Komplemente als direkte Summanden

Von

Helmut Zöschinger

Einleitung. Ein semiperfekter Modul M hat folgende Eigenschaften:

(I) Zu jedem Paar (A, B) mit $A + B = M$ gibt es ein Komplement von A, das in B enthalten ist.

(II) Zu jedem $U \subset M$ gibt es ein Komplement V von U derart, daß $V \cap U$ direkter Summand in U ist.

Moduln mit der Eigenschaft (I) heißen in [2] *supplementiert*, solche mit (II) nennen wir *stark komplementiert*. Zwischen beiden besteht folgender Zusammenhang: M ist genau dann stark komplementiert, wenn es supplementiert ist und wenn in M jedes Komplement direkter Summand ist.

Das Problem, über einem gegebenen Ring R alle supplementierten (stark komplementierten) Moduln zu bestimmen, hat für Dedekindringe folgende Lösung:

(I) Ist R ein nicht-lokaler oder ein lokaler, vollständiger Dedekindring, so ist jeder komplementierte R-Modul bereits supplementiert; ist R ein nichtvollständiger diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, so sind die supplementierten R-Moduln genau die von der Form $R^a \times K^b \times (K/R)^c \times B$ mit beschränktem B und ganzen Zahlen $a, b, c \geqq 0$ mit $b \leqq 1$.

(II) Ist R ein nicht-lokaler Dedekindring, so ist ein R-Modul genau dann stark komplementiert, wenn er torsionsvoll ist und wenn jede Primärkomponente stark komplementiert ist; ist R ein diskreter Bewertungsring, so ist ein R-Modul genau dann stark komplementiert, wenn er von der Form ist $R^a \times K^b \times (K/R)^c$ mit $b \leqq 1$, oder direkte Summe von zyklischen Moduln der Ordnung (p^t) und (p^{t+1}) für ein $t \geqq 1$; falls R vollständig, kann b beliebig sein.

Für einen beliebigen Ring R scheint demnach die Strukturbestimmung der stark komplementierten R-Moduln schwierig zu sein. Man kann aber versuchen, eine möglichst große Klasse von stark komplementierten R-Moduln anzugeben, indem man die Voraussetzung „semiperfekt" abschwächt: Nennt man einen Modul M *ko-stetig*, wenn es zu jedem Paar (A, B) mit $A + B = M$ einen Endomorphismus α: $M \to M$ gibt mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1 - \alpha) \subset B$, so zeigt sich, daß jeder komplementierte, ko-stetige Modul bereits stark komplementiert ist. Weil die Eigenschaft „ko-stetig" von selbständigem Interesse zu sein scheint (der duale Begriff ist äquivalent mit „projektionsinvariant in der injektiven Hülle", und das ist eine Verallgemeinerung der in [11] eingeführten Utumi-Stetigkeit), werden im ersten Abschnitt dieser Arbeit einige elementare Tatsachen über ko-stetige Moduln zusammengestellt. Mit den oben zitierten Ergebnissen lassen sich schließlich über einem Dedekindring alle komplementierten, ko-stetigen Moduln bestimmen, und gleichzeitig wird gezeigt, daß die Verallgemeinerung von „selbstprojektiv" auf „ko-stetig" im Rahmen der behandelten Probleme die bestmögliche ist.

0. Bezeichnungen und Definitionen. R ist stets ein assoziativer Ring mit Eins, und alle Moduln sind unitäre Rechts-R-Moduln.

M_R heißt *direkt unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$, und aus $A \oplus B = M$ folgt $A = M$ oder $B = M$.

M heißt *unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$, und aus $A + B = M$ folgt $A = M$ oder $B = M$. R heißt *lokal*, wenn der Modul R_R unzerlegbar ist.

$\mathrm{Ra}(M)$ ist das Jacobson-Radikal von M, d. h. der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln = die Summe aller kleinen Untermoduln von M.

M heißt *reduziert (koatomar)*, wenn jeder radikalvolle Untermodul (Faktormodul) Null ist.

M heißt *reinzerfallend*, wenn jeder reine Untermodul in M bereits direkter Summand ist.

M heißt *komplementiert* ([5], [13]), wenn zu jedem $U \subset M$ die Menge

$$\{T \mid T \subset M \quad \text{und} \quad T + U = M\}$$

ein minimales Element hat. Ein solches minimales T_0 heißt dann *Komplement* von U in M.

Ein Epimorphismus $f\colon A \to B$ heißt *wesentlich*, wenn $\mathrm{Ke}\, f$ klein in A ist, d.h. aus $\mathrm{Ke}\, f + T = A$ stets folgt $T = A$.

M heißt *X-projektiv*, wenn für jeden Epimorphismus $X \to Q$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q)$$

surjektiv ist (siehe [9], [10]).

M heißt *selbstprojektiv* ([3]), wenn es M-projektiv ist.

1. Ko-stetige Moduln. Ein Modul M heiße *ko-stetig*, wenn es zu jedem Paar (A, B) von Untermoduln mit $A + B = M$ einen Endomorphismus $\alpha\colon M \to M$ gibt mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}\,(1 - \alpha) \subset B$. Zu $A + B = M$ existiert ein solches α offenbar genau dann, wenn der kanonische Epimorphismus $A \times B \to M$ zerfällt. Insbesondere ist jeder selbstprojektive Modul ko-stetig, aber auch jeder unzerlegbare Modul.

