JOURNAL OF ALGEBRA 29, 42–56 (1974)

Komplementierte Moduln über Dedekindringen

HELMUT ZÖSCHINGER

Mathematisches Institut der Universität München, 8 München 2, West Germany

Communicated by P. M. Cohn

Received October 20, 1972

EINLEITUNG

Ein Modul M heißt ***komplementiert***, wenn es zu jedem Untermodul U von M ein additives Komplement in M gibt, d.h. ein minimales Element in der Menge $\{T \mid T \subset M \text{ und } T + U = M\}$. Während die Existenz von "Durchschnitts-Komplementen," d.h. maximalen Elementen in $\{T \mid T \subset M$ und $U \cap T = 0\}$, durch das Zorn'sche Lemma gesichert ist, braucht es additive Komplemente i.allg. nicht zu geben. Ihre Existenz ist aber von Bedeutung; z.B. lautet das Hauptergebnis von Kasch–Mares in [4]: Ein projektiver Modul ist genau dann komplementiert, wenn er im Sinne von [5] semiperfekt ist. Allgemein erhebt sich die Frage nach der Bestimmung aller komplementierten Moduln über einem gegebenen Ring R. Für Dedekindringe wird diese Frage hier vollständig beantwortet, und speziell für $R = \mathbb{Z}$ lautet das Ergebnis: Eine abelsche Gruppe ist genau dann komplementiert, wenn sie Torsionsgruppe ist, bei der für jede p-Komponente gilt: Der divisible Anteil ist artinsch und der reduzierte beschränkt.

In §1 der vorliegenden Arbeit werden einige Eigenschaften von komplementierten Moduln über einem beliebigen Ring zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die unzerlegbaren Moduln, d.h. solche, bei denen die Summe von zwei echten Untermoduln wieder echt ist, die Rolle von "Bausteinen" für die komplementierten Moduln spielen. Für einen endlich erzeugten Modul M erhält man: M ist genau dann komplementiert, wenn jeder maximale Untermodul ein Komplement hat, und das ist äquivalent damit, daß M Summe von unzerlegbaren Untermoduln ist. Dadurch werden Ergebnisse von Mueller [8] und Sandomierski [10] über semiperfekte Ringe auf endlich erzeugte Moduln verallgemeinert.

In §2 wird zuerst die Struktur der komplementierten Moduln über einem diskreten Bewertungsring R angegeben: Ist K der Quotientenkörper, so ist ein R-Modul nach Theorem (2.4) genau dann komplementiert, wenn er von der Form ist $R^a \times K^b \times (K/R)^c \times B$ mit beschränktem B und ganzen

Zahlen $a, b, c \geqslant 0$. Dann wird untersucht, ob die Klasse der komplementierten R-Moduln gegenüber Untermoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist: Es ist nach (2.6) genau dann der Fall, wenn der diskrete Bewertungsring R vollständig ist. Schließlich wird in (2.7) gezeigt: Hat in einem R-Modul M jeder reine Untermodul ein Komplement, so ist M bereits reinzerfallend (d.h. jeder reine Untermodul ist direkter Summand), und das ist äquivalent damit, daß der reduzierte Anteil von M komplementiert ist.

In §3 wird zunächst das Studium von komplementierten Moduln über Dedekindringen zurückgeführt auf diskrete Bewertungsringe: Nach Theorem (3.1) ist über einem nicht-lokalen Dedekindring R ein Modul M_R genau dann komplementiert, wenn er torsionsvoll ist und wenn jede seiner Primärkomponenten komplementiert ist.—Dann werden für jeden Dedekindring R folgende Eigenschaften gezeigt:

(1) Jeder komplementierte R-Modul ist direkte Summe von Unzerlegbaren.

(2) Jeder koabgeschlossene Untermodul (Definition in 3.3) ist abgeschlossen.

(3) Jeder abgeschlossene Untermodul ist koabgeschlossen.

Im folgenden Sinn ist das sogar charakteristisch: Besitzt ein noetherscher Integritätsring eine dieser drei Eigenschaften, so ist er bereits dedekindsch.

Einige Ergebnisse dieser Arbeit sind in meiner Dissertation an der Universität München enthalten. Sie wurde von Herrn Friedrich Kasch angeregt, und ich danke ihm für das entgegengebrachte Interesse sowie dafür, daß er sie ermöglicht hat.

1. Komplementierte Moduln

In diesem Abschnitt ist R stets ein Ring mit Eins und alle Moduln sind unitäre Rechts-R-Moduln.

Definition [4]. Seien V, U Untermoduln von M. V heißt (Additions) *Komplement* von U in M, wenn es minimales Element in der Menge $\{T \mid T \subset M \text{ und } T + U = M\}$ ist. M heißt ***komplementiert***, wenn jeder Untermodul von M ein Komplement in M hat.

Mit Hilfe des modularen Gesetzes zeigt man, daß V genau dann Komplement von U in M ist, wenn $V + U = M$ gilt und $V \cap U$ klein in V ist, d.h. die kanonische Abbildung $V \to M/U$ ein wesentlicher Epimorphismus ist.

