Math. Ann. 237, 193—202 (1978) 

# Invarianten wesentlicher Überdeckungen

Helmut Zöschinger

Mathematisches Institut der Universität, Theresienstr. 39, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Sei $R$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K \neq R$, und sei $\beta: B \to C$ eine wesentliche Überdeckung von $C$, d. h. $\beta$ epimorph und $\mathrm{Ke}\beta$ klein in $B$. Unter den Invarianten von $C$ verstehen wir hier die Kardinalzahlen $c_0 = \dim_K\left(C \bigotimes_R K\right)$, sowie $c_\mathfrak{p} = \dim_{R/\mathfrak{p}}(\mathrm{So}_\mathfrak{p}(C))$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$, mit $\mathrm{So}_\mathfrak{p}(C) = \{x \in C \mid x\mathfrak{p} = 0\}$. Das sind also gerade „die" Invarianten der injektiven Hülle $\hat{C}$ von $C$, und man kann nach dem Zusammenhang zwischen den Invarianten von $C$ und von $B$ fragen. Unser Hauptresultat lautet, daß es ein $n \geqq 0$ gibt mit $b_0 = c_0 + n$ und $b_\mathfrak{p} + n = c_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$, d. h. es gilt

$$\hat{B} \times (K/R)^n \cong \hat{C} \times K^n.$$

Als Hauptanwendung dieser Formel geben wir eine Beschreibung derjenigen algebraisch kompakten $R$-Moduln $M$ an, die in ihrer injektiven Hülle $\hat{M}$ ein Komplement haben, also ein minimales Element in der Menge $\{W \subset \hat{M} \mid W + M = \hat{M}\}$. Sie sind von der Form

$$M \cong D \times \left(\prod_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}\right) \times \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_\mathfrak{p} B_{i,\mathfrak{p}}\right),$$

wobei $D$ teilbar ist, $A_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-primär und beschränkt, und $B_{i,\mathfrak{p}} \in \{R_\mathfrak{p}^*, R/\mathfrak{p}, R/\mathfrak{p}^2, R/\mathfrak{p}^3, \ldots\}$ für alle $\mathfrak{p}$. Weil sich die Eigenschaft, in der injektiven Hülle ein Komplement zu haben, nicht auf direkte Summanden vererbt, müssen wir auch die Existenz von sogenannten schwachen Komplementen (s. Abschn. 2) untersuchen. Wieder wird für die injektiven Hüllen von algebraisch kompakten $R$-Moduln dieses Problem vollständig gelöst.

## 1. Wesentliche Überdeckungen und der $\mathfrak{p}$-Rang eines Moduls

Stets sei in dieser Note $R$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K \neq R$, und $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ seien maximale Ideale von $R$. Unter dem $\mathfrak{p}$-*Rang* eines $R$-Moduls $M$ versteht man die Dimension des $R/\mathfrak{p}$-Vektorraumes $M/M\mathfrak{p}$. Will man zu einem

0025-5831/78/0237/0193/\$92.00

Untermodul $U$ von $M$ den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{p}$-Rang$(U)$ und $\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ untersuchen, so kann man auf die exakte Folge $0 \to U \subset M \to M/U \to 0$ sowohl den Funktor $\operatorname{Ext}_R(R/\mathfrak{p}, -)$ als auch den Funktor $\operatorname{Tor}^R(-, R/\mathfrak{p})$ anwenden und erhält (s. [3], Theorem 3.1) beide Male die exakte Folge

$$(*)\qquad 0 \to \frac{\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M)+U}{U} \subset \mathrm{So}_{\mathfrak{p}}\left(\frac{M}{U}\right) \to \frac{U \cap M\mathfrak{p}}{U\mathfrak{p}} \to 0,$$

aus der die folgenden (im Falle $R=Z$ wohlbekannten) Formeln für den $\mathfrak{p}$-Rang resultieren:

**Lemma 1.1.** a) $\mathfrak{p}$-Rang$(U) = \dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(\hat{U}/U))$.

b) *Ist* $\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M) \subset U \subset M$, *so gilt* $\mathfrak{p}$-Rang$(U)+\mathfrak{p}$-Rang$(M/U)=\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ $+\dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M/U))$.

c) *Ist $M$ torsionsfrei, so gilt* $\mathfrak{p}$-Rang$(M) \leqq$ Rang$(M)$; *ist $M$ torsionsvoll, so gilt* $\mathfrak{p}$-Rang$(M) \leqq \dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M))$.

d) *Ist $U$ groß in $M$, so gilt* $\mathfrak{p}$-Rang$(U) \geqq \mathfrak{p}$-Rang$(M)$; *ist $T_{\mathfrak{p}}(M/U)$ beschränkt, so gilt* $\mathfrak{p}$-Rang$(U) \leqq \mathfrak{p}$-Rang$(M)$.

*Beweis.* Die ersten beiden Formeln ergeben sich unmittelbar aus $(*)$, wenn man bei a) speziell $M=\hat{U}$ wählt, und wenn man bei b) in der exakten Folge $0 \to U \cap M\mathfrak{p}/U\mathfrak{p} \subset U/U\mathfrak{p} \to M/M\mathfrak{p} \to (M/U)/(M/U)\mathfrak{p} \to 0$ das erste Glied durch $\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M/U)$ ersetzt. Für den ersten Teil von c) zeigen wir, im Hinblick auf spätere Anwendungen, zuerst allgemeiner: Ist $T_{\mathfrak{p}}(M)=0$, so gibt es einen freien, $\mathfrak{p}$-reinen Untermodul $B$ von $M$ mit $B+M\mathfrak{p}=M$. Dazu wähle man einen freien $R$-Modul $F$ mit Rang$(F)=\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ und betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dll, dashed, "g"'] \arrow[d, "\text{kan}"] \\ M \arrow[r, "\text{kan}"'] & M/M\mathfrak{p} \arrow[r, "\cong"'] & F/F\mathfrak{p}. \end{tikzcd}$$