Lemma 1.1. *Für ko-stetiges M gilt:*

(a) *Ist $A + B = M$ und A direkter Summand in M, so gibt es ein $B' \subset B$ mit $A \oplus B' = M$.*

(b) *Ist $A + B = M$ und sind A und B direkte Summanden in M, so auch $A \cap B$.*

(c) *Ist $X \oplus Y = M$ und $g\colon X \to Y$ mit* $\mathrm{Bi}\, g$ *direkter Summand in Y, so ist* $\mathrm{Ke}\, g$ *direkter Summand in X.*

(d) *Ist $X \oplus Y = M$ und $U \subset X$ mit X/U bis auf Isomorphie direkter Summand in Y, so ist U direkter Summand in X.*

Beweis. (a): Sei $A \oplus X = M$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset A$, $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset B$. Dann folgt

$$A \oplus \alpha(X) = M \quad \text{mit} \quad \alpha(X) \subset B.$$

(a $\Rightarrow$ b): Nach Voraussetzung gibt es $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit

$$M = A \oplus B' = A' \oplus B.$$

Mit dem modularen Gesetz folgt $M = (A \cap B) \oplus (A' + B')$. (b $\Rightarrow$ c): Sei $\mathrm{Bi}\, g \oplus \oplus Y' = Y$. Definiert man dann $A = X + Y'$ und $B = \{x + g(x) \mid x \in X\}$, so ergibt sich $M = A + B = A \oplus \mathrm{Bi}\, g = B \oplus Y$ und $A \cap B = \mathrm{Ke}\, g$, so daß nach Voraussetzung $\mathrm{Ke}\, g$ direkter Summand in M, also auch in X ist. (c $\Rightarrow$ d): Man hat einen zerfallenden Monomorphismus $h\colon X/U \to Y$. Mit $g = X \to X/U \xrightarrow{h} Y$ gilt dann $\mathrm{Bi}\, g = \mathrm{Bi}\, h$ direkter Summand in Y, so daß nach Voraussetzung $\mathrm{Ke}\, g = U$ direkter Summand in X ist.

Beispiel. Seien I, J Rechtsideale in R mit $I \subsetneqq J \subset \tilde{I}$, wobei $\tilde{I}$ der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale ist, die I umfassen. Definiert man dann im Modul $M := (R/I) \times (R/J)$ die Untermoduln $A = (1,0)R$, $B = (1,1)R$ und $C = (0,1)R$, so folgt wegen $I \subset J$ sofort $M = A + B = A \oplus C = B \oplus C$ und $A \cap B = (J/I) \times 0$. Aus $J \subset \tilde{I}$ folgt $J/I \subset \mathrm{Ra}(R/I)$, also $A \cap B$ klein in M, so daß $0 \neq A \cap B$ kein direkter Summand in M ist. Zusätzlich sind A und B gegenseitig Komplemente in M.

Lemma 1.2. *Ist $M = X \oplus Y$ ko-stetig, so sind X und Y ko-stetig und gegenseitig projektiv.*

Beweis. Um etwa die Ko-stetigkeit von X zu zeigen, sei $A + B = X$. Zu $A + + (B + Y) = M$ gibt es ein $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset A$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B + Y$. Es induziert eine Abbildung $\xi\colon X \to X$, für die gilt

$$\mathrm{Bi}\,\xi = \alpha(X) \subset A \quad \text{und} \quad \mathrm{Bi}(1-\xi) \subset \mathrm{Bi}(1-\alpha) \cap X \subset B.$$

Um etwa die X-Projektivität von Y zu zeigen, sei epimorph $g\colon X \to Q$ und weiter $f\colon Y \to Q$. Definiert man dann in M das Faserprodukt

$$B = \{x - y \mid x \in X \quad \text{und} \quad y \in Y \quad \text{und} \quad g(x) = f(y)\},$$

so folgt $X + B = M$, also nach (1.1, a) $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset X$ und $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset B$ für ein $\alpha \in \mathrm{End}(M)$. Für die durch α induzierte Abbildung $h\colon Y \to X$ gilt dann $gh = f$. (Es gilt folgende Umkehrung: Sind in einem Modul M bei jeder direkten Zerlegung die Summanden gegenseitig projektiv, so ist (1.1, a) erfüllt.)

Folgerung. *Ist $Y \times Y$ ko-stetig, so ist Y selbstprojektiv.*

Lemma 1.3. *Für ko-stetiges M gilt:*

(a) *Ist $A + B = M$ und hat A ein Komplement in M, so auch eines unter B.*

(b) *Ist $A + B = M$ und haben A und B Komplemente in M, so auch $A \cap B$.*

(c) *Ist $A + B = M$ und B vollinvariant in M, so liegt jedes Komplement von A unter B.*

(d) *Sind A und B gegenseitig Komplemente in M, so gilt $A \oplus B = M$.*

(e) *Sind V_1 und V_2 Komplemente von U in M und ist V_1 direkter Summand in M, so ist V_2 isomorph zu V_1 und ebenfalls direkter Summand in M.*

Beweis. In ([13] Lemma 1.2) wird für beliebiges M gezeigt: Ist V Komplement von A in M und $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset A$, so ist auch $\alpha(V)$ ein Komplement von A. Damit ist (a) klar, und bei (b) gibt es $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit A' Komplement von B und B' Komplement von A in M. Es folgt, daß $A' + B'$ Komplement von $A \cap B$ in M ist, denn die Summe ist klar, und

$$(A' + B') \cap (A \cap B) = (B' \cap A) + (A' \cap B)$$

ist klein in $A' + B'$. (c): Ist V Komplement von A in M und $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset V$, $\mathrm{Bi}(1-\alpha) \subset A$, so folgt $\alpha(B) + A = M$, also $\alpha(B) = V$ und damit $V \subset B$. (d): (abweichend von [5] Satz 3): Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M/B \times M/A \\ M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

seien alle Pfeile die kanonischen Abbildungen. Es kommutiert, g ist wesentlich, und f zerfällt wegen der Ko-stetigkeit von M: Aus $\mathrm{Ke}\, f \subset \mathrm{Ke}\, g$ klein in $A \times B$ folgt $\mathrm{Ke}\, f = 0$, also $A \cap B = 0$. (e): Sind V_1, V_2 wie angegeben, so gibt es nach (1.1, a) ein $U' \subset U$ mit $V_1 \oplus U' = M$. Aus $(V_1 \cap U) + (U' + V_2) = M$ und $V_1 \cap U$ klein in M folgt $U' + V_2 = M$, also wieder nach (1.1, a) $U' \oplus V_2' = M$ für ein $V_2' \subset V_2$. Weil V_2 auch Komplement von U' ist, folgt $V_2' = V_2$, und aus $V_1 \oplus U' = M = V_2 \oplus U'$ folgt auch noch $V_1 \cong V_2$.

