Arch. Math. Logic (1988) 27: 51–60

Archive for
Mathematical
Logic

Induktive Definitionen und Dilatoren

Wilfried Buchholz

Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstrasse 39, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Inductive Definitions and Dilators

Summary. In this paper we give a new and comparatively simple proof of the following theorem by Girard [1]:

"If $\forall x \in \mathcal{O} \exists y \in \mathcal{O} \psi(x, y)$ (where the relation ψ is arithmetic and positive in Kleene's $\mathcal{O}$), then there exists a recursive Dilator D such that $\forall \alpha \geqq \omega \, \forall x \in \mathcal{O}^{<\alpha} \exists y \in \mathcal{O}^{<D(\alpha)} \psi(x, y)$."

The essential feature of our proof is its very direct definition of the dilator D. Within a certain infinitary cutfree system of "inductive logic" (which in fact is a modification of Girard's system in [1]) we construct in a uniform way for each ordinal α a derivation T_α of the formula $\forall x \in \mathcal{O}^{<\alpha} \exists y \in \mathcal{O} \psi(x, y)$, and then define D immediately from the family $(T_\alpha)_{\alpha \in On}$. Especially we set $D(\alpha) := $ Kleene-Brouwer length of T_α.

In der vorliegenden Arbeit geben wir einen anderen Beweis für den folgenden Satz von Girard [1, Theorem 3.2(i), (iv)].

Satz I (Girard 1979). *Gilt* $\Sigma \models_I \varphi$ *(und ist* Σ *rekursiv), so gibt es einen (rekursiven) Dilator* D *derart, daß* $\Sigma \models_I \varphi^{\alpha, D(\alpha)}$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{On}$.

Hier bezeichnet Σ ein abzählbares Axiomensystem 1. Stufe und φ eine Formel, in der außer den Symbolen von Σ noch Konstanten $P_{\mathfrak{A}}$ für induktiv definierte Teilmengen des Grundbereichs vorkommen dürfen. $\Sigma \models_I \varphi$ bedeutet, daß φ in jedem Modell von Σ gilt, welches den Konstanten $P_{\mathfrak{A}}$ ihre Standardinterpretation zuordnet. $\varphi^{\alpha,\beta}$ entsteht aus φ durch Einsetzen von $P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$ (bzw. $P_{\mathfrak{A}}^{<\beta}$) für jedes negative (bzw. positive) Auftreten von $P_{\mathfrak{A}}$. Die Konstanten $P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$ werden ebenfalls in kanonischer Weise interpretiert. Ein Dilator ist ein Funktor von ON in ON, der direkte Limites und pull-backs erhält. ON ist die Kategorie der Ordinalzahlen mit den streng monoton wachsenden Funktionen als Morphismen. Der obige Satz hat einige bedeutsame Anwendungen in der Rekursions- und Definierbarkeitstheorie gefunden, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll (s. z.B.: [4, 5, 7, 8]). Wir zitieren nur zwei einfache Folgerungen aus Satz I:

Satz II (Girard 1979). *Gilt* $\forall x \in \mathcal{O} \exists y \in \mathcal{O} \psi(\mathcal{O}, x, y)$ *(wobei* ψ *arithmetisch und positiv in* $\mathcal{O}$*), so gibt es einen rekursiven Dilator D mit* $\forall \alpha \geq \omega \forall x \in \mathcal{O}^{<\alpha} \exists y \in \mathcal{O}^{<D(\alpha)} \psi(\mathcal{O}, x, y)$.

($\mathcal{O}$ bezeichnet Kleenes System der konstruktiven Ordinalzahlen.)

Satz III (van de Wiele 1981). *Ist* $F: \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ *uniform* Σ_1*-definierbar über allen zulässigen Mengen, so gibt es einen rekursiven Dilator D mit* $F(\alpha) \leq D(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{On}$.

Unser Beweis von Satz I zeichnet sich durch seine äußerst direkte Konstruktion des Dilators D aus, die jetzt kurz skizziert werden soll. Für $\alpha \in \mathrm{On}$ bezeichne φ^{α}_{-} die Formel, die aus φ durch Einsetzen von $P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$ für jedes negative Auftreten von $P_{\mathfrak{A}}$ entsteht. In Verallgemeinerung der Methode aus Schütte [10, Abschn. 5] wird zu jeder Formel φ^{α}_{-} ein Formelbaum (Suchbaum) $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ definiert, für den gilt:

(i) $\Sigma \models_I \varphi^{\alpha}_{-} \Rightarrow T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ fundiert

(ii) $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ fundiert $\Rightarrow \Sigma \models_I \varphi^{\alpha, \tilde{\alpha}}$ mit $\tilde{\alpha} := \| T_{\varphi^{\alpha}_{-}} \|$ (Kleene-Brouwer-Länge).

(Ein fundierter Baum $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ läßt sich als Herleitung von φ^{α}_{-} aus Σ in einem geeigneten infinitären Kalkül der „induktiven Logik" auffassen.)

Gilt nun $\Sigma \models_I \varphi$, so auch $\Sigma \models_I \varphi^{\alpha}_{-}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$, und mit (i), (ii) folgt daraus $\Sigma \models_I \varphi^{\alpha, D(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$, wobei $D(\alpha) := \| T_{\varphi^{\alpha}_{-}} \|$. Die Funktion $D: \mathrm{On} \to \mathrm{On}$, $\alpha \mapsto \| T_{\varphi^{\alpha}_{-}} \|$ wird durch folgende Definition von $D(f) \in \mathrm{Mor}(D(\alpha), D(\beta))$ für $f \in \mathrm{Mor}(\alpha, \beta)$ zu einem Dilator: Sei $\gamma \in D(\alpha)$ und s der Knoten von $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$, welcher in der Kleene-Brouwer-Ordnung von $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ and γ-ter Stelle steht. Der Knoten s ist eine endliche Folge von Ordinalzahlen $< \alpha$ und gewissen Symbolen $*_0$, $*_1$. Ersetzt man in s jede Ordinalzahl ξ durch $f(\xi)$, so erhält man einen Knoten s' von $T_{\varphi^{\beta}_{-}}$. Es sei $D(f)(\gamma)$ die Ordinalzahl von s' in der Kleene-Brouwer-Ordnung von $T_{\varphi^{\beta}_{-}}$. – Zusammenfassend können wir feststellen, daß der Dilator D unmittelbar durch die Familie der Herleitungen $T_{\varphi^{\alpha}_{-}}$ ($\alpha \in \mathrm{On}$) erzeugt wird.

