$ und $a_1 := (a, z)$. Dann ist auch $v_a^+ = z$. Ist $a < \bar{\Theta} z^+ z$, so gilt $h_u a = h(a) = h_v a$ und nach L. 8a $q_v h_v a = h_v a$. Für $\bar{\Theta} z^+ z \leqslant a$ folgt — wie soeben gezeigt — $z = u_{a_1}^+ = v_{a_1}^+$ und $h_u a = h_u^* a_1$, $h_v a = h_v^* a_1$; aus $u < v < u_{a_1}^+$ folgt mit L. 9b $k_u^* a_1 = k_v^* a_1$, somit $h_u^* a_1 = h_v^* a_1$. Es gilt also in jedem Fall $h_u a = h_v a = q_v h_v a$; nach Satz 1a ist daher $K_u^* h_v a < h_v a$. Da nach L. 9a außerdem $K_u^* v = \emptyset$ ist, ergibt sich $q_v k_u^*(a, v) = q_v h_v a = h_v a$. Nach Definition von h_u^* gilt nun $h_u^*(a, v) = h_v a + \left(-\bar{\Theta}(h_v a) v + (a, v)\right) = h_v a = h_u a$.

Satz 3
$v = u^+_{a_1,a_2} \wedge (a_1, v) < (a_2, v) \Rightarrow h_u a_1 < h_u a_2$.
Beweis.
Wir haben die folgenden Fälle zu unterscheiden:
1. $Sa_1 \leqslant u \wedge Sa_2 \leqslant u$. Es folgt $v = u$ und mit Satz 2f $h_u a_1 = a_1 < a_2 = h_u a_2$.
2. $Sa_i \leqslant u < Sa_k$. In diesem Fall gilt $h_u a_i = a_i$ und nach L. 10a $u^+ \leqslant h_u a_k$, also $h_u a_i < h_u a_k$. Außerdem ist $u < v \leqslant Sa_k$ und nach L. 10a $v \leqslant h_v a_k$. Es folgt $(a_i, v) = \bar{\Theta} a_i v < \bar{\Theta} v v \leqslant \bar{\Theta}(h_v a_k) v = (a_k, v)$.
3. $u < v \leqslant a_i < \bar{\Theta} v^+ v$ für $i = 1, 2$. Nach Satz 2f gilt dann $u < v \leqslant a_1 < a_2 < \bar{\Theta} v^+ v$ und somit nach L. 8b $h_u a_1 = h(a_1) < h(a_2) = h_u a_2$.
4. $u < v \leqslant a_i < \bar{\Theta} v^+ v$ und $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant a_k$. Dann ist nach L. 8b $h_u a_i = h(a_i) < \bar{\Theta} v^+ v$ und nach L. 10b $v^+ \leqslant h_u a_k$, also $h_u a_i < h_u a_k$. Außerdem folgt mit L. 10b $(a_i, v) = \bar{\Theta} a_i v < \bar{\Theta} v^+ v \leqslant (a_k, v)$.
5. $u < v$ und $\bar{\Theta} v^+ v \leqslant a_i$ für $i = 1, 2$. Nach L. 10b gilt in diesem Fall $h_u a_i = h^*_u(a_i, v)$ für $i = 1, 2$, woraus mit L. 7c $h_u a_1 < h_u a_2$ folgt.

Satz 4
$$\left.\begin{array}{l} u = Sb_1 = Sb_2 \wedge v = u^+_{a_1,a_2} \wedge \\ (a_1, v) < (a_2, v) \wedge K_u a_1 \cup \{b_1\} < (a_2, b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$
Beweis.
Aus den Voraussetzungen folgt mit den Sätzen 1 und 3 $h_u a_1 < h_u a_2$ und $K_u h_u a_1 \cup \{b_1\} < \bar{\Theta}(h_u a_2) b_2$, also $\bar{\Theta}(h_u a_1) b_1 < \bar{\Theta}(h_u a_2) b_2$.