LEMMA 1.1. *Sei V Komplement von U in M. Dann gilt*:

(a) $X \subsetneqq V \Rightarrow V/X$ *nicht klein in* M/X,

(b) $X \subset V$ *und* X *klein in* $M \Rightarrow X$ *klein in* V,

(c) $Ra(V) = V \cap Ra(M)$,

(d) $Ra(M/U) = (Ra(M) + U)/U$,

(e) $$Ra(M) = (V + Ra(M)) \cap (U + Ra(M)) = (V \cap Ra(M)) + (U \cap Ra(M)).$$

Beweis. Unter $Ra(M)$ sei das Jacobson-Radikal verstanden, d.h. der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln = die Summe aller kleinen Untermoduln. (a) folgt unmittelbar aus der Definition des Komplements, und ($A \rightarrow B \rightarrow C$) ist klar. Weil $V \rightarrow M/U$ ein wesentlicher Epimorphismus ist, gilt $Ra(M/U) = (Ra(V) + U)/U$, also $Ra(M) + U = Ra(V) + U$, so daß (d) folgt. Für (e) sei $N = Ra(M)$: Aus $N + U = (V \cap N) + U$ folgt einerseits $N = (V \cap N) + (U \cap N)$, andrerseits

$$V \cap (N + U) = (V \cap N) + (U \cap V) = V \cap N,$$

also auch $(N + V) \cap (N + U) = N$.

LEMMA 1.2. (a) *Seien in dem kommutativen Diagramm f und h Epimorphismen, h wesentlich* (*d.h.* Ke h *klein in* Y).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow[h]{} & N \end{array}$$

Ist dann V ein Komplement von Ke f *in X, so ist $k(V)$ ein Komplement von* Ke g *in M.*

(b) *Ist $U \subset M$ und hat M/U eine projektive Hülle, so hat U ein Komplement in M.*

(c) *Ist V ein Komplement von U in M und* $\delta \in \mathrm{End}(M)$ *mit* $Bi(1 - \delta) \subset U$, *so ist auch $\delta(V)$ ein Komplement von U in M.*

(d) *Ist V ein Komplement von U in M und $X \subset U$, so ist $(V + X)/X$ ein Komplement von U/X in M/X.*

Beweis. (a) Allgemein gilt für zwei Epimorphismen

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C,$$

daß $\beta\alpha$ genau dann wesentlich ist, wenn es α und β ist. Wendet man das auf die Vor. an, so liefert folgende Gleichheit die Behauptung:

$$V \longrightarrow X/\mathrm{Ke} f \xrightarrow{\cong} Y \longrightarrow N = V \dashrightarrow k(V) \longrightarrow M/\mathrm{Ke}\, g \xrightarrow{\cong} N.$$

(b, c, d) erhält man dann aus den Diagrammen:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & M \arrow[d] \\ P \arrow[r] & M/U \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/U \arrow[r, dashed, "\cong"'] & M/U \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M/X \arrow[d] \\ M/U \arrow[r, equal] & M/U \end{tikzcd}.$$

Folgerung. *Jeder Faktormodul eines komplementierten Moduls ist wieder komplementiert.*

Bemerkung. Speziell ist mit M auch jeder direkte Summand komplementiert. Für beliebige Untermoduln gilt das nicht: Sei L ein Ring mit Unterringen K_1, K_2 derart, daß K_1 lokal und K_2 nicht semiperfekt ist (z.B. K_1 ein kommutativer Körper und $K_2 = L = K_1[X]$). Dann ist der Ring $R := \left[\begin{smallmatrix} K_1 & L \\ 0 & K_2 \end{smallmatrix}\right]$ nicht semiperfekt, hat jedoch das lokale Idempotent $e := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, so daß der Rechts-$R$-Modul eR unzerlegbar und damit $M := eR \times eR$ komplementiert ist (siehe 1.4, A). Mit $m := (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) \in M$ gilt $\mathrm{Ann}(m) = 0$, also ist $mR \cong R$ ein nicht komplementierter Untermodul von M. (Für eine Lösung dieses Problems über Dedekindringen siehe 2.6 und 3.1.)

Lemma 1.3. (a) *Sei $X + Y + U = M$. Ist dann X Komplement von $Y + U$ in M und Y Komplement von $X + U$ in M, so ist $X + Y$ Komplement von U in M.*

(b) *Seien M', $U \subset M$ und M' komplementiert. Hat dann $M' + U$ ein Komplement in M, so auch U.*

(c) *Sei $M = A + B$ mit A und B komplementiert. Dann ist auch M komplementiert.*

Beweis. (a) Um zu zeigen, daß $(X + Y) \cap U$ klein in $X + Y$ ist, genügt die triviale Bemerkung

$$(X + Y) \cap U \subset [X \cap (Y + U)] + [Y \cap (X + U)].$$

(b) Sei X Komplement von $M' + U$ in M und Y Komplement von $(X + U) \cap M'$ in M': Aus dem wesentlichen Epimorphismus

$$Y \longrightarrow M'/(X + U) \cap M' \xrightarrow{\cong} M/(X + U)$$

folgt, daß Y Komplement von $X + U$ in M ist, also nach (a) $X + Y$ Komplement von U in M ist.

(c) Für $U \subset M$ gilt mit (b): $A + B + U$ hat Komplement in M, $B + U$ hat Komplement in M, U hat Komplement in M.