Bemerkung. Der Inhalt der vorliegenden Arbeit deckt sich mit dem meiner handschriftlichen Notizen „Induktive Definitionen und Dilatoren" aus dem Jahr 1982, die inzwischen verschiedentlich zitiert wurden.

1. Induktive Logik

L sei eine abzählbare Sprache 1. Stufe. Eine positive Operatorform ist eine Formel $\mathfrak{A}(X, x)$ der Sprache $L(X)$ (X eine Mengenvariable), in der höchstens die Variablen X, x frei vorkommen und außerdem X nur positiv auftritt. Jeder positiven Operatorform $\mathfrak{A}(X, x)$ werden Mengenkonstanten $P_{\mathfrak{A}}$ und $P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$ ($\alpha \in \mathrm{On}$) zugeordnet, die nicht zu L gehören

$$L_{ID} := L \cup \{ P_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \text{ positive Operatorform} \}$$

$$L' := L_{ID} \cup \{ P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha} : \mathfrak{A} \text{ positive Operatorform und } \alpha \in \mathrm{On} \}.$$

Als Mitteilungszeichen verwenden wir u.a.: A, B, C, F für L'-Formeln, φ, ψ für L_{ID}-Formeln, t, t_i für L-Terme, α, β, γ, δ, ξ, η für Ordinalzahlen. Σ bezeichne eine beliebige (im folgenden feste) Menge von geschlossenen L-Formeln. Unter einer L-Struktur $\mathfrak{M}$ verstehen wir hier stets eine L-Struktur im üblichen Sinn zusammen mit einer Belegung $x \mapsto x^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ der (freien) Variablen.

Definition von $\mathfrak{M}'$. Ist $\mathfrak{M}$ eine L-Struktur, so sei $\mathfrak{M}'$ die L'-Expansion von $\mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{M}'(P_{\mathfrak{A}}) := \bigcup_{\xi \in \mathrm{On}} I^{\xi}_{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}'(P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}) := \bigcup_{\xi < \alpha} I^{\xi}_{\mathfrak{A}},$$

wobei

$$I^{\xi}_{\mathfrak{A}} := \left\{ a \in |\mathfrak{M}| : \mathfrak{M} \models \mathfrak{A}\left(\bigcup_{\eta < \xi} I^{\eta}_{\mathfrak{A}}, a \right) \right\}.$$

Definition von $\Sigma \models_I A$

$\Sigma \models_I A : \Leftrightarrow$ Für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Σ gilt $\mathfrak{M}' \models A$.

Das halbformale System $ID^{\infty}_1(\Sigma)$

Formeln werden aus Primformeln und negierten Primformeln mittels $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ gebildet. Die Negation $\neg A$ einer zusammengesetzten Formel A wird gemäß den de Morganschen Regeln definiert.

Definition von A^{α}_{+}, A^{α}_{-}, $A^{\alpha,\beta}$. A^{α}_{+} (bzw. A^{α}_{-}) entstehe aus A dadurch, daß jedes positive (bzw. negative) Auftreten von $P_{\mathfrak{A}}$ durch $P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}$ ersetzt wird. Ferner sei $A^{\alpha,\beta} := (A^{\alpha}_{-})^{\beta}_{+}$.

Induktive Definition der Formelklasse FOR

1. Ist A eine L-Primformel, so $A \in \mathrm{FOR}$ und $\neg A \in \mathrm{FOR}$.
2. Alle Formeln $t \in P_{\mathfrak{A}}$ und $t \notin P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}$ gehören zu FOR.
3. Mit A, B gehören auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\forall x A$, $\exists x A$ zu FOR.

$F \in \mathrm{FOR}$ gilt also genau dann, wenn $P_{\mathfrak{A}}$ nur positiv und $P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}$ nur negativ in F auftritt.

Vereinbarung. F bezeichne im folgenden stets eine Formel aus FOR.

Definition der Menge Pos(C) *der Positivteile einer Formel* C

$$\mathrm{Pos}(C) := \begin{cases} \{C\} \cup \mathrm{Pos}(A) \cup \mathrm{Pos}(B), & \text{falls} \quad C = A \vee B \\ \{C\}, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Logische Axiome. Eine Formel C ist ein (logisches) Axiom, wenn es eine L-Primformel A gibt, so daß $A \in \mathrm{Pos}(C)$ und $\neg A \in \mathrm{Pos}(C)$.

Schlußregeln für $P_{\mathfrak{A}}$ *und* $P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}$

$$(P_{\mathfrak{A}}) \quad \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}, t) \vee C \vdash t \in P_{\mathfrak{A}} \vee C$$

$$(P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}}) \quad \ldots \neg \mathfrak{A}(P^{<\xi}_{\mathfrak{A}}, t) \vee C \ldots (\xi < \alpha) \vdash t \notin P^{<\alpha}_{\mathfrak{A}} \vee C.$$

Spezielle Schnittregel

$$(\Sigma) \quad G \vee C \vdash C, \quad \text{falls} \quad G \in \tilde{\Sigma}.$$

Dabei sei

$$\tilde{\Sigma} := \Sigma \cup \{\forall x (x = x)\} \cup \{\forall x \, \forall y (x \neq y \vee \neg B(x) \vee B(y)) : B \ L\text{-Primformel}\}.$$

Das *halbformale System* $ID_1^\infty(\Sigma)$ bestehe aus den oben genannten logischen Axiomen, den Schlußregeln $(P_{\mathfrak{A}})$, $(P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha})$, (Σ) und den üblichen Schlußregeln für $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$. In Abschn. 2 werden wir beweisen, daß dieses System vollständig für die Formeln aus FOR ist, d.h. daß jede Formel der Klasse $\{F \in \mathrm{FOR} : \Sigma \models_I F\}$ in $ID_1^\infty(\Sigma)$ hergeleitet werden kann.

