JOURNAL OF ALGEBRA **50**, 299–336 (1978)

Über Torsions- und κ-Elemente von Ext(C, A)

HELMUT ZÖSCHINGER

Cuvilliésstrasse 8, 8 München 80, Germany

Communicated by P. M. Cohn

Received March 3, 1976

EINLEITUNG

Um Einblick in die Struktur der abelschen Gruppe $\operatorname{Ext}(C, A)$ zu gewinnen, kann man versuchen, die Elemente von Standard-Untergruppen, z.B. des divisiblen Anteils $D(\operatorname{Ext}(C, A))$, der Ulm-Untergruppe $\operatorname{Ext}(C, A)^1$, der Frattini-Untergruppe $\operatorname{Ra}(\operatorname{Ext}(C, A))$ oder der Torsionsuntergruppe $T(\operatorname{Ext}(C, A))$ näher zu bestimmen. Interpretiert man $\operatorname{Ext}(C, A)$ als die Gruppe der Erweiterungen von A durch C, so lautet also die Frage, welche Eigenschaften eine kurze exakte Folge

$$E = 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

von abelschen Gruppen besitzen muß, damit ihre Äquivalenzklasse $[E]$ ein Element der vorgeschriebenen Untergruppe von $\operatorname{Ext}(C, A)$ ist. So ist etwa bekannt, daß $[E]$ genau dann zu $D(\operatorname{Ext}(C, A))$ gehört, wenn $\operatorname{Bi}\alpha$ sowohl rein in B als auch direkter Summand in $\operatorname{Bi}\alpha + T(B)$ ist.

Hat man umgekehrt eine Klasse $\mathscr{C}$ von kurzen exakten Folgen abelscher Gruppen vorgegeben, so stellt sich das Problem, die entsprechenden Elemente in der Gruppe $\operatorname{Ext}(C, A)$ wiederzuerkennen. Das wohl bekannteste Beispiel ist die Klasse $\mathscr{P}$ der reinexakten Folgen: Die Elemente von $\operatorname{Ext}(C, A)$, mit Repräsentanten aus $\mathscr{P}$, bilden eine Untergruppe $\operatorname{Pext}(C, A)$, die gerade mit $\operatorname{Ext}(C, A)^1$ übereinstimmt.—Uns interessiert in dieser Arbeit die Klasse der *κ-exakten* Folgen, wobei E κ-exakt heiße, wenn $\operatorname{Bi}\alpha$ ein Komplement in B hat, d.h. ein minimales Element in der Menge $\{V \subset B \mid V + \operatorname{Bi}\alpha = B\}$. In diesem Fall sagen wir, $[E] \in \operatorname{Ext}(C, A)$ sei ein *κ-Element*, und die Menge aller κ-Elemente bezeichnen wir mit $\operatorname{Ext}(C, A)^\kappa$. Obwohl wir hier nur abelsche Gruppen betrachten, läßt sich der Begriff einer κ-exakten Folge von R-Moduln und eines κ-Elementes von $\operatorname{Ext}_R{}^1(C, A)$ über jedem Ring R formulieren, und das Studium von $\operatorname{Ext}_R{}^1(C, A)^\kappa$ könnte ein erster Schritt zur Beantwortung der von F. Kasch seit langem gestellten Frage nach der Struktur von $\operatorname{Ext}_R{}^1(C, A)$ sein.

0021-8693/78/0502–0299$02.00/0

Für $R = \mathbb{Z}$ gelingt uns die "Beschreibung" der κ-Elemente in den folgenden beiden Fällen:

(I) *C ist teilbar und fast alle Primärkomponenten von C sind Null.* Für beliebiges A stimmen dann in $\operatorname{Ext}(C, A)$ die κ-Elemente mit den Torsionselementen überein.

(II) *C ist teilbar und torsionsvoll, alle Primärkomponenten von C sind ungleich Null, und A ist torsionsfrei vom Rang* 1. Obwohl dann $\operatorname{Ext}(C, A)$ torsionsfrei ist, gibt es noch genügend viele κ-Elemente in $\operatorname{Ext}(C, A)$, denn in Abschnitt 5 wird gezeigt, daß sie ein Erzeugendensystem bilden. Und aus unserem Hauptresultat (5.2) folgt: Genau dann ist $0 \neq [E] \in \operatorname{Ext}(C, A)$ ein κ-Element, wenn der Typ von $[E]$ in $\operatorname{Ext}(C, A)$ kleiner gleich dem Typ von A ist.

In Abschnitt 1, bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Torsions- und κ-Elementen in $\operatorname{Ext}(C, A)$, wird eine "funktorielle" Untergruppe $\operatorname{Ext}(C, A)^\beta$ eingeführt, deren Elemente $[0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0]$ dadurch definiert sind, daß $\operatorname{Bi} \alpha$ ein Komplement V in B hat mit der Zusatzbedingung, daß $V \cap \operatorname{Bi} \alpha$ beschränkt ist. Obwohl im allgemeinen $\operatorname{Ext}(C, A)^\beta \subsetneqq \operatorname{Ext}(C, A)^\kappa$ gilt, lassen sich bestimmte Aussagen über $\operatorname{Ext}(C, A)^\beta$ beim Studium der κ-Elemente verwenden. Beispiel: Gilt $\operatorname{Ext}(C, A)^\beta \subset \operatorname{Ra}(\operatorname{Ext}(C, A))$, so folgt bereits $\operatorname{Ext}(C, A)^\beta = 0$, und dasselbe werden wir in (3.1) für κ statt β zeigen.

Weil $\operatorname{Ext}(g, f)\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A')$ zwar im zweiten, aber nicht im ersten Argument κ-Elemente erhält (und deshalb auch $\operatorname{Ext}(C, A)^\kappa$ keine Untergruppe zu sein braucht), sind wir im 2. Abschnitt genötigt, Homomorphismen $g\colon C' \to C$ zu untersuchen, für die bei jeder Zerlegung $g = \beta\alpha$ gilt: Ist β ein wesentlicher Epimorphismus (d.h. surjektiv mit kleinem Kern), so ist β schon ein Isomorphismus. Wir bezeichnen sie als *koneat* und zeigen, daß das äquivalent ist mit $g(\operatorname{So}(C')) = \operatorname{So}(C)$. Und für solche g erhält $g^*\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A)$ auch κ-Elemente. Zusammen mit dem dualen Begriff des *neat*-Homomorphismus, wie er von Enochs beim Studium von torsionsfreien Hüllen eingeführt wurde, wird in (2.5) gezeigt, wie die Funktoren Hom bzw. Ext koneat- in neat-Homomorphismen verwandeln (und andere Variationen.)

In Abschnitt 3 wird die Frage $\operatorname{Ext}(C, A)^\kappa = \operatorname{Ext}(C, A)^\beta$ untersucht. Der Extremfall $\operatorname{Ext}(C, A)^\kappa = 0$ ist mit (1.5) rasch gelöst: Genau dann gibt es keine κ-Elemente in $\operatorname{Ext}(C, A)$, wenn aus $T_p(C) \neq 0$ die Teilbarkeit von $T_p(A)$ folgt, und wenn, falls alle $T_p(C) \neq 0$ sind, bereits A teilbar ist. (3.6) gibt, wenigstens wenn $T(A)$ in A abspaltet, die Antwort auf die ursprüngliche Frage.

Abschnitt 4 stellt die Rechenregeln für einen—von der üblichen p-Höhe abweichenden—Teilbarkeitsbegriff zusammen, den wir als die p-Tiefe von $x \in G$ bezeichnen: $t_p{}^G(x)$ ist definiert als die kleinste p-Potenz, die man aus x herausziehen muß, damit "der" Rest nicht mehr durch p teilbar ist. Durch die Einführung dieses Tiefenbegriffes können wir im oben angeführten Fall (II) die Voraussetzung "C teilbar" fallen lassen, und mit seiner Hilfe werden wir die Komplementeigenschaften von $x \in \operatorname{Ext}(C, A)$ messen. Für $x \in G$ ergibt sich

$t_p{}^G(x) = \min(h_p{}^G(x), t_p{}^G(0))$, und für $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}(p^\infty))$ erhält man die Formel $t_p^{\mathrm{Hom}}(\varphi) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid M[p] \not\subset p^i(\mathrm{Ke}\,\varphi)\}$. Schließlich zeigen wir bei der Charakterisierung von $t_p{}^G(0)$ die zu einem wohlbekannten Satz von Khabbaz [7] duale Aussage: Ist V ein Komplement von $G[p^n]$ in G, so ist V direkter Summand in G.

Für die letzten beiden Abschnitte sei jetzt immer C torsionsvoll, A torsionsfrei vom Rang 1. Alles folgt aus dem Hauptergebnis (5.2): Genau dann ist $0 \neq [E]$ ein κ-Element in $\mathrm{Ext}(C, A)$, wenn alle Primärkomponenten von C ungleich Null sind und die Klasse der Tiefensequenz von $[E]$ in $\mathrm{Ext}(C, A)$ kleiner gleich dem Typ von A ist.—Es folgen einfache Kriterien dafür, daß $\mathrm{Ext}(C, A)$ nur aus κ-Elementen besteht oder daß $g^*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ κ-Elemente erhält. Und in (5.6) wird gezeigt, daß die Unterscheidung zwischen Tiefe und Höhe wirklich verschiedene Komplementbegriffe liefert. Weil in der oben angegebenen Folge E, auch wenn $\mathrm{Bi}\,\alpha$ klein in B ist, nicht $T(B)$ in B abzuspalten braucht, geben wir noch in (5.7) ein "Splitting-Kriterium," das in seiner Kombination mit dem Komplementbegriff vielleicht von selbständigem Interesse ist.

Abschnitt 6 betrachtet Tripel $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset X \subset B$, so daß $\mathrm{Bi}\,\alpha$ ein Komplement in X, und X ein Komplement in B hat. Auch diese Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ lassen sich durch die Tiefensequenz beschreiben (6.3), und es zeigt sich, daß sie im allgemeinen eine echt größere Teilmenge als die der κ-Elemente bilden.

Unter Gruppen verstehen wir immer abelsche Gruppen, die Bezeichnungen entsprechen meist denen in [4]. Wir schreiben aber $\mathbb{Z}/(p^n)$ statt $\mathbb{Z}(p^n)$. Hat eine Gruppe M eine Kompositionsreihe $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$, so heißt n die Länge von M, in Zeichen $L\ddot{a}(M)$. Bei einem Homomorphismus $\alpha\colon A \to B$ ist $\mathrm{Bi}\,\alpha = \mathrm{Im}\,\alpha$ und $\mathrm{Kok}\,\alpha = B/\mathrm{Bi}\,\alpha$. Gelegentlich werden die langatmigen Formulierungen "U ist direkter Summand in M" bzw. "U hat ein Komplement in M" abgekürzt durch $U \subset^{\oplus} M$ bzw. $U \subset^{\kappa} M$.

Herrn F. Kasch und Herrn A. Rosenberg danke ich herzlich für die Anteilnahme an dieser Arbeit und für die Gespräche, die sie mit mir darüber geführt haben.

1. Die κ-Elemente von Ext(C, A) als Torsionselemente

Im weiteren wird ständig folgendes, leicht zu beweisende Ergebnis aus [14] benötigt: Ist $h\colon H \to C$ eine wesentliche Überdeckung von C, und ist in C mindestens eine Primärkomponente gleich Null, so ist $\mathrm{Ke}\,h$ torsionsvoll; sind in C sogar fast alle Primärkomponenten gleich Null, so ist $\mathrm{Ke}\,h$ bereits beschränkt. Damit erhält man

SATZ 1.1. *Sei die Gruppe C teilbar, und seien fast alle Primärkomponenten von C gleich Null. Dann sind die κ-Elemente von* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *genau die Torsionselemente.*

Beweis. Repräsentiert $E = 0 \to A \to^{\alpha} B \to C \to 0$ ein Torsionselement in $\mathrm{Ext}(C, A)$, so weiß man nach Walker [12, Theorem 1], daß es ein $n \geqslant 1$ gibt, so daß $\mathrm{Bi}\,\alpha/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n]$ direkter Summand in $(\mathrm{Bi}\,\alpha + nB)/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n]$ ist, wobei wie üblich $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$ sei. Weil aber C teilbar ist, bedeutet das $\mathrm{Bi}\,\alpha/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n] \subset^{\oplus} B/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n]$, so daß es ein $V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$ gibt mit $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ beschränkt. Nach [14] hat aber eine beschränkte Gruppe in jeder Erweiterung ein Komplement, so daß aus $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} V$ folgt $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} B$. Ist umgekehrt die angegebene Folge E κ-exakt, also ein Komplement V von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B gegeben, so folgt aus der Vorbemerkung, daß $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ als Kern des wesentlichen Epimorphismus $V \to C$ beschränkt ist, also $\mathrm{Bi}\,\alpha/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n] \subset^{\oplus} B/(\mathrm{Bi}\,\alpha)[n]$ für ein $n \geqslant 1$. Wieder nach [12, Theorem 1] ist daher $[E]$ ein Torsionselement in $\mathrm{Ext}(C, A)$.

FOLGERUNG 1. *Ist $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^{\infty}), M)$ torsionsvoll, so hat M bereits in jeder Erweiterung N, mit N/M p-primär, ein Komplement.*

FOLGERUNG 2. *Es gibt eine p-Gruppe N mit einer* reinen *Untergruppe M, so daß M zwar in jeder Zwischengruppe zu N ein Komplement hat, aber nicht direkter Summand in N ist.*

Beweis. (1) Weil $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^{\infty}), M)$ bekanntlich reduziert und kotorsion ist, folgt aus der Voraussetzung, daß es sogar beschränkt ist, also auch $\mathrm{Ext}(C, M)$ torsionsvoll ist für jede teilbare p-Gruppe C. Ist nun N wie angegeben, so gibt es ein $N \subset H$ mit H/M teilbar und N/M groß in H/M. Nach dem Satz hat M ein Komplement in H, also wegen [14, Hilfssatz 5.1] auch in N. (2) Für eine beliebige Gruppe M induziert die reinexakte Folge $0 \to M/D(M) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, M) \to 0$ einen Monomorphismus $M^1/D(M) \to \mathrm{Pext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M)$, wobei wie üblich $M^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nM$ sei. Wählt man nun M speziell p-primär mit $D(M) \subsetneqq M^1$, so kann $\mathrm{Pext}(\mathbb{Z}(p^{\infty}), M)$ nicht torsionsfrei sein, und für ein von Null verschiedenes Torsionselement $[0 \to M \subset N \to \mathbb{Z}(p^{\infty}) \to 0]$ gilt dann nach dem Satz $M \subset^{\kappa} N$; aber auch zu jedem $M \subsetneqq X \subsetneqq N$ gibt es ein zyklisches $X_1 \subset X$ mit $X_1 + M = X$, und offenbar ist dann bereits X_1 ein Komplement von M in X.

Wir wollen noch näher auf die im Beweis des Satzes vorkommenden kurzen exakten Folgen $0 \to A \to^{\alpha} B \to C \to 0$ eingehen, bei denen ein $V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$ existiert mit $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ beschränkt. Wir bezeichnen sie als *β-exakt*, in Zeichen $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\beta} B$. Ein β-Element von $\mathrm{Ext}(C, A)$ ist stets sowohl κ- als auch Torsionselement. Im folgenden Spezialfall gilt die Umkehrung:

LEMMA 1.2. *Sind C und A torsionsvoll, so gilt*:

$$\mathrm{Ext}(C, A)^{\beta} = \mathrm{Ext}(C, A)^{\kappa} \cap T(\mathrm{Ext}(C, A)).$$

Beweis. Mit der Charakterisierung der Torsionselemente von Ext aus [12] lautet die Behauptung: Ist M eine Torsionsgruppe und $U \subset^{\kappa} M$ mit $U/U[n] \subset^{\oplus} (U + nM)/U[n]$ für ein $n \geqslant 1$, so folgt bereits $U \subset^{\beta} M$. Wählt man zu $U/U[n]$ ein direktes Komplement $V/U[n]$, so gilt für alle Primzahlen p, mit $(p, n) = 1$, daß $T_p(V) + T_p(U) = T_p(M)$ und $T_p(V) \cap T_p(U) = 0$, d.h. $T_p(U) \subset^{\oplus} T_p(M)$. Wegen $U \subset^{\kappa} M$ kann man also ein Komplement W von U in M finden mit $T_p(W) \cap T_p(U) = 0$ für alle p mit $(p, n) = 1$; für die übrigen ist immerhin $T_p(W) \cap T_p(U)$ koatomar (d.h. alle Faktoren reduziert), also im ganzen $W \cap U$ beschränkt.

Bemerkung. In $\operatorname{Ext}(\operatorname{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{J}_p)$ ist jedes Element sowohl κ- als auch Torsionselement, aber nur die Null ein β-Element.

LEMMA 1.3. *Ist* $0 \to X \to^{\iota} Y \to^{\pi} C \to 0$ *eine torsionsfreie Auflösung von* C *und ist* δ: $\operatorname{Hom}(X, A) \to \operatorname{Ext}(C, A)$ *der zugehörige verbindende Homomorphismus, so gilt:*

$$\operatorname{Ext}(C, A)^{\beta} = \delta(T(\operatorname{Hom}(X, A))).$$

Beweis. Ist $f \in \operatorname{Hom}(X, A)$, so erhält man $\delta(f) = [E]$ mit

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E = & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

und darin $\operatorname{Bi} f' + \operatorname{Bi} \alpha = B$ sowie $\operatorname{Bi} f' \cap \operatorname{Bi} \alpha \simeq \operatorname{Bi} f$; war also f ein Torsionselement, d.h. $\operatorname{Bi} f$ beschränkt, so ist $[E]$ ein β-Element von $\operatorname{Ext}(C, A)$.—Sei nun umgekehrt β-exakt $E = 0 \to A \to^{\alpha} B \to^{\beta} C \to 0$, also $V + \operatorname{Bi} \alpha = B$ mit $V \cap B\mathrm{i}\, \alpha$ beschränkt. Dann erhält man, weil $\beta \mid V$ surjektiv und Y torsionsfrei ist, die exakte Folge $\operatorname{Hom}(Y, V) \to^{(\beta|V)_*} \operatorname{Hom}(Y, C) \to 0$, und damit ein $g \in \operatorname{Hom}(Y, B)$ mit $\operatorname{Bi} g \subset V$ und $\beta g = \pi$. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, dashed, "f"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E = & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

folgt $\delta(f) = [E]$ sowie $\operatorname{Bi} f \simeq \operatorname{Bi} g \cap \operatorname{Bi} \alpha$, also $f \in T(\operatorname{Hom}(X, A))$.

