KOMPLEMENTIERTE MODULN

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Helmut Zöschinger

aus München

München , März 1972

1. Referent: Prof. Dr. F. Kasch

2. Referent: Prof. Dr. B. Pareigis

Tag der mündlichen Prüfung: 19.6.72

La netteté d'esprit cause aussi la netteté
de la passion; (Pascal)

Inhalt

Beim Studium projektiver Hüllen von Moduln begegnet man minimalen Elementen in $\{ V \mid V + U = M \}$. Sie heißen Additions-Komplemente von U in M, und hat jeder Untermodul von M ein (Additions-) Komplement, so heißt M komplementiert [7]. Solche Moduln werden in dieser Arbeit untersucht.

In (1) wird aus der Selbstprojektivität eines Moduls eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet, die für die Untersuchung von Komplementen benötigt werden und, wie sich zeigt, auch von selbständigem Interesse sind. Insbesondere erweisen sich folgende Eigenschaften, die den Untermodulverband mit dem Endomorphismenring verknüpfen,

(SP1) $\alpha,\beta \in \mathrm{End}(M) \wedge \mathrm{Bi}\beta \subset \mathrm{Bi}\alpha \Rightarrow \exists \gamma \in \mathrm{End}(M)$ mit $\beta = \alpha\gamma$

(SP2) $A + B = M \Rightarrow \exists \alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B$

als ausreichend (für die meisten Fälle sogar (SP2) allein), und es wird untersucht, wann daraus schon Selbstprojektivität folgt. In der Kategorie der abelschen Gruppen ergibt sich: Eine Torsionsgruppe mit (SP1) ist bereits selbstprojektiv. Eine Gruppe ist genau dann selbstprojektiv, wenn sie rein-projektiv ist und einer der beiden Bedingungen genügt. - Schließlich gelingt eine teilweise Lösung des Problems von Fuchs, die abelschen Gruppen zu charakterisieren, bei denen der Durchschnitt von zwei direkten Summanden wieder ein direkter Summand ist: Unter den rein-projektiven Gruppen sind es genau die Gruppen, bei denen jede Untergruppe selbstprojektiv ist.

In (2) werden Komplemente zu einem festen Untermodul $U \subset M$ untersucht. Für sie gelten noch einige Eigenschaften, wie sie bei direkten Summanden bekannt sind. Es werden Klassen von Moduln angegeben, bei denen jedes Komplement bereits direkter Summand ist. In (SP2)-Moduln läßt sich die Gesamtheit der Komplemente von U beschreiben, wenn ein Komplement V von U bekannt ist: Ist z.B. V direkter Summand in M, so auch jedes weitere Komplement V' von U, und es ist notwendig isomorph zu V. Grundlegend für diese Untersuchungen ist eine Proposition über den Transport von Komplementen durch Homomorphismen. Aus ihr ergibt sich insbesondere, daß jeder Faktormodul eines komplementierten Moduls wieder komplementiert ist. Schließlich lassen sich in selbstprojektiven Moduln die Komplemente im Modul sowohl durch bestimmte Endomorphismen charakterisieren, als auch durch die Komplemente im Endomorphismenring.

In (3) wird der Begriff des abgeschlossenen Untermoduls dualisiert. Während ein Modul, in dem jeder Untermodul abgeschlossen ist, bereits halbeinfach ist, liefert die duale Situation (d.h. jeder Untermodul ist koabgeschlossen) eine Verallgemeinerung des Begriffes "V-Ring" auf Moduln. Die Klasse der V-Moduln über einem Ring ist gegenüber Epi- und Monomorphismen und direkten Summen abgeschlossen, und über bestimmten Ringen (z.B. komm. u. noeth.) stimmt sie mit der Klasse der halbeinfachen Moduln überein. Nennt man einen Modul gut, falls sein Radikalfaktormodul ein V-Modul ist, so erhält man eine Verallgemeinerung der sog. "guten"Ringe, die dadurch definiert sind, daß das Jacobsen-Radikal rechtsexakt ist. Es ergibt sich: Über einem Dedekind-Ring ist jeder Torsionsmodul gut. - Jeder koabgeschlossene Untermodul ist $\mathcal{E}$-koreiner Untermodul, wobei $\mathcal{E}$ die Klasse der einfachen Moduln ist. Es werden die Ringe charakterisiert, über denen jeder $\mathcal{E}$-koreine Untermodul bereits koabgeschlossen ist, und für sie einige Eigenschaften abgeleitet. Speziell gilt für sie: Jeder komplementierte (SP2)-Modul läßt sich als direkte Summe von unzerlegbaren Moduln darstellen. Es wird gezeigt, daß jeder Dedekind-Ring die genannte Eigenschaft hat, und für ihn gilt sogar: Die koabgeschlossenen Untermoduln stimmen mit den abgeschlossenen überein.

In (4) ist das erste Ergebnis: Ist ein Modul mit kleinem Radikal direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, so ist er komplementiert. Es folgt daraus, daß jede abelsche Torsionsgruppe mit kleinem Radikal komplementiert ist. Umgekehrt wird gezeigt, daß jede komplementierte abelsche Gruppe eine Torsionsgruppe ist, und daraus folgt weiter ihre Struktur: Sie ist direkte Summe von unzerlegbaren Gruppen, d.h. von Kopien von $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ und deren Untergruppen (p Primzahl). Die Tatsache, daß $\bigoplus_{m_p}\mathbb{Z}(p^{\infty})$ nur für endliches m_p komplementiert ist, liefert dann das Hauptresultat: Eine abelsche Gruppe ist genau dann komplementiert, wenn sie Torsionsgruppe ist, bei der für jede p-Komponente gilt: Der divisible

Anteil ist artinsch und der reduzierte Anteil beschränkt. 1.Anwendung: In einer exakten Folge $o \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow o$ von abelschen Gruppen ist B genau dann komplementiert, wenn es A und C ist. 2.Anwendung: Jede komplementierte abelsche Gruppe ist Selbstkogenerator.- Theorem: Ein noetherscher Integritätsring ist genau dann dedekindsch, wenn jeder komplementierte Modul direkte Summe von unzerlegbaren Moduln ist.

(5) besteht im wesentlichen aus einem Satz: Über das Liften von Idempotenten in Endomorphismenringen (mit Hilfe von Komplementen im Modul). Er liefert eine Reihe von äquivalenten Aussagen, die sich auf verschiedene, in der Literaur separat bewiesene Sätze anwenden lassen. Speziell erlaubt er eine Charakterisierung der selbstprojektiven Moduln, deren Endomorphismenring F-semiperfekt ist. Weiter liefert er ein Kriterium dafür, daß in einem Modul Komplemente bereits direkte Summanden sind. Schließlich wird das klassische Ergebnis, daß in einem Ring mit Nil-Radikal Idempotente liftbar sind, auf einem Weg bewiesen, auf dem man sieht "woher beim Liften das Idempotent kommt".

In (6) werden die selbstprojektiven Moduln charakterisiert, deren Endomorphismenring semiperfekt ist: Für einen (SP1,SP2)-Modul ist $S = \mathrm{End}(M)$ genau dann semiperfekt, wenn M komplementiert ist und der Maximalbedingung für direkte Summanden genügt. Dabei werden sog. "semizornsche" Moduln M eingeführt, die im Falle $M = R_R$ eine Verallgemeinerung der bekannten zornschen Ringe sind und die semiperfekten und die selbstinjektiven Ringe umfassen. Grundlegend ist eine Proposition über den Zusammenhang zwischen semizornschen und komplementierten Moduln, sowie das Ergebnis, daß ein selbstprojektiver Modul genau dann semizornsch ist, wenn es sein Endomorphismenring ist.

Die Anregung zur Arbeit gab Herr Prof. Kasch : Ich danke ihm für das mir geschenkte Vertrauen und für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse.

1. Selbstprojektive Moduln

R ist im Folgenden stets ein assoziativer, unitärer Ring, M,N,X,Y,... unitäre Rechts-R-Moduln. M heißt X-projektiv, wenn für jeden Epimorphismus $X \twoheadrightarrow Y$ die Abbildung $\mathrm{Hom}(M,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,Y)$ surjektiv ist. Ist X-projektiv M und exakt $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$, so ist M auch X'- und X''-projektiv. Ist M X'- und X''-projektiv, so ist es auch $X' \oplus X''$-projektiv (siehe hierzu [19]). M heißt selbstprojektiv, wenn es M-projektiv ist.
Seien U,V Untermoduln von M. V heißt (Additions-) Komplement von U in M [7], wenn es minimales Element in der Menge $\{T \mid T + U = M\}$ ist. Das ist äquivalent damit, daß $V + U = M$ gilt und $V \cap U$ klein in V ist, d.h. die kanonische Abbildung $V \longrightarrow M/U$ wesentlicher Epimorphismus ist.
Es sei $S = \mathrm{End}(M_R)$ und $\alpha, \beta, ..$ seine Elemente. Zwischen den Rechtsidealen I von S_S und den Untermoduln U von M_R besteht die Korrespondenz $s(U) = \{\alpha \mid \mathrm{Bi}\alpha \subset U\}$ und $d(I) = \sum\{\mathrm{Bi}\alpha \mid \alpha \in I\}$. Es gilt $sd(I) \supset I$ sowie $ds(U) \subset U$, und $ds(U) = U$ genau dann, wenn M Generator für U ist. Klar ist $d(I + J) = d(I) + d(J)$ sowie $s(U \cap V) = s(U) \cap s(V)$ (sogar für beliebige Summen bzw. Durchschnitte, weil s,d ein Paar adjungierter Funktoren zwischen den Ordnungskategorien $\mathcal{L}(S_S)$ und $\mathcal{L}(M_R)$ ist).
Die Frage, wann $sd(I) = I$, wird im Folgenden untersucht. Es gilt z.B., wenn I ein Annullatorrechtsideal ist, denn für jedes Rechtsideal I gilt: $I \subset sd(I) \subset \varrho\lambda(I)$ wobei ϱ, λ die Annullatoren im Ring S sind. Noch spezieller gilt: $I \subset^{\bullet} S \Longleftrightarrow sd(I) = I \wedge d(I) \subset^{\bullet} M$, ebenso: $U \subset^{\bullet} M \Longleftrightarrow ds(U) = U \wedge s(U) \subset^{\bullet} S$.

(1.1) **Proposition:** Sei M_R selbstprojektiv, $S = \mathrm{End}(M_R)$. Dann gilt

- (a) $s(U + V) = s(U) + s(V)$ für alle $U,V \subset M$
- (b) $sd(I) = I$ für alle endlich erzeugten $I \subset S$
- (c) Ist M zusätzlich endlich erzeugt, so ist s mit beliebigen Summen vertauschbar und (b) gilt für alle Rechtsideale .

Beweis: (a): Sei $\alpha \in s(U + V)$, d.h. $\mathrm{Bi}\alpha \subset U + V$. Die dadurch induzierte Abbildung $f : M \longrightarrow U{+}V \longrightarrow (U{+}V)/V$ mit $fx = \mathrm{cl}(\alpha x)$ läßt sich über den Epimorphismus $g : U \twoheadrightarrow (U{+}V)/V$ faktorisieren, d.h. man erhält ein $\beta \in S$ mit $\mathrm{Bi}\beta \subset U$ und $\mathrm{Bi}(\alpha-\beta) \subset V$ und damit $\alpha = \beta + (\alpha-\beta) \in s(U) + s(V)$. (b): Aus dem soeben Bewiesenen folgt $sd(I + J) = sd(I) + sd(J)$ für alle Rechtsideale I,J in S. Es muß also (b) nur für zyklische Rechtsideale gezeigt werden: Aus $\beta \in sd(\alpha S)$ folgt $\mathrm{Bi}\beta \subset \mathrm{Bi}\alpha$, also wegen selbstprojektiv $\beta = \alpha\gamma$ für ein $\gamma \in S$, d.h. aber $\beta \in \alpha S$. (c): Ist nun M endlich erzeugt und $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ eine Familie von Untermoduln und $\alpha \in s(\sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$, so folgt $\mathrm{Bi}\alpha \subset U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_n}$, also nach (a) $\alpha \in s(U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_n}) = s(U_{\lambda_1}) + \dots + s(U_{\lambda_n}) \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} s(U_\lambda)$. Die

Aussage (b) für beliebige Rechtsideale folgt nun sofort aus $I = \sum_{\alpha \in I} \alpha S$.(Ist bei einem Modul s mit beliebigen Summen vertauschbar, so ist er notwendig endlich erzeugt. Auch (b) läßt sich i.A. nicht für alle Rechtsideale zeigen, etwa bei einem halbeinfachen, nicht endlich erzeugbaren Modul)

(1.2) Folgerung: Ist M_R selbstprojektiv und noethersch, so ist der Endomorphismenring S rechtsnoethersch, denn dann hat man die ordnungstreue Injektion $d : \mathcal{L}(S_S) \longrightarrow \mathcal{L}(M_R)$.

(1.3) Lemma: Für einen Modul M sind äquivalent

(SP1) $\quad Bi\beta \subset Bi\alpha \Rightarrow \exists \gamma$ mit $\beta = \alpha\gamma$

(i) $\quad sd(I) = I$ für alle zyklischen Rechtsideale $I \subset S$

(ii) $\quad$ Für jedes N, das in M einbettbar ist, läßt sich das Diagramm vervollständigen:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] \\ M \arrow[r, two heads, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

Erfüllt ein Modul M diese äquivalenten Bedingungen, so gilt weiter

(iii) $\quad Bi\alpha \subset^{\oplus} M \Rightarrow Ke\alpha \subset^{\oplus} M$

(iv) $\quad U \subset M \wedge M/U$ bis auf Isom. direkter Summand von $M \rightarrow U \subset^{\oplus} M$

(v) $\quad A \subset^{\oplus} M \wedge B \subset^{\oplus} M \wedge A + B = M \Rightarrow A \cap B \subset^{\oplus} M$

Beweis: Wegen $Bi\beta \subset Bi\alpha \Leftrightarrow \beta \in sd(\alpha S)$ ist die Äquivalenz von (SP1) und (i) klar. (SP1 $\rightarrow$ ii): Seien g,f wie oben vorgegeben und $h : N \hookrightarrow M$ eine Einbettung von N in M. Dann sind $\alpha := hg$ und $\beta := hf$ aus S mit $Bi\beta \subset Bi\alpha$, also $\beta = \alpha\gamma$ und damit $f = g\gamma$. (ii $\rightarrow$ SP1): klar. (ii $\rightarrow$ iii): Man hat einen zerfallenden Epimorphismus $f:M \longrightarrow Bi\alpha$, also zerfällt nach der Faktorisierung auch $\alpha':M \longrightarrow Bi\alpha$. (iii $\rightarrow$ iv): Man hat Abbildungen $j: M/U \longrightarrow M$ und $r:M \longrightarrow M/U$ mit $rj = 1$. Mit $\alpha := j\nu_U$ (ν_U die kan. Abb.) gilt $Ke\alpha = U$ und $Bi\alpha \subset^{\oplus} M$, also folgt die Behauptung. (iv $\rightarrow$ v): (Für selbstprojektive Moduln in [5] Prop. 1.3): Seien A,B wie angegeben. Insbesondere hat man einen Epimorphismus $f:M \longrightarrow B$ und damit $M/f^{-1}(A \cap B) \cong B/A \cap B \cong M/A$, sodaß nach (iv) folgt $f^{-1}(A \cap B) \subset^{\oplus} M$, also $A \cap B \subset^{\oplus} B$ und damit auch $A \cap B \subset^{\oplus} M$.

(1.4) Beispiel: Ist in S jedes zyklische Rechtsideal ein Annullatorideal (etwa wenn S regulär oder linksinjektiv), so ist nach den Bemerkungen vor Prop. 1.1 die Bedingung (SP1,i) erfüllt. Speziell ist $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{A}b$ ein (SP1)-Modul (aber nicht selbstprojektiv; siehe Lemma 1.6).

(1.5) Bemerkung: Alle Punkte lassen sich für selbstinjektive Moduln dualisieren. Insbesondere lautet (SI1): $Ke\alpha \subset Ke\beta \Rightarrow \exists \gamma$ mit $\beta = \gamma\alpha$, und (i) wird durch Annullatoren beschrieben.

(1.6) Lemma: Für einen Modul M sind äquivalent

(SP2) $A + B = M \Rightarrow \exists\, \alpha$ mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B$

(i) $A + B = M \Rightarrow s(A) + s(B) = S$

(ii) $A + B = M \Rightarrow$ der kan. Epim. $A \times B \longrightarrow M$ zerfällt.

Erfüllt ein Modul M diese äquivalenten Bedingungen, so gilt weiter

(iii) A, B gegenseitig Komplement in $M \Rightarrow M = A \oplus B$

(iv) $A + B = M \wedge A \subset^{\oplus} M \Rightarrow \exists\, B' \subset B$ mit $M = A \oplus B'$

(v) $A \subset^{\oplus} M \wedge B \subset^{\oplus} M \wedge A + B = M \Rightarrow A \cap B \subset^{\oplus} M$

(vi) $A + B = M \wedge N$ vollinvarianter Untermodul von $M \wedge A \cap B \subset N$
$\Rightarrow (A + N) \cap (B + N) = N$

(vii) $A + B = M \wedge N$ vollinvarianter Untermodul von M
$\Rightarrow (A \cap N) + (B \cap N) = N$.