Satz 5
$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.
Beweis.
Aus der Voraussetzung folgt $b_1 = b_2$ und $h_{Sb_1} a_1 = h_{Sb_2} a_2$. Aus $h_u a_1 = h_u a_2$ folgt mit Satz 3 $a_1 = a_2$ durch Y-Induktion.

Mit Hilfe der Klammerterme (a, b) lassen sich Relationen $\ll_u$definieren, die für gewisse beweistheoretische Untersuchungen benötigt werden (siehe Pohlers [7]). Wir wollen hier die wichtigsten Eigenschaften dieser Relationen zusammenstellen.

Definition von $a \ll_u b$
$a \ll_u b :\Leftrightarrow a < b \wedge \forall v \geqslant u\, (K_v a < (b, v))$.

Lemma 11
$a \ll_u b \Leftrightarrow a < b \wedge \forall v \in Ya\, (u \leqslant v \rightarrow K_v a < (b, v))$.
Beweis.
Nach L. 1a,c gilt $Sc \in \{y \in Ya : y \leqslant v\}$ für jedes $c \in K_v a$. Für $v \notin Ya$ ist also stets $K_v a < (b, v)$.

Lemma 12
a) $u \leqslant v \wedge a_1 \ll_u a_2 \Rightarrow a_1 \ll_v a_2$,
b) $a_1 \ll_u a_2 \wedge u \leqslant Sb \Rightarrow (a_1, b) < (a_2 . b)$,
c) $a_1 \ll_u a_2 \wedge a_2 \ll_u a_3 \Rightarrow a_1 \ll_u a_3$.

Beweis.
a) ist trivial. b) folgt aus Satz 2c, d, f und Satz 4 durch Y-Induktion. c) folgt aus b).

Lemma 13
a) $b \ll_u a \# b$, *für* $a \neq 0$,
b) $b \ll_u (a, b)$,
c) $(a, u) < ((a, b), u)$, *für* $u \leqslant Sb$.
Beweis.
a) und b) folgen mit § 1, L. 4b und Satz 2b,c. Beweis von c) durch Y-Induktion: Ist $u = Sb$, so gilt $(a, u) \leqslant (a, b) < ((a, b), u)$. — Sei nun $u < Sb$ und $v := u^+_{a,(a,b)}$, also $u < v \leqslant Sb$. Nach I.V. gilt $(a, v) < ((a, b), v)$. Mit $K_u a \cup \{u\} \subset K_u(a, b) \cup \{u\} < ((a, b), u)$ folgt daraus nach Satz 4 $(a, u) < ((a, b), u)$.

Lemma 14
a) $b_1 \ll_u b_2 \Rightarrow a \# b_1 \ll_u a \# b_2 \wedge (a, b_1) \ll_u (a, b_2)$,
b) $a_1 \ll_u a_2 \wedge u \leqslant Sb \Rightarrow (a_1, b) \ll_u (a_2, b)$.
Beweis.
a) Sei $b_1 \ll_u b_2$. Nach L. 12c, L. 13, Satz 2 gilt: $a \ll_u a \# b_2$, $b_1 \ll_u a \# b_2$, $b_1 \ll_u (a, b_2)$ und $K_v a < (a, v) < ((a, b_2), v)$ für $v \leqslant Sb_2$. Daraus folgt $a \# b_1 \ll_u a \# b_2$ und $K_v(a, b_1) < ((a, b_2), v)$ für $u \leqslant v < Sb_1$. Bleibt zu zeigen $(a, b_1) < ((a, b_2), v)$ mit $v := Sb_1$: Ist $Sb_2 = v$, so gilt $(a, b_1) < (a, b_2) < ((a, b_2), v)$. Ist $v < Sb_2$, so gilt $w := v^+_{a,(a,b_2)} \leqslant Sb_2$, also $(a, w) < ((a, b_2), w)$; mit $K_v a \cup \{b_1\} < ((a, b_2), v)$ folgt daraus nach Satz 4 $(a, b_1) < ((a, b_2), v)$.
b) Sei $a_1 \ll_u a_2$ und $u \leqslant Sb$. Nach L. 12b und Satz 2c gilt dann $(a_1, b) < (a_2, b) < ((a_2, b), Sb)$. Ist $u \leqslant v < Sb$, so gilt nach L. 13b,c $K_v b < ((a_2, b), v)$ und $K_v a_1 < (a_2, v) < ((a_2, b), v)$, also $K_v(a_1, b) < ((a_2, b), v)$.