FOLGERUNG (F. Dischinger). *Die direkte Summe von zwei komplementierten Moduln ist wieder komplementiert.*

FOLGERUNG. *Ist in* $0 \to X \subset M \to M/X \to 0$ *sowohl* X *als auch* M/X *komplementiert, und besitzt* X *in jedem Zwischenmodul* $X \subset H \subset M$ *ein Komplement, so ist* M *komplementiert.*

Zu $U \subset M$ sei nämlich V/X ein Komplement von $(U + X)/X$ in M/X und W ein Komplement von X in V. Dann ist wegen des wesentlichen Epimorphismus $W \to V/X \to M/U(+ X)$ auch W ein Komplement von $U + X$ in M, so daß nach (b) U ein Komplement in M hat. (Ein radikalfreier Loewy-Modul M der Länge 2 zeigt, daß man auf die Bedingung mit den Zwischenmoduln i.allg. nicht verzichten kann.)

SATZ 1.4. (A) *Ist* M *direkte Summe von unzerlegbaren Moduln und* $Ra(M)$ *klein in* M, *so ist* M *komplementiert.*

(B) *Für endlich erzeugtes* M *sind äquivalent:*

(i) *M ist komplementiert.*

(ii) *Jeder maximale Untermodul von M hat ein Komplement in M.*

(iii) *M ist Summe von unzerlegbaren Untermoduln.*

Beweis. Ein Modul X heißt unzerlegbar, wenn er nicht Null ist und für alle echten Untermoduln $A, B \subsetneqq X$ gilt: $A + B \subsetneqq X$. Ist X unzerlegbar und nicht radikalvoll, so ist es bereits zyklisch und $Ra(X)$ der größte von X verschiedene Untermodul.

(A) Sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit M_i unzerlegbar, $Ra(M)$ klein in M: Es folgt $M/Ra(M) = \overline{M} = \bigoplus_{i \in I} \overline{M}_i$ mit $\overline{M}_i$ einfach für alle $i \in I$. Zu $U \subset M$ gibt es ein $J \subset I$ mit $\overline{M} = (\bigoplus_{i \in J} \overline{M}_i) \oplus \overline{U}$. Mit $V := \bigoplus_{i \in J} M_i$ folgt $\overline{M} = \overline{V} \oplus \overline{U}$, also $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M. Weil V direkter Summand in M ist, folgt weiter $V \cap U$ klein in V.

(B) (i $\to$ ii): klar. (ii $\to$ iii): Sei S die Summe aller unzerlegbaren Untermoduln von M. Ang. $S \subsetneqq M$, so gibt es einen maximalen Untermodul U in M, der S enthält. U hat ein Komplement V, das wegen des wesentlichen Epimorphismus $V \to M/U$ unzerlegbar, also in S enthalten ist. Es folgt $U = M$, Wid. (iii $\to$ i): Weil M endlich erzeugt, hat man $M = \sum_{i \in I} M_i$ mit M_i unzerlegbar, I endlich. Weil jeder unzerlegbare Modul komplementiert ist, folgt mit (1.3, c) die Behauptung.

FOLGERUNG [8, Theorem 1]. *Ist in einem Ring R die Eins Summe von orthogonalen, lokalen Idempotenten, so ist R semiperfekt, denn man hat* $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i R$ *mit* $e_i R$ *unzerlegbar für alle* $1 \leqslant i \leqslant n$.

FOLGERUNG [8, Abschnitt 3; 10, Theorem 4]. *Hat jeder einfache Rechts-R-Modul eine projektive Hülle, so ist R semiperfekt, denn nach* (1.2,b) *hat jedes maximale Rechtsideal ein Komplement in R.*

DEFINITION. Ein Modul heißt *reduziert* (*koatomar*), wenn jeder radikalvolle Untermodul (Faktormodul) Null ist.

Unmittelbar aus diesen Definitionen folgt:

LEMMA 1.5. (a) *Sei exakt* $0 \to A \to B \to C \to 0$. *Sind dann A und C reduziert* (*koatomar*), *so auch B.*

(b) *Sei V Komplement von U in M. Dann ist mit* M/U *auch V radikalvoll* (*koatomar*).

(c) *Ist ein komplementierter Modul reduziert oder hat er ein kleines Radikal, so ist er koatomar.*

2. KOMPLEMENTIERTE MODULN ÜBER EINEM DISKRETEN BEWERTUNGSRING

In diesem Abschnitt ist R stets ein diskreter Bewertungsring, $K \neq R$ sein Quotientenkörper und p eine Uniformisierende. Man hat dann:

(α) Für jeden R-Modul M gilt $Ra(M) = Mp$, und daraus folgt, daß die Begriffe radikalvoll, p-teilbar und injektiv zusammenfallen.

(β) Jeder R-Modul M hat (siehe etwa [3, Lemma 21]) einen Basis-Untermodul S, d.h. ein $S \subset M$ derart, daß S direkte Summe von zyklischen Moduln ist, S rein in M und M/S injektiv ist.

(γ) Die einzigen unzerlegbaren R-Moduln sind bis auf Isomorphie R, K, K/R und $R/(p^n)$, $n \geqslant 1$.

LEMMA 2.1. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M hat ein kleines Radikal.*

(ii) *M ist koatomar.*

(iii) *M ist direkte Summe eines endlich erzeugten freien und eines beschränkten Moduls.*

(iv) *M ist reduziert und komplementiert.*

Beweis. (i $\to$ ii): Ist $U \subset M$ mit M/U radikalvoll, so folgt $Ra(M) + U = M$, also $U = M$.