Klar ist $\mathrm{Bi}g+M\mathfrak{p}=M$ und $(\mathrm{Bi}g)\mathfrak{p}=g(F\mathfrak{p})=g\bar{g}^{-1}(M\mathfrak{p})=\mathrm{Bi}g \cap M\mathfrak{p}$; weil aber $\mathrm{Ke}g$ projektiv und $\mathfrak{p}$-teilbar ist, ist er bereits Null, also $\mathrm{Bi}g$ frei wie gewünscht. Ist nun $M$ torsionsfrei, so folgt $\mathfrak{p}$-Rang$(M)=\mathfrak{p}$-Rang$(B)=$ Rang$(B) \leqq$ Rang$(M)$ wie behauptet. Für den zweiten Teil von c) kann man gleich $M$ $\mathfrak{p}$-primär, also sogar $M$ als Torsionsmodul über einem diskreten Bewertungsring annehmen. Dafür ist aber die angegebene Ungleichung wohlbekannt. Sei für d) nun $U$ groß in $M$. Weil dann $M/U$ torsionsvoll ist, folgt nach eben $\mathfrak{p}$-Rang$(M/U) \leqq \dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M/U))$, mit $(*)$ also $\mathfrak{p}$-Rang$(M) \leqq \mathfrak{p}$-Rang$(U)+\dim((\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M)+U)/U)$. Das letzte Glied ist aber wegen $\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(M) \subset U$ gleich Null. Ist schließlich $X/U=T_{\mathfrak{p}}(M/U)$ beschränkt, so folgt aus $\hat{X}/U \cong (\hat{X}/U)/(X/U) \cong \hat{X}/X$, daß sich $\hat{U}/U$ in $\hat{X}/X$ einbetten läßt, also $\mathfrak{p}$-Rang$(U)$ $\leqq \mathfrak{p}$-Rang$(X) \leqq \mathfrak{p}$-Rang$(M)$ wie behauptet.

Für einen torsionsfreien Modul $M$ vom Rang $n \geqq 1$ läßt sich der $\mathfrak{p}$-Rang auch so bestimmen: Man wähle eine aufsteigende Folge $0=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n=M$ derart, daß alle $M_{i+1}/M_i$ torsionsfrei vom Rang 1 sind. Weil in $\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ $=\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{p}$-Rang$(M_{i+1}/M_i)$ die Summanden nur den Wert Null oder Eins haben können, gilt dann

$\mathfrak{p}$-Rang$(M)=$ Rang$(M)-$ Anzahl der $\mathfrak{p}$-teilbaren Faktoren der Kette.

Wir wollen eine Charakterisierung der torsionsfreien koatomaren Moduln durch den $\mathfrak{p}$-Rang geben. Ein Modul $M$ heißt *koatomar*, wenn jeder teilbare Faktormodul von $M$ gleich Null ist. Unser Interesse an dieser Klasse von Moduln beruht darauf, daß ein Epimorphismus $\beta: B \to C$ genau dann wesentlich ist, wenn $\mathrm{Ke}\beta$ koatomar ist und enthalten in $\mathrm{Ra}(B) = \bigcap_{\mathfrak{p}} B\mathfrak{p}$. Weil die Klasse der koatomaren Moduln gegenüber Unter- und Faktormoduln, sowie gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, genügt es $T(M)$ und $M/T(M)$ zu beschreiben. [Trotzdem ist das unbefriedigend, denn in einem koatomaren Modul $M$ braucht, wenn $R$ unendlich viele maximale Ideale hat, $T(M)$ nicht abzuspalten, wie eine entsprechende Verallgemeinerung des Beispiels in [5], Bemerkung 2 zu Satz 5.6 zeigt. Ist allerdings $R$ semilokal, so ist jeder koatomare Modul $M$ von der Form $M_1 \oplus M_2$, wobei $M_1$ endlich erzeugt und $M_2$ beschränkt ist.] Ein Torsionsmodul ist genau dann koatomar, wenn jede seiner Primärkomponenten beschränkt ist, und ein torsionsfreier koatomarer Modul hat endlichen Rang. Für ihn gilt weiter:

**Lemma 1.2.** *Sei $M$ torsionsfrei vom* Rang $n \geqq 1$. *Dann sind äquivalent:*

i) *$M$ ist koatomar.*

ii) $\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ = Rang$(M)$ *für alle* $\mathfrak{p}$.

iii) *$M$ ist bis auf Isomorphie reiner, dichter Untermodul von $(R^*)^n$.*

iv) *$M$ ist lokal frei, d. h. $M_\mathfrak{p}$ ist freier $R_\mathfrak{p}$-Modul für alle* $\mathfrak{p}$.

*Beweis.* Für einen beliebigen $R$-Modul $X$ definieren wir $X^* = \mathrm{Ext}^1_R(K/R, X)$. Ist $X$ torsionsfrei und reduziert, so ist $X^*$ nach [2], Theorem 9 gerade die Vervollständigung von $X$ in der $R$-Topologie. Ein Untermodul $A$ von $X$ heiße *dicht* in $X$, wenn er es bezüglich der $R$-Topologie von $X$ ist, d.h. wenn $X/A$ teilbar ist.

i)$\leftrightarrow$ii) Berechnet man den $\mathfrak{p}$-Rang aus einer Kette $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ wie oben, so sieht man, daß es genügt die Äquivalenz für $n = 1$ zu zeigen, so daß wir gleich $R \subset M \subset K$ annehmen können: Ist $M$ koatomar, so ist $\mathfrak{p}$-Rang$(M)$ = $\mathfrak{p}$-Rang$(R) = 1$ für alle $\mathfrak{p}$ nach 1.1d); ist aber $M$ nicht koatomar, so kann es auch $M/R$ nicht sein, so daß es mindestens ein $\mathfrak{q}$ gibt mit $T_\mathfrak{q}(K/M) = 0$, also $\mathfrak{q}$-Rang$(M)$ $= 0$.