FOLGERUNGEN. (a) *Die β-Elemente von* $\operatorname{Ext}(C, A)$ *bilden eine Untergruppe.* (b) *Ist* $f: A \to A'$ *ein Homomorphismus, so erhält* f_*: $\operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, A')$ *β-Elemente.* (c) *Ist* g: $C' \to C$ *ein Homomorphismus, so erhält* g^*: $\operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A)$ *β-Elemente.*

Bemerkungen. (a) Ist C teilbar, so kann man in der torsionsfreien Auflösung auch Y teilbar wählen. Dann ist aber Kok δ torsionsfrei und Ke δ teilbar, so daß δ auf den Torsionselementen surjektiv ist, d.h. $T(\mathrm{Ext}(C, A)) = \mathrm{Ext}(C, A)^\beta$. Für die erste Hälfte von Satz 1.1 hat man so einen etwas anderen Beweis. (b) Umgekehrt kann man aus einem Resultat von Baer [1, Folgerung 3.2] sofort ableiten: Ist $T(\mathrm{Ext}(C, \mathbb{Z}^{(I)})) = 0$ für alle I, so ist $C/D(C)$ frei. Es ist also genau dann $T(\mathrm{Ext}(C, A)) = \mathrm{Ext}(C, A)^\beta$ für alle A, wenn $C/D(C)$ frei ist.

Beispiel 1.4. Sind in C fast alle Primärkomponenten gleich Null, so stimmen die β-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ mit den κ-Elementen überein. Ist speziell $C = \mathbb{Z}/(m)$ mit $m \geqslant 2$, so hat man die projektive Auflösung $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \to 0$, und der verbindende Homomorphismus δ liefert $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(m), A) \simeq A/mA$, wobei die κ-Elemente gerade der Untergruppe $(T(A) + mA)/A$ entsprechen. Insbesondere gilt:

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(m), A)\ \kappa\text{-voll} \Leftrightarrow A/T(A)\ m\text{-teilbar}.$$

(Auch im folgenden wollen wir $\mathrm{Ext}(C, A)$ κ-voll nennen, wenn jedes Element von $\mathrm{Ext}(C, A)$ ein κ-Element ist.)

Satz 1.5. *Für ein Paar (A, C) sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}(C, A)^\beta \subset \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}(C, A))$.

(ii) $\mathrm{Ext}(C, A)^\beta = 0$.

(iii) $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ *ist teilbar.*

Beweis. (i $\to$ iii) Es ist zu zeigen, daß aus $T_p(C) \neq 0$ die p-Teilbarkeit von $T(A)$ folgt. 1. *Fall.* $T_p(C)$ ist reduziert. Dann gibt es ein $n \geqslant 1$, so daß $\mathbb{Z}/(p^n)$ bis auf Isomorphie direkter Summand in C ist, und es folgt $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(p^n), A)^\beta \subset \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(p^n), A))$. Nach (1.4) bedeutet das aber $(T(A) + p^nA)/p^nA \subset pA/p^nA$, also $T(A)$ p-teilbar. 2. *Fall.* $T_p(C)$ ist nicht reduziert. Dann folgt $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A)^\beta \subset \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A))$, d.h. die Torsionsuntergruppe von $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A)$ ist teilbar, also Null. Weil damit A keinen direkten Summanden der Form $\mathbb{Z}/(p^n)$, $n \geqslant 1$, haben kann, folgt die Behauptung. (iii $\to$ ii) 1. *Fall.* $T_p(C) \neq 0$ für alle p. Dann ist $T(A)$ teilbar, d.h. $A/D(A)$ torsionsfrei, also $\mathrm{Ext}(C, A/D(A))^\beta = 0$. Mittels des Isomorphismus $\nu_*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C, A/D(A))$ folgt die Behauptung. 2. *Fall.* Mindestens eine Primärkomponente von C ist Null. Wir behaupten, daß $\mathrm{Ext}(C, A)$ nicht einmal ein von Null verschiedenes κ-Element besitzt. Benützen wir dazu das Ergebnis aus (2.1), daß ν_* κ-Elemente erhält, so können wir gleich A reduziert annehmen, und unsere Voraussetzung lautet jetzt: $T_p(C) \neq 0 \Rightarrow T_p(A) = 0$. Sei nun $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0$ κ-exakt, V ein Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B. Nach [14, Hilfssatz 5.2] ist $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ torsionsvoll und die injektive Hülle von V isomorph zu der von C. Offenbar ist also für alle p schon $T_p(V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha) = 0$, also $V \oplus \mathrm{Bi}\,\alpha = B$.

Bemerkungen. (a) Natürlich kann $\mathrm{Ext}(C, A)^\beta \cap \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}(C, A)) \neq 0$ sein, wie das Beispiel in (1.1, Folgerung 2) zeigt. (b) Aus dem Beweis folgt: Ist $A/T(A)$ teilbar und $\mathrm{Ext}(C, A)^\beta = 0$, so gibt es in $\mathrm{Ext}(C, A)$ kein von Null verschiedenes κ-Element.

Abschließend wollen wir noch mit Hilfe des β-Begriffes ein später benötigtes Kriterium dafür angeben, daß $T(B)$ in B abspaltet:

LEMMA 1.6. *Gelte für die Gruppe A, daß jede torsionsvolle Unter- oder Faktorgruppe bereits beschränkt ist. Dann sind für eine Erweiterung $A \subset B$ äquivalent:*

(i) $T(B) \subset^\oplus B$.

(ii) $(T(B) + A)/A \subset^\beta B/A$.

Beweis. (i $\to$ ii) Aus $V \oplus T(B) = B$ folgt $(V + A)/A + (T(B) + A)/A = B/A$, und wir behaupten, daß der Durchschnitt beschränkt ist. Er ist isomorph zu $T(V + A)/T(A)$, also wegen $V \oplus T(V + A) = V + A$ weiter isomorph zu $(V+ A)/(V+ T(A)) \cong A/[V + T(A)] \cap A = A/[T(A) + V \cap A]$, also als torsionsvoller Faktor von A wie gewünscht. (ii $\to$ i) Aus $X/A + (T(B) + A)/A = B/A$ mit beschränktem $[X \cap (T(B) + A)]/A = (A + T(X))/A \cong T(X)/T(A)$ folgt nach Voraussetzung die Beschränktheit von $T(X)$, insbesondere $V \oplus T(X) = X$, aus $X + T(B) = B$ also $V \oplus T(B) = B$.

Die an A gestellte Forderung ist, wie man leicht sieht, äquivalent damit, daß A von der Form $A_1 \oplus A_2$ ist mit A_1 endlich erzeugt frei, A_2 beschränkt. Weil aus $T(C) \subset^\kappa C$ immer schon $T(C) \subset^\oplus C$ folgt, erhält man in den beiden Spezialfällen $A_1 = 0$ bzw. $A_2 = 0$:

FOLGERUNG 1 (Papp [10]). *Ist exakt $0 \to A \to B \to C \to 0$ und A beschränkt, so ist $T(B) \subset^\oplus B$ äquivalent mit $T(C) \subset^\oplus C$.*

FOLGERUNG 2 (Stratton [11]). *Ist reinexakt $0 \to A \to B \to C \to 0$ und A endlich erzeugt frei, so ist $T(B) \subset^\oplus B$ äquivalent mit $T(C) \subset^\oplus C$.*

2. NEAT- UND KONEAT-HOMOMORPHISMEN

Ein Hauptproblem bei der Untersuchung der κ-Elemente in $\mathrm{Ext}(C, A)$ besteht darin, daß sie keine Untergruppe zu bilden brauchen. Schuld daran ist die Tatsache, daß bei einem Homomorphismus g: $C' \to C$ die induzierte Abbildung g^*: $\mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ im allgemeinen nicht κ-Elemente erhält. Für spezielle Homomorphismen, die wir koneat nennen, kann das nicht passieren; sie werden in diesem Abschnitt untersucht.

LEMMA 2.1. (I) Ist $f: A \to A'$, so erhält $f_*: \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C, A')$ *κ-Elemente.*

(II) *Sei $g: C' \to C$ und C' torsionsvoll. Ist dann entweder eine Primärkomponente von C gleich Null oder A torsionsvoll, so erhält* $g^*: \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ *κ-Elemente.*

Beweis. Seien die beiden folgenden Diagramme kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \Vert & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0; \end{array}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Vert & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow[\beta]{} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ist bei (I) nun V ein Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ is B, so ist $f'(V)$ ein Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha'$ in B', denn die Summe ist klar, und wegen $f'(V) \cap \mathrm{Bi}\,\alpha' = f'(V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha)$ ist der Durchschnitt klein in $f'(V)$.—Ist aber bei (II) V ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B, so folgt $g'^{-1}(V) + \mathrm{Ke}\,\beta' = B'$, und weil g' einen Isomorphismus von $D' = g'^{-1}(V) \cap \mathrm{Ke}\,\beta'$ nach $D = V \cap \mathrm{Ke}\,\beta$ induziert, ist mit D auch D' torsionsvoll und koatomar. Es hat also D', weil in jeder Primärkomponente beschränkt, ein Komplement im torsionsvollen $g'^{-1}(V)$, und daraus folgt $\mathrm{Ke}\,\beta' \subset^{\kappa} B'$.

FOLGERUNG 1. *Jedes Vielfache eines κ-Elementes von* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *ist wieder ein κ-Element.*

FOLGERUNG 2. *Hat C eine torsionsfreie Hülle und ist A eine Kotorsionsgruppe, so ist* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *κ-voll.*

FOLGERUNG 3. *Ist C torsionsvoll, und ist entweder eine Primärkomponente von C gleich Null oder A torsionsvoll, so bilden die κ-Elemente von* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *eine Untergruppe.*

Beweis. (1) Für jedes $r \in \mathbb{Z}$ und $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)$ ist bekanntlich $r[E] = f_*([E])$, wobei f die Multiplikation mit r auf A ist. (2) Unter einer torsionsfreien Hülle von C verstehen wir einen wesentlichen Epimorphismus $h: H \to C$ mit torsionsfreiem H (siehe unten die Bestimmung aller Gruppen, die eine torsionsfreie Hülle besitzen). Der dadurch induzierte verbindende Homomorphismus

δ: Hom(Ke h, A) $\to$ Ext(C, A) hat die Eigenschaft, daß Bi δ nur aus κ-Elementen besteht, denn für jedes $\varphi \in$ Hom(Ke h, A) entsteht $\delta(\varphi)$ durch Fasersummenbildung mit einer κ-exakten Folge. Weil aber A kotorsion ist, ist δ surjektiv. (3) Weil jetzt die Abbildung Δ^*: Ext($C \times C$, A) $\to$ Ext(C, A) κ-Elemente erhält, gilt für zwei κ-Elemente $[E_1]$ und $[E_2]$ von Ext(C, A), daß auch $[E_1] + [E_2] = \Delta^*([\nabla(E_1 \times E_2)])$ ein κ-Element ist.

Zum Problem, wann denn nun g^* κ-Elemente erhält, geben wir zuerst drei Beispiele:

(1) Der zerfallende Monomorphismus $\iota: \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induziert einen Isomorphismus ι^*: Ext($\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{J}_p$) $\to$ Ext($\mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{J}_p$), und die erste Gruppe ist κ-voll nach Folgerung 2, während die zweite kein von Null verschiedenes κ-Element besitzt.

(2) Ist A eine Torsionsgruppe, so gilt für den kanonischen Epimorphismus ν: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, daß ν^*: Ext($\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, A) $\to$ Ext($\mathbb{Q}$, A) genau dann κ-Elemente erhält, wenn A durch fast alle Primzahlen teilbar ist.

(3) Ist C eine Torsionsgruppe mit $T_p(C) \neq 0$ für alle p, so wird in Abschnitt 5 gezeigt, daß die κ-Elemente von Ext(C, $\mathbb{Z}$) keine Untergruppe bilden. Es kann also Δ^*: Ext($C \times C$, $\mathbb{Z}$) $\to$ Ext(C, $\mathbb{Z}$) nicht κ-Elemente erhalten.

Es scheint schwierig, notwendige Bedingungen dafür anzugeben, daß g^*: Ext(C, A) $\to$ Ext(C', A) κ-Elemente erhält (siehe 5.4). Aber eine ganz einfache ist hinreichend: g(So(C')) $=$ So(C). Solche Homomorphismen wollen wir jetzt untersuchen, und dabei einen Zusammenhang (im dualen Fall) mit den von Enochs [3] eingeführten neat-Homomorphismen angeben. $f: A \to A'$ heißt *neat*, wenn in jeder Zerlegung $f = \beta\alpha$, mit α wesentlicher Monomorphismus, bereits α ein Isomorphismus ist (Dies ist nicht die ursprüngliche Definition, sondern eine von Bowe in [2, Theorem 1.2] angegebene äquivalente Bedingung). Die Dualisierung lautet:

DEFINITION. Ein Homomorphismus g: $C' \to C$ heiße *koneat*, wenn in jeder Zerlegung $g = \beta\alpha$, mit β wesentlicher Epimorphismus, bereits β ein Isomorphismus ist.

Zur Charakterisierung der koneat-Homomorphismen brauchen wir zuerst folgenden

HILFSSATZ 2.2. (a) *Ein Epimorphismus* g: $C' \to C$ *ist genau dann koneat, wenn* Ke g *koabgeschlossen in* C' *ist.*

(b) *Ein zerfallender Monomorphismus* g: $C' \to C$ *ist genau dann koneat, wenn* Kok g *keine wesentlichen Überdeckungen hat.*

(c) *Ist* $g = g_2 g_1$ *koneat, so ist auch* g_2 *koneat. Ist zusätzlich* g_2 *injektiv, so ist auch* g_1 *koneat.*

Beweis. Eine Untergruppe U von M heißt koabgeschlossen in M, wenn für jede echte Untergruppe $X \subsetneqq U$ gilt, daß U/X nicht klein in M/X ist. Nach [13, Lemma 3.3] ist das äquivalent damit, daß $pU = U \cap pM$ ist für alle Primzahlen p, d.h. daß U eine neat-Untergruppe von M ist im Sinne von [4, p. 131].

(a) Ist g surjektiv und koneat, sowie $X \subset \mathrm{Ke}\, g$ mit $\mathrm{Ke}\, g/X$ klein in C'/X, so ist $g = C' \xrightarrow{\nu} C'/X \xrightarrow{\tilde{g}} C$ und $\tilde{g}$ wesentlicher Epimorphismus, also nach Voraussetzung $\tilde{g}$ ein Isomorphismus, d.h. $X = \mathrm{Ke}\, g$. Umgekehrt folgt aus $g = \beta\alpha$, mit β wesentlicher Epimorphismus, daß sich g und α über $C'/\mathrm{Ke}\,\alpha$ faktorisieren lassen, sagen wir als g_1 und α_1. Nun ist mit g auch α surjektiv, also α_1 bijektiv, also $\mathrm{Ke}\, g_1 = \mathrm{Ke}\, g/\mathrm{Ke}\,\alpha$ klein in $C'/\mathrm{Ke}\,\alpha$. Nach Voraussetzung ist g_1 ein Isomorphismus, also auch β.

(b) Ist der zerfallende Monomorphismus $g: C' \to C$ koneat und $h: H \to \mathrm{Kok}\, g$ eine wesentliche Überdeckung, so ist die Abbildung $\omega = \langle g, s\rangle: C' \times \mathrm{Kok}\, g \to C$ ein Isomorphismus, wobei s ein Rechtsinverses der kanonischen Abbildung $C \to \mathrm{Kok}\, g$ sei. Damit ist folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd} & & C' \arrow[lld, "(1{,}0)"'] \arrow[d, "g"] \\ C' \times H \arrow[r, "1\times h"'] & C' \times \mathrm{Kok}\, g \arrow[r, "\omega"'] & C, \end{tikzcd}$$

so daß nach Voraussetzung die untere Zeile ein Isomorphismus ist, also auch h. Umgekehrt folgt aus $g = \beta\alpha$, mit β wesentlicher Epimorphismus, daß die von β induzierte Abbildung $\mathrm{Kok}\,\alpha \to \mathrm{Kok}\, g$ ein wesentlicher Epimorphismus ist, also nach Voraussetzung schon ein Isomorphismus, d.h. $\mathrm{Ke}\,\beta \subset \mathrm{Bi}\,\alpha$; wegen g injektiv folgt $\mathrm{Ke}\,\beta = 0$.

(c) Nur die Aussage über g_1 ist zu beweisen: Ist $g_1 = \beta_1\alpha_1$, mit β_1 wesentlicher Epimorphismus, so gibt es, weil $\mathbb{Z}$ hereditär und g_2 injektiv ist, das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Klar ist dann auch β ein wesentlicher Epimorphismus, also wegen g koneat schon ein Isomorphismus, so daß auch β_1 bijektiv ist.

SATZ 2.3. *Für einen Homomorphismus* $g\colon C' \to C$ *sind äquivalent*:

(i) g *ist koneat.*

(ii) $\operatorname{Ke} g$ *ist koabgeschlossen in* C', *und* $\operatorname{Bi} g \supset \operatorname{So}(C)$.

(iii) $g(C'[p]) = C[p]$ *für alle Primzahlen* p.