(ii $\to$ iii): Sei S ein Basis-Untermodul von M: Weil M/S radikalvoll, ist es Null, also $S = M$ und damit $M = T(M) \oplus M'$ mit M' frei und $T(M)$ direkte Summe von zyklischen Torsionsmoduln. Der kanonische Epimorphismus $R^{(\mathbb{N})} \to K$ zeigt, daß $R^{(\mathbb{N})}$ nicht koatomar ist, also M' endlich erzeugt sein muß. Weil $T(M)$ koatomar, gibt es keinen Epimorphismus nach K/R, so daß $T(M)$ beschränkt sein muß.

(iii $\to$ iv): Sei $M = F \oplus B$ mit $F \simeq R^n$ und B beschränkt. Klar ist M reduziert und F komplementiert. Nach (1.4,A) ist auch B komplementiert, und damit auch M.

(iv $\to$ ii $\to$ i) gilt mit (1.5,c) über beliebigen Ringen.

FOLGERUNG. *Hat in M_R das Radikal ein Komplement, so auch in jedem Faktormodul.*

Nach (1.5,b) ist jedes Komplement V von $Ra(M)$ koatomar, so daß für ein $X \subset M$ auch in $(V + X)/X + Ra(M/X) = M/X$ der erste Summand koatomar ist, also $Ra(M/X)$ nach (1.3,b) ein Komplement in M/X hat.

FOLGERUNG. *Ist M_R torsionsvoll und reduziert und V ein Komplement des Radikals, so ist M bereits beschrankt.*

V ist koatomar, also beschränkt, und aus $Vp^n = 0$ folgt $Mp^{n+1} = Mp^n$ teilbar, also $Mp^n = 0$. Insbesondere hat im Modul $X = \coprod_{n=1}^{\infty} R/(p^n)$ das Radikal kein Komplement, ebensowenig in $R^{(\mathbb{N})}$ (weil es X als Faktor hat).

LEMMA 2.2. *Sei exakt $0 \to A \to B \to C \to 0$ und reduziert C. Dann gilt: B ist genau dann komplementiert, wenn es A und C ist.*

Beweis. Ist $A \subset B$ mit B/A reduziert, B komplementiert, so ist der divisible Anteil $D(A)$ als direkter Summand wieder komplementiert. Mit $A/D(A)$ und B/A ist auch $B/D(A)$ reduziert, also sogar koatomar: Mit Punkt (α) der Einleitung ist dann auch der Untermodul $A/D(A)$ koatomar, also A komplementiert.

Ist umgekehrt $A \subset B$ mit B/A reduziert, A und B/A komplementiert, so sind in der exakten Folge $0 \to A/D(A) \subset B/D(A) \to B/A \to 0$ das erste und dritte Glied koatomar, also auch $B/D(A)$. Mit $D(A)$ ist daher auch B komplementiert.

FOLGERUNG. *Ein Modul M_R ist genau dann komplementiert, wenn es $Ra(M)$ ist.*

LEMMA 2.3. *Für einen R-Modul M mit $U \subset Ra(M)$ sind äquivalent:*

(i) *U hat ein Komplement in M.*

(ii) *$Ra(U)$ hat ein Komplement in U.*

Beweis. (i → ii): Sei V Komplement von U in M. Weil $V \cap U$ klein in V, ist $V \cap U$ koatomar, denn $T \subsetneqq V \cap U$ hat zur Folge $0 \neq (V \cap U)/T$ klein in V/T, also $(V \cap U)/T$ nicht radikalvoll. $V \cap U$ ist also komplementiert, und aus $(V \cap U) + Ra(U) = Ra(U) + (Ra(V) \cap U) = Ra(M) \cap U = U$ folgt nach (1.3,b), daß $Ra(U)$ ein Komplement in U hat.

(ii → i): Man betrachte die Menge $Q(U, M) := \{A \mid A \subset U$ und U/A direkter Summand in $M/A\}$. Dann gilt $A \in Q(U, M) \Leftrightarrow A + Ra(U) = U$, denn aus der rechten Bedingung folgt U/A radikalvoll, also injektiv und damit stets direkter Summand; aus der linken Bedingung folgt umgekehrt $Ra(U/A) = U/A \cap Ra(M/A)$, also $Ra(U) + A = U \cap (Ra(M) + A) = U$. Nun hat nach Vor. $Ra(U)$ ein Komplement in U, d.h. es gibt ein minimales $A_0 \in Q(U, M)$: Mit $V/A_0 \oplus U/A_0 = M/A_0$, $A_0 \subset V \subset M$, ist V ein Komplement von U in M, denn die Summe ist klar, und aus $T \subset V$ mit $T + U = M$ folgt $T \cap U \in Q(U, M)$ und $T \cap U \subset V \cap U = A_0$, also $T \cap U = V \cap U$ und damit $T = V$.