ii)$\leftrightarrow$iii) Für einen beliebigen $R$-Modul $X$ ist $\mathfrak{p}$-Rang$(X^*)$ = $\mathfrak{p}$-Rang$(X)$ für alle $\mathfrak{p}$. Damit ist iii)$\to$ii) klar. Ist aber umgekehrt ii) erfüllt, so ist $M$ nach 1.1c) reduziert, also exakt $0 \to M \to M^* \to \mathrm{Ext}^1_R(K, M) \to 0$, und schließlich $M^* \cong \mathrm{Hom}_R(K/R, \hat{M}/M) \cong \mathrm{Hom}_R(K/R, (K/R)^n) \cong (R^*)^n$.

ii)$\leftrightarrow$iv) Als $R_\mathfrak{p}$-Modul ist $M_\mathfrak{p}$ wieder torsionsfrei vom Rang $n$, also genau dann frei, wenn auch sein Basis-Untermodul den Rang $n$ hat. Das ist aber die Bedingung ii).

Als Anwendung erhält man, zusammen mit 1.1a), ein Kriterium dafür, daß ein Epimorphismus wesentlich ist:

**Folgerung.** *Sei $B$ teilbar und torsionsfrei, $C$ teilbar und torsionsvoll, und $\beta: B \to C$ ein Epimorphismus. Genau dann ist $\beta$ wesentlich, wenn es ein $n \geqq 0$ gibt mit $B \cong K^n$, $C \cong (K/R)^n$.*

Sind nun $B$ und $C$ beliebig, so verknüpft ein wesentlicher Epimorphismus von $B$ nach $C$ die Invarianten der injektiven Hüllen in folgender Weise:

**Satz 1.3.** *Sei $\beta: B \to C$ ein wesentlicher Epimorphismus, $n =$ tors.fr.Rang von $\mathrm{Ke}\beta$. Dann gilt*

$$\hat{B} \times (K/R)^n \cong \hat{C} \times K^n .$$

*Beweis.* Sei im ersten Schritt $B$ teilbar. Definiert man zu $X = \mathrm{Ke}\beta$ den Zwischenmodul $X \subset B' \subset B$ durch $B'/X = T(B/X)$, so ist auch $B'$ teilbar, und der Kern des wesentlichen Epimorphismus $B'/T(B') \to B'/X + T(B')$ hat den Rang $n$, so daß folgt $B'/T(B') \cong K^n$, $B'/X + T(B') \cong (K/R)^n$. Andrerseits ist $T(X)$ direkte Summe von zyklischen Moduln, also $T(B')/T(X) \cong T(B')$. Aus $T(C) \cong B'/X \cong (X + T(B'))/X \times B'/(X + T(B')) \cong T(B) \times (K/R)^n$ sowie $B/T(B) \cong B'/T(B') \times B/B' \cong K^n \times C/T(C)$ folgt durch Zusammen-Multiplizieren die Behauptung.

Sei nun im zweiten Schritt $B$ beliebig. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \hat{C} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

und weil $\tilde{\beta}$ wieder wesentlich ist, gilt nach eben $\hat{B} \times (K/R)^m \cong \hat{C} \times K^m$ mit $m$ $=$tors.fr.Rang$(\mathrm{Ke}\tilde{\beta})$. Wegen $\mathrm{Ke}\tilde{\beta} \cong \mathrm{Ke}\beta$ und $\hat{\tilde{B}} \cong \hat{B}$ folgt die Behauptung.

Aus dem Satz folgt insbesondere Hilfssatz 5.2 in [4]: Ist in $C$ mindestens eine Primärkomponente Null, so folgt $n = 0$, d. h. $\mathrm{Ke}\beta$ ist torsionsvoll und $\hat{B} \cong \hat{C}$. Der Satz gibt auch Auskunft über die Vielfalt der wesentlichen Überdeckungen:

**Folgerung 1.** *Jede wesentliche Überdeckung von $K/R$ ist isomorph zu $K/R$ oder $K$.*

**Folgerung 2.** *Für einen teilbaren Modul $C$ sind äquivalent: i) Jede wesentliche Überdeckung von $C$ ist isomorph zu $C$. ii) Falls alle $T_{\mathfrak{p}}(C) \neq 0$, sind alle Invarianten von $C$ unendlich.*

**Folgerung 3.** *Für einen teilbaren Modul $B$ sind äquivalent: i) Für jeden kleinen Untermodul $X$ von $B$ gilt $B/X \cong B$. ii) Falls $B$ nicht torsionsvoll ist, sind alle Invarianten von $B$ unendlich.*

*Beweis.* Unter den Invarianten eines teilbaren Moduls $D$ verstehen wir wie in der Einführung die Familie $(d_0, d_{\mathfrak{p}} | \mathfrak{p} \in \mathrm{Maxspec}(R))$, d. h. $d_0$ bzw. $d_{\mathfrak{p}}$ ist die Anzahl der Kopien von $K$ bzw. $T_{\mathfrak{p}}(K/R)$, die in $D$ vorkommen.

1) Ist $B$ eine wesentliche Überdeckung von $K/R$, so folgt $b_0 = n$, $b_{\mathfrak{p}} + n = 1$ für alle $\mathfrak{p}$. Darin kann $n$ nur Null oder Eins sein, und im ersten Fall folgt $B \cong K/R$, im zweiten $B \cong K$.