Bemerkung
Wie man leicht nachprüft, gilt:

$$(*) \qquad a, b \in \bar{\Theta}(\tau) \wedge w \leqslant u \Rightarrow (a, b) \in \bar{\Theta}(\tau) \wedge \tilde{K}_w h_u a = \tilde{K}_w a.$$

Daraus folgt, daß in den Sätzen 2 und 4 und in der Definition von $\ll_u$ jeweils $K_u a$ durch $\tilde{K}_u a$ ersetzt werden kann, falls man die Aussagen auf Elemente von $\bar{\Theta}(\tau)$ einschränkt.

§ 3. Die Teilsysteme $W(\{g\})$ und $W(\tau)$

Induktive Definition von $W(\{g\})$
1. $0 \in W(\{g\})$,
2. $a, b \in W(\{g\}) \Rightarrow a \# b, (a, b), gab \in W(\{g\})$.

Induktive Definition von $\bar{K}^*_u a$ für $a \in W(\{g\})$
1. $\bar{K}^*_u a := \emptyset$, *wenn* $a \in \mathfrak{H} \cup \{0\}$ *mit* $Sa \leqslant u$,
2. $\bar{K}^*_u (a \# b) := \bar{K}^*_u a \cup \bar{K}^*_u b$,

3. $\bar{K}_u^* gab := \bar{K}_u^* a \cup \bar{K}_u^* b$, *wenn* $u < gab$,
4. $\bar{K}_u^*(a, b) := \{a\} \cup \bar{K}_u^* a \cup \bar{K}_u^* b$, *wenn* $u < Sb$.

Nach § 2, Satz 5 ist diese Definition eindeutig.

Lemma 1
$c \in W(\{g\}) \wedge \bar{K}_u^* c < a \wedge u < v \Rightarrow K_v c < (a, v)$.
Beweis durch Induktion nach der Definition von $c \in W(\{g\})$.
Sei $c = (c_1, c_2)$ mit $Sc = v$ (in den anderen Fällen ist der Beweisgang trivial). Dann gilt $\{c_1\} \cup \bar{K}_u^* c_1 \cup \bar{K}_u^* c_2 = \bar{K}_u^* c < a$, somit nach I.V. $c_1 \leqslant_v a$ und $c_2 < (a, v)$. Daraus folgt mit L. 12b und Satz 4 $K_v c = \{(c_1, c_2)\} < (a, v)$.

Aus Lemma 1 und § 2, Satz 2f, Satz 4, Lemma 12b folgt nun

Lemma 2

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in W(\{g\}) \wedge \bar{K}_{Sb_1}^* a_1 < a_1 < a_2 \wedge \\ K_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < (a_2, b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2).$$

Satz 1
Die Systeme $\bar{\Theta}(\{g\})$ *und* $W(\{g\})$ *sind isomorph.*
Beweis.
Da $W(\{g\})$ ein Teilsystem von $\bar{\Theta}(\{g\})$ ist, muß nur noch gezeigt werden, daß $\bar{\Theta}(\{g\})$ zu einem Teilsystem von $W(\{g\})$ isomorph ist. Dazu definieren wir induktiv eine Menge $\mathfrak{T}' \subset W(\{g\})$ wie folgt: 1. $0 \in \mathfrak{T}'$, 2. $a, b \in \mathfrak{T}' \Rightarrow a \# b, gab \in \mathfrak{T}'$, 3. $a, b \in \mathfrak{T}' \wedge \bar{K}_{Sb}^* a < a \Rightarrow (a, b) \in \mathfrak{T}'$. Für $(a_1, b_1) \in \mathfrak{T}'$ gilt dann nach Lemma 2:

$$a_1 < a_2 \wedge K_{Sb_1} a_1 \cup \{b_1\} < (a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) < (a_2, b_2).$$