THEOREM 2.4. *Ein Modul M_R ist genau dann komplementiert, wenn er sich darstellen läßt als $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$ mit $M_1 \cong R^{n_1}$, $M_2 \cong K^{n_2}$, $M_3 \cong (K/R)^{n_3}$ und $M_4 p^{n_4} = 0$ für ganze Zahlen $n_i \geqslant 0$.*

Beweis. Ein Modul der angegebenen Gestalt ist gewiß komplementiert, denn M_4 ist es nach (2.1), also auch M als direkte Summe von endlich vielen komplementierten.—Sei umgekehrt M komplementiert, $M = D(M) \oplus M'$: Nach (2.1) hat man $M' = M_1 \oplus M_4$ mit M_1 endlich erzeugt frei und M_4 beschränkt. $D(M)$ ist bekanntlich von der Form $M_2 \oplus M_3$ mit $M_2 \cong K^{(I)}$ und $M_3 \cong (K/R)^{(J)}$, und es bleibt zu zeigen, daß I und J endlich sind, d.h. $K^{(\mathbb{N})}$ und $(K/R)^{(\mathbb{N})}$ nicht komplementiert sind. Weil $Y := (K/R)^{(\mathbb{N})}$ Faktor von $K^{(\mathbb{N})}$ ist, genügt es, die Nicht-Komplementiertheit von Y zu zeigen: Y hat einen Untermodul $X \cong \coprod_{n=1}^{\infty} R/(p^n)$, und weil $Ra(X)$ kein Komplement in X hat (2.1 Folg.2), hat X nach (2.3) kein Komplement in Y.

FOLGERUNG. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *Es gibt ein $n \geqslant 1$ mit $Ra^n(M)$ artinsch.*

(ii) *Der divisible Anteil von M ist artinsch und der reduzierte Anteil beschränkt.*

(iii) *M ist torsionsvoll und komplementiert.*

LEMMA 2.5. *Sei exakt* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *und torsionsvoll* A. *Dann gilt*: B *ist genau dann komplementiert, wenn es* A *und* C *ist.*

Beweis. Ist $A \subset B$ mit A torsionsvoll, B komplementiert, so ist $T(B)$ als direkter Summand wieder komplementiert, also nach (2.4 Folg.) auch der Untermodul A.

Ist umgekehrt $A \subset B$ mit A torsionsvoll, A und B/A komplementiert, so gibt es nach (2.4 Folg.) ein $m \geqslant 1$ derart, daß $Ra^m(A)$ radikalvoll ist. Es zerfällt also die Folge $0 \to Ra^m(A) \subset Ra^m(B) \to Ra^m(B)/Ra^m(A) \to 0$, und weil das letzte Glied als epimorphes Bild von B/A komplementiert ist, ist es auch $Ra^m(B)$, so daß nach (2.2 Folg.) auch B komplementiert ist.

FOLGERUNG. *Ein Modul* M_R *ist genau dann komplementiert, wenn es* $T(M)$ *und* $M/T(M)$ *ist. Für* $X \subset M$ *gilt*: M/X *ist genau dann komplementiert, wenn es* $M/Ra(X)$ *ist.*

SATZ 2.6. *Für einen R-Modul M sind äquivalent*:

(i) *M läßt sich in einen komplementierten Modul einbetten.*

(ii) *M ist Erweiterung eines komplementierten Moduls durch einen komplementierten.*

(iii) *Jedes U mit* $U \subset Ra(M)$ *hat ein Komplement in M.*

(iv) *Der torsionsvolle Anteil von M ist komplementiert, und der torsionsfreie Anteil hat endlichen Rang.*

Beweis. (i $\to$ iv): Sei $M \cong A \subset B$ mit B komplementiert. Nach (2.5) ist $T(A)$ komplementiert, nach (2.4) hat man $\mathrm{Rang}(B/T(B)) < \infty$, also auch $\mathrm{Rang}(A/T(A)) < \infty$.

(iv $\to$ i): Aus $T(M)$ komplementiert folgt $T(M)/D(T(M))$ beschränkter, reiner Untermodul von $M/D(T(M))$, also direkter Summand, und damit $M = T(M) \oplus M'$. Weil $\mathrm{Rang}(M') < \infty$, ist die injektive Hülle $E(M')$ komplementiert, so daß M in den komplementierten Modul $T(M) \times E(M')$ eingebettet ist.

(i $\to$ iii): Sei $M \cong A \subset B$ mit B komplementiert, $U \subset Ra(A)$: Weil $U \subset Ra(B)$ und U ein Komplement in B hat, hat $Ra(U)$ nach (2.3) ein Komplement in U, also wieder nach (2.3) U ein Komplement in A.

(iii $\to$ ii): Aus der Vor. über M folgt durch zweimalige Anwendung von (2.3), daß für jedes $U \subset M$ gilt: $Ra(U)$ hat ein Komplement in U. Sei nun V ein Komplement von $Ra(M)$ in M: Es ist exakt $0 \to V \cap Ra(M) \subset M \to (M/V) \times (M/Ra(M)) \to 0$, und das erste Glied ist klein in M, also koatomar (wie in 2.3, i $\to$ ii). Weil $M/Ra(M)$ halbeinfach ist, bleibt zu zeigen, daß

M/V komplementiert ist: Zu jedem $V \subset A \subset M$ hat $Ra(A)$ ein Komplement in A, also nach (2.1 Folg.1) auch $Ra(A/V)$ ein Komplement in A/V. Weil M/V radikalvoll, ist es damit nach (2.3) komplementiert.

(ii $\to$ i): Sei $X \subset M$ mit X und M/X komplementiert: Mit $X = T(X) \oplus X'$ ist exakt $0 \to X/X' \subset M/X' \to M/X \to 0$, also nach (2.5) komplementiert M/X'. Nach (2.4) ist die injektive Hülle $E(X')$ komplementiert, so daß in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[d, "\varepsilon"'] & \subset & M \arrow[r, "\nu"] \arrow[dll, dashed, "\delta"'] \arrow[d, dashed, "(\delta,\nu)"] & M/X' \arrow[r] \arrow[dl, "\text{kan.}"] & 0 \\
& E(X') \arrow[rr, "\text{kan.}"'] & & E(X') \times M/X' & &
\end{tikzcd}$$

M durch den Monomorphismus (δ, ν) in das komplementierte $E(X') \times M/X'$ eingebettet wird.