Beweis: Die Äquivalenz von (SP2) und (i) ist leicht einzusehen, ebenso ist (ii → SP2) klar. (SP2 → ii): Die Abbildung $M \longrightarrow A \times B$ mit $x \longmapsto (\alpha x, x-\alpha x)$ ist ein Rechtsinverses. (ii → iii): (abweichend von [7] Satz 3): Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M/B \times M/A \\ M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

seien alle Pfeile die kanonischen Abbildungen. Es kommutiert, und weil A,B gegenseitig Komplemente sind, ist g wesentlich. Weil $\mathrm{Ke}\, f \subset \mathrm{Ke}\, g$ und $\mathrm{Ke}\, f \subset^{\oplus} A \times B$ (nach ii), folgt $\mathrm{Ke}\, f = o$, also $A \cap B = o$. (SP2 → iv): Sei $M = A \oplus X$ und $\varepsilon = i_X p_X$. Für jedes α ist dann idempotent $\delta := (1-(1-\varepsilon)\alpha)\varepsilon$ wegen $\delta\varepsilon = \delta$ und $\varepsilon\delta = \varepsilon$, außerdem $A = \mathrm{Ke}\delta$ und damit $M = A \oplus \mathrm{Bi}\delta$. Nun hat man nach Vor. speziell ein α mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B$, und dafür gilt $\varepsilon\alpha = o$, also $\delta = (1-\alpha)\varepsilon$ und damit $\mathrm{Bi}\delta \subset B$. (iv → v): Seien A,B wie angegeben. Nach (iv) gibt es $B' \subset B$ mit $A \oplus B' = M$ und ebenso $A' \subset A$ mit $A' \oplus B = M$. Mit dem modularen Gesetz zeigt man sofort $M = (A \cap B) \oplus (A'+B')$, also $A \cap B \subset^{\oplus} M$. (SP2 → vi): Seien A,B,N wie angegeben, α wie verlangt. Aus $x = a + n_1 = b + n_2$ mit $a \in A, b \in B$, $n_1, n_2 \in N$ folgt $a - \alpha a = (1-\alpha)a \in A \cap B$, ebenso $b-(1-\alpha)b = \alpha b \in A \cap B$, und damit $x = \alpha x + (1-\alpha)x = \alpha b + \alpha n_2 + (1-\alpha)a + (1-\alpha)n_1 \in N$. (SP2 → vii): klar.

(1.7) Beispiel: Jeder unzerlegbare Modul erfüllt die Bedingung (SP2,i), denn aus $A + B = M$ folgt $A = M$ oder $B = M$, also $s(A) = S$ oder $s(B) = S$. Speziell ist in $\mathcal{A}b$ die Prüfersche Gruppe $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ ein (SP2)-Modul (aber nicht selbstprojektiv, denn (SP1,iv) ist verletzt).

(1.8) Bemerkung: Alle Punkte lassen sich für selbstinjektive Moduln dualisieren. Weil hier aber wegen der Grothendieck-Bedingung noch das Zorn'sche Lemma zur Verfügung steht, erhält man noch mehr Äquivalenzen:

$$\text{(SI2)} \quad A,B \subset M \wedge A \cap B = o \rightarrow \exists\ \alpha \text{ mit } A \subset \mathrm{Ke}\alpha \text{ und } B \subset \mathrm{Ke}(1-\alpha)$$

mit $\text{(SI2')}\ A,B \subset M \wedge A \cap B = o \rightarrow \exists A',B' \subset M$ mit $A \subset A', B \subset B'$ und $A' \oplus B' = M$.

Klar folgt nämlich aus (SI2') die erste Bedingung. Zur Umkehrung hat man wie oben die Schlüsse (SI2 → i → ii → iii), wobei jetzt Durchschnitts-Komplemente stehen, d.h. maximale Elemente in $\{T \mid T \subset M \wedge T \cap U = o\}$. Das Diagramm zu (ii → iii) ist

$$\begin{tikzcd} M/A \times M/B & B \times A \arrow[l, "g"'] \arrow[dl] \\ M \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

wobei A und B gegenseitig Durchschnittskomplemente sind, also g ein wesentlicher Monomorphismus ist. Weil nach (ii) der Monomorphismus f zerfällt, folgt $\mathrm{Bi}\, f = M/A \times M/B$, also $A + B = M$. Aus (iii) folgt nun (SI2'), denn zu $A \cap B = o$ sei $B' \supset B$ Durchschnittskomplement von A und $A' \supset A$ Durchschnittskomplement von B' in M. Es folgt $A' \oplus B' = M$.

In diesem Fall läßt sich also (SI2) ohne den Endomorphismenring beschreiben, denn (SI2') oder auch (iii) ist allein eine Forderung an den Untermodulverband $\mathcal{L}(M)$.

(1.9) Lemma: Erfülle der Modul M die Bedingungen (SP1) und (SP2). Dann gilt

(a) U klein in $M \Leftrightarrow s(U) \subset \mathrm{Ra}(S)$

(b) $\alpha \in \mathrm{Ra}(S) \Leftrightarrow \mathrm{Bi}\alpha$ klein in M

Beweis: (a): Ist U klein in M und $\beta \in s(U)$, so gilt für alle $\varphi \in S$, daß $\mathrm{Bi}\,\beta\varphi$ klein in M ist, also $\mathrm{Bi}(1-\beta\varphi) = M$. Nach (SP1,iii) ist damit $1-\beta\varphi$ rechtsinvertierbar. Hat man umgekehrt $s(U) \subset \mathrm{Ra}(S)$ und $U + T = M$, also mit (SP2) ein α mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset U$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset T$, so folgt $\alpha \in \mathrm{Ra}(S)$ und damit $\mathrm{Bi}(1-\alpha) = M$. (b): (Für selbstprojektive Moduln siehe [10] Added in proof): Mit (SP1,i) gilt $s(\mathrm{Bi}\alpha) = sd(\alpha S) = \alpha S$, sodaß aus (a) alles folgt.

(1.10) Bemerkung: Der Zusammenhang zwischen (SI1), (SI2) und den Stetigkeitsbedingungen von Utumi [21] ist folgender: (SI1,iv) ist äquivalent mit (0.2) und aus (SI2,iii) folgt (0.1), wobei natürlich die Rechtsideale von R_R durch Untermoduln von M_R ersetzt sind. Gelten umgekehrt die Bedingungen (0.1) und (0.2), so folgt (SI2,iii): Sind A,B gegenseitig Durchschnittskomplemente in M, so sind sie nach (0.1) direkte Summanden, sodaß nach (0.2) = (SI1,iv) auch A + B direkter Summand in M ist. Weil A + B zusätzlich groß in M ist, folgt die

Im Folgenden soll untersucht werden, wann aus den beiden Bedingungen (SP1) und (SP2) bereits die Selbstprojektivität folgt. Grundlegend dafür und für die spätere Untersuchung von Komplementen ist das

(1.11) <u>Beispiel</u>: Seien I, J Rechtsideale in R mit $J^n \subset I \subsetneqq J$ für ein $n > 1$. Dann hat $M := R/I \times R/J$ zwei Untermoduln A, B mit

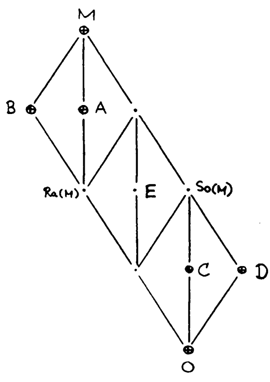
(i) A und B sind gegenseitig Komplemente

(ii) A und B sind direkte Summanden in M

(iii) $A \cap B$ ist kein direkter Summand in M .

<u>Beweis</u>: Seien zunächst I, J beliebig. Definiere $A = (1,o)R$, $B = (1,1)R$ und $C = (o,1)R$. Klar gilt $M = A \oplus C = A + B = B + C$ und $A \cap B = (I+J)/I \times o$, $B \cap C = o \times (I+J)/J$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß B genau dann Komplement von A ist, wenn es zu jedem $x \in J$ ein $y \in J$ gibt mit $x - xy + y \in I$. Seien nun I, J wie oben angegeben. Dann ist neben A auch B direkter Summand in M , also (ii) erfüllt. Es ist auch B Komplement von A, denn zu $x \in J$ wähle man $y = -(x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$. Wegen $A \subset^{\oplus} M$ folgt aus $B \cap A$ klein in B auch $A \cap B$ klein in A, also auch A Komplement von B, sodaß (i) erfüllt ist. Wäre schließlich $A \cap B \subset^{\oplus} M$, so folgte $A \cap B \subset^{\oplus} A$, also $A \cap B = o$, <u>Wid</u>.

Im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$, $I = (8)$, $J = (2)$ hat die abelsche Gruppe $M = \mathbb{Z}/(8) \times \mathbb{Z}/(2)$ folgenden Untergruppenverband:



(In (3.27) wird gezeigt, daß in torsionsfreien abelschen Gruppen der Durchschnitt zweier gegenseitiger Komplemente Null sein muß.)

(1.12) <u>Lemma</u>: Erfüllt eine abelsche Torsionsgruppe die Bedingung (SP1), so ist sie bereits selbstprojektiv .

<u>Beweis</u>: Es genügt (SP1, iv) . Als Vorbemerkung überzeugt man sich, daß (SP1,iv) sich auf direkte Summanden vererbt und nach Beispiel (1.11) die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m)$ für $n \neq m$ <u>nicht</u> (SP1,iv) erfüllt. Sei nun M torsionsvoll mit (SP1,iv): M ist reduziert, denn sonst folgte $\mathbb{Z}(p^{\infty}) \subset^{\oplus} M$, <u>Wid</u>. Sei nun $B_{(p)}$ eine p-Basis-Untergruppe von M_p , der p-Komponente von M (siehe [3] § 32). Dann hat $B_{(p)}$ keinen direkten Summanden der Form $\mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m)$

mit $n \neq m$ (ein solcher wäre beschränkter, reiner Untermodul von M, also direkter Summand in M), sodaß folgt $B_{(p)} = \bigoplus_{i\in I} X_i$ mit $X_i \cong \mathbb{Z}/(p^n)$ für alle $i \in I$ und ein festes $n \geq 1$. Aus der Beschränktheit folgt weiter $B_{(p)} \subset^{\oplus} M_p$, und weil M_p reduziert und $M_p/B_{(p)}$ teilbar sogar $B_{(p)} = M_p$. Die p-Komponenten von M sind also direkte Summen von zyklischen Gruppen der gleichen Ordnung, und aus der Charakterisierung der selbstprojektiven abelschen Gruppen durch Fuchs-Rangaswamy in [4] folgt daraus die Selbstprojektivität von M.

Ein Modul M heißt bekanntlich rein-projektiv, wenn für jeden Epimorphismus $g: X \twoheadrightarrow Y$, dessen Kern rein in X ist, die Abbildung $\mathrm{Hom}(M,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,Y)$ surjektiv ist. Nach Maranda (vgl. [3] § 3o) sind die rein-projektiven abelschen Gruppen genau die direkten Summen von zyklischen Gruppen. Damit läßt sich der Zusammenhang zwischen "rein-projektiv" und "selbstprojektiv" darstellen: Die Bedingung

(S) $\quad A \subset^{\oplus} M \wedge B \subset^{\oplus} M \wedge A + B = M \implies A \cap B \subset^{\oplus} M$

wurde sowohl aus (SP1) als auch aus (SP2) abgeleitet, und mit ihr erhält man:

(1.13) <u>Proposition</u>: Für eine abelsche Gruppe sind äquivalent

(a) M ist selbstprojektiv

(b) M ist rein-projektiv und genügt der Bedingung (S)

<u>Beweis</u>: (a → b): Nach [4] ist jede selbstprojektive Gruppe eine direkte Summe von zyklischen Gruppen, also rein-projektiv. (S) ist klar. (b → a): Als Vorbemerkung überzeugt man sich, daß (S) sich auf direkte Summanden vererbt (hat man $X \oplus Y = M$, $A \subset^{\oplus} X$, $B \subset^{\oplus} X$, $A + B = X$, so definiere man $\tilde{A} = A + Y$, und damit gilt $\tilde{A} \subset^{\oplus} M$, $B \subset^{\oplus} M$, $\tilde{A} + B = M$, also nach Vor. $\tilde{A} \cap B \subset^{\oplus} M$. Es folgt $\tilde{A} \cap B = A \cap B \subset^{\oplus} B$, also auch direkter Summand in X) und für $n > 1$ die abelsche Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(n)$ die Bedingung (S) <u>nicht</u> erfüllt ($A := (1,0)\mathbb{Z}$ und $B := (1,1)\mathbb{Z}$ sind beide direkte Summanden, nicht aber $A \cap B = (n) \times 0$). Sei nun $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit (S), alle M_i zyklisch und direkt unzerlegbar. Gibt es ein $i_0 \in I$ mit $M_{i_0} \cong \mathbb{Z}$, so sind nach der Vorbemerkung alle M_i isomorph zu $\mathbb{Z}$, also M frei. Ist aber M Torsionsgruppe, so muß nach Beispiel 1.11 für jede p-Komponente gelten: $M_p \cong \bigoplus_{\omega_p} \mathbb{Z}/(p^n)$ für ein festes $n \geq 1$, sodaß wieder nach [4] M selbstprojektiv ist.

Die Bedingung (S) erlaubt auch, für rein-projektive Gruppen das Problem 9 von Fuchs in [3] zu lösen, nämlich die Gruppen zu charakterisieren, in denen der Durchschnitt von zwei direkten Summanden wieder direkter Summand ist:

(1.14) <u>Satz</u>: Für eine rein-projektive abelsche Gruppe M sind äquivalent

(a) Der Durchschnitt von zwei direkten Summanden in M ist wieder direkter Summand in M

(b) Jede Untergruppe von M ist selbstprojektiv

(c) Jede Untergruppe von M genügt der Bedingung (S)

Beweis: (b → c): klar nach Lemma 1.3 oder 1.6 . (c → a): gilt allgemein für Moduln, denn $A \subset^{\oplus} M$ und $B \subset^{\oplus} M \Rightarrow U := A + B$ hat nach Vor. die Eigenschaft (S). Weil auch $A \subset^{\oplus} U$ und $B \subset^{\oplus} U$, folgt also $A \cap B \subset^{\oplus} U$ und damit $A \cap B \subset^{\oplus} B \subset^{\oplus} M$. (a → b): Als Vorbemerkung überzeugt man sich, daß (a) sich auf direkte Summanden vererbt und von der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^n)$ für $n > 1$ nicht erfüllt wird ($A := (o,1)\mathbb{Z}$ und $B := (p,1)\mathbb{Z}$ sind direkte Summanden, nicht aber $A \cap B = (o,p^{n-1})\mathbb{Z}$). Sei nun M rein-projektiv mit (a) . Es folgt (S), also nach Prop. 1.13 selbstprojektiv M. Ist M frei, so auch jede Untergruppe, und (b) ist gezeigt. Ist M nicht frei, so ist es nach [4] Torsionsgruppe, und jede p-Komponente ist von der Form $M_p \cong \bigoplus_{m_p} \mathbb{Z}/(p^n)$ mit $n \geq 1$. Aus der Vorbemerkung folgt, daß $m_p \leq 1$ oder $n = 1$ sein muß, also M_p zyklisch oder halbeinfach ist. Sei nun zum Nachweis von (b) $U \subset M$: U ist torsionsvoll, und zur Selbstprojektivität muß nach [4] gezeigt werden, daß für alle p die p-Komponente U_p direkte Summe von isomorphen zyklischen Gruppen ist. Mit M_p ist nun aber auch $U_p \subset M_p$ zyklisch oder halbeinfach, also von der gewünschten Gestalt.

2. Komplemente

(2.1) <u>Lemma</u>: Sei V Komplement von U in M, $N = Ra(M)$. Dann gilt

(a) $N = (V + N) \cap (U + N) = (V \cap N) + (U \cap N)$

(a') $\overline{M} = \overline{V} \oplus \overline{U}$, wobei $\overline{M} = M/Ra(M)$

(b) $X \subset V \wedge X$ klein in $M \Rightarrow X$ klein in V

(b') $Ra(V) = V \cap Ra(M)$

(c) $Ra(M/U) = (Ra(M) + U)/U$

<u>Beweis</u>: (a): Die Aussage $(V + N) \cap (U + N) = N$ ist nach dem modularen Gesetz äquivalent mit $V \cap (U + N) \subset N$. Sei also $x \in V \cap (U + N)$ und $xR + T = M$: Wegen $x \in V$ folgt $xR + (T \cap V) = V$, also $xR + (T \cap V) + U = M$. Wegen $x = u + n$ mit $u \in U, n \in N$ folgt $nR + (T \cap V) + U = M$, also $(T \cap V) + U = M$. Wegen V Komplement von U in M folgt $T \cap V = V$, also $V \subset T$. Wegen $x \in V$ folgt $x \in T$ und damit $T = M$. Ergebnis: xR ist klein in M, d.h. $x \in N$. Um die zweite Gleichheit in (a) zu zeigen, schneide man die soeben bewiesene mit V : Aus $V \cap N = V \cap (U + N)$ folgt dann $(V \cap N) + U = (U + V) \cap (U + N) \supset N$, also $(V \cap N) + (U \cap N) = [(V \cap N) + U] \cap N = N$. (a'): klar. (b): Sei $X \subset V$, X klein in M und $X + T = V$. Es folgt $X + T + U = M$, also $T + U = M$, also, weil $T \subset V$, wegen Komplement schon $T = V$. (b'): folgt sofort aus (b) . (c): Weil $V \longrightarrow M/U$ ein wesentlicher Epimorphismus ist, gilt $Ra(M/U) = (Ra(V)+U)/U$. Aus (a) und (b') folgt nun $Ra(M) + U = (V \cap N) + U = Ra(V) + U$ und damit die Behauptung.

(2.2) <u>Beispiele</u>: Ein Modul heißt komplementiert, wenn jeder Untermodul ein Komplement hat. Jeder halbeinfache Modul, jeder artinsche Modul, jeder unzerlegbare Modul ist komplementiert. Inder Kategorie der abelschen Gruppen gilt:

$\mathbb{Z}$ ist nicht komplementiert (a')

$\mathbb{Q}$ ist nicht komplementiert (ist V Komplement von U in $\mathbb{Q}$, so folgt nach (b') $Ra(V) = V$, also $V \subset^{\oplus} \mathbb{Q}$ und daraus $U = \mathbb{Q}$ oder U klein in $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ hat aber echte Untergruppen, die nicht klein sind, also kein Komplement besitzen können)(vgl. auch (4.9, 3))

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist komplementiert (es ist Torsionsgruppe mit den unzerlegbaren p-Komponenten $\mathbb{Z}(p^{\infty})$, und diese Zerlegung genügt den Voraussetzungen des folgenden)

(2.3) <u>Lemma</u>: Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ derart zerlegt, daß für alle Untermoduln U gilt

(✱) $U = \bigoplus_{i \in I} (U \cap M_i)$.

Sind dann alle M_i , $i \in I$ komplementiert, so auch M .

<u>Beweis</u>: Die Bedingung $(*)$ ist offenbar äquivalent damit, daß für alle $x \in M$ und $i \in I$ gilt: $p_i(x) \in xR$. Ist nun $U \subset M$ und V_i ein Komplement von $U \cap M_i$ in M_i für alle $i \in I$, so zeigt man mit Hilfe von $(*)$ sofort, daß $V := \sum_{i \in I} V_i$ ein Komplement von U in M ist.