Daraus und aus § 2, Satz 2a—d folgt, daß $\bar{\Theta}(\{g\})$ isomorph zu $\mathfrak{T}'$ ist.

Induktive Definition von $W(\tau)$
1. $0 \in W(\tau)$,
2. $a, b \in W(\tau) \Rightarrow a \# b, (a, b) \in W(\tau)$,
3. $a < \tau \Rightarrow \Omega_{1+a} \in W(\tau)$.

Offenbar ist $W(\tau) \subset \bar{\Theta}(\tau)$ [vgl. (*) auf Seite ..], und analog wie Satz 1 beweist man

Satz 2
Die Systeme $\bar{\Theta}(\tau)$ *und* $W(\tau)$ *sind isomorph.*

Nach § 2, Satz 2c,f und L. 12b gilt:

$$(a_1, v) < (a_2, v) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2 & \text{, wenn } Sa_1 \leqslant v \wedge Sa_2 \leqslant v \\ a_1 < (a_2, v), & \text{wenn } Sa_1 \leqslant v < Sa_2 \\ (a_1, v) \leqslant a_2, & \text{wenn } Sa_2 \leqslant v < Sa_1, \end{cases}$$

d.h. $(a_1, v) < (a_2, v) \Leftrightarrow a_1^v < a_2^v \vee a_1^v = (a_1, v) = a_2$, wobei $a^v := a$, wenn $Sa \leqslant v$, und $a^v := (a, v)$, wenn $v < Sa$. Zusammen mit den Sätzen 2, 4, 5 aus § 2 und der Bemerkung auf Seite 93 folgt daraus, daß $W(\tau)$ isomorph zu dem System $W(X)$

(mit $\|X\|=1+\tau$) von Pfeiffer [4] ist. Ebenso ist $W(\{g\})$ isomorph zu dem in Pfeiffer [6] skizzierten System $Wd(\{1\})$. Wir haben also die folgenden Ergebnisse:

$$W(\tau)\subset\bar{\Theta}(\tau) \text{ und } \bar{\Theta}(\tau)\cong W(\tau)\cong W(X) \text{ für } \|X\|=1+\tau,$$
$$W(\{g\})\subset\bar{\Theta}(\{g\}) \text{ und } \bar{\Theta}(\{g\})\cong W(\{g\})\cong Wd(\{1\}).$$

§ 4. Die Teilsysteme $Od(\tau)$ und $O(\tau)$

Es sei $v:=\Theta\Omega_{\Omega_1}\tau$ *und* $I:=\{0\}\cup\{\Omega_{\Theta\Omega_{\Omega_1}y}: y<\tau\}$.

Definition von $\bar{a}$ und $[a, b]$

$$\bar{a} := \begin{cases} a & \text{, wenn } a\in I \\ \Omega_{[0,a]}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[a, b] := \begin{cases} (0, (0, \bar{a})) & \text{, wenn } b=0 \\ (0, (b_1, \bar{a})\#\ldots\#(b_n, \bar{a})), & \text{wenn } b=b_1\#\ldots\#b_n \text{ mit } \{b_1,\ldots,b_n\}\subset\mathfrak{H} \end{cases}$$

Folgerungen
$\bar{a}\in\mathfrak{K}$, $[a, b]\in\mathfrak{H}$, $S[a, b]=\bar{a}$
$\bar{a}_1=\bar{a}_2\Rightarrow a_1=a_2$
$[a_1, b_1]=[a_2, b_2]\Rightarrow a_1=a_2\wedge b_1=b_2$.