Vorher soll noch gezeigt werden, wie Satz II aus Satz I folgt: Sei $L := \{0, 1, +, \cdot\}$ und $\Sigma := PA$ (Peano-Arithmetik),

$$\mathfrak{A}_0(X, x) := (x=0) \vee \exists y(y \in X \wedge x = y+1),$$
$$\mathfrak{A}_1(X, x) := (x=0) \vee \exists y(y \in X \wedge x = 2^y) \vee \exists y(x = 3 \cdot 5^y \wedge \forall z\{y\}(z) \in X),$$
$$P_i := P_{\mathfrak{A}_i}, \qquad \varphi := \forall x(x \in P_0) \rightarrow \forall x \in P_1 \exists y \in P_1 \psi(P_1, x, y).$$

Angenommen $\mathfrak{M}' \models PA \cup \{\forall x(x \in P_0)\}$. Dann ist $\mathfrak{M}$ isomorph zur Standardstruktur $\mathfrak{N}$ der natürlichen Zahlen. Außerdem ist $\mathcal{O} = I_{\mathfrak{A}_1}$ (in $\mathfrak{N}$). Mit der Voraussetzung $\forall x \in \mathcal{O} \exists y \in \mathcal{O} \psi(\mathcal{O}, x, y)$ folgt also $\mathfrak{M}' \models \forall x \in P_1 \exists y \in P_1 \psi(P_1, x, y)$. Somit haben wir gezeigt: $PA \models_I \varphi$. Nach Satz I gibt es also einen rekursiven Dilator D mit $PA \models_I \forall x(x \in P_0^{<\alpha}) \rightarrow \forall x \in P_1^{<\alpha} \exists y \in P_1^{<D(\alpha)} \psi(P_1^{<D(\alpha)}, x, y)$, für alle $\alpha \in \mathrm{On}$. Wegen $\mathfrak{N}' \models \forall x(x \in P_0^{<\alpha})$ für $\alpha \geqq \omega$, und da P_1 in ψ nur positiv auftritt, folgt daraus $\mathfrak{N}' \models \forall x \in P_1^{<\alpha} \exists y \in P_1^{<D(\alpha)} \psi(P_1, x, y)$, d.h. $\forall x \in \mathcal{O}^{<\alpha} \exists y \in \mathcal{O}^{<D(\alpha)} \psi(\mathcal{O}, x, y)$, für $\alpha \geqq \omega$.

2. Die Formelbäume T_F

Induktive Definition der Positivformen

$(\Gamma 1)$ $*$ ist eine Positivform.

$(\Gamma 2)$ Ist A eine Formel und Γ eine Positivform, so ist auch $A \vee \Gamma$ eine Positivform.

Im folgenden bezeichnen Γ, Γ_i stets Positivformen.

Definition von $\Gamma(B)$ und $B \vee \Gamma(\,)$

1. Für $\Gamma = *$ sei $\Gamma(B) := B \vee \Gamma(\,) := B$.
2. Für $\Gamma = A \vee \Gamma_0$ sei $\Gamma(B) := A \vee \Gamma_0(B)$, $B \vee \Gamma(\,) := B \vee (A \vee \Gamma_0(\,))$.

Bemerkung. Jede Formel C läßt sich auf genau eine Weise in der Form $C = \Gamma(B)$ mit $B \neq B_0 \vee B_1$ darstellen.

Definition. $*_0$, $*_1$ seien zwei Objekte (Symbole) mit $\mathrm{On} \cap \{*_0, *_1\} = \emptyset$.
$\alpha\text{-SEQ} := \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) : n \geqq 0,\ x_0, \ldots, x_{n-1} \in \alpha \cup \{*_0, *_1\}\}$.
$\mathrm{SEQ} := \bigcup \{\alpha\text{-SEQ} : \alpha \in \mathrm{On}\}$.

F sei eine für den Rest dieses Abschnitts feste Formel aus FOR. Wir werden jetzt einen bzgl. der Schlußregeln von $ID_1^\infty(\Sigma)$ lokal korrekten Formalbaum T_F definieren und anschließend beweisen, daß T_F genau dann fundiert ist, wenn $\Sigma \models_I F$ gilt. T_F wird als Funktion von SEQ in $\mathrm{FOR} \cup \{\infty\}$ (∞ für „undefiniert") erklärt; diese sehr formale Definition von T_F brauchen wir in Abschn. 3 um die Homogenität der Familie $(T_{\varphi_{\alpha}^{\alpha}})_{\alpha \in \mathrm{On}}$ nachzuweisen (vgl. [6]).

Definition

$G_0, G_1, \ldots$ sei eine Abzählung von $\tilde{\Sigma}$.
$t_0, t_1, \ldots$ sei eine Abzählung aller L-Terme.

Definition des Formelbaums $T_F:\mathrm{SEQ}\to\mathrm{FOR}\cup\{\infty\}$

Die Definition von $T_F(s)$ erfolgt durch Induktion nach der Länge von $s\in\mathrm{SEQ}$.

(T1) $T_F((\,)):=F$.

Sei nun $s=(x_0,\ldots,x_n)$ und $s_0:=(x_0,\ldots,x_{n-1})$.