(2.4) <u>Proposition</u>: Sei kommutativ das Diagramm und f, h Epimorphismen. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, two heads, "f"'] & M \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, two heads, "h"'] & N \end{tikzcd}$$

(a) Ist h wesentlich und V Komplement von $\mathrm{Ke}\, f$ in X, so ist $k(V)$ Komplement von $\mathrm{Ke}\, g$ in M.

(b) Ist k monomorph, $V + \mathrm{Ke}\, f = X$ und $k(V)$ Komplement von $\mathrm{Ke}\, g$ in M, so ist h wesentlich und V Komplement von $\mathrm{Ke}\, f$ in X.

<u>Beweis</u>: (a): Aus $N = hf(X) = hf(V) = gk(V)$ folgt $M = g^{-1}(N) = k(V) + \mathrm{Ke}\, g$. Es ist $k(V)$ sogar minimal, denn aus $M = T + \mathrm{Ke}\, g$ mit $T \subset k(V)$ folgt $T \subset k(k^{-1}(T) \cap V)$, also $N = g(M) = g(T) \subset gk(k^{-1}(T) \cap V) = hf(k^{-1}(T) \cap V)$ und damit $Y = h^{-1}(N) = f(k^{-1}(T) \cap V) + \mathrm{Ke}\, h$. Weil $\mathrm{Ke}\, h$ klein in Y ist, folgt $Y = f(k^{-1}(T) \cap V)$, also $X = f^{-1}(Y) = k^{-1}(T) \cap V + \mathrm{Ke}\, f$. Es folgt $k^{-1}(T) \cap V = V$ und damit $k(V) \subset T$, also $T = k(V)$. (b): Mit ähnlichen Schlüssen wie eben zeigt man: $Y = W + \mathrm{Ke}\, h \Rightarrow M = k(f^{-1}(W) \cap V) + \mathrm{Ke}\, g \Rightarrow f^{-1}(W) \cap V = V \Rightarrow Y = f(V) \subset W$. Außerdem ist V Komplement von $\mathrm{Ke}\, f$, denn $X = S + \mathrm{Ke}\, f$ mit $S \subset V \Rightarrow M = k(S) + \mathrm{Ke}\, g \Rightarrow S = V$.

(2.5) <u>Folgerung</u>: Ist epimorph $g: M \twoheadrightarrow N$, so gilt

(i) $\mathrm{Ke}\, g$ hat genau dann ein Komplement in M, wenn es eine Abbildung $k: X \to M$ gibt derart, daß $gk: X \to M \to N$ ein wesentlicher Epimorphismus ist.

(ii) Hat N eine projektive Hülle, so hat $\mathrm{Ke}\, g$ ein Komplement in M.

Ein Modul M ist genau dann komplementiert, wenn es zu jedem Epimorphismus $M \twoheadrightarrow N$ einen Morphismus $X \to M$ gibt derart, daß $X \to M \to N$ ein wesentlicher Epimorphismus ist.

(2.6) <u>Folgerung</u>: Jeder Faktormodul eines komplementierten Moduls ist wieder komplementiert (vgl. Theorem 1.12 in [13] für "perfekte" Moduln). Spezieller gilt: $X \subset U \subset M$, V Komplement von U in M
$\Rightarrow (V + X)/X$ ist Komplement von U/X in M/X,
man wende nämlich Prop. 2.4 (a) auf das Diagramm an:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M/X \arrow[d] \\ M/U \arrow[r, equal] & M/U \end{tikzcd}$$

(2.7) Bemerkung: Komplementiertheit läßt sich über wesentliche Epimorphismen nicht "hochheben", z.B. ist $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein wesentlicher Epim. mit komplementiertem Ziel, aber die Quelle ist nicht komplementiert. Ebenso gibt es semilokale Ringe, die nicht semiperfekt sind. Eine abgeschwächte Eigenschaft jedoch überträgt sich: Nennt man einen Modul schwach komplementiert, wenn es zu jedem $U \subset M$ ein $V \subset M$ gibt mit $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M, so zeigt man leicht, daß bei einem wesentlichen Epimorphismus mit dem Ziel auch die Quelle schwach komplementiert ist. Speziell ist also $\mathbb{Q}$ schwach komplementiert, ebenso jeder semilokale Ring; und z.B. auch jeder halbartinsche Modul M_R mit kleinem Radikal über einem rechtsnoetherschen Ring R (denn der Radikalfaktormodul ist halbeinfach).

Zur Untersuchung der Menge der Komplemente zu einem festen $U \subset M$ dient

(2.8) Folgerung: Ist V Komplement von U in M und $\alpha \in S = \mathrm{End}(M_R)$ mit $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U$, so ist auch $\alpha(V)$ Komplement von U in M.

Bew:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/U \arrow[r, dashed, "\cong"'] & M/U \end{tikzcd}$$

(2.9) Lemma: Genüge M der Bedingung (SP2) aus 1.6. Dann gilt

(i) $W + U = M \wedge U$ hat Komplement in $M \Longrightarrow U$ hat Komplement in M, das in W enthalten ist

(ii) $W + U = M \wedge W$ vollinvariant $\Longrightarrow$ Jedes Komplement von U in M ist in W enthalten

(iii) V, V' Komplemente von U in $M \Longrightarrow \exists \alpha$ mit $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U \wedge V' = \alpha(V)$

(iv) V, V' Komplemente von U in M und $V \subset^{\oplus} M$ $\Longrightarrow V' \subset^{\oplus} M \wedge V' \cong V$

Beweis: (i): Wegen (SP2) gibt es ein α mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset W$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U$. Ist nun V Komplement von U in M, so ist nach (2.8) auch $\alpha(V)$ ein Komplement von U in M, das außerdem in W enthalten ist. (ii): Sei V Komplement von U in M. Wegen (SP2) gibt es ein α mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset V$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U$. Aus $W + U = M$ folgt jetzt $\alpha(W) + U = M$, also wegen Komplement $\alpha(W) = V$ und wegen der Vollinvarianz $V \subset W$. (iii): Zu $V' + U = M$ gibt es α mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset V'$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U$. Mit V ist nach (2.8) auch $\alpha(V)$ Komplement von U in M, also $\alpha(V) = V'$. (iv): Seien V, V' wie angegeben. Nach (SP2,iv) gibt es ein $U' \subset U$ mit $V \oplus U' = M$. Es folgt $V' + U' = M$, denn es ist $V \cap U + (U' + V') = V' + [(U' + V) \cap U] = V' + U = M$ und $V \cap U$ ist klein in M. Wieder nach (SP2,iv) gibt es ein $V'' \subset V'$ mit $V'' \oplus U' = M$. Nun ist V' auch Komplement von U', also folgt $V' = V''$. Aus $V \oplus U' = M = V' \oplus U'$ folgt noch $V \cong V'$.

(2.10) <u>Bemerkungen</u>: Zu (i): Ist M komplementiert mit (SP2), so gibt es für jedes Paar (A,B) mit $A + B = M$ ein $A' \subset A$ derart, daß A' Komplement von B in M ist. Ein Modul mit dieser letzten Eigenschaft heißt in [5] supplementiert. Für supplementierte Moduln läßt sich die Bedingung (SP2) allein durch den Untermodulverband $\mathcal{L}(M)$ beschreiben, nämlich durch (SP2') oder (SP2,iii) in (1.8), weil sich jetzt alle dort durchgeführten Schritte dualisieren lassen. Zu (ii): In einem kommutativen Ring ist jedes Ideal vollinvariant, also sind Komplemente eindeutig bestimmt (und wie in 2.15 gezeigt wird, schon direkte Summanden). Zu (iii): Zusammen mit (2.8) hat man also in (SP2)-Moduln: Ist V Komplement von U in M, so ist $\{X \mid X \text{ Komplement von } U\} = \{\alpha(V) \mid \alpha \in S \wedge \mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset U\}$. Zu (iv): Im Beispiel (1.11) mit $R = \mathbb{Z}$ sind B und E beide Komplemente von A, aber E ist kein direkter Summand und $B \not\cong E$.

Ist $V \subset M$, so heißt V Komplement in M, wenn es ein $U \subset M$ gibt derart, daß V Komplement von U in M ist. Jeder direkte Summand ist Komplement, die Umkehrung gilt jedoch i.A. nicht (1.11). Sie soll im Folgenden untersucht werden. Einige bekannte Eigenschaften von direkten Summanden übertragen sich noch auf Komplemente (siehe auch 2.1 b,b'):

(2.11) <u>Lemma</u>: Seien $A \subset B \subset C$. Dann gilt

(i) A Komplement in B $\wedge$ B Komplement in C $\Rightarrow$ A Komplement in C

(ii) A Komplement in C $\Rightarrow$ A Komplement in B

(iii) B Komplement in C $\Rightarrow$ B/A Komplement in C/A

(iv) A Komplement in C $\wedge$ B/A Komplement in C/A $\Rightarrow$ B Komplement in C

<u>Beweis</u>: (i): Ist A Komplement von U_1 in B und B Komplement von U_2 in C, so ist A Komplement von $U_1 + U_2$ in C. (ii): Ist A Komplement von U in C, so ist A Komplement von $U \cap B$ in B. (iii): Ist B Komplement von U in C, so ist B/A Komplement von $(U + A)/A$ in C/A. (iv): Ist A Komplement von U_1 in C und B/A Komplement von U_2/A in C/A mit $A \subset U_2 \subset C$, so ist B Komplement von $U_1 \cap U_2$ in C.

Nur für (iv) soll die Behauptung bewiesen werden: Klar ist $B + (U_1 \cap U_2) = B + A + (U_1 \cap U_2) = B + [(A + U_1) \cap U_2] = B + U_2 = C$. Zur Minimalität sei $X \subset B$ mit $X + (U_1 \cap U_2) = C$: Aus $(X \cap U_1) + U_2 = \{(X + [U_1 \cap U_2]) \cap U_1\} + U_2 = U_1 + U_2 = U_1 + A + U_2 = C + U_2 = C$ folgt, weil B/A Komplement von U_2/A in C/A ist, daß $(X \cap U_1) + A = B$. Aus $(X \cap A) + U_1 = \{(A + [X \cap U_1]) \cap X\} + U_1 = X + U_1 = C$ folgt, weil A Komplement von U_1 in C ist, daß $X \cap A = A$, also $X = X + A = B$.

(2.12) <u>Satz</u>: Erfüllt M eine der folgenden Bedingungen, so ist jedes Komplement in M bereits direkter Summand in M :

(a) M ist radikalfrei

(b) M genügt der Bed. (SP2) und der Maximalbed. für Untermoduln, die Kern eines Endomorphismus sind

(c) M genügt der Bed. (SP2) und der Minimalbed. für Untermoduln, die Kern (Bild) eines Endomorphismus sind

(d) M genügt der Bed. (SP2) und für jeden Endomorphismus α gilt: $\mathrm{Ke}\alpha \subset^{\oplus} M$

(e) M genügt der Bed. (SP2) und ist komplementiert .

<u>Beweis</u>: (a): klar nach (2.1,a'). (b): (Für selbstprojektive Moduln vgl. in [13] Remark p. 92): Sei V Komplement von U in M und $\gamma \in S = \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\gamma \subset V$ und $\mathrm{Bi}(1-\gamma) \subset U$. Man verifiziert der Reihe nach: $\mathrm{Bi}\ \gamma^n = V$ für alle $n \geq 1$, $\mathrm{Ke}\ \gamma^n \subset \mathrm{Bi}(1-\gamma)$ für alle $n \geq 1$, $V + \mathrm{Ke}\ \gamma = M$. Genügt nun M der Maximalbed. für Endomorphismenkerne, so wird die Folge $\mathrm{Ke}\gamma \subset \mathrm{Ke}\gamma^2 \subset \mathrm{Ke}\gamma^3 \subset \ldots \subset U$ stationär, und aus $\mathrm{Ke}\gamma^n = \mathrm{Ke}\gamma^{n+1}$ folgt $\mathrm{Bi}\gamma^n \cap \mathrm{Ke}\gamma = o$, also $V \oplus \mathrm{Ke}\gamma = M$. (c): Seien V, U, γ wie eben. Dann ist die Menge $\{X \mid X \subset U \wedge V + X = M \wedge X$ ist Kern (Bild) eines Endomorphismus$\}$ nicht leer, hat also nach Vor. ein minimales Element U' . U' ist Komplement von V in M, denn ein $U'' \subsetneqq U'$ mit $V + U'' = M$ führt zum Widerspruch: Es wäre V dann Komplement von U" , sodaß ein γ'' existierte mit $\mathrm{Bi}\ \gamma'' \subset V$ und $\mathrm{Bi}(1-\gamma'') \subset U''$, also $V + X = M$ mit $X := \mathrm{Ke}\ \gamma''$ (bzw. $\mathrm{Bi}(1-\gamma'')$) und $X \subsetneqq U'$. - Es sind also V und U' gegenseitig Komplemente, sodaß mit (SP2,iii) folgt: $V \oplus U' = M$. (d): Seien V, U, γ wie in (b). Weil nach Vor. $\mathrm{Ke}\gamma \subset^{\oplus} M$, folgt aus $V \cap \mathrm{Ke}\gamma$ klein in V sofort $\mathrm{Ke}\gamma \cap V$ klein in $\mathrm{Ke}\gamma$, sodaß V und $\mathrm{Ke}\gamma$ gegenseitig Komplemente sind. Mit (SP2,iii) folgt: $V \oplus \mathrm{Ke}\gamma = M$. (e): Sei V Komplement von U in M. Wegen komplementiert hat auch V ein Komplement W , und es folgt, daß V und W gegenseitig Komplemente sind , also wie eben $M = V \oplus W$.

(2.13) <u>Folgerung</u>: Ist der Ring R rechtshereditär, so hat jeder projektive Modul die Eigenschaft, daß jedes Komplement bereits direkter Summand ist, denn es ist (d) erfüllt.
(Ist R zusätzlich integer, also dedekindsch, so hat auch jeder injektive Modul die genannte Eigenschaft, denn für einen Körper ist es klar, und für einen echten Dedekind-Ring fallen die Begriffe "Injektiv" und "Radikalvoll" zusammen (Satz 6.1 in [16]), sodaß aus (2.1,b') folgt $\mathrm{Ra}(V) = V$, also V injektiv und damit $V \subset^{\oplus} M$.)

In selbstprojektiven Moduln lassen sich die Komplemente als Bilder bestimmter Endomorphismen charakterisieren:

(2.14) <u>Lemma</u>: Genüge M den Bedingungen (SP1) und (SP2). Dann sind äquivalent

(i) V ist Komplement in M

(ii) $\exists\ \gamma, \delta \in S = \mathrm{End}(M)$ mit $V = \mathrm{Bi}\gamma,\ \gamma = \gamma^2\delta,\ \gamma^2 - \gamma \in \mathrm{Ra}(S)$.

<u>Beweis</u>: (i → ii): Wegen (SP2) gibt es ein $\gamma \in S$ mit $Bi\gamma \subset V$ und $Bi(1-\gamma) \subset U$, wenn V Komplement von U in M ist. Wie oben folgt $Bi\,\gamma^n = V$ für alle $n \geqslant 1$, sodaß speziell zu $Bi\gamma = Bi\gamma^2$ nach (SP1) ein δ existiert mit $\gamma = \gamma^2\delta$. Aus $Bi(\gamma-\gamma^2) \subset V \cap U$ klein in M folgt noch nach (1.9), daß $\gamma - \gamma^2 \in Ra(S)$.
(ii → i): Seien γ, δ wie angegeben. Klar ist $V + Bi(1-\gamma) = M$, und es wird behauptet, daß V Komplement von $Bi(1-\gamma)$ in M ist, d.h. $V \cap Bi(1-\gamma)$ klein in V ist:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & M \arrow[d, phantom, "\cup"] \\ & Bi\gamma \end{tikzcd}$$

Aus $\gamma^2 - \gamma \in Ra(S)$ folgt $\gamma - \gamma\delta \in Ra(S)$, also $Bi(\gamma - \gamma\delta)$ klein in M. f erhält kleine Untermoduln, also ist $f(\,Bi(\gamma - \gamma\delta)\,) = Bi(\gamma - \gamma^2) = Bi\gamma \cap Bi(1-\gamma)$ klein in $Bi\gamma$. (Weil auch $Bi\gamma + Ke\gamma = M$ und $Ke\gamma \subset Bi(1-\gamma)$, ist V auch noch Komplement von $Ke\gamma$ in M.)

(2.15) <u>Folgerung</u>: Ist S zusätzlich kommutativ (es genügt $\alpha\beta = o \Rightarrow \beta\alpha = o$), so ist jedes Komplement in M bereits direkter Summand, denn aus $\gamma = \gamma^2\delta$, d.h. $\gamma(1 - \gamma\delta) = o$, folgt dann $(1 - \gamma\delta)\gamma = o$, also $\gamma = \gamma\delta\gamma$ regulär in S, und damit $V = Bi\gamma \subset^{\oplus} M$.

(2.16) <u>Bemerkung</u>: In (5.3) wird gezeigt, daß in einem (SP1,SP2)-Modul auch dann jedes Komplement bereits direkter Summand ist, wenn sich Idempotente in S modulo $Ra(S)$ liften lassen.

In selbstprojektiven Moduln erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Komplementen im Modul und denen im Endomorphismenring:
(2.17) <u>Lemma</u>: Genüge M den Bedingungen (SP1) und (SP2) und seien $V \subset M$, $I \subset S_S = End(M)$. Dann gilt

(a) V Komplement in M $\Longleftrightarrow$ $s(V)$ Komplement in S_S $\wedge$ $ds(V) = V$

(b) I Komplement in S_S $\Longleftrightarrow$ $d(I)$ Komplement in M $\wedge$ $sd(I) = I$.

<u>Beweis</u>: (a): Sei V Komplement von U in M. Nach (SP2) folgt $s(V) + s(U) = S$, und die Anwendung von d liefert $ds(V) = V$ (weil V minimal). Zum Nachweis der Minimalität von $s(V)$ sei zyklisch $I \subset s(V)$ mit $I + s(U) = S$: Mittels d erhält man (V minimal) $d(I) = V$, also $sd(I) = s(V)$, und wegen (SP1) auch noch $I = sd(I)$. - Ist umgekehrt $ds(V) = V$ und $s(V)$ Komplement eines zyklischen $I \subset S_S$, so wird behauptet: V ist Komplement von $d(I)$ in M. Die Summe ist klar, und aus $X \subset V$ mit $X + d(I) = M$ folgt nach (SP1) und (SP2) sofort $s(X) + I = S$, also $s(X) = s(V)$ und damit $ds(X) = V$, also $X = V$.
(b): Ebenso.