Beispiel zu (e): Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender p, $M = X \times Y$ mit X teilbar, $Y \cong R/(p^t)$ mit $t \geqq 1$ und e erzeugendes Element von Y. Dann berechnet man: (1) Die Komplemente von $\mathrm{Ra}(M)$ in M sind genau die Untermoduln der Form $(x, e)R$ mit $x \in X$. (2) $V = (x, e)R$ ist genau dann direkter Summand in M, wenn $xp^t = 0$ ist (d.h. wenn V rein in M ist), und das ist äquivalent damit, daß V Basis-Untermodul in M ist. (3) Gibt es in X eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit $(p^t) \supsetneqq \mathrm{Ann}(x_1) \supsetneqq \mathrm{Ann}(x_2) \supsetneqq \ldots$ (z.B. wenn $X \cong K/R$), so sind die Komplemente $V_i := (x_i, e)R$ paarweise nicht isomorph, und keines von ihnen ist direkter Summand in M.

Satz 1.4. *Für ko-stetiges M sind äquivalent:*

(i) *Ist $A + B = M$ und hat $A \cap B$ ein Komplement in M, so auch A und B.*

(ii) *Ist $A + B = M$ und hat $A \cap B$ ein Komplement in M, so gibt es $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit $A' \oplus B' = M$.*

Falls zusätzlich $\mathrm{Ra}(M)$ *klein in M, so ist das weiter äquivalent mit ($\bar{M} = M/\mathrm{Ra}(M)$):*

(iii) *Ist $U \subset M$ und $\bar{U}$ direkter Summand in $\bar{M}$, so hat U ein Komplement in M.*

(iv) *Jeder direkte Summand von $\bar{M}$ ist Bild eines direkten Summanden in M.*

(v) *Jede direkte Zerlegung von $\bar{M}$ ist von M induziert.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist A und B wie angegeben, so hat nach Voraussetzung A ein Komplement in M, so daß es nach (1.3, a) ein $B' \subset B$ gibt mit $A + B' = M$ und $A \cap B'$ klein in B'. Nach dem gleichen Schluß hat nun B' ein Komplement $A' \subset A$, und mit (1.3, d) folgt $A' \oplus B' = M$. (ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $A + B = M$ und V Komplement von $A \cap B$ in M, so folgt aus $A + (B \cap V) = M$ nach Voraussetzung die Existenz von $A' \subset A$ und $B' \subset B \cap V$ mit $A' \oplus B' = M$. Klar ist dann B' ein Komplement von A in M. Ebenso erhält man ein Komplement für B.

(ii) $\Rightarrow$ (v): Ist $\bar{A} \oplus \bar{B} = \bar{M}$ mit $N = \mathrm{Ra}(M) \subset A$, $B \subset M$, so gibt es nach Voraussetzung $A' \subset A$ und $B' \subset B$ mit $A' \oplus B' = M$, und daraus folgt $\bar{A}' = \bar{A}$ und $\bar{B}' = \bar{B}$. (v) $\Rightarrow$ (iv): klar. (iv) $\Rightarrow$ (iii): Zu $\bar{W} \oplus \bar{U} = \bar{M}$ gibt es nach Voraussetzung einen direkten Summanden V in M mit $\bar{V} = \bar{W}$. Es folgt, daß V ein Komplement von U in M ist. (iii) $\Rightarrow$ (i): Ist $A + B = M$ und V Komplement von $A \cap B$ in M, so folgt mit $B_1 := B \cap V$, daß $A + B_1 = M$ und $A \cap B_1 \subset N$. Weil M ko-stetig und N vollinvariant in M ist, erhält man daraus $(A + N) \cap (B_1 + N) = N$, also $\bar{A} \oplus \bar{B}_1 = \bar{M}$, so daß nach Voraussetzung A ein Komplement in M hat. Ebenso mit B.

Folgerung (siehe [5] Satz 3, [2] Theorem 3.7). *Ein ko-stetiger Modul M mit kleinem Radikal ist genau dann komplementiert, wenn $\bar{M} = M/\mathrm{Ra}(M)$ halbeinfach ist und jeder direkte Summand von $\bar{M}$ Bild eines direkten Summanden von M ist.*

Bemerkung. In einem Modul mit der Eigenschaft (ii) ist jedes Komplement direkter Summand.

Lemma 1.5. (a) *Ist projektionsinvariant $X \subset M$ und M ko-stetig und komplementiert, so ist auch M/X ko-stetig.*

(b) *Ist klein $X \subset M$ und M/X ko-stetig und M selbstprojektiv, so ist X projektionsinvariant in M.*

Beweis. Ein Untermodul X von M heißt projektionsinvariant in M, wenn für jedes idempotente $\varepsilon \in \mathrm{End}(M)$ gilt: $\varepsilon(X) \subset X$. (a): Sei $X \subset M$ wie angegeben,

$$\bar{M} = M/X \quad \text{und} \quad X \subset A, B \subset M \quad \text{mit} \quad A + B = M.$$

Nach (1.3, a, d) gibt es ein $\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathrm{End}(M)$ mit $\mathrm{Bi}\,\varepsilon \subset A$, $\mathrm{Bi}(1 - \varepsilon) \subset B$, und für die induzierte Abbildung $\bar{\varepsilon}\colon \bar{M} \to \bar{M}$ gilt dann $\mathrm{Bi}\,\bar{\varepsilon} \subset \bar{A}$, $\mathrm{Bi}(1 - \bar{\varepsilon}) \subset \bar{B}$. (b): Sei $X \subset M$ wie angegeben und $\varepsilon \in \mathrm{End}(M)$ mit $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Zu $\overline{\mathrm{Ke}(1 - \varepsilon)} + \overline{\mathrm{Ke}\,\varepsilon} = \bar{M}$ gibt es ein $\alpha \in \mathrm{End}(\bar{M})$ mit $\mathrm{Bi}\,\alpha$ im ersten und $\mathrm{Bi}(1 - \alpha)$ im zweiten Summanden. Liftet man α zu $\beta \in \mathrm{End}(M)$ mit $\nu_X \beta = \alpha \nu_X$, so folgt $\beta(X) \subset X$ und

$$\mathrm{Bi}(1 - \varepsilon)\beta \subset (1 - \varepsilon)(X), \qquad \mathrm{Bi}\,\varepsilon(1 - \beta) \subset \varepsilon(X).$$

Für den „Differenzkern" $D := \{m \in M \mid (\varepsilon - \beta)(m) \in X\}$ zeigt man dann $D + X = M$, also $D = M$, und damit $\varepsilon(X) \subset X$.