(T2) $T_F(s_0)\in\mathrm{FOR}$ kein logisches Axiom, $n=2m$, $x_n=*_0$:
$T_F(s):=\neg G_m\vee T_F(s_0)$.

(T3) $T_F(s_0)=:C\in\mathrm{FOR}$ kein logisches Axiom und n ungerade:

(T3.1) $C=\Gamma(A_0\wedge A_1)$ und $x_n=*_i$: $T_F(s):=\Gamma(A_i)$.

(T3.2) $C=\Gamma(\forall xA(x))$ und $x_n=*_0$: $T_F(s):=\Gamma(A(v))$, dabei sei v die erste nicht in C vorkommende Variable.

(T3.3) $C=\Gamma(\exists xA(x))$ und $x_n=*_0$: $T_F(s):=\exists xA(x)\vee\Gamma(A(t_k))$; enthält $A(x)$ wenigstens ein freies Auftreten von x, so sei k die kleinste Zahl derart, daß $A(t_k)$ nicht Positivteil einer der Formeln $T_F((x_0,\ldots,x_{i-1}))$ $(i=0,\ldots,n)$ ist; anderenfalls sei $k=0$.

(T3.4) $C=\Gamma(t\in P_{\mathfrak{A}})$ und $x_n=*_0$: $T_F(s):=\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}},t)\vee\Gamma(\,)$.

(T3.5) $C=\Gamma(t\notin P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha})$ und $x_n=\xi<\alpha$: $T_F(s):=\neg\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi},t)\vee\Gamma(\,)$.

(T3.6) $C=\Gamma(A)$ und $x_n=*_0$, wobei A eine (negierte) L-Primformel:
$T_F(s):=A\vee\Gamma(\,)$.

(T4) In allen anderen Fällen sei $T_F(s):=\infty$.

Definition. $\mathrm{dom}(T_F):=\{s\in\mathrm{SEQ}:T_F(s)\in\mathrm{FOR}\}$.

T_F heißt fundiert, wenn es keine unendliche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{On}\cup\{*_0,*_1\}$ gibt, so daß $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\mathrm{dom}(T_F)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Satz 1. *T_F nicht fundiert $\Rightarrow$ $\Sigma\not\models_I F$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{On}\cup\{*_0,*_1\}$ mit $C_n:=T_F((x_0,\ldots,x_{n-1}))\in\mathrm{FOR}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Nach Definition von T_F ist keine der Formeln C_n ein logisches Axiom, und es gilt $C_{2m+1}=\neg G_m\vee C_{2m}$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Aus letzterem folgt $\{\neg A:A\in\tilde{\Sigma}\}\subseteq H$.

Dabei sei $H:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Pos}(C_n)$.

Hilfssatz 1. *Ist $A\in\mathrm{Pos}(C_n)$ keine $\vee$-Formel, so gibt es ein ungerades $k\geq n$ und eine Positivform Γ mit $C_k=\Gamma(A)$.*

Beweis. Wir können annehmen, daß n ungerade ist. Ferner beziehen wir uns auf ein bestimmtes Auftreten von A in C_n und nehmen an, C_n sei nicht von der Gestalt $\Gamma(A)$. Nach Definition von T_F ist dann auch $A\in\mathrm{Pos}(C_{n+2})$, und in C_{n+2} stehen rechts von A weniger logische Zeichen als in C_n. So kommt man schließlich zu einer Formel C_{n+2i}, in der rechts von A keine logischen Zeichen stehen. Dann ist $C_{n+2i}=\Gamma(A)$.

Hilfssatz 2.

a) *A Primformel von $L\Rightarrow A\notin H$ oder $\neg A\notin H$.*

b) *$A_0\wedge A_1\in H\Rightarrow A_0\in H$ oder $A_1\in H$.*

c) *$A_0\vee A_1\in H\Rightarrow A_0\in H$ und $A_1\in H$.*

d) *$\forall xA(x)\in H\Rightarrow$ Es gibt einen L-Term t mit $A(t)\in H$.*

e) *$\exists xA(x)\in H\Rightarrow$ Für jeden L-Term t gilt $A(t)\in H$.*

f) *$(t\notin P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha})\in H\Rightarrow$ Es gibt ein $\xi<\alpha$ mit $\neg\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi},t)\in H$.*

g) $(t \in P_{\mathfrak{A}}) \in H \Rightarrow \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}, t) \in H$.

h) *Für alle L-Terme t, t' und alle L-Primformeln B(x) gilt:*

(i) $(t \neq t) \in H$.

(ii) $(t \neq t') \in H$ *und* $\neg B(t) \in H \Rightarrow \neg B(t') \in H$.

Beweis. a) Sei A L-Primformel. Dann gilt:

(1) $B \in \{A, \neg A\} \cap \mathrm{Pos}(C_n) \Rightarrow B \in \mathrm{Pos}(C_k)$ für alle $k \geqq n$.

Da die Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kein logisches Axiom enthält, gilt außerdem $A \notin \mathrm{Pos}(C_k)$ oder $\neg A \notin \mathrm{Pos}(C_k)$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit (1) folgt daraus die Behauptung.

b) Ist $A_0 \wedge A_1 \in \mathrm{Pos}(C_n)$, so gibt es nach Hilfssatz 1 ein ungerades k mit $C_k = \Gamma(A_0 \wedge A_1)$; folglich $C_{k+1} = \Gamma(A_0)$ oder $\Gamma(A_1)$, und somit $A_0 \in H$ oder $A_1 \in H$.

c) Ist trivial. d), f), g) werden ebenso wie b) bewiesen.