3. Koabgeschlossene Untermoduln

Ein Untermodul $V \subset M$ heißt bekanntlich abgeschlossen in M, wenn er keine echte wesentliche Erweiterung in M hat, d.h. wenn aus $V \subsetneqq X \subset M$ folgt: V nicht groß in X. Dual wird in [5] eingeführt:

(3.1) <u>Definition</u>: $V \subset M$ heißt <u>koabgeschlossen</u> in M, wenn aus $X \subsetneqq V$ folgt: V/X nicht klein in M/X.

(3.2) <u>Beispiele</u>: Jedes Komplement in M ist koabgeschlossen in M, denn ist V Komplement von U in M und $X \subsetneqq V$, so folgt $X + U \neq M$, aber $V/X + (X + U)/X = M/X$, also V/X nicht klein in M/X.
In einem kommutativen Ring ist jedes reine Ideal koabgeschlossen, denn $X \subsetneqq V$ $\Rightarrow$ zu $X \not\ni v \in V$ existiert wegen rein ein $v' \in V$ mit $v'v = v$, und es folgt $V + (1-v')R = R$, aber $X + (1-v')R \neq R$, also V/X nicht klein in R/X.

Jedes koabgeschlossene Ideal $V \subset R$ ist idempotent, denn aus $V + T = R$ folgt $V^2 + T = R$. In einem kommutativen, noetherschen Ring ist also jedes koabgeschlossene Ideal bereits direkter Summand.

(3.3) <u>Proposition</u>: Für einen Modul M_R sind äquivalent

(i) Jeder Untermodul von M ist koabgeschlossen in M
(ii) Jeder Faktormodul von M ist radikalfrei
(iii) Jeder Untermodul von M ist gleich dem Durchschnitt der umfassenden maximalen
(iv) Jeder einfache Rechts-R-Modul ist M-injektiv

Ein Modul mit diesen Eigenschaften heiße ein <u>V-Modul</u>.

<u>Beweis</u>: Für R_R sind die Äquivalenzen (ii) bis (iv) bekannt ([18]), und R wird dann als Rechts-V-Ring bezeichnet.

(i) $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{V \subset M} \bigwedge\limits_{X \subsetneqq V}$ (V/X nicht klein in M/X) $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{X \subset M} \bigwedge\limits_{X \subsetneqq V \subset M}$ (V/X nicht klein in M/X) $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{X \subset M}$ (M/X radikalfrei) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Sei nun zum Nachweis von

(ii $\rightarrow$ iv) E ein einfacher Rechts-R-Modul und folgendes Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr] \arrow[dd, "0 \neq f"'] & M \arrow[dr, "\pi"] & \\
& \frac{U}{Ke\,f} \arrow[dl, "i"] & \frac{M}{Ke\,f} \arrow[l, dashed, "\subset"', "r"] \\
E & &
\end{tikzcd}$$

Nun ist $U/Ke\,f$ einfach, also direkter Summand im radikalfreien $M/Ke\,f$, sodaß $i \circ r \circ \pi$ eine Faktorisierung ist. (iv $\rightarrow$ iii): Sei $U \subset M$ und $U \not\ni x \in M$.

Dann ist $o \neq (U + xR)/U$ zyklisch, hat also einen Epimorphismus in einen einfachen Modul E. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U + xR \arrow[d] & \subset & M \arrow[ddll, dashed, "\varphi"] \\ (U + xR)/U \arrow[d, two heads] & & \\ E & & \end{tikzcd}$$

läßt sich nach Vor. vervollständigen, und es gilt dann $U \subset Ke\varphi \not\ni x$ mit $Ke\varphi$ maximal in M.

(3.4) <u>Folgerung</u>: Ein koabgeschlossener Untermodul ist i.A. kein Komplement: Sei R ein kommutativer regulärer Ring, der nicht halbeinfach ist. Nach (iii) ist R ein V-Ring, also jedes Ideal koabgeschlossen. Wegen $Ra(R) = o$ ist aber jedes Komplement bereits direkter Summand. (Im dualen Fall sind bekanntlich die abgeschlossenen Untermoduln genau die Durchschnitts-Komplemente, und ist in M jeder Untermodul abgeschlossen, so ist M bereits halbeinfach.)

(3.5) <u>Lemma</u>: (a) Ist M ein V-Modul, so auch jeder Faktor- und jeder Untermodul
(b) Jede direkte Summe von V-Moduln ist wieder ein V-Modul
(c) Ist G ein Generator in $\mathcal{M}_R$, der zugleich ein V-Modul ist, so ist jeder Rechts-R-Modul ein V-Modul (d.h. jeder Modul radikalfrei).

<u>Beweis</u>: Mit (3.3,iv) und folgenden bekannten Aussagen über relative Injektivität (siehe etwa [19]): Ist exakt $o \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow o$ und E M-injektiv, so ist es auch M'- und M''-injektiv. Ist $(M_i \mid i \in I)$ eine Familie von Moduln und E M_i-injektiv für alle $i \in I$, so ist E auch $\bigoplus_{i \in I} M_i$ - injektiv. Damit ist (a) und (b) bewiesen, und klar folgt daraus (c) ($\bigoplus G \twoheadrightarrow M$).

(3.6) <u>Bemerkung</u>: Jeder halbeinfache Modul ist ein V-Modul. Wie (3.4) zeigt, gilt die Umkehrung i.A. nicht. Für spezielle Ringe gilt sie: Ist R semilokal, so ist schon jeder radikalfreie, insbesondere jeder V-Modul halbeinfach. Auch über einem kommutativen, noetherschen Ring R ist jeder V-Modul halbeinfach: Ist ein zyklischer R-Modul $R/\mathfrak{a}$ V-Modul, so ist der Ring $R/\mathfrak{a}$ regulär und noethersch, also halbeinfach, sodaß auch der R-Modul $R/\mathfrak{a}$ halbeinfach ist. Mit (3.5,a) schließt man von zyklischen auf beliebige V-Moduln.

(3.7) <u>Proposition</u>: Für einen Modul M sind äquivalent

(i) Der Radikalfaktormodul $M/Ra(M)$ ist ein V-Modul

(ii) Für jeden Untermodul $U \subset M$ gilt: $Ra(M/U) = (Ra(M) + U)/U$.

Ein Modul mit diesen Eigenschaften heiße <u>gut</u>.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow \bigwedge_{Ra(M)\subset X\subset M} (X = \bigcap_{\substack{X\subset T\subsetneq M \\ max.}} T) \Leftrightarrow \bigwedge_{U\subset M} (Ra(M)+U = \bigcap_{\substack{U\subset T\subsetneq M \\ max.}} T) \Leftrightarrow$ (ii)

(3.8) Beispiele: Jeder radikalvolle oder komplementierte Modul ist gut ($M/Ra(M)$ ist Null bzw. halbeinfach) ; gut u. radikalfrei ist äquivalent mit V-Modul ; in der Kategorie der abelschen Gruppen ist $\mathbb{Q}$ gut, nicht jedoch die Untergruppe $\mathbb{Z}$; über einem Dedekind-Ring ist jeder Torsionsmodul gut, denn jeder radikalfreie Torsionsmodul ist halbeinfach (Sei $o \neq I \subsetneq R$ mit R/I radikalfrei : $I = \mathfrak{p}_1^{s_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{s_n} \Rightarrow R/I \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{p}_i^{s_i}$ und jedes $R/\mathfrak{p}_i^{s_i}$ ist radikalfrei, also $s_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq n \Rightarrow R/I$ halbeinfach) .

(3.9) Lemma: (a) Ist M gut, so auch jeder Faktormodul
(b) Jede direkte Summe von guten Moduln ist wieder gut
(c) Hat $\mathcal{M}_R$ einen guten Generator, so ist jeder Rechts-R-Modul gut

Beweis: Folgt mit der Charakterisierung (3.7,i) unmittelbar aus (3.5) .

(3.1o) Bemerkungen: 1) Hat ein Untermodul $V \subset M$ die Eigenschaft $Ra(V) = V \cap Ra(M)$, so ist mit M auch V gut, denn dann ist die Abb. $V/Ra(V) \longrightarrow M/Ra(M)$ eine Injektion. 2) R_R ist genau dann gut, wenn für alle Rechts-R-Moduln M gilt: $Ra(M) = M.Ra(R)$. Solche Ringe werden in [6] als rechts-gut bezeichnet. 3) Für eine Familie von guten Untermoduln $M_i \subset M$ $(i \in I)$ gilt: $Ra(\sum_I M_i) = \sum_I Ra(M_i)$. Zum Beweis betrachte man den kanonischen Epimorphismus $\bigoplus_I M_i \twoheadrightarrow \sum_I M_i$ und benütze (3.9,b) .

Über geeigneten Ringen stimmen die koabgeschlossenen Untermoduln mit den sogenannten "koreinen" überein. Dies soll im Weiteren untersucht werden, wobei insbesondere gezeigt wird, daß über Dedekind-Ringen in jedem Modul die koabgeschlossenen Untermoduln mit den abgeschlossenen übereinstimmen. Folgende Verallgemeinerung des Begriffes "rein" stammt von C.P.Walker:

(3.11) Definition:[22] Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_R$ und $V \subset M_R$:

V heißt $\mathcal{C}$-rein in $M :\Leftrightarrow \quad V \subset X \subset M \wedge X/V \in \mathcal{C} \Rightarrow V \subset^{\oplus} X$

V heißt $\mathcal{C}$-korein in $M :\Leftrightarrow \quad X \subset V \wedge V/X \in \mathcal{C} \Rightarrow V/X \subset^{\oplus} M/X$.

Für beliebiges $\mathcal{C}$ ist jeder direkte Summand sowohl $\mathcal{C}$-rein als auch $\mathcal{C}$-korein in M . Für geeignetes $\mathcal{C}$ erhält man in $\mathcal{Ab}$ gerade die gewöhnlichen reinen Untergruppen (siehe [3] p. 128) . Im Folgenden sei stets $\mathcal{E}_R$ die Klasse der einfachen Rechts-R-Moduln: Weil nun nicht-große maximale (nicht-kleine minimale) Untermoduln stets schon direkte Summanden sind, folgt unmittelbar aus den Definitionen

(3.12) <u>Lemma</u>: für $V \subset M$ gilt

(a) V abgeschlossen in M $\Rightarrow$ V ist $\mathcal{E}$-rein in M

(a^{o}) V koabgeschlossen in M $\Rightarrow$ V ist $\mathcal{E}$-korein in M .

Die Umkehrung in (a) wird von Renault in [17] untersucht. Dort wird zwar behandelt, wann "quasi-reine" Untermoduln (p.22, Def. 1) schon abgeschlossen sind, aber es läßt sich zeigen, daß diese mit den $\mathcal{E}$-reinen übereinstimmen:

(3.13) <u>Lemma</u>: Für einen Untermodul $V \subset M$ sind äquivalent

(i) V ist $\mathcal{E}$-rein in M

(ii) Zu jedem kommutativen Diagramm gibt es ein φ derart, daß das obere Dreieck kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subsetneqq_{max.}"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \\ V \arrow[r, phantom, "\subset"] & M \end{tikzcd}$$

(iii) wie in (ii) mit $Y = R_R$ (d.i. die Definition von "quasi-rein" bei Renault)

(iv) Ist $\dot{x} \in M/V$ und $\mathrm{Ann}(\dot{x})$ ein maximales Rechtsideal, so läßt sich die Abbildung: $\mathrm{Ann}(\dot{x}) \ni r \longmapsto xr \in V$ nach R fortsetzen

(v) $\mathrm{So}(M/V) = (\mathrm{So}(M) + V)/V$

(vi) $V \subset^{\oplus} V^M$, wobei V^M hier definiert ist durch $\mathrm{So}(M/V) = V^M/V$.

<u>Beweis</u>: (i → ii): Man erhält das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} o \arrow[r] & X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & Y/X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & o \\ o \arrow[r] & V \arrow[r, phantom, "\subset"] & V+Bih \arrow[r] & \frac{V+Bih}{V} \arrow[r] & o \end{tikzcd}$$

und verifiziert, daß g surjektiv ist. Ist $g = o$, so folgt $Bih \subset V$ und man ist fertig. Ist $g \neq o$, so ist wegen der einfachen Quelle g isomorph und damit $(V+Bih)/V \in \mathcal{E}$, also nach Vor. $V+Bih = V \oplus T$. Mit $\varphi := p_V \circ h'$ erhält man eine gewünschte Faktorisierung von f . (ii → iii → iv): klar. (iv → i): Sei $V \underset{max.}{\subsetneqq} V + xR \subset M$. Nach Vor. gibt es $v \in V$ mit $xr = vr$ für alle $r \in \mathrm{Ann}(\dot{x})$, d.h. $\mathrm{Ann}(\dot{x}) = \mathrm{Ann}(x-v)$ und daher ist einfach $(x-v)R$. Aus $x-v \notin V$ folgt $V + (x-v)R = V + xR$ und $V \cap (x-v)R = o$, zusammen also $V \subset^{\oplus} V + xR$. (i → vi): V^M/V ist halbeinfach, also $V^M/V = \bigoplus_{i \in I} X_i/V$ mit einfachen Summanden, also $V \underset{max.}{\subsetneqq} X_i \subset M$ für alle i, und nach Vor. damit $V \subset^{\oplus} X_i$. Es folgt $V \subset^{\oplus} V^M$. (vi → v): Sei $V \underset{max.}{\subsetneqq} X \subset M$. Es folgt $X/V \subset \mathrm{So}(M/V)$, also $X \subset V^M$ und nach Vor. daraus $V \subset^{\oplus} X$. Mit $X = T \oplus V$ ist T notwendig einfach, also $X \subset \mathrm{So}(M) + V$. (v → i): Sei $V \underset{max.}{\subsetneqq} X \subset M$. Nach Vor. hat man $X \subset \mathrm{So}(M) + V$, also $X = \mathrm{So}(X) + V$. Wäre nun V kein direkter Summand in X , so folgte V groß in X , also $\mathrm{So}(X) \subset V$ und damit $X = V$, <u>Wid</u>.

(3.14) Lemma: Für einen Untermodul $V \subset M$ betrachte man folgende Eigenschaften:

(i°) V ist $\mathcal{E}$-korein in M

(v°) $Ra(V) = V \cap Ra(M)$

(vi°) $V/Ra(V) \subset^{\oplus} M/Ra(V)$.

Dann gilt $vi^{o} \to i^{o} \to v^{o}$.

Beweis: ($vi^{o} \to i^{o}$): Sei $X \underset{max.}{\subsetneq} V$. Es folgt $Ra(V) \subset X$, also aus der Vor. $V/X \subset^{\oplus} M/X$. ($i^{o} \to v^{o}$): Sei $X \underset{max.}{\subsetneq} V$. Nach Vor. gibt es $X \subset W \subset M$ mit $V/X \oplus W/X = M/X$. Weil $M/W \cong V/X$ einfach, folgt $Ra(M) \subset W$ und damit $V \cap Ra(M) \subset V \cap W = X$. (Bei keinem der Pfeile gilt i. allg. die Umkehrung: Für $vi^{o} \not\leftarrow i^{o}$ nehme man Beispiel 3.4, für $i^{o} \not\leftarrow v^{o}$ den Modul $M = \mathbb{Z}$.)

(3.15) Bemerkung: In speziellen Moduln lassen sich die $\mathcal{E}$-(ko)reinen Untermoduln einfacher beschreiben:

(a) Für sockelfreies M gilt: 1) V $\mathcal{E}$-rein in M $\Leftrightarrow$ sockelfrei M/V
2) Der Durchschnitt von $\mathcal{E}$-reinen Untermoduln in M ist wieder $\mathcal{E}$-rein

(a°) Für radikalvolles M gilt: 1) V $\mathcal{E}$-korein in M $\Leftrightarrow$ radikalvoll V
2) Die Summe von $\mathcal{E}$-koreinen Untermoduln in M ist wieder $\mathcal{E}$-korein .

(Beispiel (1.11) zeigt, daß ohne Voraussetzungen an M diese Aussagen i. allg. nicht gelten: A, B, C, D sind direkte Summanden in M, aber $A \cap B$ ist nicht $\mathcal{E}$-rein und $C + D$ nicht $\mathcal{E}$-korein in M.)

Es sollen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß über einem Ring R in jedem Modul M_R die $\mathcal{E}$-koreinen Untermoduln mit den $\mathcal{E}$-reinen übereinstimmen.

(3.16) Proposition A : Für die Rechts-R-Moduln eines Ringes R gilt:

I) Ist über R jeder $\mathcal{E}$-koreine Untermodul $\mathcal{E}$-rein, so hat jeder irreduzible, artinsche R-Modul einen total geordneten Untermodulverband.

II) Ist über R jeder $\mathcal{E}$-reine Untermodul $\mathcal{E}$-korein, so hat jeder unzerlegbare, noethersche R-Modul einen total geordneten Untermodulverband.

Beweis: Etwa von I): Sei R wie angegeben und M_R irreduzibel und artinsch. Es folgt, daß M unzerlegbar ist, denn zu $U \subsetneq M$ sei V ein Komplement in M : Ang. $V \neq M \Rightarrow$ es gibt $V \underset{max.}{\subsetneq} X \subset M$ (weil M artinsch) $\Rightarrow V \subset^{\oplus} X$ (weil V $\mathcal{E}$-korein, also nach Vor. $\mathcal{E}$-rein in M) $\Rightarrow V = X$ (weil M irreduzibel) Wid. Aus $V = M$

folgt aber U klein in M. - Das gleiche Argument zeigt: Jeder von Null verschiedene Untermodul von M ist unzerlegbar, und daraus folgt (vgl. 4.24,iii) die Totalordnung von $\mathcal{L}(M)$.

(3.17) <u>Beispiel</u>: Zu einem kommutativen Körper k sei $R := k[[X,Y]]$. Dann gilt: a) R_R ist unzerlegbar und noethersch, hat aber keinen total geordneten Untermodulverband. b) Für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die injektive Hülle $E(R/\mathfrak{m})$ irreduzibel und artinsch, hat aber keinen total geordneten Untermodulverband (nach 4.24). Es gibt also nach Proposition A über R Untermoduln, die $\mathcal{E}$-rein sind, aber nicht $\mathcal{E}$-korein, und umgekehrt.