(iv) *Ist das nebenstehende Diagramm ein Faserprodukt und* β *ein wesentlicher Epimorphismus, so ist auch* β' *ein wesentlicher Epimorphismus.*

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"] & C' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

Beweis. (i $\to$ ii) Die Einschränkung von g auf $\operatorname{Bi} g$ ist nach dem Hilfssatz wieder koneat, also $\operatorname{Ke} g$ koabgeschlossen in C'. Natürlich ist auch die Inklusion $\operatorname{Bi} g \subset C$ koneat, und für eine Zwischengruppe X mit $\operatorname{Bi} g \subset^{\oplus} X$, X groß in C, gilt nach (b), daß $X/\operatorname{Bi} g$ ohne wesentliche Überdeckungen, also torsionsfrei ist, so daß folgt $\operatorname{So}(C) = \operatorname{So}(X) \subset \operatorname{Bi} g$. (ii $\to$ iii) Aus $c \in C[p]$ folgt $c = g(z)$ für ein $z \in C'$, $pz \in \operatorname{Ke} g \cap pC'$, $pz = pz_1$ für ein $z_1 \in \operatorname{Ke} g$, $g(z - z_1) = c$ mit $z - z_1 \in C'[p]$. (iii $\to$ iv) Sei ein Faserprodukt wie im Satz gegeben und β wesentlicher Epimorphismus. Weil dann β' surjektiv und $\operatorname{Ke} \beta'$ koatomar ist, ist nur noch $\operatorname{Ke} \beta' \subset pB'$ zu zeigen für alle p: Aus $y \in \operatorname{Ke} \beta'$ folgt $g'(y) \in \operatorname{Ke} \beta$, $g'(y) = pb$ für ein $b \in B$, $\beta(b) \in C[p]$, $\beta(b) = g(z)$ für ein $z \in C'[p]$, $z = \beta'(y_1)$ und $b = g'(y_1)$ für ein $y_1 \in B'$, $y - py_1 \in \operatorname{Ke} g' \cap \operatorname{Ke} \beta' = 0$, $y = py_1$. (iv $\to$ i) klar.

FOLGERUNG 1. *Ist* $g\colon C' \to C$ *koneat, so erhält* $g^*\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A)$ κ*-Elemente.*

FOLGERUNG 2. *Auch dann erhält* $g^*\colon \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C', A)$ κ*-Elemente, wenn* g *die beiden folgenden Bedingungen erfüllt*: (a) $\operatorname{Bi} g \supset \operatorname{So}(C)$. (b) $\operatorname{Ke} g$ *ist komplementiert und hat in jeder Erweiterung ein Komplement.*

FOLGERUNG 3. *Eine Gruppe* M *hat genau dann eine torsionsfreie Hülle, wenn es ein* $n \geqslant 0$ *gibt mit* $\dim(M[p]) = n$ *für alle* p.

Beweis. (1) Man betrachte das Diagramm (II) in (2.1), wobei V wieder ein Komplement von $\operatorname{Ke} \beta$ in B sei. Dann ist jetzt $V' = g'^{-1}(V)$ ein Komplement von $\operatorname{Ke} \beta'$ in B', denn es ist nur noch zu zeigen, daß $V' \cap \operatorname{Ke} \beta'$ klein in V' ist, und das folgt wegen g koneat aus dem Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\beta'|V'"] \arrow[d] & C' \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\beta|V"'] & C. \end{tikzcd}$$

(2) Weil die Inklusion $\mathrm{Bi}\, g \subset C$ koneat ist, also die gewünschte Eigenschaft hat, kann man gleich g surjektiv annehmen, also das zugehörige Faserprodukt sogar in der speziellen Form

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d] & B'/Y \arrow[d, "g"] \\ B'/X \arrow[r, "\beta"'] & B'/X+Y, \end{tikzcd}$$

außerdem ein Komplement V/X von $(X+Y)/X$ in B'/X. Aus der zweiten Voraussetzung über $\mathrm{Ke}\, g \cong X$ folgt nun $X \subset^{\kappa} V$, also $X + Y \subset^{\kappa} B'$, und aus der Komplementiertheit von X mit [13, Lemma 1.3] endlich $Y \subset^{\kappa} B'$.

(3) 1. *Schritt.* Genau dann hat M eine torsionsfreie Hülle, wenn $\mathrm{So}(M)$ eine hat. Ist nämlich $h: H \to M$ eine torsionsfreie Hülle, so ist, weil die Inklusion $\mathrm{So}(M) \subset M$ koneat ist, auch $h^{-1}(\mathrm{So}(M)) \longrightarrow \mathrm{So}(M)$ eine torsionsfreie Hülle; hat man aber umgekehrt eine torsionsfreie Hülle $h: H \to \mathrm{So}(M)$, so gibt es, weil $\mathbb{Z}$ hereditär und h surjektiv ist, ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & H_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{So}(M) \arrow[r, phantom, "\subset"] & M \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

und klar ist h_1 wieder ein wesentlicher Epimorphismus, sowie H_1 torsionsfrei.

2. *Schritt.* Haben alle p-Sockel von M die gleiche Dimension n, so definiere man $\mathbb{Z} \subset S \subset \mathbb{Q}$ durch $S/\mathbb{Z} = \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, und es folgt, daß $S^n \to \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n \xrightarrow{\cong} \mathrm{So}(M)$ eine torsionsfreie Hülle ist. Hat umgekehrt M eine torsionsfreie Hülle, so auch die injektive Hülle von $T(M)$, d.h. wir können gleich M teilbar und torsionsvoll annehmen. Für eine torsionsfreie Hülle $h: H \to M$ gilt dann, daß $\mathrm{Ke}\, h$ koatomar und groß in H, also $\mathrm{Rang}(H) = \mathrm{Rang}(\mathrm{Ke}\, h)$ endlich ist, also $H \cong \mathbb{Q}^n$ für ein $n \geqslant 0$. Wählt man $F \subset \mathrm{Ke}\, h$ mit $F \cong \mathbb{Z}^n$, so ist $\mathrm{Ke}\, h/F$ torsionsvoll und direkte Summe von Zyklischen, also $M \cong H/\mathrm{Ke}\, h \cong (H/F)/(\mathrm{Ke}\, h/F) \cong H/F \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$.

Die entsprechende Charakterisierung von neat-Homomorphismen wollen wir nur formulieren, aber die Beweise nicht ausführen, da sich durch die Existenz einer injektiven Hülle einiges vereinfacht:

Satz 2.3*. *Für einen Homomorphismus $f: A \to A'$ sind äquivalent:*

(i) *f ist neat.*

(ii) $\mathrm{Bi}\, f$ *ist abgeschlossen in A', und* $\mathrm{Ke}\, f \subset \mathrm{Ra}(A)$.

(iii) $f^{-1}(pA') = pA$ *für alle Primzahlen p.*

(iv) *Ist das nebenstehende Diagramm eine Fasersumme und* α *ein wesentlicher Monomorphismus, so ist auch* α' *ein wesentlicher Monomorphismus.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' \end{array}$$

FOLGERUNG. $f: A \to A'$ *ist genau dann neat und koneat, wenn* Ke f *teilbar und* Kok f *torsionsfrei ist.*

Ein enger Zusammenhang zwischen neat- und koneat-Homomorphismen ergibt sich, wenn man untersucht, was Fasersummen und -produkte, bzw. die Funktoren Hom und Ext aus ihnen machen. Wir brauchen in den nächsten Abschnitten die Aussagen immer für eine einzelne Primzahl p:

DEFINITION.

$f: A \to A'$ heiße *p-neat*, wenn gilt $f^{-1}(pA') = pA$;

$g: C' \to C$ heiße *p-koneat*, wenn gilt $g(C'[p]) = C[p]$.

Entsprechend ist es für die folgenden Beweise günstig, neben dem p-Sockel $C[p]$ noch den Funktor $A\{p\} = A/pA$ zu verwenden. Ein Homomorphismus α ist offenbar genau dann p-neat, wenn $\alpha\{p\}$ ein (zerfallender) Monomorphismus ist; er ist genau dann p-koneat, wenn $\alpha[p]$ ein (zerfallender) Epimorphismus ist.

LEMMA 2.4. *Sei von den beiden folgenden Diagrammen das erste eine Fasersumme, das zweite ein Faserprodukt:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & C. \end{array}$$

Dann gilt:

(I) *Ist* f *p-neat, so auch* f'. *Ist zusätzlich* α *p-koneat, so auch* α'.

(II) *Ist* g *p-koneat, so auch* g'. *Ist zusätzlich* β *p-neat, so auch* β'.

Beweis etwa für (I). Der Funktor $\{p\}$ macht aus dem ersten Diagramm wieder eine Fasersumme, so daß mit $f\{p\}$ auch $f'\{p\}$ ein Monomorphismus ist. Aus der Voraussetzung f p-neat folgt weiter $B'[p] = \alpha'(A'[p]) + f'(B[p])$, so daß mit α auch α' p-koneat ist.

SATZ 2.5. (1) *Sind X und $\varphi\colon Y \to Y'$ gegeben, so gilt: Genau dann ist* $\varphi_*\colon \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y')$ *p-koneat, wenn φ p-koneat oder X p-teilbar ist.*

(2) *Sind C und $f\colon A \to A'$ gegeben, so gilt: Genau dann ist* $f_*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C, A')$ *p-neat, wenn f p-neat oder $T_p(C) = 0$ ist.*

(3) *Sind Y und $\gamma\colon X' \to X$ gegeben, so gilt: Genau dann ist* $\gamma^*\colon \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X', Y)$ *p-koneat, wenn γ p-neat oder $T_p(Y) = 0$ ist.*

(4) *Sind A und $g\colon C' \to C$ gegeben, so gilt: Genau dann ist* $g^*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ *p-neat, wenn g p-koneat oder A p-teilbar ist.*

Beweis. Bekanntlich hat man die natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}(X\{p\}, Y[p]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(X, Y)[p]$$

bzw.

$$\mathrm{Ext}(C, A)\{p\} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}(C[p], A\{p\}).$$

Mit ihrer Hilfe bekommt man zu den vier vorgegebenen Homomorphismen die kommutativen Quadrate

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X\{p\}, Y[p]) \arrow[r, "{\varphi[p]\cdot}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{Hom}(X\{p\}, Y'[p]) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}(X, Y)[p] \arrow[r, "{\varphi_*[p]}"] & \mathrm{Hom}(X, Y')[p]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(C, A)\{p\} \arrow[r, "{f_*\{p\}}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{Ext}(C, A')\{p\} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Ext}(C[p], A\{p\}) \arrow[r, "{f\{p\}\cdot}"] & \mathrm{Ext}(C[p], A'\{p\})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X\{p\}, Y[p]) \arrow[r, "{\cdot\gamma\{p\}}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathrm{Hom}(X'\{p\}, Y[p]) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}(X, Y)[p] \arrow[r, "{\gamma^*[p]}"] & \mathrm{Hom}(X', Y)[p]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(C, A)\{p\} \arrow[r, "{g^*\{p\}}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathrm{Ext}(C', A)\{p\} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Ext}(C[p], A\{p\}) \arrow[r, "{\cdot g[p]}"] & \mathrm{Ext}(C'[p], A\{p\}).
\end{tikzcd}$$

Damit ist sofort in allen vier Fällen die Richtung "$\Leftarrow$" klar, d.h. auf Hom wird immer ein p-koneat, auf Ext ein p-neat-Homomorphismus induziert. In den

Fällen (1) bzw. (2) ist auch die Umkehrung klar wegen $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(p), Y[p]) \cong Y[p]$ bzw. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/(p), A\{p\}) \cong A\{p\}$. In den Fällen (3) bzw. (4) hat man, falls $Y[p] \neq 0$ bzw. $A\{p\} \neq 0$ ist, nach Voraussetzung

$$\text{surjektiv } (\gamma\{p\})^{\cdot}: \mathrm{Hom}(X\{p\}, \mathbb{Z}/(p)) \to \mathrm{Hom}(X'\{p\}, \mathbb{Z}/(p)) \text{ bzw.}$$

$$\text{injektiv } (g[p])^{\cdot}: \mathrm{Ext}(C[p], \mathbb{Z}/(p)) \to \mathrm{Ext}(C'[p], \mathbb{Z}/(p)).$$

Mit dem Ansatz $\gamma\{p\} = \gamma\{p\} \circ \sigma \circ \gamma\{p\}$ bzw. $g[p] = g[p] \circ \rho \circ g[p]$ hat man also $(1 - \sigma \circ \gamma\{p\})^{\cdot} = 0$ bzw. $(1 - g[p] \circ \rho)^{\cdot} = 0$, beide Male also eine halbeinfache p-Gruppe G mit einem Endomorphismus u, für den $Fu = 0$ gilt mit $F = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}/(p))$ bzw. $F = \mathrm{Ext}(-, \mathbb{Z}/(p))$. Daraus folgt aber $u = 0$, denn die Zerlegung $u = G \xrightarrow{\pi} \mathrm{Bi}\, u \xrightarrow{\iota} G$ liefert $0 = FG \xrightarrow{F\iota} F\mathrm{Bi}\, u \xrightarrow{F\pi} FG$ mit $F\pi$ zerfallender Monomorphismus, $F\iota$ zerfallender Epimorphismus, also $F\mathrm{Bi}\, u = 0$, $\mathrm{Bi}\, u = 0$. Das bedeutet aber $\sigma \circ \gamma\{p\} = 1$ bzw. $g[p] \circ \rho = 1$ wie gewünscht.

FOLGERUNG. *Ist C eine Gruppe mit $T_p(C) \neq 0$ für alle p, und gilt* $\mathrm{Ext}(C, A)^{\kappa} \subset q\,\mathrm{Ext}(C, A)$, *so ist jedes Element von* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *durch q teilbar.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß A q-teilbar ist. Weil nun alle Primärkomponenten von C ungleich Null sind, gibt es einen koneat-Homomorphismus $g: C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, so daß $g^*: \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) \to \mathrm{Ext}(C, A)$ sowohl neat ist als auch κ-Elemente erhält, und es folgt $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)^{\kappa} \subset q\,\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$. Für den verbindenden Homomorphismus $\delta: A \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ gilt aber $\mathrm{Bi}\,\delta \subset \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)^{\kappa}$, so daß jetzt $\mathrm{Bi}\,\delta$ als reine Untergruppe von Ext selbst q-teilbar ist. Weil es auch $\mathrm{Ke}\,\delta = D(A)$ ist, folgt die Behauptung.

Unter Zusatzbedingungen kann man aber auch auf Hom p-neat, und auf Ext p-koneat-Homomorphismen erhalten:

LEMMA 2.6. *Seien die vier Homomorphismen wie in* (2.5) *gegeben*:

(1) *Ist X torsionsfrei und Y kotorsion, so gilt*: *Genau dann ist* $\varphi_*: \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y')$ *p-neat, wenn φ p-neat oder X p-teilbar ist.*

(2) *Ist C teilbar und A' reduziert, so gilt*: *Genau dann ist* $f_*: \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C, A')$ *p-koneat, wenn f p-koneat oder $T_p(C) = 0$ ist.*

(3) *Ist Y teilbar, so gilt*: *Genau dann ist* $\gamma^*: \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X', Y)$ *p-neat, wenn γ p-koneat oder $T_p(Y) = 0$ ist.*

(4) *Ist C' torsionsvoll und A torsionsfrei, so gilt*: *Genau dann ist* $g^*: \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ *p-koneat, wenn g p-neat oder A p-teilbar ist.*

Beweis. Durch Zurückführung aller vier Fälle auf (2.5). Wir führen nur den ersten vor. Bei (1) hat man eine kurze exakte Folge $0 \to X \to Q \to C \to 0$ mit Q torsionsfrei teilbar, und daraus ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Q, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathrm{Ext}(C, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_\cdot"'] & 0 \\
\mathrm{Hom}(Q, Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, Y') \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{Ext}(C, Y') \arrow[r] & \mathrm{Ext}(Q, Y').
\end{tikzcd}$$

Offenbar sind δ und δ' sowohl neat als auch koneat. Ist nun φ p-neat, so nach (2.5, 2) auch $\varphi_\cdot$, also auch φ_*; ist aber X p-teilbar, so ist es auch $\mathrm{Hom}(X, Y)$, so daß φ_* trivialerweise p-neat ist. —Sei umgekehrt φ_* p-neat und X nicht p-teilbar: Dann ist wegen der Surjektivität von δ auch $\varphi_\cdot$ p-neat, außerdem $T_p(C) \neq 0$, und wieder nach (2.5, 2) folgt, daß φ p-neat ist.

3. Zum Problem $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa = \mathrm{Ext}(C, A)^\beta$

Die Untergruppe der β-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ läßt sich nach (1.3) mit Hilfe einer projektiven Auflösung von C gut beschreiben. Falls in C fast alle Primärkomponenten gleich Null sind, stimmt sie mit der Menge der κ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ überein. Wir wollen die Frage nach dieser Gleichheit nun an ein beliebiges Paar (A, C) stellen, und im Falle $T(A) \subset^\oplus A$ können wir eine Antwort geben.

Der Extremfall, daß $\mathrm{Ext}(C, A)$ überhaupt keine κ-Elemente besitzt, wurde bereits durch den Beweis von (1.5) und durch die Folgerung zu (2.5) erledigt:

Satz 3.1. *Für ein Paar (A, C) sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa \subset \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}(C, A))$.

(ii) $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa = 0$.

(iii) $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ *ist teilbar, und falls* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p, *ist* A *teilbar.*

Lemma 3.2. *Ist* $g\colon C' \to C$ *ein Monomorphismus, so ist* $g^*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ *auch auf den* κ-*Elementen surjektiv.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* die Folge $E' = 0 \to A \to B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0$ nicht nur κ-exakt, sondern sogar $\mathrm{Ke}\,\beta'$ klein in B'. Weil g injektiv ist, gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
E' = 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
E = 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

und notwendig ist $\mathrm{Ke}\,\beta$ klein in B, also gewiß $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)^\kappa$ mit $g^*([E]) = [E']$.

Sei nun im *2. Schritt* E' κ-exakt, V ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta'$ in B'. Mit $A_1 = V \cap \mathrm{Ke}\,\beta'$ erhält man die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1 = 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[d, dashed, "f"'] & \subset & V \arrow[r, "\beta'|V"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ E' = 0 \arrow[r] & A \arrow[rr] & & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(C, A_1) \arrow[r, "g^{\cdot}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Ext}(C', A_1) \arrow[d, "f_{\cdot}"] \\ \mathrm{Ext}(C, A) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Ext}(C', A). \end{tikzcd}$$

Zu E_1 gibt es aber nach eben ein $x \in \mathrm{Ext}(C, A_1)^\kappa$ mit $g^{\cdot}(x) = [E_1]$, so daß $f_*(x) \in \mathrm{Ext}(C, A)^\kappa$ folgt mit $g^*(f_*(x)) = f_{\cdot}([E_1]) = [E']$ wie gewünscht. (Ebenso zeigt man mit Hilfe des 2. Schrittes, daß g^* auch auf den β-Elementen surjektiv ist.)