e) Sei $\exists x A(x) \in H$. Dann existiert ein k_0 mit $\exists x A(x) \in \mathrm{Pos}(C_n)$ für alle $n \geqq k_0$ (*). Durch Induktion nach k zeigen wir $A(t_k) \in H$: Gelte $A(t_i) \in H$ für alle $i < k$. Wegen Hilfssatz 1 und (*) gibt es ein ungerades $n \geqq k_0$ mit $C_n = \Gamma(\exists x A(x))$ und $\{A(t_i) : i < k\} \subseteq \bigcup_{j \leqq n} \mathrm{Pos}(C_j)$. Dann $C_{n+1} = \exists x A(x) \vee \Gamma(A(t_l))$ mit $k \leqq l$ und $\{A(t_i) : i < l\} \subseteq H$. Also $A(t_k) \in H$.

h) Wegen $\{\neg A : A \in \tilde{\Sigma}\} \subseteq H$ (s. oben) haben wir $\exists x (x \neq x) \in H$ und $\exists x \exists y (x = y \wedge B(x) \wedge \neg B(y)) \in H$. Mit e) folgt daraus $t \neq t \in H$ und $t = t' \wedge B(t) \wedge \neg B(t') \in H$. Aus letzterem folgt mit b): $t = t' \in H$ oder $B(t) \in H$ oder $\neg B(t') \in H$. Mit a) folgt daraus Behauptung (ii).

Definition. L-Ter $:=$ Menge aller L-Terme,

$$t \sim t' :\Leftrightarrow t \neq t' \in H, \qquad \bar{t} := \{t' \in L\text{-Ter} : t \sim t'\}.$$

Aus Hilfssatz 2h) folgt:

(i) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n' \Rightarrow f t_1 \ldots t_n \sim f t_1' \ldots t_n'$ $(f \in L)$.

(iii) $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$ und $\neg p t_1 \ldots t_n \in H \Rightarrow \neg p t_1' \ldots t_n' \in H$ $(p \in L)$.

Demnach können wir eine *L-Struktur* $\mathfrak{M}$ wie folgt definieren:

$$|\mathfrak{M}| := \{\bar{t} : t \in L\text{-Ter}\}, \qquad f^{\mathfrak{M}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) := \overline{f t_1 \ldots t_n},$$
$$x^{\mathfrak{M}} := \bar{x}, \qquad (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \in p^{\mathfrak{M}} :\Leftrightarrow \neg p t_1 \ldots t_n \in H.$$

Definition von $\mathrm{gr}(A) \in \mathrm{On}$ für jede L'-Formel A, in der keine Konstante $P_{\mathfrak{A}}$ vorkommt:

1. $\mathrm{gr}(A) := \mathrm{gr}(\neg A) := 0$, wenn A eine L-Primformel ist.
2. $\mathrm{gr}(A_0 \wedge A_1) := \mathrm{gr}(A_0 \vee A_1) := \mathrm{gr}(A_0) \# \mathrm{gr}(A_1) \# 1$.
3. $\mathrm{gr}(\forall x B) := \mathrm{gr}(\exists x B) := \mathrm{gr}(B) + 1$.
4. $\mathrm{gr}(t \in P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}) := \mathrm{gr}(t \notin P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}) := \omega^{\alpha}$.

Folgerung. Für $\alpha < \beta$ gilt: $\mathrm{gr}(\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}, t)) = \mathrm{gr}(\neg \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}, t)) < \omega^{\beta}$.

Hilfssatz 3. $C \in H \Rightarrow \mathfrak{M}' \not\models C_+^{\beta}$, *für alle* $\beta \in \mathrm{On}$.

Beweis. Durch Induktion nach $\mathrm{gr}(C_+^{\beta})$ mittels Hilfssatz 2: Wir behandeln nur zwei Fälle.

1. $C = t \in P_{\mathfrak{A}}$: Dann $\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}, t) \in H$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{M}' \not\models \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}, t)$ für alle $\xi < \beta$. Folglich $\mathfrak{M}' \not\models t \in P_{\mathfrak{A}}^{<\beta}$.

2. $C = t \notin P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$: Dann $\neg\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}, t) \in H$ für ein $\xi < \alpha$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt daraus $\mathfrak{M}' \models \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}, t)$ und weiter $\mathfrak{M}' \models t \in P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$, d.h. $\mathfrak{M}' \not\models C_+^\beta$, denn $C_+^\beta = C$.

Die Fälle $C = t \notin P_{\mathfrak{A}}$, $C = t \in P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha}$ kommen nicht vor, da $F \in \mathrm{FOR}$.

Hilfssatz 4. *$\mathfrak{M} \models \Sigma$ und $\mathfrak{M}' \not\models F$, also $\Sigma \not\models_I F$.*

Beweis. 1. Sei $A \in \Sigma$. Dann $\neg A \in H$ und nach Hilfssatz 3 gilt $\mathfrak{M}' \not\models (\neg A)_+^0$. Da A ein L-Satz ist, gilt $(\neg A)_+^0 = \neg A$ und somit $\mathfrak{M} \models A$.

2. Wegen $F = C_0 \in H$ gilt nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{M}' \not\models F_+^\beta$ für alle $\beta \in \mathrm{On}$. Wir wählen $\beta \in \mathrm{On}$ so groß, daß $I_{\mathfrak{A}} = I_{\mathfrak{A}}^{<\beta}$ für jede in F vorkommende Konstante $P_{\mathfrak{A}}$. Aus $\mathfrak{M}' \not\models F_+^\beta$ folgt dann $\mathfrak{M}' \not\models F$.

Definition. Für $x, y \in \mathrm{On} \cup \{*_0, *_1\}$ sei:

$$x \dot{<} y :\Leftrightarrow x \in y \in \mathrm{On} \quad \text{oder} \quad (x \in \{*_0, *_1\} \;\&\; y \in \mathrm{On}) \quad \text{oder} \quad (x = *_0 \;\&\; y = *_1).$$

Mit $\prec$ bezeichnen wir die durch $\dot{<}$ induzierte Kleene-Brouwer-Ordnung auf SEQ.