Bemerkung. Hat Y eine projektive Hülle $\pi\colon P \to Y$, so läßt sich (1.2 Folg.) auch so zeigen: Aus der Ko-stetigkeit von Y^2 folgt nach (b), daß $\mathrm{Ke}(\pi^2)$ projektionsinvariant in P^2 ist, also $\mathrm{Ke}\,\pi$ vollinvariant in P, so daß Y nach Jans-Wu ([3] Proposition 2.1) selbstprojektiv ist.

Zusatz. Nennt man einen Modul M *stetig*, wenn für alle $A, B \subset M$ mit $A \cap B = 0$ ein $\alpha \in \mathrm{End}(M)$ existiert mit $A \subset \mathrm{Ke}\,\alpha$ und $B \subset \mathrm{Ke}(1-\alpha)$, so läßt sich (1.1) bis (1.5) vollständig dualisieren. Dazu müssen in (1.3) bis (1.5) nur die Additionskomplemente durch sogenannte Durchschnittskomplemente ersetzt werden, d.h. maximale Elemente von $\{T \mid T \subset M$ und $U \cap T = 0\}$. Weil nun auf Grund der Grothendieck-Bedingung in einem Modul stets Durchschnittskomplemente existieren, werden dabei einige Aussagen vereinfacht (oder leer). Aus (1.5)° folgt: M ist genau dann stetig, wenn es projektionsinvariant in seiner injektiven Hülle ist.

2. Supplementierte Moduln. In einem komplementierten, ko-stetigen Modul M hat jeder Untermodul A nach (1.3, a) folgende Eigenschaft: Ist $B \subset M$ mit $A + B = M$, so gibt es ein Komplement von A in M, das in B enthalten ist. Wir sagen: A hat *genügend viele* Komplemente in M.

Definition [2]. Ein Modul M heißt *supplementiert*, wenn jeder Untermodul von M genügend viele Komplemente in M hat.

Satz 2.1. A) *Für M sind äquivalent:*

(i) *M ist supplementiert.*

(ii) *Jedes $U \subset M$ ist von der Form $U = U_1 + U_2$ mit U_1 komplementiert und U_2 klein in M.*

(iii) *Zu jedem $U \subset M$ gibt es ein komplementiertes $X \subset U$ mit U/X klein in M/X.*

B) *Ein endlich erzeugter Modul M ist genau dann supplementiert, wenn jeder maximale Untermodul genügend viele Komplemente in M hat.*

Beweis. (A) (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist M supplementiert und $U \subset M$, so sei V ein Komplement von U in M und U_1 ein Komplement von V in M, das in U enthalten ist. Es folgt $U_1 + (V \cap U) = U$, und weil $U_2 := V \cap U$ klein in M ist, bleibt nur noch zu zeigen, daß U_1 komplementiert ist: Zu $A \subset U_1$ sei W ein Komplement von $A + V$ in M, das in U_1 enthalten ist. Dann ist W auch Komplement von A in U_1, denn klar ist $W \cap A$ klein in W, und aus der Minimalität von U_1 folgt auch noch $W + A = U_1$. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $U = X + U_2$ mit U_2 klein in M, so folgt sofort U/X klein in M/X. (iii) $\Rightarrow$ (i): Zu $A + B = M$ gibt es nach Voraussetzung ein komplementiertes $X \subset B$ mit B/X klein in M/X. Es folgt $A + X = M$, und ist nun B' ein Komplement von $A \cap X$ in X, so folgt aus dem wesentlichen Epimorphismus $B' \twoheadrightarrow X/A \cap X \xrightarrow{\cong} M/A$, daß B' ein Komplement von A in M ist (und klar in B enthalten).

(B) Für beliebiges M gilt: Ist $A + B = M$ und hat sowohl A als auch B genügend viele Komplemente in M, so auch $A \cap B$: Aus $(A \cap B) + C = M$ folgt nämlich $A + (B \cap C) = M = B + (A \cap C)$, so daß man nach Voraussetzung ein Komplement $B' \subset B \cap C$ von A und ein Komplement $A' \subset A \cap C$ von B in M hat; wie in (1.3, b) folgt dann, daß $A' + B' \subset C$ ein Komplement von $A \cap B$ in M ist. — Sei nun M endlich erzeugt und jeder maximale Untermodul besitze genügend viele Komplemente in M: Nach ([13] Satz 1.4, B) ist M komplementiert, also $M/\mathrm{Ra}(M)$ halbeinfach, so daß für jedes $A \subset M$ der Faktormodul $M/(\mathrm{Ra}(M) + A)$

halbeinfach und endlich erzeugt ist, also $\mathrm{Ra}(M) + A$ Durchschnitt von endlich vielen maximalen Untermoduln von M. Nach der Vorbemerkung hat nun $\mathrm{Ra}(M) + A$ genügend viele Komplemente in M, also auch A.

Folgerung. *Ist in M jeder Untermodul komplementiert, so ist M supplementiert. Über einem nicht-lokalen Dedekindring ist jeder komplementierte Modul bereits supplementiert* ([13] Ergebnis 3.1).

Bemerkung. Ist M supplementiert, so nach ([13] Lemma 1.2) auch jeder Faktormodul, spezieller jeder direkte Summand. Für beliebige Untermoduln gilt das nicht: Sei S ein kommutativer lokaler Ring mit einem nicht-komplementierten S-Modul H. Dann ist die übliche Ringerweiterung $R = S \times H$ mit $(s, h) \cdot (s', h') = (ss', hs' + h's)$ wieder ein kommutativer lokaler Ring (also R_R supplementiert), aber das Ideal $I = 0 \times H$ nicht komplementiert wegen $\mathscr{L}(I_R) \cong \mathscr{L}(H_S)$.

Theorem 2.2. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K:*

(a) *Ein R-Modul M ist genau dann supplementiert, wenn jeder Untermodul von M komplementiert ist.*

(b) *Der komplementierte R-Modul $R^a \times K^b \times (K/R)^c \times B$ (mit B beschränkt und $a, b, c \geqq 0$) ist genau dann supplementiert, wenn es K^b ist.*

(c) *Für R sind äquivalent:*

(i) *Jeder komplementierte R-Modul ist supplementiert.*

(ii) *K^2 ist supplementiert.*

(iii) *R ist vollständig.*

Beweis. (a) Nach (2.1, A) ist zu zeigen, daß in einem supplementierten R-Modul jeder kleine Untermodul komplementiert ist. Nun sind aber über einem diskreten Bewertungsring in jedem Modul die kleinen Untermoduln koatomar, also nach ([13] Lemma 2.1) komplementiert.