Induktive Definition von $Od(\tau)$
1. $a\in I\Rightarrow a\in Od(\tau)$,
2. $a, b\in Od(\tau)\Rightarrow a\#b$, $[a, b]\in Od(\tau)$.

Lemma 1
$Od(\tau)\subset W(v)\subset\bar{\Theta}(v)$.
Beweis.
$W(v)\subset\bar{\Theta}(v)$ gilt nach (*) (Seite 93). Nach Definition ist $I\subset W(v)$ und $W(v)$ abgeschlossen gegenüber $\#$. Aus $a\in W(v)$ folgt $[0, a]\in W_0(v)\subset\bar{\Theta}_0(v)$ und mit § 1, Satz 2 $[0, a]<v$, d.h. $\Omega_{[0,a]}\in W(v)$. Aus $a, b\in W(v)$ folgt also $\bar{a}, b\in W(v)$ und somit $[a, b]\in W(v)$.

Im folgenden sollen die Buchstaben a,b,c,d,x,y,z stets Elemente von $Od(\tau)$ bezeichnen.

Definition
$a<_\infty b :\Leftrightarrow a<b$, $a<_x b :\Leftrightarrow [x, a]<[x, b]$.

Lemma 2
$a<_0 b\Leftrightarrow\bar{a}<\bar{b}$.
Beweis.
Die Behauptung ist trivial für $a, b\notin I$. Sind $a, b\in I$, so gilt $a<_0 b\Leftrightarrow(0, (a, 0))<(0, (b, 0))\Leftrightarrow a<b\Leftrightarrow\bar{a}<\bar{b}$. — Sei nun $a\notin I$ und $b=\Omega_e\in I$; dann gilt: $[0, a]=(0, c)$

mit $0 \neq c \in \bar{\Theta}(v)$, $[0, b] = (0, (b, 0)) = (0, \bar{\Theta}\Omega_e 0)$, $\bar{a} = \Omega_{[0,a]}$, $\bar{b} = b$, also $a <_0 b \Leftrightarrow c < \bar{\Theta}\Omega_e 0$ und $\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow (0, c) < e \Leftrightarrow c < e$. Daraus folgt mit § 1, L. 7b $a <_0 b \Leftrightarrow \bar{a} < \bar{b}$.— Der Fall $a \in I$, $b \notin I$ kann auf den Fall $a \notin I$, $b \in I$ zurückgeführt werden.

Definition von $P_x a$

1. $P_x a := \emptyset$, *wenn* $a \in I$,
2. $P_x(a \# b) := P_x a \cup P_x b$,
3. $P_x[a, b] := \begin{cases} P_x b, & \textit{wenn } x <_0 a \\ \{b\}, & \textit{wenn } x = a \\ \emptyset, & \textit{wenn } a <_0 x. \end{cases}$

Definition von $I(a)$ und $x^{\oplus}_{c,d}$

$I(a) := \{x \in Od(\tau) : P_x a \neq \emptyset\}$,

$$x^{\oplus}_{c,d} := \begin{cases} \infty & , \textit{wenn } \{y \in I(c) \cup I(d) : x <_0 y\} = \emptyset \\ <_0 - min\{y \in I(c) \cup I(d) : x <_0 y\}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen $x <_0 \infty$ für jedes $x \in Od(\tau)$.

Lemma 3

$d \in \mathfrak{H} \Rightarrow (P_x c <_x d \Leftrightarrow \tilde{K}_{\bar{x}} c < (d, \bar{x}))$.

Beweis durch Induktion nach der Gestalt von c.