FOLGERUNG. *Für den diskreten Bewertungsring R sind äquivalent*: (a) *Jeder Untermodul eines komplementierten Moduls ist wieder komplementiert.* (b) *Jede Erweiterung eines komplementierten Moduls durch einen komplementierten ist selbst komplementiert.* (c) *Hat in einem Modul jeder Untermodul des Radikals ein Komplement, so ist der Modul selbst komplementiert.* (d) *Jeder torsionsfreie, reduzierte Modul von endlichem Rang ist frei.*

Das Letztere ist aber nach Kaplansky [3, Theoreme 19 und 20] äquivalent damit, daß R vollständig ist.

Bemerkung. Die Reihe der Äquivalenzen in (2.6) läßt sich fortsetzen zu (ii'): M ist wesentliche Überdeckung eines komplementierten Moduls, und (iii'): Zu jedem $U \subset M$ gibt es ein $V \subset M$ mit $V + U = M$ und $V \cap U$ klein in M.

SATZ 2.7. *Für einen R-Modul M sind äquivalent*:

(i) *Jeder reine Untermodul ist direkter Summand in M.*

(ii) *Jeder reine Untermodul hat ein Komplement in M.*

(iii) *Jedes U mit $D(M) \subset U \subset M$ hat ein Komplement in M.*

(iv) *Der reduzierte Anteil von M ist komplementiert.*

Beweis. (i $\to$ ii): klar.

(ii $\to$ iv): Ist rein $X \subset M$, so hat auch M/X wieder die Eigenschaft (ii); sie vererbt sich also insbesondere auf direkte Summanden. Sei also M reduziert mit (ii), S ein Basis-Untermodul, V ein Komplement von S in M:

Nach (1.5,b) ist V radikalvoll, also Null, und aus $S = M$ folgt $M = T(M) \oplus M'$ mit M' frei und $T(M)$ direkte Summe von zyklischen Torsionsmoduln. M' muß endlich erzeugt sein, andernfalls gäbe es einen Epimorphismus $f: M' \twoheadrightarrow K$; dessen Kern ist rein in M', hat aber kein Komplement in M' (wie eben mit S), Wid. Ebenso muß $T(M)$ beschränkt sein, andernfalls gäbe es nach [3, Exercise 17] einen Epimorphismus $g: T(M) \twoheadrightarrow K/R$ mit reinem Kern; der kann aber kein Komplement in $T(M)$ haben, Wid.

(iv $\Leftrightarrow$ iii): In der einen Richtung folgt die Komplementiertheit von $M/D(M)$ unmittelbar aus (1.2,d). Ist umgekehrt $M = D(M) \oplus M'$ mit M' komplementiert, und U wie angegeben, so folgt aus $M' + U = M$ nach (1.3,b), daß U ein Komplement in M hat.

(iv $\twoheadrightarrow$ i): Sei $M/D(M)$ komplementiert. Für den Ulm-Untermodul $H(M) := \bigcap_{n=1}^{\infty} Mp^n$ gilt dann $H(M) = D(M)$ denn in der Darstellung $M = D(M) \oplus M'$ ist $H(M') = 0$. Sei nun zunächst spezieller X torsionsvoll und rein in M: Dann ist $X/H(X)$ als Untermodul (bis auf Isomorphie) von $M/H(M)$ beschränkt, so daß folgt $Xp^n = H(X) = D(X)$ für ein $n \geqslant 1$. Weil nun $X/D(X)$ beschränkter, reiner Untermodul von $M/D(X)$ ist, ist X direkter Summand in M.

Ist nun allgemein U rein in M, so folgt aus dem eben Gezeigten, daß $T(U)$ direkter Summand in M ist, und daraus $H(U) = D(U)$, denn in $U = T(U) \oplus U'$ haben beide Summanden die Eigenschaft $H = D$. Damit ist $U \cap D(M) = D(U)$ direkter Summand in M. Man ist fertig, wenn gezeigt ist, daß auch $U + D(M)$ direkter Summand in M ist, d.h. $U_1 = (U + D(M))/D(M)$ direkter Summand in $M_1 = M/D(M)$: Weil U_1 rein in M_1, ist $U_1 \cap T(M_1) = T(U_1)$ nach oben direkter Summand in M_1. Bleibt zu zeigen, daß auch $U_1 + T(M_1)$ direkter Summand in M_1 ist, d.h. $U_2 = (U_1 + T(M_1))/T(M_1)$ direkter Summand in $M_2 = M_1/T(M_1)$: Nun ist aber $M_2 \cong R^a$, und darin ist jeder reine Untermodul direkter Summand (wohlbekannt, oder mit 3.3 Folg.).

Bemerkung. Nennt man einen Modul *reinzerfallend*, wenn er die Eigenschaft (i) besitzt, so erhält man aus dem Satz: In einem reinzerfallenden R-Modul ist jeder Basis-Untermodul ein Komplement des Radikals. Falls der diskrete Bewertungsring R vollständig ist (und nur dann), ist das sogar charakteristisch für reinzerfallend.