2) i)$\to$ii) Seien alle $c_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Definiert man dann den teilbaren Modul $B$ durch $b_0 = c_0 + 1$, $b_{\mathfrak{p}} = c_{\mathfrak{p}} - 1$ falls $c_{\mathfrak{p}}$ endlich, $b_{\mathfrak{p}} = c_{\mathfrak{p}}$ sonst, so ist $B \times (K/R) \cong C \times K$, und man erhält einen wesentlichen Epimorphismus

$$B \xrightarrow{\cong} T(B) \times C/T(C) \times K \xrightarrow{1 \times \mathrm{kan}} T(B) \times C/T(C) \times (K/R) \xrightarrow{\cong} C .$$

Nach Voraussetzung ist dann $B \cong C$, also $c_0$ unendlich, $c_{\mathfrak{p}}$ unendlich für alle $\mathfrak{p}$. ii)$\to$i) Sei $B$ eine wesentliche Überdeckung von $C$, also $b_0 = c_0 + n$ sowie $b_{\mathfrak{p}} + n = c_{\mathfrak{p}}$

für alle $\mathfrak{p}$. Falls mindestens ein $T_{\mathfrak{q}}(C)=0$, folgt $n=0$, und daraus $B \cong C$; falls aber alle $T_{\mathfrak{p}}(C) \neq 0$, folgt aus der Voraussetzung $b_0 = c_0$ sowie $b_{\mathfrak{p}} = c_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$, also wieder $B \cong C$.

3) Analog zu 2).

Die letzten beiden Folgerungen lassen sich leicht auf beliebige $R$-Moduln ausdehnen. Wir geben die Resultate ohne Beweis an: Genau dann ist jede wesentliche Überdeckung von $C$ isomorph zu $C$, wenn der divisible Anteil $D(C)$ die entsprechende Eigenschaft hat und wenn der reduzierte Anteil $C/D(C)$ torsionsfrei ist; genau dann ist $B/X \cong B$ für alle kleinen Untermoduln $X$ von $B$, wenn $D(B)$ diese Eigenschaft hat und wenn $B/D(B)$ radikalfrei ist.

## 2. Schwache Komplemente in der injektiven Hülle

Weil sich die Eigenschaft, in der injektiven Hülle ein Komplement zu haben, nicht auf direkte Summanden vererbt [s. Punkt iii) des folgenden Lemmas], bietet sich zunächst eine Abschwächung des Begriffes „Komplement" an, die in [5], Abschnitt 6 eingeführt wurde: $W$ heißt *schwaches Komplement* von $M$ in $N$, wenn $W + M = N$ und $W \cap M$ klein in $N$ ist.

**Lemma 2.1.** *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

i) *$M$ hat in seiner injektiven Hülle $\hat{M}$ ein schwaches Komplement.*

ii) *Es gibt eine injektive Erweiterung $I$ von $M$, so daß $M$ ein Komplement in $I$ hat.*

iii) *Es gibt eine Erweiterung $N$ von $M$, so daß $M$ direkter Summand in $N$ ist und $N$ in seiner injektiven Hülle $\hat{N}$ ein Komplement hat.*

iv) *$M$ besitzt einen koatomaren dichten Untermodul.*

*Beweis.* i)$\leftrightarrow$iv) Statt $\hat{M}$ kann man jede Erweiterung $M \subset N$ nehmen, für die zusätzlich $M \subset \mathrm{Ra}(N)$ gilt: Ist nämlich $W + M = N$ und $W \cap M$ klein in $N$, so ist $W \cap M$ koatomar und dicht in $M$; ist umgekehrt $V$ ein koatomarer dichter Untermodul von $M$, so folgt aus $W/V \oplus M/V = N/V$, daß $W$ ein schwaches Komplement von $M$ in $N$ ist.

Weil iii)$\to$ii)$\to$i) klar ist, bleibt iv)$\to$iii) zu zeigen. Dazu sei $V$ ein koatomarer dichter Untermodul von $M$. Wählt man einen Zwischenmodul $V \subset V_0 \subset M$ durch $(\mathrm{So}(M) + V)/V \oplus V_0/V = \mathrm{So}(M/V)$, so behaupten wir, daß $N = M \times (V_0/V)$ in seiner injektiven Hülle ein Komplement hat. Zunächst gilt $V \cap M\mathfrak{p} \subset V_0\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$, und daraus folgt für den Monomorphismus $d: V_0 \ni m \mapsto (m, \bar{m}) \in N$, daß $V_1 = \mathrm{Bi}\, d$ neat in $N$ ist, d. h. $V_1\mathfrak{p} = V_1 \cap N\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. $V_1$ ist aber auch koatomar und dicht in $N$, und bildet man jetzt $W/V_1 \oplus N/V_1 = \hat{N}/V_1$, so ist $W$ neat in $\hat{N}$, also sogar ein Komplement von $N$ in $\hat{N}$.

**Folgerung.** *Die Klasse der R-Moduln, die in ihrer injektiven Hülle ein schwaches Komplement haben, ist gegenüber Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen. Sie enthält alle torsionsfreien R-Moduln von endlichem Rang.*

Zur Formulierung des folgenden brauchen wir den Begriff des *radikalkomplementierten* Moduls, worunter wir verstehen, daß $\mathrm{Ra}(M)$ ein Komplement in $M$ hat. Nur für Torsionsmoduln ist die Struktur ganz klar: Sie sind nach [4], Satz

3.1 genau dann radikal-komplementiert, wenn in jeder Primärkomponente der reduzierte Anteil beschränkt ist. – Wir wollen Punkt iv) von Lemma 2.1 „lokal" betrachten und eine Äquivalenz zur $\mathfrak{p}$-Teilbarkeit des Ulm-Untermoduls $H(X) = \bigcap_{r \neq 0} Xr$ hinzufügen, obwohl diese für das folgende nicht benötigt wird.