Bemerkung. Offenbar gilt $\mathrm{dom}(T_F) \subseteq \alpha_0\text{-SEQ}$ mit

$$\alpha_0 := \max\{\alpha : \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad P_{\mathfrak{A}}^{<\alpha} \text{ kommt in } F \text{ vor}\},$$

d.h. $\mathrm{dom}(T_F)$ ist eine Menge.

Definition. Ist T_F fundiert, so bezeichne $\|T_F\| \in \mathrm{On}$ den Ordnungstyp der Wohlordnung $(\mathrm{dom}(T_F), \prec)$, und $\ell_F : \|T_F\| \to \mathrm{dom}(T_F)$ sei die zugehörige Ordnungsfunktion.

Satz 2. *T_F fundiert und $\|T_F\| \leqq \beta \Rightarrow \Sigma \models_I F_+^\beta$.*

Korollar. *$\Sigma \models_I F \Leftrightarrow T_F$ fundiert.*

Beweis. Durch Induktion nach α wird gezeigt:

$$\alpha \in \|T_F\| \;\&\; A = T_F(\ell_F(\alpha)) \;\&\; \alpha \leqq \beta \Rightarrow \Sigma \models_I A_+^\beta .$$

Das Korollar folgt unmittelbar aus Satz 1, Satz 2 und $\Sigma \models_I F_+^\beta \to F$.

3. Der Dilator D

φ sei eine im folgenden feste L_{ID}-Formel mit $\Sigma \models_I \varphi$. Dann gilt offenbar auch $\Sigma \models_I \varphi_-^\alpha$ und $\varphi_-^\alpha \in \mathrm{FOR}$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$. Nach Satz 1 ist deshalb $T_{\varphi_-^\alpha}$ fundiert und somit $\|T_{\varphi_-^\alpha}\| \in \mathrm{On}$ definiert.

Abkürzung. $T_\alpha := T_{\varphi_-^\alpha}$, $\ell_\alpha := \ell_{\varphi_-^\alpha}$.

Bemerkung. 1. $\mathrm{dom}(T_\alpha) \subseteq \alpha\text{-SEQ}$.

2. $\ell_\alpha : \|T_\alpha\| \to \mathrm{dom}(T_\alpha)$ ist die Ordnungsfunktion der Wohlordnung $(\mathrm{dom}(T_\alpha), \prec)$.

Definitionen. 1. Für $s \in \mathrm{SEQ}$ sei

$$\mathrm{On}(s) := \text{Menge der in } s \text{ vorkommenden Ordinalzahlen}$$

$I(s):=$ Klasse aller ordnungstreuen Funktionen $f: M \to \mathrm{On}$ mit $\mathrm{On}(s) \subseteq M \subseteq \mathrm{On}$

2. Für $s=(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{SEQ}$ und $f \in I(s)$ sei
$$\hat{f}(s):=(f(x_0), \ldots, f(x_{n-1})); \quad \text{wobei} \quad f(*_i):=*_i.$$
3. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ sei
$$I(\alpha, \beta):= \text{Menge aller ordnungstreuen Funktionen } f: \alpha \to \beta.$$

Folgerung. $s \in \alpha\text{-SEQ} \Rightarrow I(\alpha, \beta) \subseteq I(s)$.

Satz 3. (Homogenität von $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$).
$s \in \mathrm{dom}(T_\alpha), f \in I(s)$ *und* $\forall \xi \in \mathrm{On}(s)(f(\xi)<\beta) \Rightarrow \hat{f}(s) \in \mathrm{dom}(T_\beta)$.

Beweis folgt unten.

Definition von $D: \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}$

(D1) $D(\alpha):=\|T_\alpha\| \quad (\alpha \in \mathrm{On})$
(D2) Für $f \in I(\alpha, \beta)$ sei $D(f):=\ell_\beta^{-1} \circ \hat{f} \circ \ell_\alpha: D(\alpha) \to D(\beta)$. (Wegen Satz 3 ist $\hat{f} \circ \ell_\alpha[D(\alpha)] \subseteq \mathrm{dom}(T_\beta)$ und somit $\ell_\beta^{-1} \circ \hat{f} \circ \ell_\alpha(\gamma)$ für jedes $\gamma \in D(\alpha)$ definiert.)
Da $T_\alpha = T_{\varphi^{\alpha}_{\le}}$ fundiert ist, gilt nach Satz 2 $\Sigma \models_I \varphi^{\alpha, D(\alpha)}$. Zum Beweis von Satz I muß also nur noch gezeigt werden, daß das oben definierte D ein (rekursiver) Dilator ist.

Definition. $\mathscr{B}:=\{(s, n): n \in \mathbb{N},\ s \in \mathrm{dom}(T_n),\ \mathrm{On}(s)=\{0, \ldots, n-1\}\}$. Für $(s, n) \in \mathscr{B}$, $\alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha$ sei $(s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha):=\ell_\alpha^{-1}(\hat{f}(s))$, wobei $f:=\{(i, \alpha_i): i<n\}$. [Nach Satz 3 ist $\hat{f}(s) \in \mathrm{dom}(T_\alpha)$.]