3. Charakterisierungen von Dedekindringen

Bezeichnungen. Integritätsring meint kommutativ und nullteilerfrei mit $1 \neq 0$, Dedekindring meint integer und jedes Ideal $\neq 0$ invertierbar.

THEOREM 3.1. *Über einem nicht-lokalen Dedekindring ist ein Modul genau dann komplementiert, wenn er torsionsvoll ist und wenn jede seiner Primärkomponenten komplementiert ist.*

Beweis. Zwei Vorbemerkungen:

(1) Ist der Quotientenkörper K_R eines Integritätsringes R komplementiert, so ist K_R bereits unzerlegbar: $U \subsetneq K$ hat ein Komplement V in K, und mit K ist auch V teilbar, also (weil torsionsfrei) injektiv. Es folgt $V = K$, also U klein in K.

(2) Ist der Quotientenkörper K_R eines Dedekindringes R komplementiert, so ist R bereits lokal (also Körper oder diskreter Bewertungsring): Falls R Körper, ist alles klar; andernfalls ist K/R Kogenerator in der Kategorie der R-Moduln, der nach (1) unzerlegbar ist. Ein kommutativer Ring mit einem direkt unzerlegbaren Kogenerator ist aber bereits lokal.

Sei nun R ein nicht-lokaler Dedekindring und M_R komplementiert: Es ist $\tilde{M} := M/T(M)$ radikalvoll, denn ein maximales $U \subset M$ mit $T(M) \subset U$ hätte ein Komplement V, das wegen des wesentlichen Epimorphismus $V \to M/U$ zyklisch und unzerlegbar, also torsionsvoll wäre (weil R nicht lokal), so daß $U = M$ folgte, Wid. Nach Pareigis [9, Satz 6.1] ist über einem Dedekindring jeder radikalvolle Modul injektiv, also $\tilde{M} \cong K^{(I)}$, so daß nach Vorbem. (2) gelten muß $I = \varnothing$, also $M = T(M)$. Nach Matlis [7, Theorem 1] ist nun M direkte Summe seiner Primärkomponenten, von denen klar jede wieder komplementiert ist.

Sei umgekehrt M_R torsionsvoll und jede Primärkomponente M_i komplementiert, $i \in I =$ Menge der maximalen Ideale des nicht-lokalen Dedekindringes R. Die Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ hat zusätzlich folgende Eigenschaft $(*)$: $X = \sum_{i \in I} (X \cap M_i)$ für alle $X \subset M$. Daraus folgt nun die Komplementiertheit von M, denn ist zu $U \subset M$, für jedes $i \in I$, V_i ein Komplement von $U \cap M_i$ in M_i, so zeigt man mit $(*)$, daß $V := \sum_{i \in I} V_i$ ein Komplement von U in M ist.

ERGEBNIS. Durch Lokalisieren erhält man aus §2:

Über einem Dedekindring R ist jeder komplementierte Modul reinzerfallend und direkte Summe von Unzerlegbaren. Ist R nicht-lokal, so ist in einer exakten Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ der Modul B genau dann komplementiert, wenn es A und C ist.

LEMMA 3.2. *Für einen noetherschen Integritätsring R sind äquivalent:*

(i) *Jeder irreduzible artinsche R-Modul ist unzerlegbar.*

(ii) *Jeder unzerlegbare noethersche R-Modul ist irreduzibel.*

(iii) *R ist dedekindsch.*

Beweis. Ein Modul X heißt irreduzibel, wenn er nicht Null ist und für alle Untermoduln $0 \neq A$, $B \subset X$ gilt: $A \cap B \neq 0$.—Die Inklusionen (iii $\to$ i, ii) sind bekannt, und auch die Umkehrungen werden auf bekannte Charakterisierungen von Dedekindringen zurückgeführt: Aus (i) folgt stärker, daß jeder irreduzible artinsche Modul Kette ist, d.h. einen totalgeordneten Untermodulverband hat (jeder Untermodul $\neq 0$ ist unzerlegbar), und damit jeder endlich erzeugte Untermodul zyklisch ist: Speziell sind für jedes maximale Ideal $0 \neq \mathfrak{m} \subset R$ in $E(R/\mathfrak{m})$ die nach Matlis [6, Theorem 3.11] definierten Untermoduln $A_i = \{x \mid x\mathfrak{m}^i = 0\}$, $i = 1, 2, \ldots$ zyklisch, also $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein 1-dimensionaler Vektorraum über $R/\mathfrak{m}$ [6, Theorem 3.10]. Nach [1, §2, Ex. 7] ist damit R dedekindsch.—Aus (ii) folgt stärker, daß jeder unzerlegbare noethersche Modul Kette ist (jeder Faktormodul $\neq 0$ ist irreduzibel), speziell also Kette alle $R/\mathfrak{m}^s$ für $s \geqslant 1$, maximal $\mathfrak{m} \subset R$. Wieder etwa nach [1, §2, Ex. 7] ist nun R dedekindsch.

FOLGERUNG. *Für einen noetherschen Integritätsring R sind äquivalent:*

(i) *Jeder komplementierte R-Modul ist direkte Summe von Unzerlegbaren.*

(ii) *R ist dedekindsch.*

DEFINITION [2]. Ein Untermodul $V \subset M$ heißt *koabgeschlossen* in M, wenn für jedes $X \subsetneqq V$ gilt: V/X ist nicht klein in M/X.