**Lemma 2.2.** *Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Dann sind für einen $R$-Modul $M$ äquivalent:*

i) *Es gibt einen koatomaren Untermodul $V$ von $M$ mit $V + M\mathfrak{p} = M$.*

ii) *Es gibt ein $n \geqq 0$ mit $\mathfrak{p}$-Rang$(M\mathfrak{p}^n) < \infty$.*

iii) *$T_\mathfrak{p}(M)$ ist radikal-komplementiert, und $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T_\mathfrak{p}(M)) < \infty$.*

iv) *In jedem Faktormodul $X$ von $M$ ist $T_\mathfrak{p}(X)$ radikal-komplementiert.*

v) *In jedem Faktormodul $X$ von $M$ ist $H(X)$ $\mathfrak{p}$-teilbar.*

*Beweis.* i)→ii) Ist $V$ wie angegeben, so folgt $T_\mathfrak{p}(V)\mathfrak{p}^n = 0$ für ein $n \geqq 0$, also $V = T_\mathfrak{p}(V) \oplus V'$ und daraus $V'\mathfrak{p}^n + M\mathfrak{p}^{n+1} = M\mathfrak{p}^n$. Damit ist $\mathfrak{p}$-Rang$(M\mathfrak{p}^n) \leqq \mathfrak{p}$-Rang$(V'\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$-Rang$(V') = \mathfrak{p}$-Rang$(V/T(V)) < \infty$ wie behauptet. ii)→iii) Weil sich die Eigenschaft ii) sowohl auf Faktormoduln als auch auf reine Untermoduln vererbt, gilt insbesondere $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T_\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$-Rang$((M/T_\mathfrak{p}(M))\mathfrak{p}^n) < \infty$ und $\mathfrak{p}$-Rang$(T_\mathfrak{p}(M)\mathfrak{p}^n) < \infty$. Das letztere bedeutet aber nach [4], Satz 3.1, daß $T_\mathfrak{p}(M)$ radikal-komplementiert ist. iii)→i) Schreibt man $M = T_\mathfrak{p}(M) \oplus X$, so hat jeder der Summanden ein solches $V$, also auch $M$.

Für das weitere wollen wir festhalten, daß die Klasse der $R$-Moduln mit der Eigenschaft i) nicht nur gegenüber Faktormoduln und reinen Untermoduln, sondern auch gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, und daß sie mit $M$ auch jeden Untermodul $U$ enthält, für den $M/U$ reduziert ist.

iii)→v) Es genügt zu zeigen, daß $H(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist. Das gilt aber in $M = T_\mathfrak{p}(M) \oplus X$ für beide Summanden. v)→iv) Wieder genügt es zu zeigen, daß $T_\mathfrak{p}(M)$ radikal-komplementiert ist. Nun gilt auch für jedes $U \subset T_\mathfrak{p}(M)$, daß $H(T_\mathfrak{p}(M)/U)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, so daß wir $M$ gleich als Torsionsmodul über einem diskreten Bewertungsring betrachten können, der v) erfüllt. „Der" Basis-Untermodul von $M$ besitzt sie (als Faktormodul) wieder, und weil er nicht epimorph auf das sogenannte Prüferbeispiel (vgl. [1], p. 150) abgebildet werden darf, muß er beschränkt sein, so daß $M$ radikal-komplementiert ist. iv)→iii) Klar ist $T_\mathfrak{p}(M)$ radikal-komplementiert, so daß wir gleich $T_\mathfrak{p}(M) = 0$ annehmen können. Nach dem Beweis von 1.1c) gibt es einen freien Untermodul $B$ von $M$ mit $B + M\mathfrak{p} = M$ und $T_\mathfrak{p}(M/B) = 0$. Also ist auch in jedem Faktormodul von $B$ die $\mathfrak{p}$-Komponente radikal-komplementiert, so daß mit $B$ auch $M/M\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist.

**Folgerung 1.** *Hat $M$ in seiner injektiven Hülle ein schwaches Komplement, so ist $T(M)$ radikal-komplementiert, und es gibt ein $n \geqq 0$ mit $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M)) \leqq n$ für alle $\mathfrak{p}$.*

Berücksichtigt man die Tatsache, daß ein Modul $M$ genau dann algebraisch kompakt ist, wenn er kotorsion ist [d. h. $\operatorname{Ext}^1_R(K, M) = 0$] und wenn $H(M)$ teilbar ist, so gilt weiter:

**Folgerung 2.** *Sei $M$ algebraisch kompakt. Genau dann sind auch alle Faktormoduln von $M$ algebraisch kompakt, wenn $T(M)$ radikal-komplementiert ist und wenn $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M))$ endlich ist für alle $\mathfrak{p}$.*

Der folgende Satz liefert als Spezialfall die Struktur der algebraisch kompakten Moduln, die in ihrer injektiven Hülle ein schwaches Komplement haben.

**Satz 2.3.** *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

i) *$M$ hat in jeder Erweiterung ein schwaches Komplement.*

ii) $\mathrm{Ra}(M)$ *hat ein schwaches Komplement in $M$, und $M/\mathrm{Ra}(M)$ ist kotorsion.*

iii) *$M$ erfüllt die beiden folgenden Bedingungen:*

a) *$T(M)$ ist radikal-komplementiert, und es gibt ein $n \geqq 0$ mit* $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M)) \leqq n$ *für alle* $\mathfrak{p}$.

b) *Es gibt einen kleinen Untermodul $M_0$ von $M$ mit $M/M_0$ kotorsion.*

*Beweis.* i)→iii) Nach Folgerung 1 gilt a). Wählt man eine Erweiterung $M \subset N_0$, bei der $M$ neat in $N_0$ und $N_0$ kotorsion ist, so gilt für ein schwaches Komplement $W$ von $M$ in $N_0$, daß $M_0 = W \cap M$ auch klein in $M$ ist und $M/M_0 \cong N_0/W$ kotorsion.

iii)→ii) Als Faktormodul von $M/M_0$ ist auch $M/\mathrm{Ra}(M)$ kotorsion. Bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{Ra}(M)$ einen koatomaren dichten Untermodul besitzt, und das muß man offenbar nur für $M' = \mathrm{Ra}(M)/M_0$ zeigen. Nun besitzt auch $M'$ die Eigenschaft a), und schneidet man aus $T(M')$ den divisiblen Anteil heraus, so erhält man einen koatomaren (torsionsvollen reinen) Untermodul $U'$ von $M'$ mit $\mathfrak{p}$-Rang$(M'/U') \leqq n$ für alle $\mathfrak{p}$. Außerdem ist $X = M'/U'$ kotorsion.