(3.18) <u>Lemma</u>: Für einen kommutativen Ring R und $V \subset M_R$ gilt:

(a) V $\mathcal{E}$-rein in $M \Leftrightarrow \mathfrak{m}_M^{-1}(V) = \mathfrak{m}_M^{-1}(o) + V$ für alle maximalen $\mathfrak{m} \subset R$

(a^o) V $\mathcal{E}$-korein in $M \Leftrightarrow V\mathfrak{m} = V \cap M\mathfrak{m}$ "

<u>Beweis</u>: Durch "lokalisieren" der Funktoren Radikal und Sockel "in" einem einfachen $E \in \mathcal{E}$: Sei $Ra_E(M) := \bigcap\{U \mid U \subset M \wedge M/U \cong E\}$ sowie $So_E(M) := \sum\{U \mid U \subset M \wedge U \cong E\}$. Für ein Paar $V \subset M$ betrachte man folgende Eigenschaften:

1^o) $X \subset V \wedge V/X \cong E \Rightarrow V/X \subset^{\oplus} M/X$ 1) $V \subset X \subset M \wedge X/V \cong E \Rightarrow V \subset^{\oplus} X$

2^o) $Ra_E(V) = V \cap Ra_E(M)$ 2) $So_E(M/V) = (So_E(M) + V)/V$

3^o) $V/Ra_E(V) \subset^{\oplus} M/Ra_E(V)$ 3) $V \subset^{\oplus} E_M^{-1}(V)$ mit $E_M^{-1}(V)/V := So_E(M/V)$

<u>1.Schritt</u>: Über beliebigen Ringen gilt $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ und $3^o \to 1^o \to 2^o$. Falls M "lokal gut" ist (s.u.), gilt auch $2^o \to 1^o$: Die ersten Behauptungen werden genauso bewiesen wie in (3.13) und (3.14). Für ($2^o \to 1^o$) heiße ein Modul M <u>lokal gut</u>, wenn für alle $U \subset M$ und $E \in \mathcal{E}$ gilt: $Ra_E(M/U) = (Ra_E(M) + U)/U$. Sei nun diese Bedingung erfüllt und $X \subset V$ mit $V/X \cong E$: Wäre V/X kein direkter Summand in M/X, so wäre es (weil einfach) klein in M/X, also $V/X \subset Ra_E(M/X)$, und wegen lokal gut also $V \subset Ra_E(M) + X$. Es folgte $V = (X + Ra_E(M)) \cap V = X + Ra_E(V) = X$ <u>Wid</u>.

<u>2.Schritt</u>: Sei nun R kommutativ und $E \cong R/\mathfrak{m}$. Dann berechnet man $Ra_E(M) = M\mathfrak{m}$ und $So_E(M) = \{x \mid x \in M \wedge x\mathfrak{m} = o\}$, und aus letzterem $E_M^{-1}(V) = \{x \mid x \in M \wedge xr \in V$ für alle $r \in \mathfrak{m}\} =: \mathfrak{m}_M^{-1}(V)$. Es folgt, daß Ra_E rechtsexakt ist und damit jeder R-Modul lokal gut, insbesondere $2^o \to 1^o$. Durch Umschreiben von 2^o und 2 erhält man die Beh. des Lemmas.

Wie man sofort nachprüft, kann $a \leftrightarrow a^o$ gezeigt werden, wenn die maximalen Ideale von R zyklisch sind. Endlich erzeugte maximale Ideale genügen nach Beispiel (3.17) nicht, jedoch folgende Verallgemeinerung von zyklisch: In einem kommutativen Ring R heiße ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ <u>quasi-invertierbar</u>, wenn es $a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{a}$ gibt und $\gamma_{ij} \in R$, $1 \leq i,j \leq n$ mit folgenden Eigenschaften:

(') Die a_i erzeugen $\mathfrak{a}$ ('') $\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii} = 1$ (''') $\gamma_{ij}a_k = \gamma_{ik}a_j$ für alle i,j,k .
Jedes zyklische Ideal ist quasi-invertierbar. Ist R ein Integritätsring, so ist $o \neq \mathfrak{a} \subset R$ genau dann quasi-invertierbar, wenn es im Quotientenkörper von R invertierbar im üblichen Sinn ist.

(3.19) <u>Hilfssatz</u>: Ist R kommutativ und quasi-invertierbar $\mathfrak{a} \subset R$, so gilt für jedes Paar $V \subset M_R$:

(a) $(\mathfrak{a}_M^{-1}(V))\mathfrak{a} = V \cap M\mathfrak{a}$

(a^o) $\mathfrak{a}_M^{-1}(V\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_M^{-1}(o) + V$.

<u>Beweis</u>: Sei $\mathfrak{a}$ quasi-invertierbar und die a_i, γ_{ij} wie oben angegeben. Bei (a) ist die Inklusion " $\subset$ " klar. Sei also $x \in V \cap M\mathfrak{a}$, insbesondere $x = \sum_i y_i a_i$ mit $y_i \in M$. Definiere $\bar{y}_i := \sum_j y_j\gamma_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $\bar{y}_i \in M$ und $\bar{y}_i a_k = \sum_j y_j\gamma_{ij}a_k = (\sum_j y_j a_j)\gamma_{ik} = x\gamma_{ik} \in V$ für alle k, also $\bar{y}_i \in \mathfrak{a}_M^{-1}(V)$ für alle i , und aus $\sum_i \bar{y}_i a_i = \sum_i x\gamma_{ii} = x$ folgt endlich $x \in (\mathfrak{a}_M^{-1}(V))\mathfrak{a}$.
Bei (a^o) ist die Inklusion " $\supset$ " klar. Sei also $x \in \mathfrak{a}_M^{-1}(V\mathfrak{a})$, d.h. $xa_i = \sum_j v_{ij}a_j$ für gewisse $v_{ij} \in V$, $1 \leq i,j \leq n$. Definiere $v := \sum_{i,j} v_{ij}\gamma_{ij} \in V$. Man ist fertig, wenn gezeigt wird: $x - v \in \mathfrak{a}_M^{-1}(o)$. Es gilt aber für alle k : $va_k = \sum_{i,j} v_{ij}\gamma_{ij}a_k = \sum_{i,j} v_{ij}\gamma_{ik}a_j = \sum_i (\sum_j v_{ij}a_j)\gamma_{ik} = \sum_i x\gamma_{ik}a_i = \sum_i x\gamma_{ii}a_k = xa_k$.

(3.2o) <u>Proposition B</u> : **Sei R ein kommutativer Ring, in dem jedes maximale Ideal quasi-invertierbar ist.**
Dann stimmen in jedem R-Modul die $\mathcal{E}$-koreinen Untermoduln mit den $\mathcal{E}$-reinen überein.

<u>Beweis</u>: Mit (3.18): Sei V $\mathcal{E}$-korein in M . Nach (3.18,a^o) folgt $\mathfrak{m}_M^{-1}(V\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_M^{-1}(V) \cap \mathfrak{m}_M^{-1}(M\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_M^{-1}(V)$. Die linke Seite ist aber nach dem Hilfssatz gerade $\mathfrak{m}_M^{-1}(o) + V$. Dies gilt für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, sodaß nach (3.18,a) jetzt V $\mathcal{E}$-rein in M ist. Umkehrung ebenso .

(3.21) <u>Bemerkung</u>: Die Voraussetzung von Proposition B ist insbesondere von jedem Dedekindring erfüllt, ebenso von kommutativen Ringen, in denen jedes maximale Ideal zyklisch ist.

Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen koabgeschlossen und $\mathcal{E}$-korein, d.h. der Umkehrung in (3.12,a^o), ist folgender Begriff nützlich: Ein Modul M heißt <u>koatomar</u>, wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen enthalten ist.
(3.22) <u>Beispiele</u>: Jeder endlich erzeugte Modul, jeder halbeinfache Modul ist koatomar. - Jeder koatomare Modul M hat ein kleines Radikal (<u>ang</u>. Ra(M) + T = M mit $T \subsetneq M \Rightarrow T \subset X \underset{max.}{\subsetneq} M \Rightarrow Ra(M) + X = M \Rightarrow X = M$ <u>Wid</u>.), die Umkehrung

gilt i. allg. nicht ($\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ hat $\mathbb{Q}$ als Faktormodul). Hat ein guter Modul (also speziell ein komplementierter) ein kleines Radikal, so ist er bereits koatomar: $U \subsetneq M \Rightarrow Ra(M) + U \subsetneq M \Rightarrow Ra(M/U) \subsetneq M/U$, also ist U in einem maximalen Untermodul enthalten.
Im dualen Fall stimmen die Begriffe "großer Sockel" und "atomar" stets überein.

(3.23) <u>Satz</u>: Für die Rechts-R-Moduln eines Ringes R gelten folgende Äquivalenzen:

(i) Jeder $\mathcal{E}$-koreine Untermodul ist schon koabgeschlossen

(ii) A klein in B $\wedge$ A radikalvoll $\Rightarrow$ A = o

(iii) $A \subset B \wedge Ra(A)$ klein in B $\Rightarrow Ra(A)$ klein in A

(iv) A klein in B $\Rightarrow$ A ist koatomar.

Ein Ring mit diesen Eigenschaften heiße ein <u>Rechts-K-Ring</u>.

<u>Beweis</u>: (i → ii): Jeder radikalvolle Untermodul ist $\mathcal{E}$-korein, jeder kleine und koabgeschlossene Untermodul ist Null. (ii → iii): Seien A, B wie angegeben, $Ra(A) + T = A$. Es folgt, daß A/T radikalvoll ist und A/T klein in M/T, nach Vor. also $A/T = o$. (iii → iv): Sei A klein in B und $U \subsetneq A$. Es folgt A/U klein in B/U, also auch $Ra(A/U)$ klein in B/U, sodaß nach Vor. folgt $Ra(A/U)$ klein in A/U. Weil $A/U \neq o$, kann es also nicht radikalvoll sein. (iv → i): Sei $V \subset M$ nicht koabgeschlossen. Also gibt es ein $X \subsetneq V$ mit V/X klein in M/X. Nach Vor. gibt es $X \subset Y \underset{max.}{\subsetneq} V$. Klar gilt V/Y klein in M/Y, also ist V nicht $\mathcal{E}$-korein in M.

(3.24) <u>Bemerkung</u>: In [16] heißt ein Modul A klein, wenn es eine Erweiterung $\alpha : A \hookrightarrow B$ gibt mit $Bi\alpha$ klein in B. In dieser Terminologie ist dann R genau dann ein K-Ring, wenn jeder kleine Modul koatomar ist. (Bekanntlich ist über einem echten Integritätsring jeder koatomare Modul klein.)

(3.25) <u>Beispiele</u>: Jeder rechts-perfekte Ring, jeder Rechts-V-Ring ist ein K-Ring, denn nur der Null-Modul ist radikalvoll. Jeder Dedekind-Ring ist ein K-Ring, denn ein radikalvoller Modul ist injektiv (Satz 6.1 in [16]), also nur dann klein, wenn er Null ist.
Zur Gruppe $G = \mathbb{Z}(p^\infty)$ (multiplikativ geschrieben) und dem Körper $k = \mathbb{Z}/(p)$ ist der Gruppenring $R = k[G]$ kein K-Ring, denn nach [1]§6 Ex.2 ist $N = Ra(R) \neq o$ mit $N^2 = N$. Außerdem ist R lokal und damit gut, sodaß nach (3.1o) gilt: $Ra(N) = N.Ra(R) = N$, d.h. N ist radikalvoll.

(3.26) <u>Folgerung 1</u>: Über einem Dedekind-Ring stimmen die koabgeschlossenen Untermoduln mit den abgeschlossenen überein.

Beweis: Nach [17] stimmen die abgeschlossenen Untermoduln mit den $\mathcal{E}$-reinen überein, diese nach (3.2o) mit den $\mathcal{E}$-koreinen und diese nach (3.25) mit den koabgeschlossenen.

(3.27) Folgerung 2 : Über einem Dedekindring gilt für jeden torsionsfreien Modul M : Sind A, B gegenseitig Komplemente in M, so folgt $M = A \oplus B$.

Beweis: Seien M, A, B wie angegeben. Ist R ein Körper, so ist alles klar. Ist R kein Körper, so ist jeder torsionsfreie Modul sockelfrei, also (3.15) anwendbar: A und B sind $\mathcal{E}$-rein in M (3.2o), also auch ihr Durchschnitt, also ist $A \cap B$ $\mathcal{E}$-korein in M (3.2o) und damit auch koabgeschlossen in M (3.25). Weil außerdem $A \cap B$ klein in M ist, folgt $A \cap B = o$.

(3.28) Bemerkung: Für Moduln über einem K-Ring gilt:

(a) Hat M ein kleines Radikal, so auch jeder Untermodul

(b) Ist M koatomar, so auch jeder Untermodul

(c) Jeder Modul mit kleinem Radikal ist reduziert .

Beweis: Ein Modul heißt reduziert, wenn sein größter radikalvoller Untermodul Null ist. (Für Dedekind-Ringe stimmt das mit der üblichen Definition überein.) Damit folgt (c) unmittelbar aus (a), und (a) ist klar nach (3.23,iii). Bleibt (b): Sei M koatomar und $U \subsetneq X \subset M$. Es folgt $o \neq X/U \subset M/U$, und weil auch M/U koatomar ist, hat es kleines Radikal (3.22), also nach (a) auch X/U. Damit ist X/U nicht radikalvoll. (Das Gegenbeispiel in (3.25) zeigt, daß i.allg. keiner der drei Punkte gilt.)

Zum Abschluß soll gezeigt werden, daß sich über K-Ringen jeder komplementierte (SP2)-Modul in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen läßt. Dazu ist folgende Verallgemeinerung des Begriffes "koabgeschlossen" nützlich: Ein Untermodul $V \subset M$ heiße erblich in M, wenn gilt: $X \subset V \wedge X$ klein in M $\Rightarrow$ X klein in V . Jeder koabgeschlossene Untermodul $V \subset M$ ist erblich, denn aus $X \subset V \wedge X$ nicht-klein in V folgt $X + T = V$ für ein $T \subsetneq V$, also wegen koabgeschlossen $V + S = M$ für ein $T \subset S \subsetneq M$ und daraus $X + S = M$, also X nicht-klein in M . In $\mathbb{Z}$ ist jeder Untermodul erblich, jedoch nur $o, \mathbb{Z}$ koabgeschlossen. Ist V erblich in M und $x \in V \cap Ra(M)$, so folgt xR klein in V, also $x \in Ra(V)$: es gilt $Ra(V) = V \cap Ra(M)$. Zusammen mit den in (3.12) und (3.14) bewiesenen Inklusionen hat man also für jedes Paar $V \subset M$:

$$\begin{array}{ccc} V \text{ koabgeschlossen in } M & \Longrightarrow & V \quad \mathcal{E}\text{-korein in } M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ erblich in } M & \Longrightarrow & Ra(V) = V \cap Ra(M) \end{array}$$

(3.29) Lemma:

(a) Ist M gut, so gilt: $Ra(V) = V \cap Ra(M) \Rightarrow V$ $\mathcal{E}$-korein in M

(b) Ist M komplementiert, so gilt: V erblich in $M \Rightarrow V$ koabg. in M

(c) R ist genau dann ein Rechts-K-Ring, wenn für jedes Paar $V \subset M_R$ gilt: $Ra(V) = V \cap Ra(M) \Rightarrow V$ erblich in M.

Beweis: (a): wie in (3.18) der Schritt $2^\circ \to 1^\circ$. (b): Sei V erblich in M und W ein Komplement von V in M. Aus $W \cap V$ klein in M folgt nach Vor. $W \cap V$ klein in V, d.h. es ist auch V Komplement von W in M. (c): Sei R ein K-Ring und $Ra(V) = V \cap Ra(M)$, $X \subset V$ und X klein in M: Aus $X + T = V$ folgt, daß V/T radikalvoll ist (weil $X \subset Ra(V)$) und klein in M/T, also $V/T = o$ nach (3.23,ii), d.h. $T = V$.- Ist aber umgekehrt, um mit (3.23,ii) zu zeigen, daß R ein K-Ring ist, radikalvoll $A \subset B$ mit A klein in B, so folgt $Ra(A) = A \cap Ra(B)$, also nach Vor. A erblich in B. Ein erblicher, kleiner Untermodul ist aber bereits Null.

(3.3o) Satz: Sei R ein Rechts-K-Ring und M_R mit den Eigenschaften

α) M komplementiert

β) jedes Komplement in M ist bereits direkter Summand.

Dann ist M direkte Summe von unzerlegbaren Moduln.

Beweis: Seien R und M_R wie angegeben. 1.Schritt: M ist direkte Summe von direkt unzerlegbaren Moduln. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Bedingung (C) von Stenström [20] erfüllt ist, nämlich:

(C) Jede Kette von direkten Summanden in M hat die Eigenschaft, daß ihre Vereinigung wieder direkter Summand in M ist.

Ist nun $\mathfrak{K}$ in unserem M eine Kette von direkten Summanden, so folgt $Ra(\Sigma\mathfrak{K}) = \Sigma\mathfrak{K} \cap Ra(M)$, also $\Sigma\mathfrak{K}$ erblich in M (nach 3.29,c) und, da M komplementiert, sogar Komplement in M (Beweis von 3.29,b), sodaß nach Vor. (β) folgt: $\Sigma\mathfrak{K} \subset^{\oplus} M$.
2.Schritt: Man hat $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit M_i direkt unzerlegbar. Weil aber jedes M_i wieder (α) und (β) erfüllt (2.6 und 2.11,i), ist es schon unzerlegbar.

(3.31) Folgerung: Über einem perfekten Ring ist jeder (SP2)-Modul direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, denn jeder Modul ist komplementiert, und die Bedingung (SP2) liefert (β) (2.12,e).
Zugleich zeigt dieses Beispiel, daß im Satz auf (β) nicht verzichtet werden kann, denn ist über einem perfekten Ring jeder Modul direkte Summe von unzerlegbaren (also zyklischen) Moduln, so ist der Ring bereits artinsch.

4. Die Struktur der komplementierten abelschen Gruppen

(4.1) Satz: Sei M direkte Summe von unzerlegbaren Untermoduln und $Ra(M)$ klein in M.
Dann ist M komplementiert.