Ist V Komplement in M, so ist es nach (1.1,a) koabgeschlossen. Ist umgekehrt V koabgeschlossen in M und *hat* es ein Komplement in M, so *ist* es auch Komplement in M nach (1.1,a $\to$ b).

LEMMA 3.3. *Sei R dedekindsch und $V \subset M_R$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Für alle $X \subsetneqq V$ ist V/X nicht klein in M/X (koabgeschlossen).*

(b) *Für alle maximalen $X \subset V$ ist V/X direkter Summand in M/X.*

(c) *Für alle maximalen $\mathfrak{m} \subset R$ gilt: $V\mathfrak{m} = V \cap M\mathfrak{m}$.*

(c′) *Für alle maximalen $\mathfrak{m} \subset R$ gilt: $\mathfrak{m}_M^{-1}(V) = \mathfrak{m}_M^{-1}(0) + V$.*

(b′) *Für alle $X \subset M$ mit maximal $V \subset X$ ist V direkter Summand in X.*

(a′) *Für alle $X \subset M$ mit $V \subsetneqq X$ ist V nicht groß in X (abgeschlossen).*

Beweis. Mit $V\mathfrak{m}$ ist der Untermodul $\{\sum v_i r_i \mid v_i \in V, r_i \in \mathfrak{m}\}$ bezeichnet, mit $\mathfrak{m}_M^{-1}(V)$ der Untermodul $\{x \mid x \in M \text{ und } x\mathfrak{m} \subset V\}$. Ist nun maximal $\mathfrak{m} \subset R$, so ist $V\mathfrak{m} = \bigcap \{T \mid T \subset V \text{ und } V/T \cong R/\mathfrak{m}\}$ (Lokalisiertes Radikal) und $\mathfrak{m}_M^{-1}(V)/V = \sum \{T \mid T \subset M/V \text{ und } T \cong R/\mathfrak{m}\}$ (Lokalisierter Sockel). Damit sind die Äquivalenzen (b $\leftrightarrow$ c) und (b′ $\leftrightarrow$ c′) klar (über jedem kommutativen Ring). Ist R spezieller integer und $\mathfrak{m}$ invertierbar, so gilt $(\mathfrak{m}_M^{-1}(V))\mathfrak{m} =$

$V \cap M\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_M^{-1}(V\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_M^{-1}(0) + V$, so daß über einem Dedekindring die Äquivalenz (c $\leftrightarrow$ c′) gilt.

Weil jeder nicht-kleine minimale (nicht-große maximale) Untermodul direkter Summand ist, gilt über jedem Ring (a $\to$ b) und (a′ $\to$ b′). Ist umgekehrt (b) erfüllt und $X \subset V$ mit V/X klein in M/X, so hat V/X keinen maximalen Untermodul, ist also injektiv (weil R dedekindsch) und es folgt $X = V$. Ist schließlich (b′) erfüllt und $V \subset X \subset M$ mit V groß in X, so ist X/V torsionsvoll und hat keinen einfachen Untermodul, ist also gleichzeitig torsionsfrei (weil R dedekindsch) und es folgt $V = X$.

FOLGERUNG. *Über einem Dedekindring gilt für jeden Modul M: Sind A und B gegenseitig Komplemente in M mit $T(M) \subset B$, so ist $M = A \oplus B$.*

Aus den Vor. über B folgt nämlich, daß $A/A \cap B \cong M/B \cong (M/T(M))/(B/T(M))$ torsionsfrei ist, also $A \cap B$ koabgeschlossen in A; weil es auch klein in A ist, folgt $A \cap B = 0$.

SATZ 3.4. *Für einen noetherschen Integritätsring R sind äquivalent:*

(i) *Jeder koabgeschlossene Untermodul ist abgeschlossen.*

(ii) *Jeder abgeschlossene Untermodul ist koabgeschlossen.*

(iii) *R ist dedekindsch.*

Beweis. Klar ist (iii $\to$ i, ii) nach oben. Zur Umkehrung, etwa (i $\to$ iii), sei für das Kriterium (3.2) M ein irreduzibler, artinscher Modul und $U \subsetneqq M$: Ein Komplement V von U in M ist koabgeschlossen, also nach Vor. abgeschlossen und erfüllt (3.3,b′). Weil V keinen oberen Nachbarn in M hat, folgt $V = M$, also U klein in M: M ist unzerlegbar. Ebenso zeigt man für (ii $\to$ iii): Ist in einem unzerlegbaren noetherschen Modul M jeder abgeschlossene Untermodul koabgeschlossen, so ist M irreduzibel.

LITERATUR

1. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," Ch. 7, Act. Sc. Ind. 1314, Hermann, Paris, 1965.
2. J. S. GOLAN, Quasi perfect modules, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2* **22** (1971), 173–182.
3. I. KAPLANSKY, "Infinite Abelian Groups," University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1969.
4. F. KASCH AND E. A. MARES, Eine Kennzeichnung semiperfekter Moduln, *Nagoya Math. J.* **27** (1966), 525–529.
5. E. A. MARES, Semiperfect modules, *Math. Z.* **82** (1963), 347–360.
6. E. MATLIS, Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.

7. E. Matlis, Modules with descending chain condition, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), 495–508.
8. B. J. Mueller, On semiperfect rings, *Illinois J. Math.* **14** (1970), 464–467.
9. B. Pareigis, Radikale und kleine Moduln, *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B.* **14** (1965), 185–199.
10. F. L. Sandomierski, On semiperfect and perfect rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), 205–207.