Lemma. a) $D(\alpha)=\{(s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha):(s, n) \in \mathscr{B},\ \alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha\}$.

b) *Aus* $(s, n), (s', m) \in \mathscr{B}$, $\alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha$, $\beta_0<\ldots<\beta_{m-1}<\alpha$ *und* $(s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha)=(s'; \beta_0, \ldots, \beta_{m-1}; \alpha)$ *folgt* $s=s'$, $n=m$ *und* $\alpha_i=\beta_i$ *für* $i<n$.

c) *Seien* $(s, n), (s', m) \in \mathscr{B}$, $\alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha$, $\beta_0<\ldots<\beta_{m-1}<\alpha$, $\alpha_0'<\ldots<\alpha_{n-1}'<\alpha'$, $\beta_0'<\ldots<\beta_{m-1}'<\alpha'$, *so daß* $h:=\{(\alpha_i, \alpha_i'): i<n\} \cup\{(\beta_j, \beta_j'): j<m\}$ *eine ordnungstreue Funktion ist. – Dann gilt:*
$$(s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha)<(s'; \beta_0, \ldots, \beta_{m-1}; \alpha)$$
impliziert
$$(s; \alpha_0', \ldots, \alpha_{n-1}'; \alpha')<(s'; \beta_0', \ldots, \beta_{m-1}'; \alpha').$$

d) *Aus* $(s, n) \in \mathscr{B}$, $\alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha$ *und* $f \in I(\alpha, \beta)$ *folgt* $D(f)((s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha))$ $=(s; f(\alpha_0), \ldots, f(\alpha_{n-1}); \beta)$.

Bemerkung. Aus diesem Lemma zusammen mit Girard [3, Theorem 2.2] folgt, daß D ein Dilator ist.

Beweis des Lemmas. a) Folgt unmittelbar aus Satz 3.

b) Sei $f:=\{(i, \alpha_i): i<n\}$, $g:=\{(j, \beta_j): j<m\}$. Dann gilt $\ell_\alpha^{-1} \hat{f}(s)=\ell_\alpha^{-1} \hat{g}(s')$ und folglich $\hat{f}(s)=\hat{g}(s')$. Daraus folgt $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}=\mathrm{On}(f(s))=\mathrm{On}(g(s'))$ $=\{\beta_0, \ldots, \beta_{m-1}\}$ und somit $f=g$. Aus $\hat{f}(s)=\hat{g}(s')$ und $f=g$ folgt $s=s'$.

c) Sei $f:=\{(i, \alpha_i): i<n\}$, $g:=\{(j, \beta_j): j<m\}$. Aus $(s; \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}; \alpha)$ $<(s'; \beta_0, \ldots, \beta_{m-1}; \alpha)$ folgt $\hat{f}(s) \prec \hat{g}(s')$ und weiter $\widehat{h \circ f}(s)=\hat{h} \circ \hat{f}(s) \prec \hat{h} \circ \hat{g}(s')$

$=\widehat{h\circ g}(s')$ und schließlich $(s;\alpha'_0,\ldots,\alpha'_{n-1};\alpha')=\ell_\alpha^{-1}\widehat{h\circ f}(s)<\ell_\alpha^{-1}\widehat{h\circ g}(s')$ $=(s';\beta_0,\ldots,\beta_{m-1};\alpha')$.

d) Sei $g:=\{(i,\alpha_i):i<n\}$.

$$D(f)((s;\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1};\alpha))=\ell_\beta^{-1}\hat{f}\ell_\alpha\ell_\alpha^{-1}\hat{g}(s)=\ell_\beta^{-1}\widehat{f\circ g}(s)$$
$$=(s;f(\alpha_0),\ldots,f(\alpha_{n-1});\beta).$$

Beweis von Satz 3. Sei $s\in\mathrm{dom}(T_\alpha)$, $f\in I(s)$ und $\forall\xi\in\mathrm{On}(s)(f(\xi)<\beta)$. Dann können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $f(\alpha)=\beta$. Für $C\in\mathrm{FOR}$ sei $\mathrm{On}(C):=\{\xi\in\mathrm{On}:P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}$ kommt in C vor$\}$. Ist $\mathrm{On}(C)\subseteq\mathrm{On}(s)\cup\{\alpha\}$, so sei $\hat{f}(C)$ diejenige Formel, die aus C entsteht, wenn jede Konstante $P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}$ durch $P_{\mathfrak{A}}^{<f(\xi)}$ ersetzt wird. Offenbar gilt stets $\mathrm{On}(T_\alpha(s))\subseteq\mathrm{On}(s)\cup\{\alpha\}$.

Wir zeigen nun durch Induktion nach der Länge von s:

$$T_\beta(\hat{f}(s))=\hat{f}(T_\alpha(s))\quad\text{und somit}\quad\hat{f}(s)\in\mathrm{dom}(T_\beta).$$

Abkürzung. $s':=\hat{f}(s)$, $C':=\hat{f}(C)$.

$(T1)$ $s=(\,):T_\beta(s')=\varphi^\beta_-=(\varphi^\alpha_-)'=T_\alpha(s)'$.

Sei nun $s=(x_0,\ldots,x_n)$ und $s_0=(x_0,\ldots,x_{n-1})$.

$(T2)$ $T_\alpha(s_0)\in\mathrm{FOR}$ kein Axiom, $n=2m$, $x_n=*_0$:

Nach I.V. gilt $T_\beta(s'_0)=T_\alpha(s_0)'$, also $T_\beta(s'_0)\in\mathrm{FOR}$ kein Axiom und folglich: $T_\beta(s')$ $=\neg G_m\vee T_\beta(s'_0)=\neg G_m\vee T_\alpha(s_0)'=T_\alpha(s)'$.

$(T3)$ $T_\alpha(s_0)=C\in\mathrm{FOR}$ kein Axiom und n ungerade:

Nach I.V. gilt $T_\beta(s'_0)=C'$.

$(T3.1)$ $C=\Gamma(A_0\wedge A_1)$ und $x_n=*_i$:

Dann $T_\beta(s'_0)=\Gamma'(A'_0\wedge A'_1)$ und somit $T_\beta(s')=\Gamma'(A'_i)=\Gamma(A_i)'=T_\alpha(s)'$

$(T3.2)$ analog zu $(T3.1)$.