Beweis: Man hat $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit M_i unzerlegbar für alle $i \in I$. Mit M hat auch M_i ein kleines Radikal, ist also sogar zyklisch und $M_i/Ra(M_i)$ einfach. Sei $\overline{U}$ für jedes $U \subset M$ das Bild von U bei der Abbildung $M \longrightarrow M/Ra(M)$. Man erhält $\overline{M} = \bigoplus_{i\in I} \overline{M}_i$ mit $\overline{M}_i$ einfach. Ist nun $U \subset M$, so gibt es nach dem Hauptsatz über halbeinfache Moduln ein $H \subset I$ mit $(\bigoplus_{i\in H} \overline{M}_i) \oplus \overline{U} = \overline{M}$. Es wird behauptet, daß $V := \bigoplus_{i\in H} M_i$ ein Komplement von U in M ist: aus $\overline{V} \oplus \overline{U} = \overline{M}$ folgt, weil M kleines Radikal hat, sofort $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M, und weil $V \overset{\oplus}{\subset} M$, weiter $V \cap U$ klein in V.
(Jeder Untermodul hat also sogar ein Komplement, das direkter Summand ist. Beispiel (1.11) zeigt, daß daraus nicht folgt, daß jedes Komplement direkter Summand ist.)

(4.2) Folgerung: ([14] Theorem 1) Ist in einem Ring R die Eins Summe von orthogonalen, lokalen Idempotenten, so ist R semiperfekt.
Bew: $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$ mit e_iR unzerlegbar.

(4.3) Folgerung: Eine abelsche Torsionsgruppe mit kleinem Radikal ist komplementiert.
Bew: Jede p-Komponente hat wieder ein kleines Radikal, ist also beschränkt (s.u.) und daher direkte Summe von zyklischen p-Gruppen $\neq o$, deren jede unzerlegbar ist.

(4.4) Bemerkung: Auf das kleine Radikal im Satz kann i.A. nicht verzichtet werden: Die abelsche Gruppe $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n)$ ist nicht komplementiert, denn

Hilfssatz 1 : Ein reduzierter, komplementierter Modul ist koatomar.

Hilfssatz 2 : Für eine p-Gruppe sind äquivalent

(i) kleines Radikal
(ii) koatomar
(iii) beschränkt.

Beweis: von (HS 1): Sei $U \subsetneq M$ und V Komplement von U in M. Gäbe es keinen maximalen Untermodul über U, so wäre M/U radikalvoll, also auch V (wegen des wesentlichen Epimorphismus $V \longrightarrow M/U$), sodaß aus der Reduziertheit folgte: $V = o$ d.h. $U = M$ Wid. (HS 2):(iii → ii): Gilt für beliebige Moduln über Dedekindringen: Ist M beschränkt (d.h. $Ann(M) \neq o$) und $U \subsetneq M$, so ist M/U wieder eschränkt, also nicht teilbar und wegen Dedekind (Satz 6.1 in [16]) nicht adikalvoll. (ii → i): Gilt für beliebige Moduln nach (3.22). (i → ii): Gilt ür Torsionsmoduln über Dedekindringen, denn sie sind gut (3.8) und jeder gute lodul mit kleinem Radikal ist koatomar nach (3.22). (ii → iii): Sei M eine oatomare p-Gruppe und $B \subset M$ eine p-Basis-Untergruppe (siehe [3] § 32): M/B st wieder koatomar und außerdem injektiv, also Null, sodaß folgt $B = M$ und amit $M \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\bigoplus_{m_n} \mathbb{Z}/(p^n))$. Ang. M nicht beschränkt $\Rightarrow \exists$ Folge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ it $m_{n_i} \geq 1$ für alle i $\Rightarrow U := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^{n_i}) \subset^{\oplus} M$ mit $U \twoheadrightarrow \mathbb{Z}(p^{\infty})$ $\rightarrow$ $I \twoheadrightarrow \mathbb{Z}(p^{\infty})$ Wid. zu koatomar M .

4.5) Satz: Sei M koatomar und jeder maximale Untermodul besitze ein Komplement in M .
Dann ist M Summe von Untermoduln, die zyklisch und unzerlegbar und Komplement in M sind .

Beweis: Sei $M^o := \sum \{ U \mid$ zyklisch u. unzerlegbar $U \wedge U$ Komplement in $M \}$. ng. $M^o \neq M$. Wegen koatomar folgt $M^o \subset X \underset{max.}{\subsetneqq} M$. Sei Y Komplement von X in 1 . Weil wesentlich $Y \twoheadrightarrow M/X$ mit einfachem Ziel, gilt $Y \in \{ \}$, also $Y \subset M^o$. s folgt $M^o + X = M$, also $X = M$ Wid.

(4.6) Folgerung: Sei R ein Integritätsring derart, daß R_R nicht komplementiert ist (also R nicht lokal).
Dann ist jeder komplementierte Modul mit kleinem Radikal ein Torsionsmodul.
Bew: Weil R nicht lokal, ist jeder zyklische, unzerlegbare R-Modul torsionsvoll. Weil jeder komplementierte Modul mit kleinem Radikal bereits koatomar ist (3.22), folgt die Beh. aus dem Satz.

(4.7) Bemerkung: Über einem Dedekindring ist jeder Torsionsmodul Summe von zyklischen, unzerlegbaren Untermoduln, denn $o \neq I \subsetneqq R \Rightarrow I = \mathfrak{p}_1^{s_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{s_n}$, also $R/I \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{p}_i^{s_i}$, und jedes $R/\mathfrak{p}_i^{s_i}$ ist unzerlegbar.

(4.8) Lemma: Sei R ein Integritätsring mit der Eigenschaft, daß jeder radikalvolle R-Modul teilbar ist . Dann sind äquivalent

(i) Weder R_R noch der Quotientenkörper K_R sind komplementiert
(ii) Jeder komplementierte R-Modul ist torsionsvoll .

Beweis: (ii → i) ist klar, denn weder R_R noch K_R ist torsionsvoll. (i → ii): Sei M_R komplementiert. Dann ist auch $\widetilde{M} := M/T(M)$ komplementiert (2.6) und außerdem torsionsfrei, und es ist zu zeigen: $\widetilde{M} = o$! 1) $\widetilde{M}$ ist reduziert, denn ein radikalvoller Untermodul $U \subset \widetilde{M}$ ist nach Vor. teilbar und torsionsfrei, also injektiv und als direkter Summand wieder komplementiert; außerdem folgt $U \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} K$, sodaß wegen (i) gelten muß: $\mathfrak{m} = \emptyset$, d.h. $U = o$. 2) Nach (4.4, HS1) ist nun $\widetilde{M}$ koatomar, also nach (4.6) torsionsvoll. Weil es zugleich torsionsfrei ist, folgt $\widetilde{M} = o$.

(4.9) Bemerkungen: 1) Über einem echten Integritätsring ist jeder teilbare Modul radikalvoll. Die oben verlangte Umkehrung gilt z.B. über Dedekind-Ringen, weil dort jeder radikalvolle Modul injektiv ist (Satz 6.1 in [16]).
2) Ist der Quotientenkörper K_R eines Integritätsringes R komplementiert, so ist K_R bereits unzerlegbar, denn $U \subsetneqq K$ hat ein Komplement V in K, und wegen des wesentlichen Epim. $V \longrightarrow K/U$ ist mit K/U auch V teilbar, also (weil torsionsfrei) injektiv und damit $V \subset^{\oplus} K$. Es folgt $V = K$, also U klein in K. 3) Ist speziell R ein Dedekindring und K_R komplementiert, so ist R bereits lokal, denn ist R ein Körper, so ist alles klar ; ist R kein Körper, so ist K/R Kogenerator in $\mathcal{M}_R$, der nach (2) unzerlegbar ist. Ein kommutativer Ring mit einem direkt unzerlegbaren Kogenerator ist aber bereits lokal.

(4.1o) Folgerung: Ist R ein nicht-lokaler Dedekind-Ring, so ist jeder komplementierte R-Modul torsionsvoll .

(4.11) Satz: Jede komplementierte abelsche Gruppe ist direkte Summe von unzerlegbaren Gruppen.

Beweis: Nach (4.1o) muß man nur p-Gruppen betrachten. Der divisible Anteil ist von der Form $\bigoplus_{\mathfrak{m}_p} \mathbb{Z}(p^\infty)$, also wie gewünscht; der reduzierte Anteil ist koatomar, also beschränkt (4.4, HS 1 und 2), also direkte Summe von zyklischen p-Gruppen $\neq o$, die ebenfalls unzerlegbar sind.

(4.12) Proposition: Sei M eine p-Gruppe und $U \subset Ra(M)$. Dann sind äquivalent:

(i) U hat ein (schwaches) Komplement in M

(ii) $Ra(U)$ hat ein Komplement in U

(iii) Die absteigende Folge $U \supset Ra(U) \supset Ra^2(U) \supset Ra^3(U) \supset \ldots$ wird stationär

(iv) Der reduzierte Anteil von U hat ein kleines Radikal .

Beweis: (i → iv): Sei V ein schwaches Komplement von U in M (siehe 2.7), d.h. $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M . Aus dem Ersten folgt $(Vp \cap U) + Up = (Up + Vp) \cap U = Mp \cap U = U$, aus dem Zweiten $Vp \cap U$ koatomar (nach 3.23,iv), also beschränkt (4.4, HS 2): Mit $(Vp \cap U)p^k = o$ für ein $k \geq 1$ folgt aber $Up^{k+1} = Up^k$, d.h. Up^k ist teilbar, und es folgt $Up^k = D(U)$, wobei $D(U)$ der divi-

sible Anteil von U ist. Damit ist der reduzierte Anteil $U/D(U)$ beschränkt, hat also ein kleines Radikal. (iv → iii): Aus kleinem Radikal folgt nach (4.4) beschränkt, also $(U/D(U))p^k = o$ für ein $k \geqslant 1$. Aus $Up^k \subset D(U) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} Up^n$ folgt $Up^k = Up^n$ für alle $n \geqslant k$.
(ii → i): Man betrachte die Menge $\mathcal{K}(U,M) := \{ A \mid A \subset U \wedge U/A \subset^{\oplus} M/A \}$. Jedes minimale Element $A_o \in \mathcal{K}(U,M)$ liefert ein Komplement von U in M, denn aus $V/A_o \oplus U/A_o = M/A_o$ mit $A_o \subset V \subset M$ folgt $V + U = M$, und V ist sogar minimaler Summand von U, denn $T \subset V$ mit $T + U = M \Rightarrow T \cap U \in \mathcal{K}(U,M)$ und $T \cap U \subset V \cap U = A_o$, also $T \cap U = V \cap U$ und damit $T = (T + U) \cap V = V$. Im Falle einer p-Gruppe M mit U wie angegeben läßt sich nun $\mathcal{K}(U,M)$ so beschreiben: $A \in \mathcal{K}(U,M) \Leftrightarrow A + Ra(U) = U$. Aus der rechten Seite folgt nämlich U/A radikalvoll, also injektiv und damit direkter Summand; aus der linken Seite folgt umgekehrt $(U/A)p = U/A \cap (M/A)p$, also $A + Up = U \cap (A + Mp) = U$. Ergebnis: Ein minimales Element von $\mathcal{K}(U,M)$ ist genau ein Komplement von $Ra(U)$ in U. Nach Vor. hat nun $Ra(U)$ ein Komplement in U, also $\mathcal{K}(U,M)$ ein minimales Element und damit nach dem Vorausgehenden U ein Komplement in M.
(iii → ii): Der eben durchgeführte Schritt hat für beliebige p-Gruppen X gezeigt: Hat $Ra^2(X)$ ein Komplement in $Ra(X)$, so hat auch $Ra(X)$ ein Komplement in X. Aus der Vor. $U \supset Ra(U) \supset \ldots \supset Ra^k(U) = Ra^{k+1}(U)$ folgt damit sofort die Behauptung.

(4.13) <u>Bemerkungen</u>: 1) Die Äquivalenzen (ii,iii,iv) gelten für beliebige p-Gruppen U, denn für M kann man die injektive Hülle wählen. Aus der "inneren" Eigenschaft (ii) folgt übrigens für jede p-Gruppe M mit $Ra(M) \supset U$, daß U in ihr ein Komplement hat. 2) Das Beispiel $U = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n)$ aus (4.4) ist reduziert und hat kein kleines Radikal (HS 2), also hat $Ra(U)$ nach (4.12,ii → iv) nicht einmal ein Komplement in U. Außerdem ist die injektive Hülle $M = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ wegen (4.12,i → ii) nicht komplementiert.

(4.14) <u>Folgerung 1</u> : Sei M eine p-Gruppe und $U \subset M$. Dann sind äquivalent:

(i) U klein in M
(ii) $U \subset Ra(M) \wedge$ U hat Komplement in M $\wedge$ U reduziert
(iii) $U \subset Ra(M) \wedge Ra(U)$ klein in U.

<u>Beweis</u>: (i → ii): klar. (ii → iii): mit (4.12,i → iv) klar. (iii → i): Sei $U + T = M$: Weil $U \subset Ra(M)$, folgt $Ra(M) + T = M$, also M/T radikalvoll; weil U koatomar (4.4) und epimorph $U \longrightarrow M/T$, folgt $M/T = o$, also $T = M$.

(4.15) <u>Folgerung 2</u> : Sei M eine p-Gruppe und $U \subset M$. Dann sind äquivalent:

(i) $Ra(U)$ hat ein (schwaches) Komplement in M
(ii) $Ra(U)$ hat ein Komplement in U.

<u>Beweis</u>: (i → ii): Nach (4.12,i → ii) hat $Ra^2(U)$ ein Komplement in $Ra(U)$, also auch $Ra(U)$ in U. (ii → i): Nach (4.12,ii → iii) ist stationär $Ra(U) \supset Ra^2(U) \supset Ra^3(U) \supset \dots$, also hat nach (4.12,iii → i) $Ra(U)$ ein Komplement in M.

(4.16) <u>Lemma</u>: Sei $o \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow o$ eine exakte Folge von Rechts-R-Moduln und A artinsch, C komplementiert.
Dann ist auch B komplementiert.

<u>Beweis</u>: Sei o.B.d.A. angenommen $A \subset B$ mit A artinsch und B/A komplementiert. Zu $U \subset B$ gibt es ein $A \subset V \subset B$ derart, daß V/A Komplement von $(U + A)/A$ in B/A ist. Die Menge $\{ T \cap A \mid T \subset V \wedge T + U = B \}$ hat ein minimales Element $T_o \cap A$, und es wird behauptet, daß T_o ein Komplement von U in B ist: Die Summe ist klar, und aus $T \subset T_o$ mit $T + U = B$ folgt $T \cap A \in \{ \ \}$, also $T \cap A = T_o \cap A$, aber auch $T + A = T_o + A$ ($= V$, weil V/A Komplement), und daraus weiter $T = T_o$. (Example 2 in [2] p.175 ist ein kommutativer Ring R, der eine unendliche Menge orthogonaler Idempotente hat, also nicht komplementiert ist. Er hat aber einen Sockel, der maximales Ideal ist, sodaß in der exakten Folge $o \longrightarrow So(R) \longrightarrow R \longrightarrow R/So(R) \longrightarrow o$ das erste und das dritte Glied komplementiert sind.)

(4.17) <u>Theorem</u>: A) Eine abelsche Gruppe ist genau dann komplementiert, wenn sie Torsionsgruppe ist, bei der jede p-Komponente komplementiert ist.

B) Für eine p-Gruppe M sind äquivalent:

(i) M ist komplementiert

(ii) Der divisible Anteil von M ist artinsch und der reduzierte Anteil ist beschränkt

(iii) Es gibt ein $n \geqslant 1$, sodaß $Ra^n(M)$ artinsch ist.

<u>Beweis</u>: (A) Eine komplementierte Gruppe ist nach (4.1o) torsionsvoll, und nach (2.6) sind die p-Komponenten wieder komplementiert. Die Umkehrung ist klar nach (2.3).
(B) (i → iii): Nach (4.12,ii → iii) gibt es ein $n \geqslant 1$ mit $Ra^n(M) = Ra^{n+1}(M)$. Es folgt $Ra^n(M) = D(M) \subset^{\oplus} M$; also ist $Ra^n(M)$ komplementiert und von der Form $\bigoplus_{\mathfrak{m}_p} \mathbb{Z}(p^\infty)$. Nach (4.13, 2) muß nun $\mathfrak{m}_p$ endlich sein, sodaß mit $\mathbb{Z}(p^\infty)$ auch $Ra^n(M)$ artinsch ist. (iii → ii): Es gibt ein $m \geqslant n$ mit $Ra^m(M) = Ra^{m+1}(M)$. Damit ist $D(M) = Ra^m(M)$ als Untergruppe von $Ra^n(M)$ artinsch, und wegen $(M/D(M))p^m = o$ auch der reduzierte Anteil beschränkt. (ii → i): In der exakten Folge $o \longrightarrow D(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/D(M) \longrightarrow o$ ist das erste Glied nach Vor. artinsch, das dritte beschränkt und also nach (4.3) komplementiert, sodaß (4.16) die Beh. liefert.

(4.18) Korollar 1 : In einer Torsionsgruppe ist jede reine, komplementierte Untergruppe bereits direkter Summand. Zum Beweis kann man sich auf p-Gruppen beschränken, und es sei also M eine p-Gruppe mit rein $X \subset M$ und X komplementiert: Weil $X/D(X)$ reine, beschränkte Untergruppe von $M/D(X)$ ist, gilt $X/D(X) \subset^{\oplus} M/D(X)$, und aus $D(X) \subset^{\oplus} M$ folgt weiter $X \subset^{\oplus} M$.

(4.19) Korollar 2 : Ist eine Torsionsgruppe schwach komplementiert, so ist sie bereits komplementiert (vgl. das Gegenbeispiel $\mathbb{Q}$ in 2.7) . Weil sich "schwach komplementiert" auf Faktormoduln und also erst recht auf direkte Summanden vererbt, kann man sich auf p-Gruppen beschränken: $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ ist nicht schwach komplementiert (wie in (4.13,2)), also ist der divisible Anteil einer schwach komplementierten p-Gruppe bereits artinsch. Der reduzierte Anteil hat ein kleines Radikal (4.12, i und ii → iv), ist also beschränkt (4.4) .

(4.2o) Satz : Sei $o \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow o$ eine exakte Folge abelscher Gruppen. Dann gilt:
B ist genau dann komplementiert, wenn es A und C ist.

Beweis: (I) Sei B komplementiert: Nach (2.6) ist C komplementiert. Weil mit B auch A Torsionsgruppe ist, bleibt zu zeigen, daß bei einer komplementierten p-Gruppe M jedes $X \subset M$ wieder komplementiert ist. Das ist aber nach (4.17, B, i ↔ iii) klar.