LEMMA 3.3. (a) *Sei* $(C_i \mid i \in I)$ *eine nichtleere Familie von Gruppen,* ω: $\mathrm{Ext}(\coprod C_i, A) \to \prod \mathrm{Ext}(C_i, A)$ *der kanonische Isomorphismus und* $x \in \mathrm{Ext}(\coprod C_i, A)$. *Dann gilt: Sind alle Projektionen von* $\omega(x)$ κ*-Elemente, und sind fast alle Projektionen von* $\omega(x)$ *gleich Null, so ist auch* x *ein* κ*-Element.*

(b) *Sei* C *eine Torsionsgruppe,* ω: $\mathrm{Ext}(C, A) \to \prod \mathrm{Ext}(T_p(C), A)$ *der kanonische Isomorphismus und* $x \in \mathrm{Ext}(C, A)$. *Dann gilt: Sind alle Projektionen von* $\omega(x)$ κ*-Elemente, so ist auch* x *ein* κ*-Element.*

Beweis. (a) Sei exakt $E = 0 \to A \to^\alpha B \to^\beta \coprod C_i \to 0$ mit $[E] = x$. Mit den Inklusionen ϵ_j: $C_j \to \coprod C_i$ und mit $B_j = \beta^{-1}(\mathrm{Bi}\,\epsilon_j)$ erhält man

$$\begin{tikzcd} E\epsilon_j \equiv 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_j \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & C_j \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_j"] & 0 \\ E = 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & \coprod C_i \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

sowie $B/\mathrm{Bi}\,\alpha = \bigoplus_{i \in I} B_i/\mathrm{Bi}\,\alpha$. Nach Voraussetzung hat man nun für jedes $j \in I$ ein Komplement V_j von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B_j, und die Zusatzbedingung $V_j \cap \mathrm{Bi}\,\alpha = 0$ für fast alle j. Es folgt $(\Sigma V_i) + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$ und $(\Sigma V_i) \cap \mathrm{Bi}\,\alpha = \Sigma(V_i \cap \mathrm{Bi}\,\alpha)$, aber die letzte Summe ist wegen der Zusatzbedingung endlich, also klein in ΣV_i.

(b) Mit den entsprechenden Bezeichnungen sind jetzt alle V_p als wesentliche Überdeckung von $B_p/\mathrm{Bi}\alpha \cong T_p(C)$ sogar p-primär, also ohne jede Zusatzbedingung $\Sigma(V_p \cap \mathrm{Bi}\alpha)$ klein in ΣV_p.

Bemerkung 1. Es kann $x \in \mathrm{Ext}(\coprod C_i, A)$ ein κ-Element sein, ohne daß es irgendeine der Projektionen von $\omega(x)$ ist. Als Beispiel wähle man etwa $\omega\colon \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \prod \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z})$ und $x = [0 \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0]$.

Bemerkung 2. Aus (a) folgt sofort: Sind alle $\mathrm{Ext}(C_1, A), \ldots, \mathrm{Ext}(C_n, A)$ κ-voll, so auch $\mathrm{Ext}(\bigoplus_{i=1}^n C_i, A)$. Für unendlich viele Summanden ist das nicht mehr richtig. Sei etwa $C = \mathbb{Z}/(p)$ und A eine reduzierte nicht beschränkte p-Gruppe. Dann ist gewiß $\mathrm{Ext}(C, A)$ κ-voll, nicht aber $\mathrm{Ext}(C^{(\mathbb{N})}, A)$, denn es gibt einen Epimorphismus von A auf $M = \coprod_{n=1}^\infty \mathbb{Z}/(p^n)$, und $\mathrm{Ext}(M/pM, pM)$ ist nach [14, Satz 5.3] nicht κ-voll.

Hilfssatz 3.4. (a) *Ist* $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa \subset T(\mathrm{Ext}(C, A))$, *so ist* $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ *durch fast alle Primzahlen teilbar.*

(b) *Ist* $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ *durch fast alle Primzahlen teilbar, und ist entweder eine Primärkomponente von C gleich Null oder A torsionsvoll, so ist* $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa = \mathrm{Ext}(C, A)^\beta$.

Beweis. (a) Nach (3.2) ist auch in $\mathrm{Ext}(T(C), A)$ jedes κ-Element ein Torsionselement, und weil die behauptete Teilbarkeitsbedingung nur von $T(C)$ abhängt, können wir gleich C torsionsvoll annehmen. Wähle nun $x \in \mathrm{Ext}(C, A)$ so, daß bei dem Isomorphismus $\omega\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \prod \mathrm{Ext}(T_p(C), A)$ alle Projektionen von $\omega(x)$ κ-Elemente sind, und die p-te Projektion nur dann Null ist, wenn $\mathrm{Ext}(T_p(C), A)^\kappa = 0$ ist. Nach (3.3b) folgt $x \in \mathrm{Ext}(C, A)^\kappa$, so daß die Voraussetzung liefert $\omega(x) \in T(\prod \mathrm{Ext}(T_p(C), A)) = \coprod T(\mathrm{Ext}(T_p(C), A))$. Nach Wahl von $\omega(x)$ ist also $\mathrm{Ext}(T_p(C), A)^\kappa = 0$ für fast alle p, und das bedeutet nach (3.1) gerade die p-Teilbarkeit von $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ für fast alle p.

(b) Die Voraussetzungen gelten auch für $A' = A/D(A)$, und weil der kanonische Isomorphismus $\nu_*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C, A')$ sowohl κ-Elemente erhält als auch β-Elemente reflektiert, wollen wir gleich A reduziert annehmen. Sei nun κ-exakt $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0$, V ein Komplement von $\mathrm{Bi}\alpha$ in B. *1. Fall.* Mindestens eine Primärkomponente von C ist Null. Dann ist $V \cap \mathrm{Bi}\alpha$ torsionsvoll und koatomar, außerdem $T_p(V \cap \mathrm{Bi}\alpha) = 0$ für fast alle p (vgl. 1.5), also $V \cap \mathrm{Bi}\alpha$ beschränkt. *2. Fall.* A torsionsvoll. Nach eben können wir gleich $T_p(C) \neq 0$ annehmen für alle p (sonst fertig), so daß jetzt nach Voraussetzung $T_p(A) = 0$ ist für fast alle p, also wieder $V \cap \mathrm{Bi}\alpha$ beschränkt.

Folgerung. *Ist* $\mathrm{Ext}(C, \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))^\kappa \subset T(\mathrm{Ext}(C, \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})))$, *so sind fast alle Primärkomponenten in C gleich Null, und dann gilt* $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa = \mathrm{Ext}(C, A)^\beta$ *für alle A.*

HILFSSATZ 3.5. *Für eine Gruppe A sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}(\mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), A)^{\kappa} = \mathrm{Ext}(\mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), A)^{\beta}$.

(ii) *A ist durch fast alle Primzahlen teilbar, und $A/T(A)$ ist teilbar.*

(iii) $\mathrm{Ext}(C, A)$ *ist β-voll für jede Torsionsgruppe C, bei der alle Primärkomponenten endlich erzeugt sind.*

Beweis. (i $\to$ ii) Nach eben ist $T(A)$ durch fast alle Primzahlen teilbar. Sei nun $S/\mathbb{Z} = \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und $\delta: A \to \mathrm{Ext}(S/\mathbb{Z}, A)$ der zur κ-exakten Folge $0 \to \mathbb{Z} \subset S \to S/\mathbb{Z} \to 0$ gehörende verbindende Homomorphismus. Offenbar ist jedes Element von $\mathrm{Bi}\,\delta$ ein κ-Element, also nach Voraussetzung schon ein β-Element, und das bedeutet $T(A) + \mathrm{Ke}\,\delta = A$ nach (1.3). Weil aber $\mathrm{Ke}\,\delta = \mathrm{Ra}(A)$ ist, folgt die Teilbarkeit von $A/T(A)$. (ii $\to$ iii) Aus den Voraussetzungen über C folgt, daß $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ κ-voll ist, nach (3.4b) also sogar β-voll. Weil $\iota_*: \mathrm{Ext}(C, T(A)) \to \mathrm{Ext}(C, A)$ ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

SATZ 3.6. *Sei C beliebig, $T(A) \subset^{\oplus} A$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}(C, A)^{\kappa} = \mathrm{Ext}(C, A)^{\beta}$.

(ii) $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ *ist durch fast alle Primzahlen teilbar, und falls $T_p(C) \neq 0$ für alle p, ist $A/T(A)$ teilbar.*

Beweis. Mit den vorbereiteten Aussagen ist fast nichts mehr zu zeigen. Bei (i $\to$ ii) können wir wegen (3.4a) gleich $T_p(C) \neq 0$ annehmen für alle p. Dann gibt es aber einen Monomorphismus $g: \mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to C$, und weil $g^*: \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(\mathrm{So}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), A)$ auf den κ-Elementen surjektiv ist, folgt nach (3.5) die Teilbarkeit von $A/T(A)$. (ii $\to$ i) Wieder sei wegen (3.4b) gleich $T_p(C) \neq 0$ für alle p. Weil A zerfällt und $A/T(A)$ teilbar ist, ist der Isomorphismus $\iota_*: \mathrm{Ext}(C, T(A)) \to \mathrm{Ext}(C, A)$ sogar auf den κ-Elementen surjektiv, und weil nach (3.4b) in $\mathrm{Ext}(C, T(A))$ die κ-Elemente mit den β-Elementen übereinstimmen, gilt das auch in $\mathrm{Ext}(C, A)$.

Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß die Inklusion (i $\to$ ii) auch ohne die gravierende Annahme $T(A) \subset^{\oplus} A$ gilt. Nicht so bei (ii $\to$ i): Sei M eine reduzierte nicht beschränkte p-Gruppe und $0 \to M \to A \to \mathbb{Q} \to 0$ Repräsentant eines von Null verschiedenen Elementes von $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, M)$. Dann ist $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(A))$ durch alle Primzahlen $\neq p$ teilbar und $A/T(A) \cong \mathbb{Q}$. Weil aber $T(A)$ nicht abspaltet, besteht das Bild des verbindenden Homomorphismus $A \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ nicht nur aus Torsionselementen, und damit ist $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)^{\beta} \subsetneqq \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)^{\kappa}$.

4. DIE TIEFENSEQUENZ EINES GRUPPENELEMENTES

Im nächsten Abschnitt sollen die κ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$ durch Teilbarkeitseigenschaften charakterisiert werden. In (5.6) wird begründet, warum das übliche Maß—die p-Höhe von $x \in G$—zu scharf ist. Während die p-Höhe von x die *größte* p-Potenz ist, die man aus x herausziehen kann, interessiert uns die *kleinste* p-Potenz, die man aus x herausziehen muß, damit "der Rest" (natürlich nicht eindeutig bestimmt) nicht mehr durch p teilbar ist.

DEFINITION. Zu $x \in G$ heiße $t_p{}^G(x) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid$ es gibt ein $y \in G \setminus pG$ mit $x = p^i y\}$ die *p-Tiefe* von x in G; $t^G(x) = (t_2{}^G(x), t_3{}^G(x), t_5{}^G(x), \ldots)$ heiße die *Tiefensequenz* von x in G.

Es ist also $t_p{}^G(x)$ ein Element von $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, das bei torsionsfreiem G mit $h_p{}^G(x)$ übereinstimmt. Im allgemeinen ist aber die p-Tiefe kleiner als die p-Höhe, z.B. ist für $n \geqslant 1$ die p-Tiefe des Nullelementes von $\mathbb{Z}/(p^n)$ gerade n. Wir wollen zuerst einiges über $t_p{}^G(0)$ herleiten.

LEMMA 4.1. *Ist V ein Komplement von $G[p^n]$ in G, so ist V direkter Summand in G.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß der kanonische Epimorphismus $G[p^n] \to G/V$ zerfällt, also sein Kern $V[p^n]$ p-rein in $G[p^n]$ ist, und das ist offenbar äquivalent mit $\{x \in G \mid p^n x = 0, p^i x \in V\} \subset G[p^i] + V$ für alle $0 \leqslant i \leqslant n$. Dies zeigen wir durch Induktion über i. Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen, für $i + 1$ wähle man $x \in G$ mit $p^n x = 0$, $p^{i+1} x \in V$. Auf px wende man die Induktionsvoraussetzung an, also $px = x_1 + v$ mit $p^i x_1 = 0$. Aus $v = px - x_1 \in V \cap G[p^n] \subset pV$ folgt $v = pv_1$, also $x = (x - v_1) + v_1$ mit $p^{i+1}(x - v_1) = p^i(x_1 + v - v) = 0$.

Bemerkung. Der duale Fall ist ein wohlbekannter Satz von Khabbaz [7]: Jedes Durchschnittskomplement von $p^n G$ ist direkter Summand. Unsere Aussage ist überhaupt nur deswegen nützlich, weil in der Tat $G[p^n]$ (allgemeiner jede beschränkte Untergruppe) ein Komplement in G hat.

LEMMA 4.2. *Für G sind äquivalent:*

(i) $t_p{}^G(0) \leqslant n$.

(ii) *$p^n G$ ist nicht groß in G.*

(iii) *$G[p^n]$ ist nicht klein in G.*

(iv) *$G = G_1 \oplus G_2$ mit $G_1 \cong \mathbb{Z}/(p^e)$, $1 \leqslant e \leqslant n$.*

Beweis. (i $\to$ iii) Es gibt ein $y \in G \setminus pG$ mit $y \in G[p^n]$, d.h. es gilt $G[p^n] \not\subset pG$. Dann ist aber erst recht $G[p^n]$ nicht klein in G. (iii $\to$ iv) Für ein Komplement V von $G[p^n]$ in G gilt nach oben $V \oplus X = G$. Nach Voraussetzung ist $X \neq 0$, und natürlich durch p^n beschränkt, so daß die Behauptung folgt. (iv $\to$ ii) Es ist $G_1[p] \not\subset p^n G_1$, also erst recht nicht $p^n G$ groß in G. (ii $\to$ i) Es gibt ein $y \in G[p]$ mit $y \notin p^n G$, also auch ein $y_1 \in G \setminus pG$ mit $y = p^e y_1$, $e < n$. Aus $0 = p^{e+1} y_1$ folgt die Behauptung.

Bemerkung. Offenbar ist genau dann $t_p{}^G(0) = \infty$, wenn $T_p(G)$ teilbar ist; ist aber $t_p{}^G(0)$ endlich, so ist $\sigma = t_p{}^G(0) - 1$ die kleinste Zahl σ derart, daß die σ-te Ulminvariante von $T_p(G)$ ungleich Null ist.

SATZ 4.3. *Für $x \in G$ gilt:* $t_p{}^G(x) = \min(h_p{}^G(x), t_p{}^G(0))$.

Beweis. (1) Stets ist $t_p{}^G(x) \leqslant h_p{}^G(x)$, denn für $h_p{}^G(x) = \infty$ ist nichts zu zeigen, und aus $h_p{}^G(x) = n$ folgt $x = p^n y$ mit $y \in G \backslash pG$, also $t_p{}^G(x) \leqslant n$. (2) Stets ist $t_p{}^G(x) \leqslant t_p{}^G(0)$, denn für $t_p{}^G(0) = \infty$ ist nichts zu zeigen, und aus $t_p{}^G(0) = n$ folgt $0 = p^n z$ mit $z \in G \backslash pG$. Für alle $y \in G$ ist nun auch $z + py \notin pG$, also $t_p{}^G(p^{n+1}y) \leqslant n$; falls aber $x \notin p^{n+1}G$, ist nach eben $t_p{}^G(x) \leqslant n$. (3) Aus $t_p{}^G(x) < h_p{}^G(x)$ folgt mit $n = t_p{}^G(x)$, daß es $y_1 \in G$ und $y_2 \in G \backslash pG$ gibt mit $x = p^{n+1}y_1 = p^n y_2$, so daß aus $0 = p^n(py_1 - y_2)$ folgt $t_p{}^G(0) \leqslant n$, nach eben also $t_p{}^G(x) = t_p{}^G(0)$.

FOLGERUNG. *Genau dann ist $t_p{}^G(x) \leqslant n$, wenn es ein $y \in G \backslash pG$ gibt mit $p^n y \in \mathbb{Z}x$.*

LEMMA 4.4. *Für $x \in G$, $0 \neq r \in \mathbb{Z}$ gilt:* $t_p{}^G(rx) = \min(t_p{}^G(x) + e, t_p{}^G(0))$, *wobei e die höchste p-Potenz in r ist (und wenn nötig $\infty + e = \infty$).*

Beweis. (1) Es ist $t_p{}^G(rx) \leqslant t_p{}^G(x) + e$, denn für $t_p{}^G(x) = \infty$ ist nichts zu zeigen, und aus $t_p{}^G(x) = n$ folgt $x = p^n y$ mit $y \in G \backslash pG$, so daß mit $r = r'p^e$ weiter folgt $rx = p^{n+e}(r'y)$, $r'y \notin pG$, also $t_p{}^G(rx) \leqslant n + e$. (2) Klar ist nach dem Satz $t_p{}^G(rx) \leqslant t_p{}^G(0)$. (3) Wieder mit dem Satz ist $t_p{}^G(rx) = \min(h_p{}^G(rx), t_p{}^G(0)) \geqslant \min(h_p{}^G(x) + e, t_p{}^G(0)) \geqslant \min(t_p{}^G(x) + e, t_p{}^G(0))$.

Bemerkung. Die Formel besagt insbesondere: Ist $t_p{}^G(x) = t_p{}^G(y)$, so folgt $t_p{}^G(rx) = t_p{}^G(ry)$ für alle $r \in \mathbb{Z}$. Für die p-Höhe ist die entsprechende Aussage nicht richtig.