Wir behaupten nun allgemeiner: Ist $X/\mathrm{Ra}(X)$ kotorsion und $\mathfrak{p}$-Rang$(X) \leqq n$ für alle $\mathfrak{p}$, so hat $X$ einen endlich erzeugten dichten Untermodul. Aus der ersten Bedingung folgt nämlich, daß die kanonische Abbildung $X \to \prod_{\mathfrak{p}} (X/X\mathfrak{p})$ surjektiv ist, denn ihr Kokern ist stets teilbar, hier aber wegen der Kotorsionsbedingung auch reduziert, also Null. Insbesondere gibt es ein $x_0 \in X$ derart, daß die Menge $\{\mathfrak{p} \mid x_0 \in X\mathfrak{p} \text{ und } X \neq X\mathfrak{p}\}$ leer ist. Falls $n=0$, ist $X$ schon teilbar; falls $n \neq 0$, folgt $\mathfrak{p}$-Rang$(X/x_0R) \leqq n-1$ für alle $\mathfrak{p}$. Durch Induktion erhält man die Behauptung.

ii)→i) Sei $V$ ein schwaches Komplement von $\mathrm{Ra}(M)$ in $M$. Dann ist $M_0 = V \cap \mathrm{Ra}(M)$ klein in $M$, und $M/M_0 \cong (M/V) \times \prod_{\mathfrak{p}} (M/M\mathfrak{p})$ hat nach [4] sogar in jeder Erweiterung ein Komplement. Zu $M \subset N$ kann man also ein (schwaches) Komplement $W/M_0$ von $M/M_0$ in $N/M_0$ wählen, und $W$ ist dann ein schwaches Komplement von $M$ in $N$.

**Folgerung 1.** *Ein Modul M hat genau dann in seiner injektiven Hülle ein schwaches Komplement, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:* a) *$T(M)$ ist radikal-komplementiert, und es gibt ein $n \geqq 0$ mit* $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M)) \leqq n$ *für alle* $\mathfrak{p}$. b′) *Es gibt einen koatomaren Untermodul $V$ von $M$ mit $M/V$ kotorsion.*

**Folgerung 2.** *Ein Kotorsionsmodul M hat genau dann in seiner injektiven Hülle ein schwaches Komplement, wenn er von der Form $M \cong D \times \left(\prod_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}\right) \times B$ ist, wobei $D$ teilbar ist, jedes $A_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}$-primär und beschränkt, und $B$ bis auf Isomorphie direkter Summand von $(R^*)^n$ für ein $n \geqq 0$.*

Auf die Bedingung b′) in Folgerung 1 kann man nicht verzichten. Sie impliziert z.B. bei einem torsionsfreien Modul $M$, daß in jeder Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ fast alle

$M_i$ teilbar sein müssen. Insbesondere ist der Modul $\coprod_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$ von konstantem $\mathfrak{p}$-Rang 1, besitzt aber, falls $R$ unendlich viele maximale Ideale hat, in seiner injektiven Hülle kein schwaches Komplement.

## 3. Komplemente in der injektiven Hülle

In diesem letzten Abschnitt soll die Frage untersucht werden, wann ein Modul in seiner injektiven Hülle ein Komplement hat. Das erste Lemma zeigt, daß mit dieser Frage eine viel allgemeinere Klasse von Erweiterungen betroffen ist.

**Lemma 3.1.** *Sei $M \subset N$ eine Erweiterung mit der Zusatzbedingung $M \subset \mathrm{Ra}(N)$. Genau dann hat $M$ ein Komplement in $N$, wenn der Modul $M+\mathrm{So}(N)$ in seiner eigenen injektiven Hülle ein Komplement hat.*

*In diesem Fall ist $T(M)$ radikal-komplementiert, und es gibt ein $n \geqq 0$ mit $\mathfrak{p}$-$\mathrm{Rang}(M/T(M)) \leqq n \leqq \dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(N/M))$ für alle $\mathfrak{p}$.*

*Beweis.* Wir behaupten zunächst, daß $M$ genau dann ein Komplement in $N$ hat, wenn es eines in $\hat{N}$ hat. Ist nämlich $W$ ein Komplement von $M$ in $N$, so gilt für jede Zerlegung $X/W \oplus N/W = \hat{N}/W$, daß $X$ ein Komplement von $M$ in $\hat{N}$ ist, und die Umkehrung folgt mit [4], Hilfssatz 5.1 wegen $N/M \supset \mathrm{So}(\hat{N}/M)$. Für $M_0 = M + \mathrm{So}(N)$ kann man nun $M_0 \subset \hat{M}_0 \subset \hat{N}$ wählen, und weil $M_0/M$ klein in $\hat{N}/M$ ist, hat jetzt $M$ genau dann ein Komplement in $\hat{N}$, wenn $M_0$ eines hat. Das ist aber, weil $\hat{N}/\hat{M}_0$ torsionsfrei ist, äquivalent damit, daß $M_0$ ein Komplement in $\hat{M}_0$ hat, wie behauptet.