$(T3.3)$ $C=\Gamma(\exists xA(x))$ und $x_n=*_0$:

Dann $T_\alpha(s)'=\exists xA'(x)\vee\Gamma'(A'(t_{k_0}))$ (für ein gewisses $k_0\in\mathbb{N}$) und $T_\beta(s'_0)=\Gamma'(\exists xA'(x))$. Aus letzterem folgt $T_\beta(s')=\exists xA'(x)\vee\Gamma'(A'(t_{k_1}))$ (für ein gewisses $k_1\in\mathbb{N}$). Nach I.V. gilt außerdem für $i=0,\ldots,n$ und $k\in\mathbb{N}$:

$$A(t_k)\in\mathrm{Pos}(T_\alpha((x_0,\ldots,x_{i-1})))\Leftrightarrow A'(t_k)\in\mathrm{Pos}(T_\beta((x_0,\ldots,x_{i-1})')).$$

Daraus folgt $k_0=k_1$ und somit $T_\beta(s')=T_\alpha(s)'$.

$(T3.4)$ $C=\Gamma(t\in P_{\mathfrak{A}})$ und $x_n=*_0$:

Dann $T_\beta(s'_0)=\Gamma'(t\in P_{\mathfrak{A}})$ und folglich $T_\beta(s')=\mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}},t)\vee\Gamma'(\,)=T_\alpha(s)'$.

$(T3.5)$ $C=\Gamma(t\notin P_{\mathfrak{A}}^{<\delta})$ und $x_n=\xi<\delta$:

Dann gilt $\xi,\delta\in\mathrm{dom}(f)$ und $f(\xi)<f(\delta)$. Ferner haben wir

$$T_\beta(s'_0)=\Gamma'(t\notin P_{\mathfrak{A}}^{<f(\delta)})\quad\text{und}\quad s'=s'_0{}^\frown(f(\xi)),$$

also

$$T_\beta(s') = \neg \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<f(\xi)}, t) \vee \Gamma'(\ ) = (\neg \mathfrak{A}(P_{\mathfrak{A}}^{<\xi}, t) \vee \Gamma(\ ))' = T_\alpha(s)'.$$

$(T3.6)$ $\quad C = \Gamma(A)$ und $x_n = *_0$,

wobei A eine (negierte) L-Primformel ist: Dann $T_\beta(s'_0) = \Gamma'(A)$ und folglich $T_\beta(s') = A \vee \Gamma'(\ ) = T_\alpha(s)'$.

Zur Rekursivität von D

Definition. Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $f \in I(m,n)$ sei $\ulcorner f \urcorner := \langle f(0), \ldots, f(m-1), n \rangle$, wobei $\langle\ \rangle : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine der üblichen Kodierungsfunktionen sei. Ein Dilator D heißt *rekursiv*, falls gilt:

(i) $D(n) \in \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gibt eine rekursive Funktion $d: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $f \in I(m,n)$ gilt $\ulcorner D(f) \urcorner = d(\ulcorner f \urcorner)$.

Unter der Voraussetzung, daß die in der Definition von T_F (in Abschn. 2) vorkommenden Abzählungen $G_0, G_1, \ldots, t_0, t_1, \ldots$ rekursiv sind, ergibt sich die Rekursivität des oben definierten Dilators D (bei Verwendung der Churchschen These) wie folgt:

zu (i): Für $n \in \mathbb{N}$ ist T_n ein endlich verzweigter fundierter Baum und deshalb endlich; also $D(n) = \|T_n\| < \omega$.

zu (ii): Sei $f \in I(m,n)$ gegeben. Zu berechnen sind die Zahlen $D(m)$, $D(n)$ und $D(f)(i)$ für $i < D(m)$. Dies geschieht folgendermaßen: Ausgehend von der Definition von T_F in Abschn. 2 konstruiert man die endlichen Bäume T_m, T_n und ordnet dann ihre Knoten gemäß der Kleene-Brouwer-Ordnung. So erhält man Folgen $(s_0, \ldots, s_{\bar{m}})$, $(r_0, \ldots, r_{\bar{n}})$ mit $s_i, r_j \in \omega$-SEQ und $D(m) = \bar{m}+1$, $D(n) = \bar{n}+1$. Für $i < D(m)$ gilt $D(f)(i) =$ das eindeutig bestimmte $k < D(n)$ mit $\hat{f}(s_i) = r_k$.

Literatur

1. Girard, J.Y.: A survey of Π^1_2-logic. In: Barwise, J., Kaplan, D., Keisler, H.J., Suppes, P., Troelstra, A.S. (eds.), Logic, methodology and philosophy of science. VI. pp. 89–107. Amsterdam: North-Holland 1982
2. Girard, J.Y.: Π^1_2-logic, Part 1: Dilators. Ann. Math. Logic **21**, 75–219 (1981)
3. Girard, J.Y.: Introduction to Π^1_2-logic. Synthese **62**, 191–216 (1985)
4. Girard, J.Y., Normann, D.: Set recursion and Π^1_2-logic. Ann. Pure Appl. Logic **28**, 255–286 (1985)
5. Jäger, G.: Countable admissible ordinals and dilators. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **32**, 451–456 (1986)
6. Jervell, H.: Introducing homogeneous trees. In: Proc. Herbrand Symposion, Logic Colloquium 1981, pp. 147–158. Amsterdam: North-Holland 1982
7. Ressayre, J.P.: Bounding generalized recursive functions of ordinals by effective functors; a complement to the Girard theorem. In: Proc. Herbrand Symposion, Logic Colloquium 1981, pp. 251–279. Amsterdam: North-Holland 1982
8. Van de Wiele, J.: Recursive dilators and generalized recursions. In: Proc. Herbrand Symposion, Logic Colloquium 1981, pp. 325–332. Amsterdam: North-Holland 1982
9. Päppinghaus, P.: Ptykes in Gödels T und Verallgemeinerte Rekursion über Mengen und Ordinalzahlen. Habilitationsschrift, Hannover 1985
10. Schütte, K.: Proof theory. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977

Eingegangen am 12. Februar 1987