FOLGERUNGEN. (a) *Stets ist $t_p{}^G(x) \leqslant t_p{}^G(px) \leqslant t_p{}^G(x) + 1$, und genau dann gilt $t_p{}^G(x) = t_p{}^G(px)$, wenn schon $t_p{}^G(x) = t_p{}^G(0)$ ist.* (b) *Ist $t_p{}^G(p^e x) \leqslant e$, so folgt bereits $t_p{}^G(x) = 0$ oder $e \geqslant t_p{}^G(0)$.* (c) *Ist $rx = sy$ mit r, s beide ungleich Null, so folgt $t^G(x) \sim t^G(y)$, wobei $\sim$ die übliche Äquivalenz von Sequenzen sei, siehe* [5, *p.* 109]. *Speziell: Die Tiefensequenz eines Torsionselementes ist äquivalent zur Tiefensequenz des Nullelementes.*

LEMMA 4.5. *Sei $f: A \to A'$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*

(I) *Genau dann ist $t_p^{A'}(fa) \leqslant t_p{}^A(a)$ für alle $a \in A$, wenn f p-neat ist.*

(II) *Genau dann ist $t_p^{A'}(fa) \geqslant t_p{}^A(a)$ für alle $a \in A$, wenn $t_p^{A'}(0) \geqslant t_p{}^A(0)$ ist. Dies ist z.B. erfüllt, wenn f p-koneat ist.*

Beweis. (I) Natürlich muß, wenn die Ungleichung gilt, f p-neat sein; und umgekehrt folgt aus f p-neat, $t_p{}^A(a) = n$, daß $a = p^n a_1$ mit $a_1 \in A \backslash pA$, also

$fa = p^n(fa_1)$ mit $fa_1 \in A' \backslash pA'$, also $t_p^{A'}(fa) \leqslant n$. (II) Die Äquivalenz ist klar wegen (4.3). Sei nun f p-koneat: Aus $t_p^{A'}(0) = n$ folgt die Existenz eines $a' \in A'[p]$ mit $a' \notin p^n A'$, dazu also ein $a \in A[p]$ mit $fa = a'$, so daß auch $a \notin p^n A$ gelten muß, und damit ist $t_p{}^A(0) \leqslant n$.

FOLGERUNG. *Ist $x \in G$ und $f: G \to G$ ein Endomorphismus, so gilt $t_p{}^G(fx) \geqslant t_p{}^G(x)$.*

LEMMA 4.6. (a) *Ist $(A_i \mid i \in I)$ eine nichtleere Familie von Gruppen, und $x \in G = \prod_{i \in I} A_i$, so gilt $t_p{}^G(x) = \min\{t_p^{A_i}(x_i) \mid i \in I\}$; dieselbe Formel gilt, falls $G = \coprod A_i$.*

(b) *Ist $U \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i G$, so gilt $t_p^{G/U}(\bar{x}) = t_p{}^G(x)$ für alle $x \in G$.*

(c) *Ist $x \in U \subset G$ und U p-rein in G, so gilt $t_p{}^G(x) = \min(t_p{}^U(x), t_p^{G/U}(0))$.*

(d) *Sind X und Y Torsionsgruppen und $\varphi \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, so ist die p-Tiefe von φ in $\operatorname{Hom}(X, Y)$ gleich der p-Tiefe von φ_p in $\operatorname{Hom}(T_p(X), T_p(Y))$.*

Beweis. (a) Für alle $i \in I$ ist $t_p{}^G(x) \leqslant t_p^{A_i}(x_i)$, weil die Projektionen $G \to A_i$ koneat sind; es ist aber auch $t_p{}^G(x) \geqslant \min$, denn für $t_p{}^G(x) = \infty$ ist nichts zu zeigen, und aus $t_p{}^G(x) = n$ folgt $x = p^n y$ mit $y \in G \backslash pG$, so daß mindestens ein y_j nicht durch p teilbar ist, also $t_p^{A_j}(x_j) \leqslant n$ folgt. Ebenso für die Summe. (b) Weil die kanonische Abbildung $G \to G/U$ p-neat ist, gilt $\leqslant$; ist aber $t_p^{G/U}(\bar{x}) = n$, so folgt aus $\bar{x} = p^n \bar{y}$, $\bar{y}$ nicht durch p teilbar, daß $x - p^n y \in U$, $x - p^n y = p^{n+1} y_1$, also $x = p^n(py_1 + y)$ mit $py_1 + y \notin pG$, also $t_p{}^G(x) \leqslant n$. (c) *1. Schritt.* $x = 0$. Aus $U \subset G$ p-neat folgt $t_p{}^G(0) \leqslant t_p{}^U(0)$, aus $G \to G/U$ p-koneat folgt $t_p{}^G(0) \leqslant t_p^{G/U}(0)$, zusammen also $t_p{}^G(0) \leqslant \min$; wäre aber $t_p{}^G(0) < \min$, also $U[p] \subset p^n U$ sowie $(G/U)[p] \subset p^n(G/U)$ für $n = t_p{}^G(0)$, so folgte aus der p-Reinheit $G[p] \subset p^n G$, was nicht sein kann. *2. Schritt.* $x \in U$ beliebig. Dann gilt $t_p{}^G(x) = \min(h_p{}^G(x), t_p{}^G(0)) = \min(h_p{}^U(x), t_p{}^U(0), t_p^{G/U}(0)) = \min(t_p{}^U(x), t_p^{G/U}(0))$. (d) Die kanonische Abbildung $\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(T_p(X), T_p(Y))$ ist ein Epimorphismus mit p-teilbarem Kern, so daß (b) die Behauptung liefert.

Im Hinblick auf Abschnitt 5 interessiert uns noch die p-Tiefe von Elementen aus $\operatorname{Hom}(X, Y)$ bzw. $\operatorname{Ext}(C, A)$. Nach (4.3) geht es um die p-Tiefe des Nullelementes, und wir wollen das zuerst in einem Hilfssatz für die Spezialfälle $X = \mathbb{Z}/(p^n)$ bzw. $C = \mathbb{Z}/(p^n)$ besorgen. Sei wie früher $G\{p^n\} = G/p^n G$.

HILFSSATZ 4.7. *Für eine Gruppe G gilt:*

(I) *Ist $G[p^n] \neq 0$, so ist $t_p^{G[p^n]}(0) = \min(t_p{}^G(0), n)$.*

(II) *Ist $G\{p^n\} \neq 0$, so ist $t_p^{G\{p^n\}}(0) = \min(t_p{}^G(0), n)$.*

Beweis. (I) Weil $n \geqslant 1$, ist die Abbildung $G[p^n] \subset G$ p-koneat, also $t_p^{G[p^n]}(0) \leqslant t_p{}^G(0)$, und weil $G[p^n] \neq 0$, ist $t_p^{G[p^n]}(0) \leqslant n$. Falls aber $e = t_p^{G[p^n]}(0)$ echt kleiner als $t_p{}^G(0)$ ist, so folgt aus $0 = p^e y$, mit $y \in G[p^n]$, $y \notin p(G[p^n])$, daß

$y = py_1$ für ein $y_1 \in G$, also $e + 1 \geq n$, $e = n$. (II) Entsprechend folgt für $e = t_p^{G\{p^n\}}(0)$, daß $e \leqslant \min(t_p{}^G(0), n)$. Falls aber $e < n$ ist, folgt aus $0 = p^e\bar{y}$, mit $\bar{y} \notin p(G\{p^n\})$, daß $p^e y = p^{e+1}y_1$ für ein $y_1 \in G$, also $0 = p^e(py_1 - y)$ mit $py_1 - y \notin pG$, also $e = t_p{}^G(0)$.

Satz 4.8. *Für ein Paar* (X, Y) *bzw.* (A, C) *von Gruppen gilt:*

(I) *Ist* X *nicht p-teilbar und* $T_p(Y) \neq 0$, *so ist*

$$t_p^{\mathrm{Hom}(X,Y)}(0) = \min(t_p{}^X(0), t_p{}^Y(0)).$$

(II) *Ist* A *nicht p-teilbar und* $T_p(C) \neq 0$, *so ist*

$$t_p^{\mathrm{Ext}(C,A)}(0) = \min(t_p{}^A(0), t_p{}^C(0)).$$

Beweis. Die Bedingungen an X und Y bzw. A und C bedeuten keine echte Einschränkung, denn ohne sie ist stets die p-Tiefe des Nullelementes von Hom bzw. Ext bereits unendlich.—Nur für den Beweis wollen wir statt $t_p{}^G(0)$ kürzer $t(G)$ schreiben.

(I) Ist speziell $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ mit $I \neq \varnothing$, $0 \neq X_i$ zyklisch und p-primär für alle $i \in I$, so ist die Formel richtig, denn nach dem Hilfssatz ist $t(\mathrm{Hom}(X_i, Y)) = \min(t(X_i), t(Y))$, nach (4.6a) also $t(\mathrm{Hom}(X, Y)) = \min\{\min(t(X_i), t(Y)) \mid i \in I\} = \min(\min\{t(X_i) \mid i \in I\}, t(Y)) = \min(t(X), t(Y))$. Für jedes nicht p-teilbare X und jedes $n \geqslant 1$ gilt also:

$$\begin{aligned}\min(t(\mathrm{Hom}(X, Y)), n) &= t(\mathrm{Hom}(X, Y)[p^n]) = t(\mathrm{Hom}(X\{p^n\}, Y)) \\ &= \min(t(X), t(Y), n). \end{aligned} \tag{*}$$

Falls nun $t(X)$ oder $t(Y)$ endlich ist, enthält $\mathrm{Hom}(X, Y)$ einen direkten Summanden, der ungleich Null und durch eine Potenz von p beschränkt ist, so daß auch $t(\mathrm{Hom}(X, Y))$ endlich ist. Für genügend großes n folgt dann aus (*) die gewünschte Formel. Ist aber $t(X) = t(Y) = \infty$, so bedeutet (*), daß $t(\mathrm{Hom}(X, Y)) \geqslant n$ ist für alle $n \geqslant 1$, also auch $t(\mathrm{Hom}(X, Y)) = \infty$.

(II) Ist speziell $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$ mit $I \neq \varnothing$, alle C_i zyklisch, p-primär und ungleich Null, so sieht man wieder mit (4.6a) und dem Hilfssatz die Richtigkeit der Formel. Ist aber C beliebig mit $T_p(C) \neq 0$, so gilt für jedes $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\min(t(\mathrm{Ext}(C, A)), n) &= t(\mathrm{Ext}(C, A)\{p^n\}) = t(\mathrm{Ext}(C[p^n], A)) \\ &= \min(t(A), t(C), n), \end{aligned} \tag{**}$$

und die gleichen Schlüsse wie in (I) liefern die Behauptung.

Folgerung 1. *Ist* X *beliebig*, Y *teilbar mit* $T_p(Y) \neq 0$ *und* $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, *so gilt:*

$$t_p^{\mathrm{Hom}(X,Y)}(\varphi) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid X[p] \not\subset p^i(\mathrm{Ke}\,\varphi)\}.$$

FOLGERUNG 2. *Ist M p-primär und $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}(p^\infty))$, so gilt:*

(a) *Genau dann ist φ koneat, wenn $t_p(\varphi) = 0$ ist.*

(b) *Ist M direkt unzerlegbar, so ist $t_p(\varphi) = Lä(\mathrm{Ke}\,\varphi)$.*

(c) *Ist $m \leqslant t_p^M(0)$, so ist $m - Lä(\varphi(M[p^m])) = \min(t_p(\varphi), m)$.*

Beweis. (1) Wir wollen zuerst $h_p(\varphi) = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid X[p^i] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi\}$ zeigen. Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $h_p(\varphi) \geqslant n$, so folgt aus $\varphi = p^n\psi$ sofort $X[p^n] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$. Umgekehrt folgt aus $X[p^n] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$, daß sich φ über $X \to p^nX$ faktorisieren läßt, sagen wir als ψ_0, und wegen der Teilbarkeit von Y dieses ψ_0 von einem $\psi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ induziert ist. Man erhält $\varphi = p^n\psi$, also $h_p(\varphi) \geqslant n$. Damit ist die Höhenformel klar.

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ mit $t_p(\varphi) \leqslant n$, so hat man $\varphi = p^e\psi$ mit $e \leqslant n$, ψ nicht durch p teilbar. Nach eben bedeutet das $X[p] \not\subset \mathrm{Ke}\,\psi$, so daß aus $p^n(\mathrm{Ke}\,\varphi) \subset \mathrm{Ke}\,\psi$ auch $X[p] \not\subset p^n(\mathrm{Ke}\,\varphi)$ folgt. Umgekehrt folgt aus $X[p] \not\subset p^n(\mathrm{Ke}\,\varphi)$ auch $t_p(\varphi) \leqslant n$, denn falls $h_p(\varphi) \leqslant n$ ist nichts zu zeigen, und falls $h_p(\varphi) \nleqslant n$, also $\varphi = p^{n+1}\psi$, folgt aus $p^n(\mathrm{Ke}\,\varphi) = \mathrm{Ke}(p\psi) \cap p^nX$ sogar $X[p] \not\subset p^nX$, also nach Satz $t_p^{\mathrm{Hom}(X,Y)}(0) \leqslant n$.

(2) Die erste Aussage wurde eben gezeigt, die zweite gilt, weil für das direkt unzerlegbare M die Bedingung $M[p] \not\subset p^i(\mathrm{Ke}\,\varphi)$ äquivalent ist mit $\mathrm{Ke}\,\varphi \subset M[p^i]$. Bei (c) kann man gleich $m > 0$ und $t_p(\varphi) < \infty$ annehmen. Mit $n = m - 1$ lautet jetzt die Voraussetzung $t_p^{\mathrm{Hom}}(0) \nleqslant n$, so daß für jedes $e \geqslant 0$ der Reihe nach äquivalent sind: $Lä(\varphi(M[p^m])) > e$, $p^e\varphi(M[p^m]) \neq 0$, $h_p(p^e\varphi) \leqslant n$, $t_p(p^e\varphi) = \min(t_p(\varphi) + e, t_p(0)) \leqslant n$, $m - t_p(\varphi) > e$. Daraus folgt sofort $Lä(\varphi(M[p^m])) = \max(0, m - t_p(\varphi))$ wie behauptet. (Man kann leicht Beispiele angeben, daß für $m > t_p^M(0)$ die untersuchte Länge nicht mehr allein von $t_p(\varphi)$ abhängt.)

5. DIE κ-ELEMENTE VON $\mathrm{Ext}(C, A)$ FÜR C TORSIONSVOLL, A TORSIONSFREI VOM RANG 1

Stets sei in diesem Abschnitt das Paar (A, C) wie in der Überschrift, und von A wollen wir gleich $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Q}$ annehmen. Zu jedem $[E] \in \mathrm{Ext}(C, A)$ gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$(\square) \qquad \begin{tikzcd} E = 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \subset & \mathbb{Q} \arrow[r, "\nu"'] & \mathbb{Q}/A \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

das wir im folgenden immer mit $(\square)$ zitieren werden. Mittels des verbindenden

Isomorphismus $\vartheta\colon \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Q}/A) \to \mathrm{Ext}(C, A)$ gilt also gerade $\vartheta(f) = [E]$, und wir wollen die Komplementeigenschaften von E durch f beschreiben.

HILFSSATZ 5.1. *Sei* ($\square$) *gegeben,* $0 \neq a_0 \in A$. *Dann sind äquivalent:*

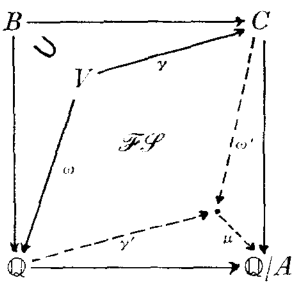
(i) Bi α *hat ein Komplement* V *in* B, *mit* $\alpha(a_0) \in V$.

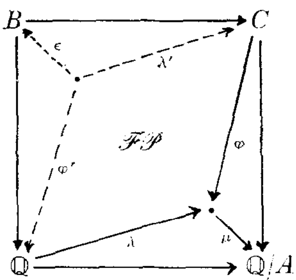
(ii) *Es gibt Homomorphismen* λ, μ, φ *mit* $\mu\varphi = f$, $\mu\lambda = \nu$, φ *koneat,* λ *wesentlicher Epimorphismus und* $a_0 \in \mathrm{Ke}\,\lambda$:

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, "\lambda"'] & \cdot \arrow[r, "\mu"'] & \mathbb{Q}/A.
\end{tikzcd}$$

(iii) *Für alle Primzahlen p gilt* $T_p(C) \neq 0$ *und* $t_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqslant h_p^A(a_0)$.

Beweis. Für die Äquivalenz von (i) mit (ii) betrachte man die beiden folgenden Diagramme:





Hat man nun bei (i $\to$ ii) ein Komplement V von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B, mit $\alpha(a_0) \in V$, so bilde man aus $\omega = f' \mid V$ und $\gamma = \beta \mid V$ die Fasersumme; wegen $\nu\omega = f\gamma$ existiert auch noch μ mit $\mu\omega' = f$ und $\mu\gamma' = \nu$, und es bleibt zu zeigen, daß ω' und γ' die gewünschten Eigenschaften haben: Mit γ ist natürlich auch γ' ein wesentlicher Epimorphismus, und nach (2.4) ist mit ω auch ω' koneat; schließlich ist $\gamma'(a_0) = \gamma'\omega(\alpha a_0) = \omega'\gamma(\alpha a_0) = 0$, also $a_0 \in \mathrm{Ke}\,\gamma'$. Hat man für (ii $\to$ i) umgekehrt λ, μ, φ wie angegeben, so bilde man aus λ und φ das Faserprodukt, und wegen $f\lambda' = \nu\varphi'$ existiert ϵ mit $\beta\epsilon = \lambda'$ und $f'\epsilon = \varphi'$. Weil φ koneat, ist mit λ auch λ' wesentlicher Epimorphismus, insbesondere $\epsilon(\mathrm{Ke}\,\lambda') = \mathrm{Bi}\,\epsilon \cap \mathrm{Ke}\,\beta$ klein in $\mathrm{Bi}\,\epsilon$, so daß $\mathrm{Bi}\,\epsilon$ ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B ist; weil es schließlich ein x gibt mit $\varphi'(x) = a_0$, $\lambda'(x) = 0$, ist $\alpha(a_0) = \epsilon(x)$ ein Element von $\mathrm{Bi}\,\epsilon$.