1. Ist $c \in I$, so gilt $P_x c = \emptyset$ und $\tilde{K}_{\bar{x}} c < (d, \bar{x})$.
2. Ist $c = a \# b$, so folgt die Behauptung mit I.V.
3. Sei $c = [a, b]$:

3.1. Für $x <_0 a$ ist nach L. 2 $\bar{x} < \bar{a}$ und damit $\tilde{K}_{\bar{x}} c = \tilde{K}_{\bar{x}} b$ (vgl. die Bemerkung auf Seite 93). Außerdem ist $P_x c = P_x b$. Beh. folgt mit I.V.

3.2. Für $x = a$ ist $P_x c = \{b\}$ und $\tilde{K}_x c = \{[x, b]\}$. Wegen $d \in \mathfrak{H}$ gilt aber: $b <_x d \Leftrightarrow [x, b] < (d, \bar{x})$.

3.3. Für $a <_0 x$ ist $P_x c = \emptyset$ und nach L. 2 $\tilde{K}_{\bar{x}} c = \{c\} < \bar{x} < (d, \bar{x})$.

Folgerung

Wegen $\tilde{K}_{\bar{x}} d < (d, \bar{x})$ folgt aus Lemma 3 $P_x d <_x d$.

Lemma 4

a) $P_x c \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} \in Yc$,

b) $Yc \subset \{\bar{y} : y \in Od(\tau)\}$,

c) $c, d \in \mathfrak{H} \wedge c <_{x^{\oplus}_{c,d}} d \wedge P_x c <_x d \Rightarrow c <_x d$.

Beweis von a) und b) durch Induktion nach der Gestalt von c:

1. Für $c \in I$ ist $P_x c = \emptyset$ und $Yc = \{0, c\} \subset \{\bar{y}; y \in Od(\tau)\}$.
2. Für $c = [a, b]$ ist $Yc = \{v \in Yb : v < \bar{a}\} \cup \{\bar{a}\}$, nach I.V. folglich $Yc \subset \{\bar{y} : y \in Od(\tau)\}$.

Ist $P_x c \neq \emptyset$, so gilt $\bar{x} = \bar{a}$ oder $\bar{x} < \bar{a}$ oder $\bar{x} < \bar{a} \wedge P_x b \neq \emptyset$; mit I.V. folgt $\bar{x} \in Yc$.

3. Für $c = a \# b$ folgen die Behauptungen unmittelbar aus der I.V..

Beweis von c) durch Induktion nach der Anzahl n der y mit $\bar{x} < \bar{y} \in Yc \cup Yd$.

1. $n = 0$. Nach a), b) und L. 2 ist dann $max\{Sc, Sd\} \leqslant \bar{x}$ und $x^{\oplus}_{c,d} = \infty$. Aus $c < d < \bar{x}^+$ folgt mit § 2, Satz 2f $(c, \bar{x}) < (d, \bar{x})$, d.h. $c <_x d$.

2. $n \neq 0$. Nach a), b) und L. 2 gibt es ein z mit $\bar{z} = \bar{x}^+_{c,d}$ und $x <_0 z \leqslant_0 x^{\oplus}_{c,d}$. Ist $z <_0 x^{\oplus}_{c,d}$, so gilt $P_z c = \varnothing$ und $z^{\oplus}_{c,d} = x^{\oplus}_{c,d}$, woraus mit I.V. $c <_z d$ folgt. In jedem Fall gilt also $(c, \bar{z}) < (d, \bar{z})$. Aus $P_x c <_x d$ folgt mit L. 3 außerdem $\tilde{K}_{\bar{x}} c < (d, \bar{x})$. Mit § 2, Satz 4 und der Bemerkung auf S. 93 folgt daraus $(c, \bar{x}) < (d, \bar{x})$, d.h. $c <_x d$. Wir erhalten nun den folgenden

Satz

1. $d \neq 0 \Rightarrow 0 <_x d$.
2. *Für* $c, d \in I$ *gilt*: $c <_x d \Leftrightarrow c <_\infty d \Leftrightarrow c < d$.
3. *Für* $c, d \in \mathfrak{H}$ *gilt* $c <_x d$ *in genau folgenden zwei Fällen*:

3.1. $c \leqslant_x P_x d$,

3.2. $c <_{x^{\oplus}_{c,d}} d \wedge P_x c <_x d$.