(II) Seien A und C komplementiert: Es folgt, daß B Torsionsgruppe ist, und damit exakt für jedes p die Folge $o \longrightarrow A_p \longrightarrow B_p \longrightarrow C_p \longrightarrow o$ der p-Komponenten, A_p und C_p wieder komplementiert. Bleibt zu zeigen, daß eine p-Gruppe M komplementiert ist, wenn es ein $X \subset M$ gibt, derart, daß X und M/X komplementiert sind: Aus dem Ersten folgt $Ra^n(X)$ artinsch für ein $n \geqslant 1$. Zerlegt man $M/X = S/X \oplus T/X$ mit $X \subset S,T \subset M$ und S/X teilbar, T/X reduziert, so ist mit S/X auch das epimorphe Bild $Sp^n/Xp^n = Ra^n(S)/Ra^n(X)$ artinsch, also auch artinsch $Ra^n(S)$; weil T/X beschränkt, hat man $Ra^m(T) = Tp^m \subset X$ für ein $m \geqslant 1$, also ist $Ra^{m+n}(T)$ artinsch. Aus $M = S + T$ folgt schließlich $Ra^{m+n}(M) = Ra^{m+n}(S) + Ra^{m+n}(T)$, und weil die beiden rechten Summanden artinsch sind, ist es auch $Ra^{m+n}(M)$, und damit ist M komplementiert.

Für den Zusammenhang zwischen Selbstkogenerator- und komplementierten Gruppen seien kurz die Bezeichnungen angegeben: Sind $M, N \in \mathcal{M}_R$, so sagt man: M kogeneriert N, wenn gilt $\bigcap \{ Ke\ f \mid f \in Hom(N,M) \} = o$. M heißt Selbstkogenerator, wenn es jeden seiner Faktormoduln kogeneriert, d.h. zu jedem $U \subset M$ und $U \not\ni x \in M$ ein $\alpha \in End(M)$ existiert mit $U \subset Ke\ \alpha \not\ni x$. Um bei einer abelschen Torsionsgruppe zu zeigen, daß sie Selbstkogenerator ist, genügt der Nachweis für jede p-Komponente, denn entsprechend zu (2.3) hat man:

) Lemma: Sei $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ derart zerlegt, daß für alle Untermoduln U gilt

$(*)$ $U = \bigoplus_{i\in I} (U \cap M_i)$.

Sind dann alle M_i , $i \in I$, Selbstkogeneratoren, so auch M .

s: Sei $U \subset M$ und $U \not\ni x \in M$, also $U \cap M_k \not\ni p_k(x) \in M_k$ für mindestens $k \in I$. Nach Vor. existiert ein $\alpha_k \in \mathrm{End}(M_k)$ mit $U \cap M_k \subset \mathrm{Ke}\,\alpha_k \not\ni p_k(x)$.
$\alpha := \bigoplus_{i\in I} \alpha_i$, wobei $\alpha_i := 0$ für $i \neq k$, gilt offenbar $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit
$\mathrm{e}\alpha$ (wegen $(*)$) und $x \notin \mathrm{Ke}\alpha$.

) Bemerkung: Für beliebige direkte Summen gilt die Aussage in (4.21) nicht
Die abelsche Gruppe $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n)$ ist kein Selbstkogenerator, denn sie
eduziert und nicht koatomar (HS2 in 4.4), allgemein gilt aber

satz 3 : Ein reduzierter Selbstkogenerator ist koatomar .

s: Sei $U \subsetneq M$. Wegen Selbstkogenerator gibt es $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit $U \subset \mathrm{Ke}\alpha \subsetneq M$,
ist die Abb. $M/U \xrightarrow{\alpha'} M$ nicht Null. Weil M reduziert ist, kann $\mathrm{Bi}\alpha'$
radikalvoll sein, also auch nicht M/U .

) Proposition: Jede komplementierte abelsche Gruppe ist Selbstkogenerator .

s: Nach (4.1o) und (4.21) muß man nur p-Gruppen betrachten . Für diese
aber von Liebert in ([9] Satz 2.4) gezeigt: Eine abelsche p-Gruppe ist
u dann Selbstkogenerator, wenn sie entweder nicht reduziert ist oder
iert und beschränkt. Ist nun im vorliegenden Fall die p-Gruppe M
ementiert und reduziert, so ist sie nach (4.4) beschränkt und damit das
rium von Liebert erfüllt. (Das Beispiel $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n))$ zeigt,
n der Proposition die Umkehrung i.allg. nicht gilt.)

ließend soll noch untersucht werden, ob sich die "Umkehrung" von Satz(4.1)
.5) verbessern läßt, d.h. wann ein komplementierter Modul direkte Summe von
legbaren Moduln ist. Es gilt dies nach (4.11) für jede komplementierte
che Gruppe und wird im Folgenden auf Dedekind-Ringe verallgemeinert, es
nach ([10], Corollary 4.4) auch für jeden projektiven, komplementierten
Modul und nach (3.3o) über K-Ringen für jeden komplementierten (SP2)-Modul.

(4.24) Theorem: Für einen noetherschen Integritätsring R sind äquivalent

(i) R ist dedekindsch

(ii) Jeder komplementierte R-Modul ist direkte Summe von unzerlegbaren Moduln

(iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ ist der Untermodulverband von $E_R(R/\mathfrak{m})$ total geordnet .

<u>Beweis</u>: (i → ii): I) Ist R ein Körper, so ist jeder R-Modul direkte Summe von einfachen Moduln. II) Ist R ein diskreter Bewertungsring und kein Körper, so hat jeder Modul N_R einen Basis-Untermodul, d.h. ein $B \subset N$ mit (1) N/B teilbar (2) B rein in N (3) B ist direkte Summe von zyklischen Moduln (vgl. [3] §32). Es folgt, daß jedes koatomare N_R direkte Summe von unzerlegbaren Moduln ist, denn N/B ist wieder koatomar, also wegen (1) Null, und die zyklischen Moduln $\neq o$ in (3) sind ja als Bilder des unzerlegbaren R wieder unzerlegbar. - Sei nun M_R komplementiert: Mit $M = D(M) \oplus N$ ist der reduzierte Anteil N wieder komplementiert, also nach (4.4) koatomar und nach dem eben gezeigten von der gewünschten Form. Der größte teilbare Untermodul $D(M)$ ist injektiv, also direkte Summe von direkt unzerlegbaren, injektiven Moduln ([11] Theorem 2.5), von denen jeder wieder komplementiert, also nach (2.13) unzerlegbar ist. III) Ist R ein nicht-lokaler Dedekindring und M_R komplementiert, so ist es nach (4.1o) torsionsvoll, also direkte Summe seiner $\mathfrak{m}$- Komponenten, $\mathfrak{m} \in \{\text{Max. Ideale von } R\}$ ([12] Theorem 1). Jeder $\mathfrak{m}$-primäre R-Modul läßt sich nun zu einem $R_{\mathfrak{m}}$-Modul machen mit dem gleichen Untermodulverband ([12] Proposition 2), und damit ist das Problem auf den Fall II) zurückgeführt.

(ii → iii): Sei maximal $\mathfrak{m} \subset R$ und $E(R/\mathfrak{m})$ injektive Hülle des einfachen R-Moduls $R/\mathfrak{m}$. Sie ist koendlich erzeugt, also bereits artinsch (weil R noethersch, [12] Prop. 3), und damit ist jeder von Null verschiedene Untermodul komplementiert und direkt unzerlegbar, also nach Vor. unzerlegbar. Gilt aber in einem Verband $\mathfrak{U}$: $U = V_1 + V_2 \Rightarrow U = V_1$ oder $U = V_2$ für alle U, $V_1, V_2 \in \mathfrak{U}$, so ist er bereits eine Kette.

(iii → i): Dieser Teil des Beweises beruht allein auf der vollständigen Untersuchung der injektiven Hüllen von einfachen Moduln durch Matlis in [11] : Es ist zu zeigen, daß $R_{\mathfrak{m}}$ für jedes maximale $\mathfrak{m} \subset R$ ein diskreter Bewertungsring ist. Zu $o \neq \mathfrak{m} \subset R$ werden in $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ die Untermoduln $A_i = \{x \mid x\mathfrak{m}^i = o\}$ $i = 1,2,\dots$ definiert, die nach ([11] Theorem 3.11) alle endlich erzeugt sind. Nach Vor. sind sie unzerlegbar, also schon zyklisch, sodaß speziell $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein 1-dimensionaler Vektorraum über $R/\mathfrak{m}$ ist ([11] Theorem 3.1o), und daraus folgt die Behauptung.

(4.25) <u>Bemerkung</u>: Mit den gleichen Methoden wie in (i → ii) läßt sich, zusammen mit (4.4) und (4.1) zeigen: Über einem Dedekindring ist jeder Torsionsmodul mit kleinem Radikal komplementiert .

5. Über das Liften von Idempotenten

5.1) Satz: Erfülle M die Bedingungen (SP1), (SP2) und sei $S = \mathrm{End}(M)$. Dann sind äquivalent

(a) In S lassen sich Idempotente modulo dem Radikal liften
(b) Ist $\alpha \in S$ und $\alpha^2 - \alpha \in \mathrm{Ra}(S)$, so hat $\mathrm{Bi}\alpha$ ein Komplement in M
(c) Sind $\alpha, \beta \in S$ und $\alpha\beta\alpha - \alpha \in \mathrm{Ra}(S)$, so hat $\mathrm{Bi}\alpha$ ein Komplement in M
(d) Ist $A + B = M$ und $A \cap B$ klein in M, so haben A u. B Komplemente in M
(e) Ist $A + B = M$ und $A \cap B$ klein in M, so gibt es $A' \subset A$ u. $B' \subset B$ mit $M = A' \oplus B'$

Falls zusätzlich $\mathrm{Ra}(M)$ klein in M ist, sind diese Bedingungen noch äquivalent mit ($\overline{M} = M/\mathrm{Ra}(M)$)
(f) $A \subset M$ und $\overline{A} \subset^{\oplus} \overline{M} \Rightarrow A$ hat ein Komplement in M
(g) Jeder dir. Summand von $\overline{M}$ ist Bild eines dir. Summanden von M
(h) Jede direkte Zerlegung von $\overline{M}$ ist von M induziert.

Beweis: Nach dem logischen Schema $a \to c \to b \to e \to a$ und $e \to d \to b$, sowie bei kleinem Radikal $e \to h \to g \to f \to d$. Die meisten Schritte sind Routine bis auf (b → e), weil dort nicht unmittelbar die sonst übliche Technik mit projektiven Hüllen anwendbar ist.

(a → c): Weil $\alpha\beta$ idempotent modulo $\mathrm{Ra}(S)$ ist, existiert ein Idempotent $\epsilon \in S$ mit $\epsilon - \alpha\beta \in \mathrm{Ra}(S)$, also sind $\mathrm{Bi}(\alpha\beta\alpha - \alpha)$ und $\mathrm{Bi}(\epsilon - \alpha\beta)$ klein in M. Aus $1_M = (1-\epsilon) + \alpha\beta + (\epsilon - \alpha\beta)$ folgt $M = \mathrm{Bi}(1-\epsilon) + \mathrm{Bi}\alpha$. Aus $\mathrm{Bi}(1-\epsilon) \cap \mathrm{Bi}\alpha \subset \mathrm{Bi}(1-\epsilon)\alpha \subset \mathrm{Bi}(\alpha\beta - \epsilon)\alpha + \mathrm{Bi}(\alpha - \alpha\beta\alpha)$ folgt, daß $\mathrm{Bi}(1-\epsilon) \cap \mathrm{Bi}\alpha$ klein in M ist, dann aber auch klein in $\mathrm{Bi}(1-\epsilon)$ ist wegen $\mathrm{Bi}(1-\epsilon) \subset^{\oplus} M$. (c → b): klar mit $\beta = 1$. (b → e): Seien A,B wie angegeben. Nach (SP2) gibt es $\alpha \in S$ mit $\mathrm{Bi}\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B$. Klar folgt $\alpha^2 - \alpha = (1-\alpha)^2 - (1-\alpha) \in \mathrm{Ra}(S)$, sodaß nach Vor. $\mathrm{Bi}\alpha$ ein Komplement U und $\mathrm{Bi}(1-\alpha)$ ein Komplement V in M hat. Nach (2.8) ist dann auch $(1-\alpha)(U)$ Komplement von $\mathrm{Bi}\alpha$ und $\alpha(V)$ Komplement von $\mathrm{Bi}(1-\alpha)$ in M. Aus $M = U + \mathrm{Bi}\alpha = V + \mathrm{Bi}(1-\alpha)$ folgt $M = (1-\alpha)(U) + \alpha(V) + \mathrm{Bi}(\alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)(U) + \alpha(V)$, sodaß also $(1-\alpha)(U)$ und $\alpha(V)$ gegenseitig Komplemente sind. Mit (SP2) folgt $M = (1-\alpha)(U) \oplus \alpha(V)$, und die direkten Summanden liegen wie gewünscht unter B bzw. A. (e → a): Ist $\alpha^2 - \alpha \in \mathrm{Ra}(S)$, so sei $A := \mathrm{Bi}\alpha$ und $B := \mathrm{Bi}(1-\alpha)$. Nach Vor. gibt es ein Idempotent $\epsilon \in S$ mit $\mathrm{Bi}\epsilon \subset \mathrm{Bi}\alpha$ und $\mathrm{Bi}(1-\epsilon) \subset \mathrm{Bi}(1-\alpha)$. Es folgt $\mathrm{Bi}(\epsilon - \alpha) \subset \mathrm{Bi}\alpha \cap \mathrm{Bi}(1-\alpha)$, also $\epsilon - \alpha \in \mathrm{Ra}(S)$. (e → d): Seien A,B wie angegeben. Nach Vor. gibt es $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit $M = A' \oplus B'$. Es folgt, daß A' Komplement von B und B' Komplement von A ist. (d → b): Klar mit $A := \mathrm{Bi}\alpha$ und $B := \mathrm{Bi}(1-\alpha)$.

(e → h): Sei $\overline{M} = \overline{A} \oplus \overline{B}$ mit $A,B \subset M$ und $N = \mathrm{Ra}(M)$ sowohl in A als auch in B enthalten. Nach Vor. gibt es $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit $M = A' \oplus B'$, und es folgt

$\overline{M} = \overline{A'} \oplus \overline{B}$, also $\overline{A'} = \overline{A}$ und ebenso $\overline{B'} = \overline{B}$. (h $\to$ g): klar. (g $\to$ f): Sei $A \subset M$ und $\overline{B} \oplus \overline{A} = \overline{M}$ mit $B \subset M$. Nach Vor. gibt es $B' \subset^{\oplus} M$ mit $\overline{B'} = \overline{B}$, also $(B' + N) + (A + N) = M$ und $(B' + N) \cap (A + N) = N$ und damit $B' + A = M$ und $B' \cap A$ klein in M. Weil $B' \subset^{\oplus} M$, folgt schließlich $B' \cap A$ klein in B'. (f $\to$ d): Seien A,B wie angegeben. Nach (1.6,vi) folgt $(A + N) \cap (B + N) = N \Rightarrow \overline{A} \oplus \overline{B} = \overline{M}$.

(5.2) <u>Folgerung</u>: ([10] Theorem 5.1, [7] Satz in 3., [5] Theorem 3.7): Ist M ein selbstprojektiver Modul mit kleinem Radikal, so sind äquivalent

(i) M ist komplementiert

(ii) M/Ra(M) ist halbeinfach und jede direkte Zerlegung ist von M induziert .

(5.3) <u>Folgerung</u>: Ist M ein selbstprojektiver Modul derart, daß sich im Endomorphismenring Idempotente modulo dem Radikal liften lassen, so ist in M jedes Komplement bereits direkter Summand.
Genauer gilt: Ist V Komplement von U in M , so gibt es nach (e) ein $U' \subset U$ mit $V \oplus U' = M$. Diese starke Form von Komplementiertheit ist von Bedeutung, weil sie eine abgeschwächte Maximalbedingung für direkte Summanden nach sich zieht (Proposition 6.4).

(5.4) <u>Folgerung</u>: Für selbstprojektives M sind äquivalent

(i) Der Endomorphismenring $S = \mathrm{End}(M)$ ist F-semiperfekt

(ii) Für jedes $\alpha \in S$ hat $Bi\alpha$ ein Komplement in M .

<u>Beweis</u>: Nach [15] heißt ein Ring F-semiperfekt, wenn sein Radikalfaktorring regulär ist und sich Idempotente modulo dem Radikal liften lassen.
(i $\to$ ii): Zu $\alpha \in S$ gibt es, weil S/Ra(S) regulär, ein $\beta \in S$ mit $\alpha\beta\alpha - \alpha \in Ra(S)$. Weil sich Idempotente liften lassen, hat nach Satz $Bi\alpha$ ein Komplement in M .
(ii $\to$ i): Nach Satz lassen sich in S Idempotente modulo dem Radikal liften. Es ist aber auch S/Ra(S) regulär, denn zu $\alpha \in S$ sei V ein Komplement von $Bi\alpha$. Nach (SP2) gibt es $\beta \in S$ mit $Bi\beta \subset Bi\alpha$ und $Bi(1-\beta) \subset V$, nach (SP1) weiter ein $\gamma \in S$ mit $\beta = \alpha\gamma$, und daraus folgt $Bi(\alpha - \alpha\gamma\alpha) \subset V \cap Bi\alpha$ klein in M, also $\alpha - \alpha\gamma\alpha \in Ra(S)$.

Aus dem Satz folgt auch das klassische Ergebnis, daß sich in einem Ring R Idempotente modulo $N = Ra(R)$ liften lassen, wenn N nil ist. Ist nämlich $u^2 - u \in N$ und $(u^2-u)^n = o$ für ein $n \geqslant 1$, so kann man leicht zeigen, daß u^nR Komplement von $(1-u)R$ ist und $(1-u)^nR$ Komplement von uR . Ein direkter Beweis, dem man ansieht "woher beim Liften das Idempotent kommt" , soll hier angegeben werden:

5.5) <u>Lemma</u>: Sei R ein unitärer Ring und $u \in R$. Dann gilt

(a) $u^nR + (1-u)^mR + (u-u^2)R = R$ für alle $n,m \geqslant 1$

(b) $u^nR \cap (1-u)^mR = u^n(1-u)^mR$ "

(c) Ist ein Rechtsideal $I \subset R$ nil, so lassen sich Idempotente modulo I liften .