Für den Zusatz verwenden wir 1.3: Ist $W$ ein Komplement von $M$ in $N$, so gilt mit $n = \text{tors. fr. Rang}(W \cap M)$, daß $\hat{W} \times (K/R)^n \cong \widehat{N/M} \times K^n$ ist, insbesondere $n \leqq \dim(\mathrm{So}_{\mathfrak{p}}(N/M))$ für alle $\mathfrak{p}$. Schließlich ist $V = W \cap M$ ein koatomarer dichter Untermodul von $M$, also $T(M)$ nach 2.2 radikal-komplementiert, sowie $\mathfrak{p}$-$\mathrm{Rang}(M/T(M)) \leqq \mathfrak{p}$-$\mathrm{Rang}(V/T(V)) = n$ für alle $\mathfrak{p}$.

**Folgerung.** *Genau dann ist $M$ radikal-komplementiert, wenn der Modul $\mathrm{Ra}(M) + \mathrm{So}(M)$ in seiner eigenen injektiven Hülle ein Komplement hat.*

**Lemma 3.2.** *Für einen $R$-Modul $M$ sind äquivalent:*

i) *$M$ hat in seiner injektiven Hülle $\hat{M}$ ein Komplement.*
ii) *$M$ besitzt einen koatomaren dichten neat-Untermodul.*
iii) *Die Menge der dichten Untermoduln von $M$ hat ein minimales Element.*

*Beweis.* i)$\leftrightarrow$ii) Ist $W$ ein Komplement von $M$ in $\hat{M}$, so ist $W \cap M$ koatomar, dicht und neat in $M$. Die Umkehrung geht wie im letzten Teil des Beweises von 2.1. ii)$\leftrightarrow$iii) Für einen dichten Untermodul $V$ von $M$ zeigt man leicht: Genau dann ist $V$ minimales Element in der Menge aller dichten Untermoduln von $M$, wenn $V$ koatomar ist und „koabgeschlossen" in $M$, d. h. aus $V/X$ klein in $M/X$ stets folgt $X = V$. Diese letzte Bedingung ist aber äquivalent mit $V\mathfrak{p} = V \cap M\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$.

**Folgerung 1.** *Haben $U$ sowie $M/U$ in ihrer injektiven Hülle ein Komplement, und ist $U$ neat in $M$, so hat auch $M$ in seiner injektiven Hülle ein Komplement. Ist $U \subset \mathrm{Ra}(M)$ und hat $M$ in seiner injektiven Hülle ein Komplement, so besitzt auch $M/U$ diese Eigenschaft.*

**Folgerung 2.** *Hat ein torsionsfreier Modul in seiner injektiven Hülle ein Komplement, so hat er konstanten endlichen* $\mathfrak{p}$*-Rang.*

**Folgerung 3.** *Ist $R$ nicht lokal und $A$ ein nichttrivialer direkter Summand von $R^*$, so hat $A$ in seiner injektiven Hülle kein Komplement. Insbesondere gilt für das Tripel $A \subset R^* \subset C$, wobei $C$ die injektive Hülle von $R^*$ sei, daß zwar $R^*$, nicht aber $A$ ein Komplement in $C$ hat.*

Wir wollen anmerken, daß sich (mit einer etwas anderen Konstruktion) auch über jedem unvollständigen diskreten Bewertungsring $R$ ein Tripel $A \subset B \subset C$ angeben läßt, so daß zwar $A$ ein direktes Komplement in $B$ und $B$ ein Komplement in $C$ hat, aber $A$ kein Komplement in $C$.

Das Hauptergebnis von Abschn. 3 ist nun:

**Satz 3.3.** *Für einen Kotorsionsmodul $M$ sind äquivalent:*

i) *$M$ hat in seiner injektiven Hülle $\hat{M}$ ein Komplement.*

ii) *$T(M)$ ist radikal-komplementiert, und es gibt ein $n \geqq 0$ mit* $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M)) \leqq n \leqq \mathfrak{p}$-Rang$(M)$ *für alle* $\mathfrak{p}$.

iii) *$M$ ist radikal-komplementiert.*

iv) $M \cong D \times \left(\prod_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}\right) \times \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{\mathfrak{p}} B_{i,\mathfrak{p}}\right)$, *wobei $D$ teilbar ist, jedes $A_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}$-primär und beschränkt, und $B_{i,\mathfrak{p}} \in \{R_{\mathfrak{p}}^*, R/\mathfrak{p}, R/\mathfrak{p}^2, \ldots\}$.*

*Beweis.* i)$\to$ii) Das wurde, ohne Voraussetzungen an $M$, in 3.1) gezeigt. ii)$\to$i) Aus der angegebenen Ungleichung folgt, daß man $\mathfrak{p}$-Rang$(M/T(M)) + n_{\mathfrak{p}} = n$ schreiben kann mit $n_{\mathfrak{p}} \geqq 0$, und daß dann gilt $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)) \geqq n_{\mathfrak{p}}$. Weil nun $T(M)$ radikal-komplementiert ist, gibt es einen koatomaren direkten Summanden $U$ von $T(M)$ mit $\mathfrak{p}$-Rang$(T(M)/U) = n_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$, so daß $U$ ein koatomarer (torsionsvoller) reiner Untermodul von $M$ ist mit $\mathfrak{p}$-Rang$(M/U) = n$ für alle $\mathfrak{p}$. Bleibt zu zeigen, daß $X = M/U$ in seiner injektiven Hülle ein Komplement hat.