(ii $\to$ iii) Offenbar kann man $f = C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}/U \xrightarrow{\mu} \mathbb{Q}/A$ annehmen, mit $a_0 \in U \subset A$, U koatomar und μ kanonisch. Weil φ koneat und $\mathbb{Q}/U \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, kann in C keine Primärkomponente Null sein. Falls $h_p^A(a_0) = \infty$, ist die behauptete Ungleichung gewiß richtig. Sei also $h_p^A(a_0) < \infty$: Dann hat $\mathrm{Ke}\,\mu_p = T_p(A/U)$ die endliche

Länge $e_p = h_p^A(a_0) - h_p^U(a_0)$, so daß $\mu_p = p^{e_p}\omega_p$ folgt für einen Isomorphismus ω_p, und weil nun $\omega_p\varphi_p$ koneat ist mit $f_p = p^{e_p}(\omega_p\varphi_p)$, gilt $t_p(f) = t_p(f_p) \leqslant e_p \leqslant h_p^A(a_0)$ wie behauptet. (iii $\rightarrow$ ii) Sei $P = \{\text{prim } p \mid A \text{ nicht } p\text{-teilbar}\}$. Für jedes $p \in P$ hat man nach Voraussetzung $f_p = p^{e_p}g_p$ mit g_p koneat, $e_p \leqslant h_p^A(a_0) < \infty$. Dazu gibt es genau eine Zwischengruppe $a_0 \in U \subset \mathbb{Q}$ mit $h_p^U(a_0) = h_p^A(a_0) - e_p$ falls $p \in P$, $h_p^U(a_0) = 0$ falls $p \notin P$. Es folgt, daß U eine koatomare Untergruppe von A ist, und daß es für die kanonische Abbildung μ: $\mathbb{Q}/U \rightarrow \mathbb{Q}/A$ Isomorphismen ω_p gibt ($p \in P$) mit $\mu_p = p^{e_p}\omega_p$. Nun kann man φ: $C \rightarrow \mathbb{Q}/U$ definieren: Für $p \notin P$ sei φ_p koneat (was wegen $T_p(C) \neq 0$ möglich ist), für $p \in P$ sei $\varphi_p = \omega_p^{-1}g_p$, und damit folgt $\mu\varphi = f$ sowie φ koneat.

Bemerkung. Für die Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ ii) kann man auch $a_0 = 0$ zulassen. Der Begriff "Komplement" erscheint dann als Abschwächung von "direkter Summand," denn das letztere bedeutet natürlich im Diagramm ($\square$), daß sich f über ganz ν faktorisieren läßt.

THEOREM 5.2. *Sei ($\square$) gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) $\operatorname{Bi} \alpha \subset^{\kappa} B$.

(ii) *Falls* $[E] \neq 0$, *gilt* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p *und* $\mathcal{C}\ell t^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqslant \tau(A)$.

(iii) *Falls* $f \neq 0$, *gilt*

(a) $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p,

(b) A *nicht* p*-teilbar und* C p*-teilbar* $\Rightarrow f_p \neq 0$,

(c) *für fast alle* p *ist* $t_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqslant h_p^A(1)$.

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) $\mathcal{C}\ell$ sei die Klassenbildung, wie sie bei Höhensequenzen üblich ist, und $\tau(A)$ der sogenannte Typ von A, d.h. $\mathcal{C}\ell h^A(1)$. Sei nun V ein Komplement von $\operatorname{Bi} \alpha$ in B. Aus $[E] \neq 0$ folgt $V \cap \operatorname{Bi} \alpha \neq 0$, also $\alpha(a_0) \in V$ für ein $0 \neq a_0 \in A$, und nach dem Hilfssatz folgt $T_p(C) \neq 0$ für alle p, sowie $\mathcal{C}\ell t^{\mathrm{Ext}}([E]) \leqslant \mathcal{C}\ell h^A(a_0) = \tau(A)$. (ii $\rightarrow$ iii) Ist A nicht p-teilbar und C p-teilbar, so ist die p-Tiefe des Nullelementes von $\operatorname{Hom}(T_p(C), T_p(\mathbb{Q}/A))$ gleich unendlich. (iii $\rightarrow$ i) Für $f = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $f \neq 0$, $P = \{\text{prim } p \mid t_p(f) \nleqslant h_p^A(1)\}$. Falls $P = \varnothing$, ist man nach dem Hilfssatz fertig, andernfalls ist nach Voraussetzung P wenigstens endlich, sagen wir $P = \{p_1, ..., p_k\}$. Für diese p ist nach (b) auch $t_p(f) < \infty$, und wir werden gleich sehen, daß es daher ein g und $e_i \geqslant 0$ gibt mit $f = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}g$, $t_{p_i}(g) = 0$ für alle i. Nach (4.4) gilt aber dann $t_p(g) \leqslant h_p^A(1)$ für alle Primzahlen p, so daß nach dem Hilfssatz g ein κ-Element ist, also auch das Vielfache f.

Bleibt zu zeigen: Ist G eine Gruppe, $x \in G$ und sind $p_1, ..., p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen mit $t_{p_i}^G(x) = e_i < \infty$ für alle i, so gibt es ein $y \in G$ mit $t_{p_i}^G(y) = 0$ für alle i und $x = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}y$. Für $k = 1$ folgt das aber aus der Definition der Tiefe, und für $k \geqslant 2$ durch Induktion mit Hilfe von (4.4).

Bemerkung. Ob $\vartheta(f)$ ein κ-Element in $\mathrm{Ext}(C, A)$ ist, läßt sich wegen (4.8, Folgerung 1) allein am Kern von f entscheiden. Im Spezialfall $C = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ kann man die Bedingung (iii) des Theorems auch so lesen: Falls $f \neq 0$, gibt es einen Epimorphismus von A auf $\mathrm{Ke}\, f$.

FOLGERUNG 1. *Enthält* $\mathrm{Ext}(C, A)^\kappa$ *ein von Null verschiedenes Torsionselement, so ist* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *bereits* κ*-voll.*

FOLGERUNG 2. *Ist* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p, *so ist jedes Element von* $\mathrm{Ext}(C, A)$ *Summe von zwei* κ*-Elementen.*

Beweis. (1) Sei $0 \neq x \in \mathrm{Ext}(C, A)$ sowohl κ- als auch Torsionselement. Dann folgt $T_p(C) \neq 0$ für alle p, sowie $\mathscr{cl}t^{\mathrm{Ext}}(0) = \mathscr{cl}t^{\mathrm{Ext}}(x) \leqslant \tau(A)$, und daraus $\mathscr{cl}t^{\mathrm{Ext}}(y) \leqslant \tau(A)$ für alle $y \in \mathrm{Ext}(C, A)$. (2) Sei $f \in \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Q}/A)$. Wir suchen die Zerlegung von f_p für jedes p: *1. Fall.* $T_p(C)$ hat eine nichttriviale Zerlegung, sagen wir in $M_1 \oplus M_2$. Dann gibt es koneat-Homomorphismen $\alpha_i\colon M_i \to T_p(\mathbb{Q}/A)$, so daß auch $g_p' = \langle \alpha_1, f_p \mid M_2 - \alpha_2 \rangle$ und $g_p'' = \langle f_p \mid M_1 - \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ koneat sind, mit $g_p' + g_p'' = f_p$. *2. Fall.* $T_p(C)$ ist direkt unzerlegbar. Falls $p \geqslant 3$, hat man wieder $f_p = g_p' + g_p''$ mit g_p', g_p'' koneat, denn im Endomorphismenring $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(T_p(C))$ ist jedes Element Summe von zwei Einheiten; sollte aber $p = 2$ sein, so gibt es wenigstens eine Zerlegung $f_2 = g_2' + g_2''$ derart, daß im Falle A nicht 2-teilbar, C 2-teilbar beide ungleich Null sind.—Zusammen: g' und g'' sind κ-Elemente, mit $g' + g'' = f$.

Als nächste Anwendung des Theorems wollen wir prüfen, wann $\mathrm{Ext}(C, A)$ κ-voll ist, und dazu allgemeiner für einen Homomorphismus $g\colon C' \to C$ untersuchen, wann bei der induzierten Abbildung $g^*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$ der Kern bzw. das Bild nur aus κ-Elementen besteht.

LEMMA 5.3. *Sei gegeben* $g\colon C' \to C$ *mit* C' *torsionsvoll,* $g^*\colon \mathrm{Ext}(C, A) \to \mathrm{Ext}(C', A)$. *Dann gilt:*

(I) *Ist* $\Omega = \{\mathrm{prim}\, p \mid A$ *nicht* p*-teilbar und* $g_p \neq 0\}$, *so sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Bi}\, g^*$ *enthält nur* κ*-Elemente.*

(ii) *Falls* $\mathrm{Bi}\, g^* \neq 0$, *gilt*

(a) $T_p(C') \neq 0$ *für alle* p,

(b) A *nicht* p*-teilbar und* C' p*-teilbar* $\Rightarrow \Omega = \{p\}$,

(c) *für fast alle* p *ist* $t_p^{C'}(0) \leqslant h_p{}^A(1)$.

(II) *Ist* $\Psi = \{\mathrm{prim}\, p \mid A$ *nicht* p*-teilbar und* g_p *nicht surjektiv*$\}$, *so sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ke}\, g^*$ *enthält nur* κ*-Elemente.*

(ii) *Falls* $\mathrm{Ke}\, g^* \neq 0$, *gilt*

(a) $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p,

(b) A *nicht* p*-teilbar und* C p*-teilbar* $\Rightarrow \Psi = \{p\}$,

(c) *für fast alle* p *ist* $t_p{}^C(0) \leqslant h_p{}^A(1)$.

Beweis. (I) (i $\rightarrow$ ii) Offenbar ist $\Omega = \varnothing$ äquivalent damit, daß $g^* = 0$ ist. Sei also Bi $g^* \neq 0$, $q \in \Omega$. Wähle $f\colon C \rightarrow \mathbb{Q}/A$ derart, daß $f_q g_q \neq 0$ und $f_p = 0$ für alle $p \neq q$. Dann ist $0 \neq fg = g^*(f)$ nach Voraussetzung ein κ-Element, also (a) und (c) erfüllt. Sei für (b) nun A nicht p-teilbar, C' p-teilbar: Weil $(fg)_p \neq 0$ sein muß, folgt $p \in \Omega$; gäbe es aber dann noch ein $q' \in \Omega$ mit $q' \neq p$, so wäre nach Voraussetzung auch κ-Element $f'g$ (mit einem zu f analogen f'), insbesondere $(f'g)_p \neq 0$, was nicht sein kann. (ii $\rightarrow$ i) Sei $f\colon C \rightarrow \mathbb{Q}/A$ gegeben mit $fg \neq 0$ (sonst fertig). Um zu zeigen, daß fg ein κ-Element ist, ist nur noch der Fall A nicht p-teilbar, C' p-teilbar zu prüfen: Dann ist aber nach Voraussetzung $(fg)_r = 0$ für alle Primzahlen $r \neq p$, also $(fg)_p \neq 0$.

(II) Aus der exakten Folge $C' \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\nu} \operatorname{Kok} g \rightarrow 0$ erhält man, weil C' und C torsionsvoll und A torsionsfrei, die exakte Folge $0 \rightarrow \operatorname{Ext}(\operatorname{Kok} g, A) \xrightarrow{\nu^*} \operatorname{Ext}(C, A) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Ext}(C', A)$, sowie $\Psi = \{\text{prim } p \mid A \text{ nicht } p\text{-teilbar und } \nu_p \neq 0\}$. Wendet man auf ν^* den Teil (I) an, so folgt die Behauptung.

FOLGERUNG 1. *Ist* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p, *so sind äquivalent*:

(i) $\operatorname{Ext}(C, A)$ *ist* κ*-voll*.

(ii) *Falls* A *durch mindestens zwei Primzahlen nicht teilbar ist, gilt* $c\ell t^{\mathrm{Ext}}(0) \leqslant \tau(A)$.

(iii) *Falls* A *durch mindestens zwei Primzahlen nicht teilbar ist, gilt*

(a) A *nicht* p*-teilbar* $\Rightarrow$ C *nicht* p*-teilbar*,

(b) *für fast alle* p *ist* $t_p{}^C(0) \leqslant h_p{}^A(1)$.

FOLGERUNG 2. *Ist* $(C_i \mid i \in I)$ *eine nichtleere Familie von Torsionsgruppen, mit* $\operatorname{Ext}(C_i, A)$ κ*-voll für alle* i, *so ist auch* $\operatorname{Ext}(\coprod C_i, A)$ κ*-voll*.

Beweis. (1) (i $\rightarrow$ iii) Sei A wie angegeben, $C' = C$ und $g = 0$. In Teil (II) ist dann $|\Psi| > 1$, so daß der Fall (b) in (ii) dort nicht vorkommen kann, und das ist die Behauptung. (iii $\rightarrow$ ii) klar. (ii $\rightarrow$ i) Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{Ext}(C, A)$ κ-voll ist, wenn A durch nur eine Primzahl q nicht teilbar ist: Zu $f \neq 0$ sind die Punkte (a) und (c) im Theorem trivialerweise erfüllt, aber auch (b), denn es ist $f_q \neq 0$. (2) Ist in jedem C_i mindestens eine Primärkomponente Null, so sind alle $\operatorname{Ext}(C_i, A)$ gleich Null, also auch $\operatorname{Ext}(\coprod C_i, A)$; gibt es aber ein $j \in I$ mit $T_p(C_j) \neq 0$ für alle p, so liefert der koneat-Homomorphismus $\epsilon_j{}^*\colon \operatorname{Ext}(\coprod C_i, A) \rightarrow \operatorname{Ext}(C_j, A)$ zusammen mit (4.5) und der eben bewiesenen Folgerung 1 die Behauptung. (Für beliebige A ist Folgerung 2 nicht richtig, wie in einer Bemerkung zu (3.3) gezeigt wurde.)

Bei unserer speziellen Wahl von A und C', C kann man die Frage von Abschnitt 2, wann denn g^*: Ext$(C, A) \to$ Ext(C', A) κ-Elemente erhält, vollständig beantworten:

SATZ 5.4. *Sei gegeben* g: $C' \to C$ *mit* C' *torsionsvoll*, $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p. *Mit* $\Omega = \{$*prim* $p \mid A$ *nicht* p*-teilbar und* $g_p \neq 0\}$ *gilt dann*:

(I) *Ist* $|\Omega| = 1$, *so erhält* g^*: Ext$(C, A) \to$ Ext(C', A) *genau dann* κ*-Elemente, wenn gilt*:

(a) $T_p(C') \neq 0$ *für alle* p,

(b) A *nicht* p*-teilbar und* C' p*-teilbar* $\Rightarrow \Omega = \{p\}$,

(c) *für fast alle* p *ist* $t_p^{C'}(0) \leqslant h_p{}^A(1)$.

(II) *Ist* $|\Omega| \geqslant 2$, *so erhält* g^*: Ext$(C, A) \to$ Ext(C', A) *genau dann* κ*-Elemente, wenn gilt*:

(a) $T_p(C') \neq 0$ *für alle* p,

(b) A *nicht* p*-teilbar und* C' p*-teilbar* $\Rightarrow g_p$ *surjektiv*,

(c) *für fast alle* p *ist* $t_p^{C'}(0) \leqslant h_p{}^A(1)$ *oder* g p*-koneat*.

Beweis. Der Fall $\Omega = \varnothing$ bedeutet $g^* = 0$ und ist uninteressant; ist aber $\Omega \neq \varnothing$ und erhält g^* κ-Elemente, so liegt nach (5.2, Folgerung 2) auch in Bi g^* ein von Null verschiedenes κ-Element, so daß $T_p(C') \neq 0$ folgt für alle p. Weiter brauchen wir folgende Bemerkung: Ist $q \in \Omega$, erhält g^* κ-Elemente, und ist p eine Primzahl mit A nicht p-teilbar, C' p-teilbar und $p \neq q$, so muß g_p surjektiv sein. Wäre nämlich Kok $g_p \neq 0$, so gäbe es ein f_p: $T_p(C) \to T_p(\mathbb{Q}/A)$ mit $f_p \neq 0$, $f_p g_p = 0$; außerdem kann man ein f_q: $T_q(C) \to T_q(\mathbb{Q}/A)$ wählen mit $f_q g_q \neq 0$, und legt man jetzt f so fest, daß es in allen anderen Primärkomponenten koneat ist, so ist f ein κ-Element, also auch fg, insbesondere $(fg)_p \neq 0$, was nicht wahr ist.

Fall I. Sind alle drei Bedingungen erfüllt, so weiß man aus (5.3), daß Bi g^* nur aus κ-Elementen besteht.—Erhalte umgekehrt g^* κ-Elemente: Dann ist nach den Vorbemerkungen schon (a) und (b) klar. Für (c) wähle man ein $f: C \to \mathbb{Q}/A$ derart, daß $f_q g_q \neq 0$, wobei q das einzige Element von Ω ist, und f_p koneat für alle $p \neq q$. Weil dann f ein κ-Element ist, ist auch $fg \neq 0$ eines, insbesondere $t_p(f_p g_p) \leqslant h_p{}^A(1)$ für fast alle p. Nun ist aber $f_p g_p = 0$ für alle $p \neq q$, so daß (c) folgt.

Fall II. Seien alle drei Bedingungen erfüllt, $f: C \to \mathbb{Q}/A$ ein κ-Element mit $fg \neq 0$ (sonst fertig): Ist, im Hinblick auf Theorem 5.2, A nicht p-teilbar und C' p-teilbar, so folgt nach Voraussetzung g_p surjektiv, C p-teilbar, f_p surjektiv, $(fg)_p \neq 0$. Außerdem gibt es ein $n \geqslant 1$ mit: $p \nmid n$ und A nicht p-teilbar $\Rightarrow t_p(f) \leqslant h_p{}^A(1)$ und $[t_p^{C'}(0) \leqslant h_p{}^A(1)$ oder g p-koneat], also $t_p(fg) \leqslant h_p{}^A(1)$.