4. *Für* $c = [a_1, b_1]$, $d = [a_2, b_2]$ *gilt* $c <_\infty d$ *in genau folgenden zwei Fällen*:

4.1. $a_1 <_0 a_2$,

4.2. $a_1 = a_2 \wedge b_1 <_{a_1} b_2$.

5. *Für* $c = [a, b]$, $d \in I$ *gilt*: $c <_\infty d \Leftrightarrow a <_0 d$.
6. *Für* $c = c_1 \# \ldots \# c_m (m \geqslant 1)$ *und* $d = d_1 \# \ldots \# d_n (n \geqslant 1)$ *mit* $\{c_1, \ldots, c_m\} \subset \mathfrak{H}$, $\{d_1, \ldots, d_n\} \subset \mathfrak{H}$, $m + n > 2$ *gilt* $c <_x d$ *in genau folgenden zwei Fällen*:

6.1. *Es gibt* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $c_i <_x d_j$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$.

6.2. *Es ist* $n > 1$ *und es gibt* $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $c_i = d_j$ *und* $c' <_x d'$, *wobei* c', d' *durch Streichung von* c_i, d_j *aus* c, d *hervorgehen. (Im Fall* $m = 1$ *sei* $c' = 0$.)

Aus diesem Satz folgt, daß $Od(\tau)$ (mit den Relationen $<_x$, $<_\infty$) isomorph zu dem System $Od(I)$ von Kino [3] ist. Andererseits ist $Od(\tau) \subset W(v) \subset \bar{\Theta}(v)$ und $a \mapsto [0, a]$ eine ordnungstreue Abbildung von $(Od(\tau), <_0)$ in $\bar{\Theta}_0(v)$. Folglich gilt:

$$(Od(I), <_0) \leqslant \bar{\Theta}_0(v) \quad \text{und} \quad (Od(I), <_\infty) \leqslant \bar{\Theta}(v).$$

Induktive Definition von $O(\tau)$

Sei $I := \{0\} \cup \{\Omega_{1+y} : y < \tau\}$.

1. $a \in I \Rightarrow a \in O(\tau)$,
2. $a, b \in O(\tau) \Rightarrow a \# b \in O(\tau)$,
3. $a \in I \wedge b \in O(\tau) \Rightarrow [a, b] \in O(\tau)$.

Analog wie für $Od(\tau)$ beweist man: $O(\tau)$ [mit den Relationen $<_x (x \in I)$, $<_\infty$] ist isomorph zu dem System $O(I)$ von Kino [3], und es gilt:

$$(O(I), <_0) \leqslant \bar{\Theta}_0(\tau) \quad \text{und} \quad (O(I), <_\infty) \leqslant \bar{\Theta}(\tau).$$

LITERATUR

[1] Buchholz, W.: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. Proof theory symposium Kiel 1974. Springer Lecture Notes in Math. 500 (1975).

[2] Buchholz, W., Schütte, K.: Die Beziehungen zwischen den Ordinalzahlsystemen Σ und $\bar{\Theta}(\omega)$. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **17**, 179—190 (1976).
[3] Kino, A.: On ordinal diagrams. J. Math. Soc. Jap. **13**, 346—356 (1961).
[4] Pfeiffer, H.: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **13**, 74—90 (1970).
[5] Pfeiffer, H.: Vergleich zweier Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Archiv f. Math. Logik u. Grundl. **15**, 41—56 (1972).
[6] Pfeiffer, H.: Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Communications of the Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht 1973—1.
[7] Pohlers, W.: Ordinals connected with formal theories for transfinitely iterated inductive definitions. Erscheint in ....
[8] Schütte, K.: Proof theory. Erscheint im Springer Verlag.