Dazu behaupten wir allgemeiner: Ist $X/\mathrm{Ra}(X)$ kotorsion und $\mathfrak{p}$-Rang$(X) = n$ für alle $\mathfrak{p}$, so hat $X$ einen endlich erzeugten dichten neat-Untermodul. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n \neq 0$ gibt es wie im Beweis von 2.3 ein $x_0 \in X$, so daß die Menge $\{\mathfrak{p} \mid x_0 \in X\mathfrak{p}\}$ leer ist. Aus $(x_0 R)\mathfrak{p} \subset x_0 R \cap X\mathfrak{p} \subsetneqq x_0 R$ folgt aber, daß $x_0 R$ ein neat-Untermodul von $X$ ist mit $\mathfrak{p}$-Rang$(X/x_0 R) = n - 1$ für alle $\mathfrak{p}$, so daß Induktion die Behauptung liefert.

ii)$\to$iv) Zu jedem koatomaren reinen Untermodul $U$ von $M$ gibt es, weil $M$ kotorsion ist, eine Zerlegung $M \cong D(M) \times U^* \times B$, wobei $B$ der reduzierte Anteil von $M/U$ ist. Wählt man $U$ speziell wie im letzten Schritt, so folgt $U^* \cong \prod_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}(U)$ und $\mathfrak{p}$-Rang$(B) = n$ für alle $\mathfrak{p}$. Dann ist aber $B = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i$, wobei jedes $B_i$ konstanten $\mathfrak{p}$-Rang 1 hat, also die angegebene Gestalt. iv)$\to$iii) Das Radikal von $\prod_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$ hat nach [4] sogar in jeder Erweiterung ein Komplement. Für den dritten Summanden wollen wir gleich $n = 1$ annehmen, also $B = \prod_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}$ mit $B_{\mathfrak{p}} \in \{R_{\mathfrak{p}}^*, R/\mathfrak{p}, R/\mathfrak{p}^2, \ldots\}$.

Dann gibt es einen Epimorphismus von $R^*$ nach $B$, dessen Kern im Radikal von $R^*$ liegt. Bleibt zu zeigen, daß $R^*$ radikal-komplementiert ist, und das ist klar, weil $\mathrm{Ra}(R^*)$ in seiner eigenen injektiven Hülle ein Komplement hat. iii)→i) Es genügt für diesen Schritt wie bei ii)→i), daß $M/\mathrm{Ra}(M)$ kotorsion ist. Ist nämlich $V$ ein Komplement von $\mathrm{Ra}(M)$ in $M$, so ist auch $V/\mathrm{Ra}(V)$ kotorsion, so daß es insbesondere einen Zwischenmodul $\mathrm{Ra}(V) \subset V' \subset V$ gibt mit $V'/\mathrm{Ra}(V)$ koatomar und $V/V'$ teilbar torsionsfrei. Damit ist $V'$ koatomar, aber auch dicht und neat in $M$.

Im Hinblick auf 3.1 ist es vielleicht nützlich zu bemerken, daß die drei Bedingungen i)–iii) des Satzes auch dann noch äquivalent sind, wenn $M$ die direkte Summe aus einem Kotorsionsmodul und einem Torsionsmodul ist. Selbstverständlich sind sie, ohne jede Annahme über $M$, auch dann äquivalent, wenn $R$ semilokal ist. Wir wollen zum Abschluß noch zwei Beispiele dafür angeben, daß zwischen den Bedingungen i) und iii), falls $R$ nicht semilokal ist, kein Zusammenhang besteht. *Beispiel 1* ist ganz einfach: Der Modul $R^{(\mathbb{N})}$ erfüllt, falls $R$ unendlich viele maximale Ideale hat, gewiß die Bedingung iii), denn sein Radikal ist Null, er hat aber in seiner injektiven Hülle nicht einmal ein schwaches Komplement.

Für das zweite Beispiel zeigen wir zuerst: Ist $(X, Y)$ ein Paar von $R$-Moduln mit $\mathrm{Ra}(Y)=0$ und $\mathfrak{p}\text{-Rang}(X) \leq \dim(\mathrm{So}_\mathfrak{p}(Y))$ für alle $\mathfrak{p}$, so gibt es einen $R$-Modul $M$ mit $M/\mathrm{Ra}(M) \cong Y$ und $\mathrm{Ra}(M) \cong X$. Zum Beweis wählt man zunächst eine injektive Erweiterung $\hat{X} \subset I$, so daß gilt $\mathfrak{p}\text{-Rang}(X) + \dim(\mathrm{So}_\mathfrak{p}(I/\hat{X})) = \dim(\mathrm{So}_\mathfrak{p}(Y))$ für alle $\mathfrak{p}$. Definiert man dann den Zwischenmodul $X \subset L \subset I$ durch $L/X = \mathrm{So}(I/X)$, so folgt $\mathrm{Ra}(L) = X$ und $L/\mathrm{Ra}(L) \cong \mathrm{So}(Y)$. Bildet man dann

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{So}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \cap & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\mu} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei $\mathrm{Ke}\lambda = \mathrm{Ra}(L)$ sei, so folgt $\mathrm{Ra}(M) = \mathrm{Ke}\mu \cong X$ und $M/\mathrm{Ra}(M) \cong Y$ wie gewünscht. Für *Beispiel 2* besitze jetzt wieder $R$ unendlich viele maximale Ideale: Wählt man einen Modul $M$ mit $M/\mathrm{Ra}(M) \cong \prod_\mathfrak{p} (R/\mathfrak{p})$ und $\mathrm{Ra}(M) \cong \coprod_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$, so hat $M$ nach dem Beweis von 3.3ii)→i) in seiner injektiven Hülle ein Komplement, aber $\mathrm{Ra}(M)$ hat nicht einmal ein schwaches Komplement in $M$.

## Literatur


1. Fuchs, L.: Infinite abelian groups. I. New York, London: Academic Press 1970
2. Matlis, E.: Torsion-free modules. Chicago, London: Univ. Chicago Press, 1972
3. Nunke, R.J.: Modules of extensions over Dedekind rings. Illinois J. Math. 3, 222–241 (1959)
4. Zöschinger, H.: Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. Math. Scand. **35**, 267–287 (1974)
5. Zöschinger, H.: Über Torsions- und $\kappa$-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$. J. Algebra **50**, 299–336 (1978)


Eingegangen am 6. Januar 1977