<u>Beweis</u>: (a): Mit $J := (u-u^2)R$ gilt $1 - u^n - (1-u)^m \in J$, denn $1 - u - x \in J$ $\Rightarrow 1 - u - x(1-u) \in J$, sodaß durch Induktion folgt $1 - u - (1-u)^m \in J$ für alle $n \geqslant 1$. Weil auch $u - u^n \in J$ für alle $n \geqslant 1$, folgt die Behauptung. (b): Sei $x = u^n\alpha = (1-u)^m\beta$. Es folgt $\beta = u^n\alpha + tu\beta$ für ein $t \in R$, das mit u vertauschbar ist. Durch Linksmultiplikation mit u und Einsetzen erhält man $\beta = u^n\alpha + tu^{n+1}\alpha + tutu\beta = u^n\alpha' + t'u^2\beta$. Derselbe Prozeß liefert $\beta = u^n\alpha'' + t''u^4\beta$, sodaß man schließlich erhält $\beta = u^na + u^pb$ für ein $p \geqslant n$, also $\beta = u^na'$ und damit $x = (1-u)^mu^na'$. (c): Sei I wie angegeben, $u^2-u \in I$ und $(u^2-u)^n = o$ für ein $n \geqslant 1$. Weil I klein in R ist, folgt aus (a) und (b), daß $u^nR \oplus (1-u)^nR = R = eR \oplus (1-e)R$ für ein $e^2 = e \in R$. Aus $e \in uR$ und $1-e \in (1-u)R$ folgt schließlich noch $e-u \in uR \cap (1-u)R \subset I$.

Das Idempotent kann sogar in der Form $e = u^n.r$ gewählt werden, wobei r Einheit ist: Nach (a) gilt nämlich $1 - u^n - (1-u)^n \in Ra(R)$, sodaß $s = u^n + (1-u)^n$ invertierbar ist, also mit $r := s^{-1}$ folgt $1 = s.r = u^n.r + (1-u)^n.r$.

6. Semizornsche Moduln

Ein Ring R heißt zornsch ([1] § 6 Ex. 13) , wenn jedes Rechtsideal, das nicht nil ist, ein von Null verschiedenes Idempotent enthält. Insbesondere enthält dann jedes nicht-kleine Rechtsideal ein Idempotent, und diese schwächere Eigenschaft besitzen auch selbstinjektive und semiperfekte Ringe (s.u.) . Sie läßt sich auf Moduln verallgemeinern:

(6.1) <u>Definition</u>: Ein Modul M heiße <u>semizornsch</u> , wenn jeder nicht-kleine Untermodul einen von Null verschiedenen direkten Summanden (in M) umfaßt .

(6.2) <u>Beispiele</u>: Jeder halbeinfache Modul ist semizornsch, allgemeiner jeder Modul, in dem jeder zyklische Untermodul direkter Summand ist. Ist ein Modul selbstinjektiv und selbstprojektiv, so ist er semizornsch (6.7 und 6.9). In $\mathcal{Ab}$ ist weder $\mathbb{Z}$ noch $\mathbb{Q}$ semizornsch.
Für einen Ring R ist die Eigenschaft seitenunabhängig, denn aus idempotent $xy \neq o$ folgt idempotent $yxyx \neq o$. R ist genau dann zornsch, wenn es semizornsch ist und sein Radikal nil ist.
Mit R ist auch $\overline{R} = R/Ra(R)$ semizornsch (klar), und falls sich Idempotente modulo dem Radikal liften lassen, gilt auch die Umkehrung: $R \ni x \notin Ra(R)$ $o \neq \overline{x} \in \overline{R} \Rightarrow o \neq \overline{xr}$ idempotent in $\overline{R}$ für ein $r \in R$. Weil sich Idempotente liften lassen, folgt $e - xr \in Ra(R)$ für ein $e^2 = e \in R$. Es folgt $e \neq o$ und $[1 - (e - xr)]u = 1$, also $exru = e$ und damit idempotent $xrue =: e'$ mit $o \neq e' \in xR$. Speziell ist jeder F-semiperfekte Ring (vgl. 5.4) semizornsch, insbesondere also auch jeder selbstinjektive od. semiperfekte Ring .

Es ergibt sich ein enger Zusammenhang zwischen "semizornsch" und "komplementiert", und zwar unter gewissen Endlichkeitsbedingungen für die Menge der direkten Summanden von M : Im einfachsten Fall hat M nur die trivialen direkten Summanden. Unmittelbar aus den Definitionen folgt dafür:

(6.3) <u>Lemma</u>: Ein Modul ist genau dann unzerlegbar, wenn er direkt unzerlegbar und semizornsch ist .

Erfüllt ein Modul M die Maximalbedingung für direkte Summanden, so auch folgende Bedingung

(✱) Für alle $U \subset M$ hat $\{X \mid X \subset U \wedge X \subset^{\oplus} M\}$ ein maximales Element .

Die Umkehrung gilt i.allg. nicht, z.B. bei halbeinfachen Moduln. Ist jedoch M endlich erzeugt, so folgt aus $(\ast)$ bereits die Maximalbedingung für direkte Summanden: Hat man $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \subset M$ (wobei alle $U_i \subset^{\oplus} M$), so gibt es zu $U := \sum_{i=1}^{\infty} U_i$ nach $(\ast)$ ein maximales X_o , das endlich erzeugt ist, also in einem U_n enthalten ist. Es folgt $X_o = U_i$ für alle $i \geqslant n$.

(6.4) <u>Proposition</u>: Für einen Modul M sind äquivalent

(i) M ist "stark" komplementiert, d.h. zu jedem $U \subset M$ gibt es $V \subset M$ und $U' \subset U$ mit $M = V \oplus U'$ und V Komplement von U in M

(ii) M ist semizornsch und erfüllt die Bedingung $(\ast)$.

<u>Beweis</u>: (i $\to$ ii): Es ist klar, daß das angegebene U' maximales Element in der Menge $\{X \mid X \subset U \wedge X \subset^{\oplus} M\}$ ist, denn aus $U' \subset X \subset U \wedge X \subset^{\oplus} M$ folgt, daß V und X gegenseitig Komplemente sind, also $U' = X$. Ist nicht-klein $U \subset M$, so muß das angegebene U' ungleich Null sein, also ist M semizornsch.(ii $\to$ i): Sei $U \subset M$ und U' ein nach $(\ast)$ existierender maximaler direkter Summand unter U , $M = V \oplus U'$. Weil M semizornsch ist, kann gezeigt werden, daß V Komplement von U ist: $T \subset V \cap U$ mit $T \oplus S = M \Rightarrow (T + U') \oplus (S \cap V) = M$ (nach dem modularen Gesetz, da $T \subset V$) $\Longrightarrow T + U' = U' \Longrightarrow T \subset U' \cap V = o$, d.h. jeder direkte Summand unter $V \cap U$ ist bereits Null. Wegen semizornsch folgt $V \cap U$ klein in M, also auch klein in V .

(6.5) <u>Bemerkung</u>: Jeder unzerlegbare oder halbeinfache Modul ist stark komplementiert. Die abelsche Gruppe $M = \mathbb{Z}/(8) \times \mathbb{Z}/(2)$ aus Beispiel (1.11) ist komplementiert (artinsch), aber nicht stark komplementiert (wegen $E \subset M$ nicht semizornsch). Ein komplementierter Modul M mit der Bedingung (SP2) ist bereits stark komplementiert: Zunächst hat $U \subset M$ ein Komplement $V \subset M$, und dieses wieder ein Komplement $W \subset U$ (nach 2.9,i) . Weil nun V und W gegenseitig Komplemente sind, folgt $V \oplus W = M$.
In einem stark komplementierten Modul M ist jedes Komplement bereits direkter Summand: Ist koabgeschlossen $V \subset M$, so gibt es nach Vor. ein Komplement W von V und ein $V' \subset V$ mit $W \oplus V' = M$; weil auch V Komplement von W ist, folgt $V' = V$, also $V \subset^{\oplus} M$. Speziell liefert also die Proposition: Ein artinscher Modul ist genau dann semizornsch, wenn jedes Komplement bereits direkter Summand ist.

(6.6) <u>Korollar</u>: Es gelten folgende Äquivalenzen:

(i) M halbeinfach $\Longleftrightarrow$ M semizornsch $\wedge$ radikalfrei $\wedge$ mit $(\ast)$

(ii) R lokal $\Leftrightarrow$ R semizornsch und $o \neq 1$ sind die einzigen Idempotente

(iii) R semiperfekt $\Leftrightarrow$ R semizornsch und ohne unendliche Menge orthogonaler Idempotente

(iv) R rechtsartinsch $\Leftrightarrow$ R zornsch und rechtsnoethersch

Beweis: (i): ist klar. Es ist eine Verallgemeinerung von [8] Lemma 3.3 auf Moduln. (ii): ist die Aussage von (6.3) für Ringe. (iii): ist klar, weil bei Ringen semiperfekt mit stark komplementiert und (✱) mit der Maximalbedingung für direkte Summanden zusammenfällt. (iv): Aus rechtsartinsch folgt bekanntlich bei unitären Ringen rechtsnoethersch, und auch zornsch (denn R ist semiperfekt, also semizornsch, und das Radikal nil). Umgekehrt folgt aus zornsch und rechtsnoethersch zunächst semiperfekt (iii) und nilpotentes Radikal (weil in zornschen Ringen das Radikal nil ist), also semiprimär und daraus (wieder wegen noethersch) rechtsartinsch.- Zusatz: In (iv) läßt sich "zornsch" durch "π-regulär" ersetzen, weil für jeden Ring gilt: rechtsartinsch $\Rightarrow$ π-regulär $\Rightarrow$ zornsch .

Mit Hilfe des Begriffes "semizornsch" lassen sich unter den selbstprojektiven Moduln die charakterisieren, deren Endomorphismenring semiperfekt (lokal) ist:

(6.7) Proposition: Genüge M den Bedingungen (SP1), (SP2) und sei $S = End(M)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen

(a) S semizornsch $\Leftrightarrow$ M semizornsch

(b) S lokal $\Leftrightarrow$ M unzerlegbar

(c) S semiperfekt $\Leftrightarrow$ M komplementiert und mit Maximalbedingung für direkte Summanden

Hat M zusätzlich ein kleines Radikal, so gilt noch

(c') S semiperfekt $\Leftrightarrow$ M komplementiert und endlich erzeugt .

Beweis: (a): Sei der Ring S semizornsch und nicht-klein $U \subset M$. Nach (1.9) folgt nicht-klein $s(U) \subset S$, also $o \neq \varepsilon \in s(U)$ für ein Idempotent $\varepsilon \in S$. Es folgt $o \neq Bi\varepsilon \subset U$. Ist umgekehrt der Modul M semizornsch und $\alpha \notin Ra(S)$, also nicht-klein $Bi\alpha \subset M$, so gibt es ein Idempotent $\varepsilon \in S$ mit $o \neq Bi\varepsilon \subset Bi\alpha$. Nach (SP1) folgt $\varepsilon = \alpha\gamma$, also $o \neq \varepsilon \in \alpha S$.
(b): S lokal $\Leftrightarrow$ S semizornsch und $o \neq 1$ die einzigen Idempotente (6.6,ii) $\Leftrightarrow$ M semizornsch und direkt unzerlegbar (a) $\Leftrightarrow$ M unzerlegbar (6.3) .
(c): Sei nur für das Folgende (MDS) = Maximalbedingung für direkte Summanden. Es gilt: S semiperfekt $\Leftrightarrow$ S semizornsch mit (MDS) (6.6,iii) $\Leftrightarrow$ M semizornsch mit (MDS) (a und der von (s,d) zwischen den direkten Summanden von S_S und M_R induzierte Ordnungsisomorphismus) $\Leftrightarrow$ M (stark) komplementiert mit (MDS) (6.4 und Bemerkung) .

c'): Aus komplementiert folgt ($*$) nach (6.4) und daraus wegen endlich erzeugt (MDS). Sei umgekehrt M komplementiert mit (MDS) und Ra(M) klein in M: Wegen (MDS) gibt es ($M \neq o$) direkt unzerlegbare Untermoduln M_i, $1 \leq i \leq n$, mit $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Jedes dieser M_i ist wieder semizornsch mit kleinem Radikal, also (6.3) zyklisch und damit M endlich erzeugt.

(6.8) <u>Bemerkung</u>: Die Äquivalenz (c') gilt auch für projektive Moduln, denn ein semizornscher, projektiver Modul hat ein kleines Radikal (ang. Ra(M) nicht-klein in $M \Rightarrow o \neq T \subset Ra(M)$ mit $T \overset{\oplus}{\subset} M \Rightarrow T$ radikalvoll und projektiv, <u>Wid</u>.). Mit der stärkeren Voraussetzung " M semiperfekt " wird (c') in [10], Theorem 6.1 bewiesen.

(6.9) <u>Zusatz</u>: Genüge M den Bedingungen (SI1), (SI2) und sei $S = End(M)$. Dann gilt

(a) S ist F-semiperfekt ; Jeder nicht-große Untermodul von M ist in einem von M verschiedenen direkten Summanden enthalten

(b) S lokal $\Longleftrightarrow$ M direkt unzerlegbar

(c) S semiperfekt $\Longleftrightarrow$ M genügt der Maximalbedingung für direkte Summanden

Hat M zusätzlich einen großen Sockel, so gilt weiter

(c') S semiperfekt $\Longleftrightarrow$ M koendlich erzeugt .

<u>Beweis</u>: Für selbstinjektive Moduln sind die Punkte (a) und (b) wohlbekannt (etwa [15] Satz B, [11] Prop. 2.6) .
(a): Die zweite Aussage folgt bereits aus (SI2), denn ist $U \subset M$ mit $o \neq T \subset M$ und $T \cap U = o$, so gibt es nach (1.8) $T \subset T' \subset M$ und $U \subset U' \subset M$ mit $T' \oplus U' = M$. Klar ist $U' \neq M$.- Nach (5.4) ist S genau dann F-semiperfekt, wenn jedes zyklische Linksideal in ${}_SS$ ein Komplement hat: Zu $I = S\alpha$ hat $r(I) = \bigcap \{ Ke\beta \mid \beta \in I \}$ nach dem Zorn'schen Lemma ein Durschschnittskomplement V in M, und wie in (2.17) folgt mit (SI1) und (SI2), daß $l(V) = \{ \beta \mid U \subset Ke\beta \}$ ein (Additions-)Komplement von I in ${}_SS$ ist.
(b),(c): Weil S semizornsch, klar mit (6.6) .
(c'): Jeder koendlich erzeugte Modul hat die (MDS) . Sei umgekehrt $M \neq o$ mit (MDS) und großem Sockel: Aus ersterem folgt $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ mit M_i direkt unzerlegbar, also nach (a) irreduzibel, $1 \leq i \leq n$. Jedes dieser M_i hat wieder einen großen Sockel, der sogar einfach ist, sodaß mit allen M_i auch M koendlich erzeugt ist.

Literatur

1 N.Bourbaki : Algèbre, chap. 8 : Act.Sc.Ind. 1261, Hermann, Paris 1958

2 L.Fuchs : Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules : J. reine ang. Math. 239/24o (1969) 169-179

3 L.Fuchs : Infinite abelian groups : Academic Press, New York-London 197o

4 L.Fuchs - K.M.Rangaswamy : Quasi-projective abelian groups : Bull.Soc. math.France 98 (197o) 5-8

5 J.S.Golan : Quasiperfect modules : Quart.J.Math.Oxford (2), 22 (1971) 173-182

6 F.Kasch : Skript., Kap.II : Math. Institut der Universität München

7 F.Kasch - E.A.Mares : Eine Kennzeichnung semi-perfekter Moduln : Nagoya Math.J. 27 (1966) 525-529

8 F.Kasch - U.Oberst : Das Zentrum von Ringen mit Kettenbedingungen : Bayer. Akad.Wiss.,Math.-Naturw.Kl.,S.-B. 1o (197o) 161-179

9 W.Liebert : Charakterisierung der Endomorphismenringe beschränkter abelscher Gruppen : Math.Annalen 174 (1967) 217-232

1o E.A.Mares : Semiperfect modules : Math.Zeitschr. 82 (1963) 347-36o

11 E.Matlis : Injective modules over noetherian rings : Pac.J.Math. 8 (1958) 511-528

12 E.Matlis : Modules with descending chain condition : Trans.Amer.Math.Soc. 97 (196o) 495-5o8

13 Y.Miyashita : Quasi-projective modules, perfect modules, and a theorem for modular lattices : J.Fac.Sci.,Hokkaido Univ. (I) 19 (1966) 86-11o

14 B.J.Mueller : On semi-perfect rings : Illinois J.Math. 14 (197o) 464-467

15 U.Oberst - H.-J.Schneider : Die Struktur von projektiven Moduln : Inventiones math. 13 (1971) 295-3o4

16 B.Pareigis : Radikale und kleine Moduln : Bayer.Akad.Wiss.,Math.-Naturw. Kl.,S.-B. 14 (1965) 185-199

17 G.Renault : Etude des sous-modules compléments dans un module : Bull.Soc. math.France, Mémoire 9 (1967) 79 p.

18 G.Renault : Sur les anneaux A tels que tout A-module à gauche non nul contient un sous-module maximal : C.R.Acad.Sc. Paris 267 (1968) Serie A 792-794

19 F.L.Sandomierski : Relative injectivity and projectivity ; Thesis : The Pennsylvania State Univ. (1964)

2o B.Stenström : Direct sum decompositons in Grothendieck categories : Arkiv för Mat. 7 (1967) 427-432

21 Y.Utumi : On continuous rings and self-injective rings : Trans.Amer.Math. Soc. 118 (1965) 158-173

22 C.P.Walker : Relative homological algebra and abelian groups : Illinois J.Math. 1o (1966) 186-2o9

-

Lebenslauf

von Helmut Zöschinger

1.9.1941	Geburt in Bad Reichenhall
1947 - 1951	Volksschule in München
1951 - 196o	Humanistisches Theresien-Gymnasium in München, Reifeprüfung Juli 196o
196o - 1963	Studium Mathematik-Physik an der Universität München, Vorexamen 1963
1963/64	Studium Mathematik-Physik an der Universität Paris
1964 - 1968	Studium Mathematik-Physik an der Universität München, 1.Staats-Examen 1968
1969 - 1971	Pädagogisches Seminar am Gisela-Gymnasium München, 2.Staats-Examen 1971