(b) Nach ([13] Theorem 2.4) ist jeder komplementierte R-Modul von der angegebenen Gestalt. Außerdem erhält man mit (a) und ([13] Lemma 2.2, Lemma 2.5): Supplementiert $M \Leftrightarrow$ supplementiert $T(M)$ und $M/T(M) \Leftrightarrow$ supplementiert $D(M)$ und $M/D(M)$. Damit folgt die Behauptung.

(c) Nach ([13] Folgerung 2.6) ist R genau dann vollständig, wenn die Klasse der komplementierten R-Moduln gegenüber Untermoduln abgeschlossen ist. Damit ist klar (i) $\Leftrightarrow$ (iii), und weil (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial ist, bleibt (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist R nicht vollständig, so konstruiert Kaplansky in ([4] Theorem 19) einen Untermodul $B \subset K^2$ derart, daß B direkt unzerlegbar ist und vom Rang 2: Ist nun A ein Komplement von B in K^2, so hat A selbst kein Komplement unter B, denn B ist reduziert und nicht-klein in K^2. Damit ist K^2 nicht supplementiert. (Es erfüllt nicht einmal (1.1, a), denn A ist, weil teilbar, direkter Summand.)

3. Komplemente als direkte Summanden. Ist M komplementiert und ko-stetig, und V ein Komplement von U in M, so gibt es nach (1.3, a, d) ein $U' \subset U$ mit $V \oplus U' = M$, also $(V \cap U) \oplus U' = U$. Weil also $V \cap U$ zusätzlich direkter Summand in U ist, heißt V *starkes Komplement* von U in M.

Definition. Ein Modul M heißt *stark komplementiert*, wenn jeder Untermodul von M ein starkes Komplement in M hat.

Satz 3.1. *Für M sind äquivalent:*

(i) *M ist stark komplementiert.*

(ii) *Jedes $U \subset M$ ist von der Form $U = U_1 + U_2$ mit U_1 direkter Summand in M und U_2 klein in M.*

(iii) *Zu jedem $U \subset M$ gibt es ein $X \subset U$ mit X direkter Summand in M und U/X klein in M/X.*

(iv) *M ist supplementiert und jedes Komplement ist direkter Summand.*

(v) *M erfüllt die beiden folgenden Bedingungen:*

(*) *Jeder nicht-kleine Untermodul umfaßt einen von Null verschiedenen direkten Summanden.*

(**) *Jeder Untermodul umfaßt einen maximalen direkten Summanden.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei V starkes Komplement von U in M, $U_1 \oplus (V \cap U) = U$. Dann folgt $U_1 \oplus V = M$, und klar ist $U_2 := V \cap U$ klein in M. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Wie in (2.1, ii $\Rightarrow$ iii). (iii) $\Rightarrow$ (iv): M ist komplementiert, denn zu $U \subset M$ sei X wie angegeben: Aus $Y \oplus X = M$ folgt wesentlich $Y \xrightarrow{\cong} M/X \to M/U$, also ist Y Komplement von U in M. War U selbst schon Komplement, so gilt weiter $U = X$, also U direkter Summand. Schließlich ist M nach (2.1, A) supplementiert, denn das zu U angegebene X ist komplementiert. (iv) $\Rightarrow$ (v): Sei für (*) nicht-klein $U \subset M$, V ein Komplement von U in M und $X \subset U$ ein Komplement von V in M. Dann ist $0 \neq X$ direkter Summand in M. Sei für (**) $U \subset M$ und V, X wie eben. Dann ist X maximaler direkter Summand unter U, denn aus $X \subset T \subset U$ mit T direkter Summand in M folgt, daß V und T gegenseitig Komplemente in M sind, also $X = T$. (v) $\Rightarrow$ (i): Sei $U \subset M$ und X maximaler direkter Summand unter U, $Y \oplus X = M$. Dann ist Y bereits starkes Komplement von U in M, denn wegen $(Y \cap U) \oplus X = U$ ist nur noch zu zeigen, daß $Y \cap U$ klein in M ist, d.h. aber mit (*), keinen direkten Summanden umfaßt: Aus $T \subset Y \cap U$ mit $T \oplus S = M$ folgt nach dem modularen Gesetz $(T + X) \oplus (S \cap Y) = M$, also wegen der Maximalität $T + X = X$ und damit $T \subset Y \cap X = 0$.

Folgerung. *Über einem Dedekindring gilt für jeden teilbaren Modul M: Stark komplementiert ist äquivalent mit supplementiert* (iv).

Bemerkung zu (**). Diese Bedingung ist insbesondere in folgenden beiden Fällen erfüllt: (a) M hat die Maximal (= Minimal)-Bedingung für direkte Summanden. (b) M ist reinzerfallend (die Menge der direkten Summanden unter $U \subset M$ hat dann nach Zorn ein maximales Element). — Umgekehrt folgt bei endlich erzeugtem M aus (**) bereits die Maximalbedingung für direkte Summanden.

Bemerkung zu (*). Für $M_R = R_R$ bedeutet diese Bedingung, daß jedes nicht-kleine Rechtsideal ein Idempotent enthält, und das gilt dann auch für ${}_R R$. Bekanntlich heißt ein Ring *zornsch*, wenn jedes Rechtsideal, das nicht nil ist, ein Idempotent enthält (siehe etwa [1] § 6, Ex. 13), und es gilt: R ist genau dann zornsch, wenn es (*) erfüllt und das Radikal nil ist.

Definition. Ein Modul M heißt *semizornsch*, wenn er (*) erfüllt, d.h. jeder nicht-kleine Untermodul einen von Null verschiedenen direkten Summanden umfaßt.