Erhalte umgekehrt g^* κ-Elemente. Wieder ist nach den Vorbemerkungen (a) klar, ebenso (b), weil Ω mindestens zwei Elemente besitzt. Für (c) wähle ein $q \in \Omega$ und ein f_q: $T_q(C) \to T_q(\mathbb{Q}/A)$ mit $f_q g_q \neq 0$. Falls nun $p \neq q$ und A nicht p-teilbar ist, gibt es nach (2.6, 3) einen koneat-Homomorphismus φ_p: $T_p(C) \to T_p(\mathbb{Q}/A)$, für den nur dann $\varphi_p g_p$ koneat ist, wenn es schon g_p ist. Damit kann man jetzt f_q zu einem f ergänzen, indem man für $p \neq q$ und A nicht p-teilbar festlegt $f_p = p^h \varphi_p$ mit $h = h_p{}^A(1)$. Es folgt mit (5.2), daß f ein κ-Element ist, nach Voraussetzung also auch $fg \neq 0$, so daß insbesondere ein $n \geqslant 1$ existiert mit: $p \nmid n$ und A nicht p-teilbar $\Rightarrow p \neq q$ und $t_p(fg) \leqslant h_p{}^A(1)$, also $t_p(p^h \varphi_p g_p) \leqslant h$, nach (4.4) also bereits $t_p^{C'}(0) \leqslant h$ oder $\varphi_p g_p$ koneat; im zweiten Fall folgt aber nach Wahl der φ_p bereits g_p koneat.

Weil die p-Tiefe des Nullelementes immer größer gleich Eins ist, erhält man im Spezialfall $A = \mathbb{Z}$ eine viel einfachere Beschreibung, nämlich

FOLGERUNG. *Sei g: $C' \to C$ mit C' torsionsvoll, $T_p(C) \neq 0$ für alle p. Dann sind äquivalent:*

(i) g^*: $\operatorname{Ext}(C, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(C', \mathbb{Z})$ *erhält κ-Elemente.*

(ii) *Falls $g \neq 0$, gilt*

(a) *C' p-teilbar $\Rightarrow g_p$ surjektiv,*

(b) *für fast alle p ist g p-koneat.*

Der folgende Satz zeigt, warum für die Untersuchung der κ-Elemente in Ext der Höhenbegriff zu scharf war. Wir wollen in einem vorausgehenden Hilfssatz die Argumente sammeln, die dann in jeder Primärkomponente von C nötig sind.

HILFSSATZ 5.5. *Sei M eine p-Gruppe, $\varphi \in \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z}(p^\infty))$ und $n \geqslant 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) $t_p(\varphi \mid V) \leqslant n$ *für alle $V \subset M$, die ein direktes Komplement unter* $\operatorname{Ke} \varphi$ *haben.*

(ii) $h_p(\varphi) \leqslant n$.

(iii) $h_p(\varphi \mid V) \leqslant n$ *für alle $V \subset M$ mit folgender Eigenschaft:*

$$V \subset X \subset M \text{ und } X/V \text{ zyklisch} \Rightarrow V \oplus U = X \text{ mit } U \subset \operatorname{Ke} \varphi. \qquad (*)$$

Beweis. Wir benützen ständig die Charakterisierungen von Höhe und Tiefe aus (4.8). (i $\to$ ii) Ist $h_p(\varphi) \nleqslant n$, also $M[p^{n+1}] \subset \operatorname{Ke} \varphi$, so wähle man ein Komplement V von $M[p^{n+1}]$ in M, das nach (4.1) gerade die Voraussetzung von (i) erfüllt. Aus $t_p(\varphi \mid V) \leqslant n$ folgt, weil $V[p^{n+1}]$ klein in V und also $t_p{}^V(0) \geqslant n + 2$ ist, sogar $h_p(\varphi \mid V) \leqslant n$, also erst recht $h_p(\varphi) \leqslant n$, was nicht möglich ist. (ii $\to$ iii) Besitze V die Eigenschaft (*). Angenommen, es wäre $h_p(\varphi \mid V) \nleqslant n$, so folgte $V[p^{n+1}] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$, also mit (*) der Widerspruch $M[p^{n+1}] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$, denn zu $w \in M[p^{n+1}]$ gibt es eine Zerlegung $V \oplus U = V + \mathbb{Z}w$ mit $U \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$, also $w \in V[p^{n+1}] \oplus U[p^{n+1}] \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$. (iii → i) Hat V ein direktes Komplement unter $\mathrm{Ke}\,\varphi$, so erfüllt es gewiß die Bedingung (*).

SATZ 5.6. *Sei* ($\square$) *gegeben. Dann sind äquivalent*:

(i) $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *hat in jeder direkten Zwischengruppe ein Komplement.*

(ii) $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *hat in jeder reinen Zwischengruppe ein Komplement.*

(iii) *Falls* $f \neq 0$, *gilt*

(a) $f_p \neq 0$ *für alle* p,

(b) *für fast alle* p *ist* $h_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqslant h_p{}^A(1)$.

Beweis. Unter einer direkten (bzw. reinen) Zwischengruppe verstehen wir ein X mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset X \subset B$ und $X \subset^{\oplus} B$ (bzw. X rein in B). Man kann sie leicht in C beschreiben: Für $L \subset C$ ist $\beta^{-1}(L) \subset^{\oplus} B$ äquivalent damit, daß L ein direktes Komplement unter $\mathrm{Ke}\,f$ hat. Klar folgt aus $\beta^{-1}(L) \oplus V = B$, daß $L \oplus \beta(V) = C$ und $V \subset T(B)$, $\beta(V) \subset \mathrm{Ke}\,f$; hat man aber umgekehrt $L \oplus K = C$ mit $K \subset \mathrm{Ke}\,f$, so folgt aus dem ersten $\beta^{-1}(L)/\mathrm{Bi}\,\alpha \oplus \beta^{-1}(K)/\mathrm{Bi}\,\alpha = B/\mathrm{Bi}\,\alpha$, aus dem zweiten $\beta^{-1}(K) \subset \mathrm{Bi}\,\alpha + T(B)$, $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\oplus} \beta^{-1}(K)$, zusammen also $\beta^{-1}(L) \subset^{\oplus} B$.—Entsprechend zeigt man: Genau dann ist $\beta^{-1}(L)$ rein in B, wenn es für alle $L \subset N \subset C$, mit N/L zyklisch, eine Zerlegung $L \oplus K = N$ gibt mit $K \subset \mathrm{Ke}\,f$.

(i → iii) Sei $f \neq 0$. Falls es bei (a) eine Primzahl q gäbe mit $f_q = 0$, so hätte $L = \bigoplus_{p \neq q} T_p(C)$ ein direktes Komplement unter $\mathrm{Ke}\,f$, und es folgte $\beta^{-1}(L) \subset^{\oplus} B$, $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} \beta^{-1}(L)$; weil aber in $\beta^{-1}(L)/\mathrm{Bi}\,\alpha$ die q-Komponente fehlt, bedeutete das $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\oplus} \beta^{-1}(L)$, $f = 0$ entgegen der Annahme. Für (b) sei $P = \{\mathrm{prim}\, p \mid h_p(f) \nleqslant h_p{}^A(1)\}$. Falls $P = \varnothing$ ist man fertig, andernfalls gibt es nach dem Hilfssatz für jedes $p \in P$ eine Untergruppe $L_p \subset T_p(C)$, die ein direktes Komplement unter $\mathrm{Ke}\,f_p$ hat und für die $t_p(f_p \mid L_p) \nleqslant h_p{}^A(1)$ gilt. Definiert man nun $L \subset C$ durch $T_p(L) = L_p$ falls $p \in P$, $T_p(L) = T_p(C)$ falls $p \notin P$, so hat L ein direktes Komplement unter $\mathrm{Ke}\,f$, und es folgt $\beta^{-1}(L) \subset^{\oplus} B$, $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} \beta^{-1}(L)$, aber das letztere nicht zerfallend. Nach (5.2) folgt $t_p(f \mid L) \leqslant h_p{}^A(1)$ für fast alle p, so daß P endlich sein muß.

(iii → ii) Sei $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht direkter Summand in B, X eine reine Zwischengruppe. Für alle p erfüllt dann die Inklusion $T_p(\beta X) \subset T_p(C)$ die Bedingung (*) des Hilfssatzes, so daß $h_p(f \mid \beta X)$ für alle p endlich, und für fast alle p kleiner gleich $h_p{}^A(1)$ ist, also $f \mid \beta X$ ein κ-Element ist, d.h. $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X$.

FOLGERUNG. *Ist* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p *und* $A \subsetneqq \mathbb{Q}$, *so sind äquivalent*:

(i) *Ist* κ-*exakt* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, so hat $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *auch in jeder direkten Zwischengruppe ein Komplement.*

(ii) A *ist koatomar und* C *ist teilbar.*

Beweis. (i $\to$ ii) Weil $\operatorname{Ext}(C, A)$ ungleich Null ist, besitzt es nach (5.2, Folgerung 2) ein von Null verschiedenes κ-Element, so daß $T_p(\mathbb{Q}/A) \neq 0$ ist für alle p, also A koatomar. Sei q eine Primzahl mit C nicht q-teilbar: Wähle $f: C \to \mathbb{Q}/A$ derart, daß $f_q = 0$ und f_p koneat für alle $p \neq q$. Dann ist $0 \neq f$ ein κ-Element, also nach Voraussetzung $f_p \neq 0$ für alle p, entgegen unserer Wahl von f. (ii $\to$ i) Ist V ein Komplement von $\operatorname{Bi} \alpha$ in B, so folgt aus unseren Voraussetzungen $V = D(B)$. Für jede direkte Zwischengruppe X ist aber dann $D(X)$ ein Komplement von $\operatorname{Bi} \alpha$ in X.

Bemerkung 1. Hat $\operatorname{Bi} \alpha$ sogar in jeder koabgeschlossenen Zwischengruppe ein Komplement, so ist $\operatorname{Bi} \alpha$ bereits direkter Summand oder klein in B.

Bemerkung 2. Selbst wenn $\operatorname{Bi} \alpha$ klein in B ist, braucht nicht $T(B) \subset^{\oplus} B$ zu gelten: Für jede Primzahl p wähle man einen Homomorphismus f_p: $\mathbb{Z}/(p^3) \times \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ derart, daß $\operatorname{Ke} f_p$ zwar koabgeschlossen, aber nicht direkter Summand ist. Die direkte Summe über alle p liefert $f: C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit C komplementiert und reduziert, f koneat. Bildet man das zugehörige Diagramm ($\square$) mit $A = \mathbb{Z}$, so ist mit ν auch β wesentlicher Epimorphismus; wäre aber $T(B) \subset^{\oplus} B$, so müßte nach (1.6) gelten $\operatorname{Ke} f \subset^{\beta} C$, also $\operatorname{Ke} f_p \subset^{\oplus} T_p(C)$ für fast alle p, entgegen unserer Wahl von f.

Das Kriterium (1.6) für das Zerfallen von B läßt sich auf unsere Situation ($\square$) abwandeln; es ergibt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang mit dem Komplementbegriff:

SATZ 5.7. *Sei* ($\square$) *gegeben: Genau dann gilt* $T(B) \subset^{\oplus} B$, *wenn es ein Komplement* L *von* $\operatorname{Ke} f$ *in* C *gibt mit* $L\ddot{a}(T_p(L \cap \operatorname{Ke} f)) \leqslant h_p{}^A(1)$ *für fast alle* p.

Beweis. Wir wollen das Kriterium von Meggiben [8, p. 142] verwenden und müssen dazu die Höhenmatrix von $\alpha(1)$ in B ausrechnen:

(I) $p^n\alpha(1) \in p^m B \Leftrightarrow m - L\ddot{a}(f(C[p^m])) \leqslant n + h_p{}^A(1)$. Zum Beweis kann man gleich A nicht p-teilbar, also $h = h_p{}^A(1)$ endlich annehmen. Für $n \geqslant m$ ist die Aussage richtig, sei also $n < m$: Offenbar ist $p^n\alpha(1) \in p^m B$ äquivalent mit $\nu(1/p^{m-n}) \in f(C[p^m])$, und weil stets $\mathbb{Z}\nu(1/p^i)$ eine zyklische p-Gruppe der Länge $\max(0, i - h)$ ist, folgt hier mit $i = m - n$, daß die linke Seite von (I) äquivalent ist mit $\max(0, m - n - h) \leqslant L\ddot{a}(f(C[p^m]))$, und das ist die Behauptung.

(II) Ist $T_p(C)$ direkt unzerlegbar, $f_p \neq 0$, $e = L\ddot{a}(\operatorname{Ke} f_p)$ und $h = h_p{}^A(1)$, so gilt:

$$h_p{}^B(p^n\alpha(1)) = \begin{cases} n + h, & e > n + h \\ n + h + l - e, \quad \text{falls} & e \leqslant n + h, \quad T_p(C) \cong \mathbb{Z}/(p^l) \\ \infty, & e \leqslant n + h, \quad T_p(C) \cong \mathbb{Z}(p^\infty). \end{cases}$$

Zum Beweis wollen wir zuerst den Fall $T_p(C) \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ betrachten: Dann ist

$f_p = p^e g_p$ mit g_p isomorph, also $Lä(f(C[p^m])) = Lä(p^e(\mathbb{Z}/(p^m))) = \max(0, m - e)$, also $m - Lä(f(C[p^m])) = \min(e, m)$, und daraus folgt mit (I) die Behauptung.— Ist aber $T_p(C) \cong \mathbb{Z}/(p^l)$, so ist $e < l$ und $f_p = p^e g_p$ mit g_p monomorph, also $f(C[p^m]) \cong p^e(C[p^m])$. Weil $C[p^m]$ eine zyklische p-Gruppe der Länge $\min(m, l)$ ist, folgt $Lä(f(C[p^m])) = \min(\max(0, m - e), l - e)$, also $m - Lä(f(C[p^m])) = \max(\min(e, m), m - l + e)$. Mit (I) gilt nun $p^n\alpha(1) \in p^m B$ genau dann, wenn $\min(e, m) \leqslant n + h$ und $m \leqslant n + h + l - e$, woraus wieder die Behauptung folgt.

(III) Ist $\mathbb{H}$ die Höhenmatrix von $\alpha(1)$ in B, $T_p(C)$ direkt unzerlegbar und $f_p \neq 0$, so hat die p-Zeile von $\mathbb{H}$ höchstens eine Lücke, und sie ist genau dann lückenfrei, wenn $Lä(\mathrm{Ke}\, f_p) \leqslant h_p{}^A(1)$ ist.

Zum Begriff der Höhenmatrix siehe etwa [5, p. 197]. Weil $T_p(B)$ Null oder direkt unzerlegbar ist, stimmt für jedes $x \in B$ die p-Höhe mit der sogenannten verallgemeinerten p-Höhe überein, und damit folgt unsere Behauptung sofort aus (II).

(IV) Der Satz ist richtig, wenn speziell jede Primärkomponente von C Null oder direkt unzerlegbar ist.

Zum Beweis betrachten wir zuerst die in (III) ausgeschlossenen Fälle: Ist A p-teilbar, so gilt $h_p{}^B(p^n\alpha(1)) = \infty$ für alle n, ist aber A nicht p-teilbar und $f_p = 0$, so folgt aus (I), daß $h_p{}^B(p^n\alpha(1)) = n + h_p{}^A(1)$ für alle n. Höchstens für solche p mit $f_p \neq 0$ hat also die p-Zeile von $\mathbb{H}$ eine Lücke. Nach Meggiben ist jetzt $T(B) \subset^{\oplus} B$ äquivalent damit, daß fast alle Zeilen von $\mathbb{H}$ lückenfrei sind, d.h. daß es ein $n \geqslant 1$ gibt mit: $p \nmid n$ und $f_p \neq 0 \Rightarrow Lä(\mathrm{Ke}\, f_p) \leqslant h_p{}^A(1)$. Für das einzige Komplement L von $\mathrm{Ke}\, f$ in C ist das aber gerade die Forderung des Satzes.

(V) Sei jetzt C beliebig. Ist L wie angegeben, so sind alle Primärkomponenten von L Null oder direkt unzerlegbar, und mit $g = f \mid L$ hat man $Lä(\mathrm{Ke}\, g_p) \leqslant h_p{}^A(1)$ für fast alle p. Aus (IV) folgt nun $V \oplus T(\beta^{-1}(L)) = \beta^{-1}(L)$, zusammen mit $\beta^{-1}(L) + T(B) = B$ also sofort $V \oplus T(B) = B$.—Umgekehrt folgt aus einer Zerlegung $V \oplus T(B) = B$, daß in $\beta(V)$ jede Primärkomponente Null oder direkt unzerlegbar ist. Im induzierten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \rightarrow & V + \mathrm{Bi}\,\alpha & \rightarrow & \beta(V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \subset & \mathbb{Q} & \xrightarrow[\nu]{} & \mathbb{Q}/A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ist wieder $V \oplus T(V + \mathrm{Bi}\,\alpha) = V + \mathrm{Bi}\,\alpha$, so daß es nach (IV) ein Komplement L von $\beta(V) \cap \mathrm{Ke}\, f$ in $\beta(V)$ gibt, mit $Lä(T_p(L \cap \mathrm{Ke}\, f)) \leqslant h_p{}^A(1)$ für fast alle p. Wegen $\beta(V) + \mathrm{Ke}\, f = C$ ist aber L auch ein Komplement von $\mathrm{Ke}\, f$ in C, und man hat die Behauptung.

6. Über die Transitivität der Relation κ; schwache Komplemente

Ist $U \subset^\kappa M$ und Y eine direkte Zwischengruppe, also $U \subset Y \subset^\oplus M$, so braucht U nach (5.6) kein Komplement in Y zu haben. Ist aber V ein Komplement von U in M, so erhält man mit $V_1 = V \cap Y$ immerhin noch $V_1 + U = Y$ und $V_1 \cap U$ klein in Y: Wir sagen, V_1 sei ein *schwaches Komplement* von U in Y. Dazu gilt folgende Umkehrung:

Lemma 6.1. *Ist $X \subset Y$ und besitzt X ein schwaches Komplement in Y, so gibt es eine zerfallende Erweiterung $Y \subset^\oplus Z$ mit $X \subset^\kappa Z$.*

Beweis. Sei $V + X = Y$ mit $V \cap X$ klein in Y. Zum Monomorphismus $d: Y \ni y \mapsto (y, \bar{y}) \in Y \times (Y/V)$ gibt es bekanntlich eine Erweiterung $Y \subset Z$ und einen Isomorphismus $\chi: Y \times (Y/V) \to Z$ mit $\chi d = Y \subset Z$. Klar ist $Y \subset^\oplus Z$, und mittels des kanonischen Isomorphismus $\varphi: Y \times (X/V \cap X) \to Y \times (Y/V)$ erhält man auch noch, daß $\chi\varphi(Y \times 0)$ ein Komplement von X in Z ist.