Lemma 3.2. *Für einen Ring R gilt:*

(a) *R ist genau dann semizornsch, wenn es zu jedem $x \in R$ mit $x \notin \mathrm{Ra}(R)$ ein $0 \neq y \in R$ gibt mit $y = yxy$.*

(b) *Mit R sind auch die Ringe eRe und $M_n(R)$ semizornsch ($e^2 = e \in R$).*

(c) *Mit R ist auch $\bar{R} = R/\mathrm{Ra}(R)$ semizornsch, und falls sich Idempotente modulo dem Radikal liften lassen, gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. (a) ist trivial, und damit läßt sich dann auch (b) zeigen, denn $\mathrm{Ra}(eRe) = e \cdot \mathrm{Ra}(R) \cdot e$, $\mathrm{Ra}(M_n(R)) = M_n(\mathrm{Ra}(R)) = n$-reihige quadratische Matrizen mit Werten aus dem Radikal von R. Seien für (c) in der nicht-trivialen Richtung $\bar{R}$ semizornsch und Idempotente liftbar: Zu $R \ni x \notin \mathrm{Ra}(R)$ gibt es dann ein $y \in R$ mit $0 \neq \bar{y} = \bar{y}\bar{x}\bar{y}$, also $e - xy \in \mathrm{Ra}(R)$ für ein $0 \neq e = e^2$. Aus $(1 - (e - xy))u = 1$ folgt dann $exyu = e$, also $0 \neq y' = y'xy'$ mit $y' = yue$.

Folgerung. *Jeder F-semiperfekte Ring ist semizornsch, jeder rechts-halbartinsche Ring ist zornsch.* (Definitionen und Eigenschaften siehe [8] bzw. [7]; beide Male läßt sich (c) anwenden.)

Proposition 3.3. *Sei M selbstprojektiv und $S = \mathrm{End}(M)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(a) *S ist genau dann semizornsch, wenn M semizornsch ist.*

(b) *S ist genau dann lokal, wenn M unzerlegbar ist.*

(c) *S ist genau dann semiperfekt, wenn M komplementiert ist und der Maximalbedingung für direkte Summanden genügt.*

Falls M zusätzlich ein kleines Radikal hat, gilt noch

(c′) *S ist genau dann semiperfekt, wenn M komplementiert und endlich erzeugt ist.*

Beweis. Für projektives M sind (b) ([12] Theorem 4.2) und (c′) ([6] Theorem 6.1, [12] Proposition 5.1) bekannt. Die wesentliche Äquivalenz ist (a).

(a) Ist S semizornsch und nicht-klein $U \subset M$, so gibt es wegen ko-stetig ein $\alpha \in S$ mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset U$, $\mathrm{Bi}(1 - \alpha) \subsetneqq M$. Es folgt $\alpha \notin \mathrm{Ra}(S)$, also $0 \neq \varepsilon \in \alpha S$ für ein Idempotent ε, so daß $\mathrm{Bi}\,\varepsilon$ ein von Null verschiedener direkter Summand unter U ist. Ist umgekehrt M semizornsch und $\alpha \notin \mathrm{Ra}(S)$, so ist $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht klein in M (siehe [6] Added in proof), also $0 \neq \mathrm{Bi}\,\varepsilon \subset \mathrm{Bi}\,\alpha$ für ein Idempotent ε. Wegen selbstprojektiv folgt $\varepsilon = \alpha\beta$ für ein $\beta \in S$, also $0 \neq \varepsilon \in \alpha S$.

(b) M ist genau dann unzerlegbar, wenn es direkt unzerlegbar und semizornsch ist; beides überträgt sich nach (a) auf S, und ein Ring ist genau dann lokal, wenn er semizornsch ist und $0 \neq 1$ die einzigen Idempotente sind.

(c) Nach (3.1, i $\Leftrightarrow$ v) ist S genau dann semiperfekt, wenn es semizornsch ist und keine unendliche Menge orthogonaler Idempotente hat (mit Bemerkung **), d.h.

wenn M semizornsch ist und die Maximalbedingung für direkte Summanden (MDS) hat. Wieder mit (3.1) kann man „semizornsch" durch „komplementiert" ersetzen. Für (c′) gilt allgemein, daß ein komplementierter, endlich erzeugter Modul die (MDS) hat, denn der Radikalfaktormodul ist längenendlich. Ist umgekehrt $M \neq 0$ stark komplementiert mit (MDS) und $\mathrm{Ra}(M)$ klein in M, so gibt es direkt unzerlegbare Untermoduln M_i, $1 \leqq i \leqq n$, mit $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Jedes dieser M_i ist sogar unzerlegbar (weil semizornsch), also wegen des kleinen Radikals zyklisch, und damit ist M endlich erzeugt.

Folgerung. *Ist M semizornsch und selbstprojektiv, so auch M^n für alle $n \geqq 1$.* (Mit 3.2, b und der Tatsache, daß M^n wieder selbstprojektiv ist.)

Ist M selbstinjektiv und selbstprojektiv, so ist es semizornsch. (Nach [8] ist der Endomorphismenring eines selbstinjektiven Moduls F-semiperfekt.)

4. Stark komplementierte Moduln über Dedekindringen. Über einem Dedekindring lassen sich die Äquivalenzen von (3.1) reduzieren:

Satz 4.1. *Sei R dedekindsch. Dann sind für M_R äquivalent:*

(i) *M ist stark komplementiert.*

(ii) *M ist supplementiert und jedes zyklische Komplement ist rein in M.*

(iii) *M ist semizornsch.*

Falls R nicht lokal, ist das weiter äquivalent mit

(iv) *M ist torsionsvoll und jede Primärkomponente ist stark komplementiert.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): ist klar nach (3.1). (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei nicht-klein $U \subset M$. Ist $D(U) \neq 0$, so ist man fertig, so daß also o.B.d.A. jetzt U reduziert sei. Sei V ein Komplement von U in M und $X \subset U$ ein Komplement von V in M. Dann ist $0 \neq X$ nicht radikalvoll, so daß wegen $\mathrm{Ra}(X) = X \cap \mathrm{Ra}(M)$ folgt $U \not\subset \mathrm{Ra}(M)$. O.B.d.A. kann man also sogar U zyklisch annehmen. Wählt man V und X wie eben, so ist jetzt M/V zyklisch, also auch die wesentliche Überdeckung X. Nach Voraussetzung ist X rein in M und damit direkter Summand nach ([13] Ergebnis 3.1).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Weil über R nach dem eben zitierten Ergebnis jeder komplementierte Modul reinzerfallend ist, also die Bedingung (**) erfüllt, genügt es nach (3.1) zu zeigen, daß jedes semizornsche M komplementiert ist: In $M = D(M) \oplus M'$ ist $D(M)$ wieder semizornsch und außerdem reinzerfallend, also nach (3.1) komplementiert, so daß o.B.d.A. jetzt M semizornsch und reduziert sei. Klar folgt daraus $\mathrm{Ra}(M)$ klein in M: Ist R lokal, also Körper oder diskreter Bewertungsring, so folgt aus ([13] Lemma 2.1), daß M koatomar, also komplementiert ist; ist R nicht lokal, so folgt $T(M) \cup \mathrm{Ra}(M) = M$, denn die Annahme $M \ni m \notin T(M), \mathrm{Ra}(M)$ führt zu $R \cong mR$ direkter Summand in M, also R semizornsch, Widerspruch. Man hat also M torsionsvoll, jede Primärkomponente hat wieder ein kleines Radikal, ist also komplementiert, und damit auch M ([13] Lemma 2.1, Theorem 3.1).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Ist R nicht lokal, so ist jeder stark komplementierte Modul nach ([13] Theorem 3.1) torsionsvoll, und die Primärkomponenten sind, als direkte Summanden, wieder stark komplementiert. Ist umgekehrt M torsionsvoll und jede Primärkomponente M_i, $i \in I$, stark komplementiert, so folgt aus der Eigenschaft $X = \bigoplus_{i \in I} (X \cap M_i)$ für alle $X \subset M$, daß auch M stark komplementiert ist.

Durch (iv) wird die Strukturbestimmung auf diskrete Bewertungsringe zurückgeführt, und die technischen Hilfsmittel liefert der folgende Hilfssatz, der im Hinblick auf (ii) die zyklischen, nicht-kleinen Untermoduln untersucht:

Hilfssatz 4.2. *Über einem diskreten Bewertungsring R mit Uniformisierender p gilt:*

1. *Ist $t \geqq 1$ und $(M_i \mid i \in I)$ eine Familie von unzerlegbaren R-Moduln mit $M_i p^{t-1} \neq 0$ für alle $i \in I$, so gilt in $M = \coprod_{i \in I} M_i$ für jeden zyklischen, nicht-kleinen Untermodul U:*

$$Up^s = U \cap Mp^s \quad \textit{für alle} \quad 1 \leqq s \leqq t.$$

2. *Ist $t \geqq 1$ und sind $0 \neq A$, B R-Moduln mit $Ap^{t+1} \neq 0$, $Bp^t = 0$, so gibt es in $M = A \times B$ einen zyklischen, nicht-kleinen Untermodul U mit:*

$$Up^{t+1} \neq U \cap Mp^{t+1}.$$

Beweis. 1. Sei $U = uR$ nicht klein in M, also $u_j \notin \operatorname{Ra}(M_j)$ für ein $j \in I$, $u = (u_i)$. Es folgt, daß M_j zyklisch ist und von u_j erzeugt wird. Hat man nun $x \in U \cap Mp^s$, also $x = u\lambda = mp^s$, so folgt aus der j-Komponente, daß λ durch p^s geteilt wird, also $x \in Up^s$. 2. Sind A und B wie angegeben, so wähle man $a \in Ap$ mit $ap^t \neq 0$ und $b \in B$ mit $b \notin Bp$, und dann leistet $U = (a, b)R$ das Gewünschte.

Folgerung 1. *Ist $M \cong R^{(I)} \times D$ mit D teilbar, oder M direkte Summe von zyklischen Moduln der Ordnung (p^t) und (p^{t+1}), so ist in M jeder zyklische, nicht-kleine Untermodul rein.*

Folgerung 2. *Ist A nicht beschränkt und $B \neq 0$ beschränkt, oder gibt es natürliche Zahlen n, t mit $n \geqq t + 2$ und $A \cong R/(p^n)$ und $B \cong R/(p^t)$, so gibt es jeweils in $M = A \times B$ einen zyklischen, nicht-kleinen Untermodul, der nicht rein in M ist.*

Theorem 4.3. *Über einem diskreten Bewertungsring R (mit Uniformisierender p und Quotientenkörper K) ist ein Modul M_R genau dann stark komplementiert, wenn er von einem der beiden folgenden Typen ist:*

(I) *M ist direkte Summe von zyklischen Moduln der Ordnung (p^t) und (p^{t+1}),*

(II) *M ist isomorph zu $R^a \times K^b \times (K/R)^c$ für ganze $a, b, c \geqq 0$, $b \leqq 1$.*

Falls R vollständig ist, kann b in (II) *beliebig sein.*

Beweis. Mit (4.1, ii): Ist M_R stark komplementiert, so hat man nach ([13] Theorem 2.4) $M \cong R^a \times K^b \times (K/R)^c \times B$ mit beschränktem B. Ist $B \neq 0$, so muß nach Folgerung 2 der Rest Null sein, und B selbst von der in (I) angegebenen Gestalt (ist zyklisch und nicht-klein $U \subset N$, so folgt $\operatorname{Ra}(U) = U \cap \operatorname{Ra}(N)$, also ist, falls N komplementiert, U selbst Komplement in N). Ist $B = 0$, so muß bei unvollständigem R noch $b \leqq 1$ sein (2.2).

Umgekehrt hat ein Modul von jedem der beiden Typen nach Folgerung 1 die Eigenschaft, daß jedes zyklische Komplement rein ist. (I), oder (II) mit $b \leqq 1$ sind stets supplementiert, bei vollständigem R aber (II) sogar für alle b nach (2.2).

Bemerkung. Über einem diskreten Bewertungsring R wird von Kaplansky in ([4] Exercises 78, 79) ein Untermodul $U \subset M$ *regulär* genannt, wenn für alle $n, k \geqq 1$ gilt: $Up^n \cap Mp^{n+k} = (U \cap Mp^k)p^n$. Bekanntlich heißt U *neat* in M, wenn gilt $Up = U \cap Mp$. Man zeigt leicht: rein ist äquivalent mit neat und regulär. Außerdem erhält man: In M ist genau dann jeder Untermodul regulär, wenn jeder neat-Untermodul bereits rein ist, und das ist äquivalent damit, daß $T(M)$ teilbar ist oder M direkte Summe von zyklischen Moduln der Ordnung (p^t) und (p^{t+1}) ist. Aus der Darstellung in (4.3) erhält man daher als

Folgerung. *Über einem diskreten Bewertungsring R ist ein Modul M_R genau dann stark komplementiert, wenn er supplementiert ist und wenn jeder Untermodul regulär ist.*

5. Komplementierte, ko-stetige Moduln. Entsprechend der Verschärfung von „komplementiert" auf „supplementiert" in Abschnitt 2 sagen wir: Ein Untermodul $A \subset M$ hat *genügend viele* starke Komplemente in M, wenn es zu jedem $B \subset M$ mit $A + B = M$ ein starkes Komplement von A in M gibt, das in B enthalten ist.

Definition. Ein Modul M heißt *stark supplementiert*, wenn jeder Untermodul von M genügend viele starke Komplemente in M hat.

Satz 5.1. *Für M sind äquivalent:*

(i) *M ist stark supplementiert.*

(ii) *M ist stark komplementiert und erfüllt die Eigenschaft von* (1.1, b).

(iii) *M ist supplementiert und der Durchschnitt gegenseitiger Komplemente ist Null.*

(iv) *M ist komplementiert und ko-stetig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Klar ist M stark komplementiert, und zu $A + B = M$, mit A, B beide direkte Summanden in M, sei nach Voraussetzung $B' \subset B$ ein starkes Komplement von A in M. Es folgt, daß $A \cap B'$ klein und direkter Summand in A ist, also $A \cap B' = 0$, und damit $(A \cap B) \oplus B' = B$. Mit B ist daher auch $A \cap B$ direkter Summand in M. — Ähnlich einfache Schlüsse liefern, mit den früheren Ergebnissen, sofort (ii $\Rightarrow$ iii $\Rightarrow$ iv $\Rightarrow$ i).

Folgerung. *Über einem diskreten Bewertungsring R ist ein torsionsfreier Modul M_R genau dann stark supplementiert, wenn er supplementiert ist* (iii).

R ist genau dann vollständig, wenn der Quotientenkörper K_R selbstprojektiv ist (2.2, c und 1.2).

Wie in (4.1, iv) zeigt man, daß über einem nicht-lokalen Dedekindring ein Modul genau dann stark supplementiert ist, wenn er torsionsvoll ist und jede Primärkomponente diese Eigenschaft hat. Es bleibt also der diskrete Fall:

Theorem 5.2. *Über einem diskreten Bewertungsring R (mit Uniformisierender p und Quotientenkörper K) ist ein Modul M_R genau dann stark supplementiert, wenn er von einem der vier folgenden Typen ist:*

(I) $M \cong (R/(p^t))^{(J)}$ *für ein $t \geqq 1$ und eine Indexmenge J,*

(II) $M \cong R^a \times (K/R)$ *für ein $a \geqq 0$,*

(III) $M \cong R^a \times K$ *für ein* $a \geqq 0$,

(IV) $M \cong R^a$ *für ein* $a \geqq 0$.

Falls R *vollständig ist, so steht in* (III) *allgemeiner* $R^a \times K^b$ *mit* $b \geqq 1$.

Beweis. Ist M stark supplementiert, so hat man eine Zerlegung wie in (4.3). Nach (1.2) sind folgende Moduln *nicht* ko-stetig: $R/(p^n) \times R/(p^m)$ für $n \neq m$, $K \times (K/R)$, $(K/R)^2$ (denn K/R ist nicht selbstprojektiv), und bei unvollständigem R auch noch K^2. Damit folgt, daß M eine der vier angegebenen Formen haben muß.

Umgekehrt sind (I) und (IV) komplementiert und ko-stetig, und (III) supplementiert und torsionsfrei. Weil (II) stark komplementiert ist, bleibt nur noch (1.1, b) zu zeigen: Es ist von der Form $M = M_1 \oplus M_2$ mit M_1 endlich erzeugt und frei, M_2 unzerlegbar und teilbar, und für jeden direkten Summanden U von M zeigt man: Ist U reduziert, so ist es bereits endlich erzeugt und frei, ist U nicht reduziert, so umfaßt es M_2. Hat man nun $A + B = M$ mit A, B direkte Summanden, so folgt, daß nicht beide reduziert sein können, also etwa M/A reduziert und daher frei ist. Aus $B/A \cap B$ frei folgt aber $A \cap B$ direkter Summand in B, also auch in M.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Algèbre, chap. 8. Paris 1958.

[2] J. S. Golan, Quasi perfect modules. Quart. J. Math. Oxford (2) **22**, 173—182 (1971).

[3] J. P. Jans and L. E. T. Wu, On quasi projectives. Illinois J. Math. **11**, 439—448 (1967).

[4] I. Kaplansky, Infinite abelian groups. Ann Arbor 1969.

[5] F. Kasch und E. A. Mares, Eine Kennzeichnung semiperfekter Moduln. Nagoya Math. J. **27**, 525—529 (1966).

[6] E. A. Mares, Semiperfect modules. Math. Z. **82**, 347—360 (1963).

[7] C. Nastasescu et N. Popescu, Anneaux semi-artiniens. Bull. Soc. Math. France **96**, 357 — 368 (1968).

[8] U. Oberst und H. J. Schneider, Die Struktur von projektiven Moduln. Invent. Math. **13**, 295—304 (1971).

[9] E. de Robert, Projectifs et injectifs relatifs. Applications. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **268**, 361—364 (1969).

[10] F. L. Sandomierski, Relative injectivity and projectivity. Thesis, The Pennsylvania State University 1964.

[11] Y. Utumi, On continuous rings and self-injective rings. Trans. Amer. Math. Soc. **118**, 158—173 (1965).

[12] R. Ware, Endomorphism rings of projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. **155**, 233—256 (1971).

[13] H. Zöschinger, Komplementierte Moduln über Dedekindringen. J. Algebra (to appear).

Eingegangen am 14. 10. 1973

Anschrift des Autors:
Helmut Zöschinger
Mathematisches Institut
der Universität München
8 München 2
Theresienstr. 39