Wir wollen im folgenden für spezielle Folgen $0 \to A \to^\alpha B \to^\beta C \to 0$ zeigen, daß $\mathrm{Bi}\,\alpha$ genau dann ein schwaches Komplement in B hat, wenn es eine Zwischengruppe X gibt mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^\kappa X$ und $X \subset^\kappa B$—und daraus ein Beispiel dafür ableiten, daß die Relation κ nicht transitiv ist.

Lemma 6.2. *Sei ($\square$) wie in Abschnitt 5 gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *hat ein schwaches Komplement in B.*

(ii) *Falls* $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *nicht direkter Summand in B ist, gilt $\alpha(1) \in pB$ für fast alle p.*

(iii) *Falls $f \neq 0$, gilt für fast alle p: $h_p{}^A(1) > 0$ oder f p-koneat.*

Beweis. (i → ii) Ist $V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$ mit $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ klein in B, so folgt, weil $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht abspaltet, $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha \neq 0$, also $\alpha(a) \in Ra(B)$ für ein $0 \neq a \in A$, also $\alpha(n) \in Ra(B)$ für ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$, also $\alpha(1) \in pB$ für alle $p \nmid n$. (ii → i) Falls $\mathrm{Bi}\,\alpha$ abspaltet, ist nichts zu zeigen; andernfalls folgt aus der Voraussetzung, daß es ein $0 \neq U \subset \mathrm{Bi}\,\alpha$ gibt mit U klein in B. Weil $\mathrm{Bi}\,\alpha/U$ in jeder Primärkomponente artinsch ist, hat es im torsionsvollen B/U ein Komplement, sagen wir V/U, und aus $(V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha)/U$ klein in B/U folgt $V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha$ klein in B, so daß V ein schwaches Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B ist.

(ii ↔ iii) Offenbar ist $\alpha(1) \in pB$ äquivalent damit, daß es ein $c \in C[p]$ gibt mit $\nu(1/p) = f(c)$, also äquivalent mit $\nu(1/p) \in f(C[p])$. Wegen $\nu(1/p) \neq 0 \Leftrightarrow h_p{}^A(1) = 0$ folgt die Behauptung.

Satz 6.3. *Sei ($\square$) wie in Abschnitt 5 gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Zwischengruppe X mit* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^\kappa X$ *und* $X \subset^\kappa B$.

(ii) *Es gibt eine Zwischengruppe Y mit* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^\kappa Y$ *und* $Y + T(B) = B$.

(iii) *Falls $f \neq 0$, gilt $T_p(C) \neq 0$ für alle p, und für fast alle p gilt: $h_p{}^A(1) = 0$ oder [$T_p(C)$ direkt unzerlegbar und $f_p \neq 0$] $\Rightarrow t_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqslant h_p{}^A(1)$.*

Beweis. (i $\to$ ii) Wir zeigen allgemeiner: Ist

$$\mathrm{Bi}\,\alpha \subset X \subset^{\kappa} B \qquad \text{und} \qquad X + T(B) \subsetneq B,$$

so folgt $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} B$ (in diesem Fall wähle also $Y = B$, im anderen $Y = X$). Ist nämlich W ein Komplement von X in B, so ist es auch ein Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in $\mathrm{Bi}\,\alpha + W$; andrerseits kann $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht direkter Summand in $\mathrm{Bi}\,\alpha + W$ sein, denn aus $\mathrm{Bi}\,\alpha \oplus S = \mathrm{Bi}\,\alpha + W$ würde S torsionsvoll, $X + S = B$, $X + T(B) = B$ folgen, entgegen unserer Annahme. Es ist also die Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathrm{Bi}\,\alpha + W \xrightarrow{\beta} \beta(W) \longrightarrow 0$$

κ-exakt und nicht zerfallend, d.h. $\iota^*([E])$ ein von Null verschiedenes κ-Element in $\mathrm{Ext}(\beta(W), A)$. Dabei ist $\iota\colon \beta(W) \subset C$ ein neat-Homomorphismus, weil $\beta(W)$ ein Komplement von $\beta(X)$ in C ist, so daß ι^* nach (2.6, 4) koneat ist und nach (4.5) Tiefen nicht kleiner macht. Es folgt $T_p(C) \neq 0$ für alle p, und

$$_{c}lt^{\mathrm{Ext}(C,A)}([E]) \leqslant \tau(A)$$

wie behauptet.

(ii $\to$ iii) Sei $f \neq 0$. Dann kann $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht direkter Summand in Y sein, denn aus $\mathrm{Bi}\,\alpha \oplus S = Y$ würde folgen S torsionsvoll, $\mathrm{Bi}\,\alpha \oplus T(B) = B$, was ausgeschlossen ist. Insbesondere ist $T_p(C) \neq 0$ für alle p, und für $L = \beta(Y)$ gilt $L + \mathrm{Ke}\,f = C$, $t_p(f \mid L) \leqslant h_p{}^A(1)$ für fast alle p; in den angegebenen Spezialfällen muß aber dann schon $t_p(f) \leqslant h_p{}^A(1)$ gelten.

Um im letzten Schritt (iii $\to$ i) das X konstruieren zu können, brauchen wir für den Fall, daß $T_p(C)$ nichttrivial zerlegbar und $h_p{}^A(1) < \infty$ ist, folgenden

HILFSSATZ 6.4. *Sei M eine p-Gruppe mit einer nichttrivialen Zerlegung, $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}(p^\infty))$. Dann gibt es eine Untergruppe V von M mit*

(1) $V + \mathrm{Ke}\,\varphi = M$,

(2) $V \cap \mathrm{Ke}\,\varphi \subset^{\kappa} \mathrm{Ke}\,\varphi$,

(3) $V[p] \not\subset pV$ (*insbesondere* $t_p(\varphi \mid V) \leqslant 1$).

Beweis. *1. Fall.* $\mathrm{Ke}\,\varphi \subset^{\kappa} M$. Ist dann X ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\varphi$ in M, so folgt aus der Gestalt von X und aus der Voraussetzung über M, daß X nicht groß in M ist, also $X \cap E = 0$ für ein einfaches $E \subset M$. Damit leistet $V = X + E$ das Gewünschte. *2. Fall.* $\mathrm{Ke}\,\varphi$ hat kein Komplement in M. Dann folgt $D(M) \subset \mathrm{Ke}\,\varphi$, denn die Existenz eines $X \subset M$ mit $X \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, $X \not\subset \mathrm{Ke}\,\varphi$ würde nach sich ziehen $0 \neq (X + \mathrm{Ke}\,\varphi)/\mathrm{Ke}\,\varphi \subset M/\mathrm{Ke}\,\varphi$, so daß X ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\varphi$ in M wäre, was gerade ausgeschlossen ist. Es folgt weiter, daß $M/D(M)$ nicht komplementiert sein kann, also eine Zerlegung $M = G \oplus H$ existiert mit H endlich erzeugt, nicht zyklisch. Auf H und $\varphi \mid H$ kann man nun den 1. Fall anwenden, also $H_1 + (H \cap \mathrm{Ke}\,\varphi) = H$ mit $E \subset^{\oplus} H_1$, E einfach. Für $V =$

$G + H_1$ gilt dann $V + \mathrm{Ke}\,\varphi = M$ sowie $E \subset^{\circ} V$, und weil M/V als Faktor von H endlich erzeugt ist, hat auch noch $V \cap \mathrm{Ke}\,\varphi$ ein Komplement in $\mathrm{Ke}\,\varphi$.

Zum Beweis von (iii $\to$ i) im Satz sei gleich $f \neq 0$. Definiere nun $L \subset C$ durch

$$\begin{array}{llll} T_p(L) = \text{einfach} & & f_p = 0, & \\ = T_p(C) & \text{falls} & f_p \neq 0 \ \text{ und } & \begin{bmatrix} h_p{}^A(1) = 0 \ \text{ oder} \\ T_p(C) \ \text{direkt unz.} \end{bmatrix}, \\ = \text{mit den drei Eigen-} & & & \\ \ \text{schaften von } V \text{ wie} & & f_p \neq 0 \ \text{ und } & \begin{bmatrix} h_p{}^A(1) \neq 0 \ \text{ und} \\ T_p(C) \ \text{ nichttri-} \\ \text{vial zerlegbar} \end{bmatrix}. \\ \ \text{im Hilfssatz} & & & \end{array}$$

Dieses L erfüllt dann die folgenden fünf Bedingungen: (1) $L + \mathrm{Ke} f = C$; (2) $L \cap \mathrm{Ke} f \subset^{\kappa} \mathrm{Ke} f$; (3) $T_p(L) \neq 0$ für alle p; (4) $(f \mid L)_p = 0 \Rightarrow T_p(L)$ einfach; (5) für fast alle p ist $t_p(f \mid L) \leqslant h_p{}^A(1)$.

Damit leistet $X = \beta^{-1}(L)$ das Gewünschte, denn (3 — 5) gewährleistet $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X$, aus (1) folgt $X + T(B) = B$, so daß nur noch $X \cap T(B) \subset^{\kappa} T(B)$ zu zeigen ist, und das folgt aus (2) durch den von β induzierten Isomorphismus $T(B) \to \mathrm{Ke} f$, der $X \cap T(B)$ gerade auf $L \cap \mathrm{Ke} f$ abbildet.

FOLGERUNG 1. *Hat man* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X_0 \subset^{\kappa} X_1 \subset \cdots \subset^{\kappa} X_n = B$ *mit* $n \geqslant 2$, *so gibt es bereits* eine *Zwischengruppe* X *mit* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X \subset^{\kappa} B$.

FOLGERUNG 2. *Ist* $A = \mathbb{Z}$ *und* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p, *so hat* $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *genau dann ein schwaches Komplement in* B, *wenn es eine Zwischengruppe* X *gibt mit* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X \subset^{\kappa} B$.

Beweis. (1) Falls $X_0 + T(X_1) \subsetneqq X_1$ oder $X_1 + T(X_2) \subsetneqq X_2$, hat man nach dem Schritt (i $\to$ ii) sofort ein $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X \subset^{\kappa} X_2$, falls aber beide Male Gleichheit, also $X_0 + T(X_2) = X_2$ gilt, findet man wegen (ii $\to$ i) ein solches X. (2) Jede der beiden Aussagen ist, falls $f \neq 0$, äquivalent damit, daß f p-koneat ist für fast alle p.

So findet man jetzt sofort ein Beispiel dafür, daß die Relation κ nicht transitiv ist: Definiert man $E = 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ durch $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ mit $f_q = 0$, f_p isomorph für alle $p \neq q$, so hat $\mathrm{Bi}\,\alpha$ ein schwaches Komplement in B, aber kein Komplement.—Andrerseits kann man einfache Bedingungen dafür angeben, daß für die Erweiterungen von A durch C dieser Unterschied nicht besteht:

SATZ 6.5. *Sei* ($\square$) *wie in Abschnitt* 5 *gegeben und* $T_p(C) \neq 0$ *für alle* p. *Dann sind für das Paar* (A, C) *äquivalent*:

(i) *Ist exakt* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *und hat* $\mathrm{Bi}\,\alpha$ *ein schwaches Komplement in* B, *so gilt bereits* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} B$.

(ii) *Ist exakt* $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *und gibt es eine Zwischengruppe* X *mit* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} X \subset^{\kappa} B$, *so gilt bereits* $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset^{\kappa} B$.

(iii) *Falls A durch mindestens zwei Primzahlen nicht teilbar ist, gilt*

(a) *A nicht p-teilbar $\Rightarrow$ C nicht p-teilbar,*

(b) *für fast alle p ist $h_p^A(1) = 0$ oder $t_p^C(0) \leqslant h_p^A(1)$.*

Beweis. (i $\to$ ii) Wir müssen nur mit Hilfe dieses X zeigen, daß $\operatorname{Bi}\alpha$ ein schwaches Komplement in B hat: Sei V ein Komplement von $\operatorname{Bi}\alpha$ in X, und W ein Komplement von X in B. Falls sowohl $V \cap \operatorname{Bi}\alpha = 0$ als auch $W \cap \operatorname{Bi}\alpha = 0$ ist, sind V und W beide torsionsvoll, also $(V + W) \oplus \operatorname{Bi}\alpha = B$; falls aber eines der beiden ungleich Null ist, hat man ein $0 \neq U \subset \operatorname{Bi}\alpha$ mit U klein in B, und wie in (6.2) folgt die Behauptung.

(ii $\to$ iii) Sei A wie verlangt. (a) Angenommen, es gibt eine Primzahl q mit A nicht q-teilbar, C q-teilbar: Wählt man $f: C \to \mathbb{Q}/A$ derart, daß $f_q = 0$ und f_p koneat für alle $p \neq q$, so ist $f \neq 0$, weil es ja noch ein $q' \neq q$ gibt mit $T_{q'}(\mathbb{Q}/A) \neq 0$; außerdem gibt es nach (6.3) eine Zwischengruppe X mit $\operatorname{Bi}\alpha \subset^\kappa X \subset^\kappa B$, aber $\operatorname{Bi}\alpha$ hat kein Komplement in B. Das widerspricht der Voraussetzung. (b) Man wähle ein festes q mit A nicht q-teilbar, und dazu $f: C \to \mathbb{Q}/A$ derart, daß $f_p = 0$ ist falls $p \neq q$ und $h_p^A(1) \neq 0$, und daß f_p koneat ist in allen anderen Fällen. Wieder ist $f \neq 0$, und besitzt $\operatorname{Bi}\alpha$ ein "Zwischenkomplement." Nach Voraussetzung folgt $\operatorname{Bi}\alpha \subset^\kappa B$, insbesondere gibt es ein $n \geqslant 1$ mit $t_p^{\mathrm{Hom}}(f) \leqslant h_p^A(1)$ für alle p mit $p \nmid n$. Für $p \nmid n$, $p \neq q$ und $h_p^A(1) \notin \{0, \infty\}$ gilt dann, wie wir f gewählt haben, $t_p^C(0) \leqslant h_p^A(1)$, und das ist die Behauptung.

(iii $\to$ i) Besitze $\operatorname{Bi}\alpha$ ein schwaches Komplement in B, und sei f der nach ($\square$) zur Folge gehörende Homomorphismus. *1. Fall.* $f = 0$ oder A durch höchstens eine Primzahl nicht teilbar. Beide Male gilt dann $\operatorname{Bi}\alpha \subset^\kappa B$ (siehe 5.3). *2. Fall.* $f \neq 0$ und A durch mindestens zwei Primzahlen nicht teilbar. Nach (6.2) und unserer Voraussetzung (b) gibt es ein $n \geqslant 1$ mit: $p \nmid n$ und $h_p^A(1) = 0 \Rightarrow t_p(f) = 0$, $p \nmid n$ und $h_p^A(1) \neq 0 \Rightarrow t_p(f) \leqslant h_p^A(1)$. Weil also $t_p(f) \leqslant h_p^A(1)$ für fast alle p gilt, folgt mit (a), daß f ein κ-Element ist.

Unter milden Zusatzbedingungen ist aber die Relation κ doch noch transitiv, und wir wollen zum Abschluß zwei solche Fälle anführen:

LEMMA 6.6. *Sei $X \subset^\kappa Y \subset^\kappa Z$, und zwar V ein Komplement von X in Y, W ein Komplement von Y in Z. Dann gilt:*

(a) *Ist $\operatorname{Ra}(Y/X) = Y/X \cap \operatorname{Ra}(Z/X)$, so ist $V + W$ ein Komplement von X in Z.*

(b) *Ist V torsionsvoll, so folgt $X \subset^\kappa Z$.*

Beweis. (a) Aus der Radikalbedingung folgt, daß $(X + (W \cap Y))/X = ((W + X) \cap Y)/X$ nicht nur klein in Z/X, sondern sogar klein in Y/X ist, also die kanonische Abbildung $V \to Y/X \to Z/W + X$ ein wesentlicher Epimorphismus ist, d.h. V ein Komplement von $W + X$ in Z. Natürlich ist auch W ein

Komplement von $V + X$ in Z, und beides zusammen liefert die Behauptung. (b) Das koatomare $((W + X) \cap Y)/X$ hat im torsionsvollen Y/X ein Komplement Y'/X, so daß $(W + X)/X$ und Y'/X gegenseitig Komplemente in Z/X sind. Damit gilt $Y' \subset^{\kappa} Z$ und $\mathrm{Ra}(Y'/X) = Y'/X \cap \mathrm{Ra}(Z/X)$, und aus $(V \cap Y') + X = Y'$ folgt mit dem gleichen Argument $X \subset^{\kappa} Y'$, also nach eben $X \subset^{\kappa} Z$.

Literatur

1. R. Baer, Die Torsionsuntergruppe einer Abelschen Gruppe, *Math. Ann.* **135** (1958), 219–234.
2. J. J. Bowe, Neat homomorphisms, *Pacific J. Math.* **40** (1972), 13–21.
3. E. E. Enochs, Torsion free covering modules II, *Arch. Math.* **22** (1971), 37–52.
4. L. Fuchs, "Infinite Abelian Groups," Vol. I, Academic Press, New York/London, 1970.
5. L. Fuchs, "Infinite Abelian Groups," Vol. II, Academic Press, New York/London, 1973.
6. D. K. Harrison, Infinite abelian groups and homological methods, *Ann. Math.* **69** (1959), 366–391.
7. S. A. Khabbaz, On a theorem of Charles and Erdélyi, *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961), 103–104.
8. Ch. K. Megginen, On mixed groups of torsion-free rank one, *Illinois J. Math.* **11** (1967), 134–144.
9. R. J. Nunke, Modules of extensions over Dedekind rings, *Illinois J. Math.* **3** (1959), 222–241.
10. Z. Papp, A note on mixed abelian groups, *Notices Amer. Math. Soc.* **22** (1975), A 381.
11. A. E. Stratton, Quotient modules that split, *J. London Math. Soc.* **11** (1975), 88–90.
12. C. P. Walker, Properties of Ext and quasi-splitting of abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964), 157–160.
13. H. Zöschinger, Komplementierte Moduln über Dedekindringen, *J. Algebra* **29** (1974), 42–56.
14. H. Zöschinger, Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben, *Math. Scand.* **35** (1974), 267–287.