Komplemente für zyklische Moduln über Dedekindringen

Von

Helmut Zöschinger

Diese Note beschäftigt sich mit der Frage, wann ein Dedekindring R in einer Erweiterung $R \subset M$ ein Komplement hat. Die Antwort lautet:

Ist R *nicht* direkter Summand in M, so sind äquivalent:

(i) R hat ein Komplement in M.

(ii) $R \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$; und falls $T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, muß $R \subset M\mathfrak{p}$ sein.

(iii) R hat genügend viele Komplemente in M.

Ist aber R direkter Summand in M, so ist die Inklusion (i) $\to$ (iii) nicht mehr richtig. Die Bedingung (iii) kann dann nicht mehr von der „Lage" von R in M abhängen, sondern nur mehr von der Relation zwischen R und M/R. Eine vollständige Beschreibung dieser Relation geben wir am Schluß der Note durch die Torsionselemente von $\mathrm{Ext}^1_R(M/R, R)$ an.

Die Arbeit gliedert sich in einen Hilfssatz mit drei Folgerungen, dann einen Satz in dem die oben angegebenen Äquivalenzen bewiesen werden, und an ihn schließen sich nochmals drei Folgerungen an. Stets ist R ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K \neq R$ und den maximalen Idealen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$. Sind V und U Untermoduln von M mit $V + U = M$, so heißt V *schwaches Komplement* von U in M, wenn $V \cap U$ klein in M ist, und V heißt *Komplement* von U in M, wenn $V \cap U$ klein in V ist, d.h. aus $V' + U = M$ und $V' \subset V$ folgt $V' = V$. Wir sagen, U habe *genügend viele* (schwache) Komplemente in M, wenn es zu jedem $X \subset M$, mit $X + U = M$, ein (schwaches) Komplement V von U in M gibt mit $V \subset X$. Zum Beispiel hat jeder artinsche Untermodul genügend viele Komplemente in M, insbesondere jeder zyklische Torsionsmodul. Genau dann ist U klein in M (hat also nur $V = M$ als Komplement), wenn $U \subset \mathrm{Ra}(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}} M\mathfrak{p}$ ist und U *koatomar* ist, d.h. U keine teilbaren Faktormoduln hat. Ist U nicht mehr in allen $M\mathfrak{p}$ enthalten, so gilt noch:

Hilfssatz. *Sei U ein koatomarer Untermodul von M und U in fast allen $M\mathfrak{p}$ enthalten. Dann gilt:*

(a) *Es gibt ein $U' \subset U$, so daß U' direkte Summe aus einem endlich erzeugten und einem beschränkten Modul ist und U/U' klein in M/U'.*

(b) *U hat genügend viele schwache Komplemente in M.*

(c) *Ist zusätzlich $U \subset M\mathfrak{p} + T(M)$ für alle $\mathfrak{p}$, so hat U genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. Es gibt ein $r \neq 0$ mit $\mathrm{Ur} \subset \mathrm{Ra}(M)$. Bei (a) wähle man einen endlich erzeugten freien Untermodul U_0 von U, so daß U/U_0 torsionsvoll ist. Jede Primärkomponente $T_{\mathfrak{p}}(U/U_0)$ ist dann beschränkt, also auch $U'/U_0 = \bigoplus_{r \in \mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}(U/U_0)$. Weil dann $U'/T(U')$ endlich erzeugt und $T(U')$ beschränkt ist, bleibt nur noch $U/U' \subset \mathrm{Ra}(M/U')$ zu zeigen, und wir behaupten sogar, daß $U/U_0 \subset \mathrm{Ra}(M/U_0) + U'/U_0$ ist: Falls $r \in \mathfrak{p}$, gilt nämlich $T_{\mathfrak{p}}(U/U_0) \subset U'/U_0$; falls aber $r \notin \mathfrak{p}$, ist $T_{\mathfrak{p}}(U/U_0)$ durch r teilbar, also in $(U/U_0)r \subset \mathrm{Ra}(M/U_0)$ enthalten.

Bei (b) benützen wir, wie noch häufig im folgenden, die in ([3] Lemma 1.4) bewiesene Tatsache, daß ein beschränkter Modul in jeder Erweiterung ein Komplement hat. Ist nun V/Ur ein Komplement von U/Ur in M/Ur, so ist nicht nur Ur, sondern sogar $V \cap U$ klein in M, also V ein schwaches Komplement von U in M. Damit bekommt man auch genügend viele, denn zu $X + U = M$ gibt es nach eben ein schwaches Komplement W von $X \cap U$ in M, so daß $W \cap X$ ein schwaches Komplement von U in M ist.

Bei (c) kann man wegen (a) gleich annehmen, daß $T(U)$ beschränkt und $U/T(U)$ endlich erzeugt ist. Weil dann $T(U)$ in jeder Erweiterung genügend viele Komplemente hat, können wir sogar $T(U) = 0$, also U endlich erzeugt voraussetzen. Um zu $X + U = M$ ein Komplement unter X zu finden, sei nach (b) gleich $X \cap U$ klein in M. Weil $(U + T(M))/T(M)$ klein in $M/T(M)$ ist, folgt $T(M) + X = M$, so daß es, weil M/X endlich erzeugt ist, ein Komplement Y von X in M gibt mit Y endlich erzeugt und torsionsvoll. Wählt man ein Komplement X' von Y in M, mit $X' \subset X$, so ist X/X' klein in M/X', insbesondere $X' + U = M$, und weil X' nicht in M ist, d.h. $X'\mathfrak{p} = X' \cap M\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$, ist X' sogar ein Komplement von U in M.

Folgerung 1. *Ist R semilokal, so hat ein koatomarer Modul in jeder Erweiterung genügend viele schwache Komplemente, und er selbst ist direkte Summe aus einem endlich erzeugten und einem beschränkten Modul.*

Folgerung 2. *Sei $U \subset M$, U isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, U nicht direkter Summand in M. Dann sind äquivalent:*

(i) *U hat ein schwaches Komplement in M.*

(ii) *$U \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$.*

(iii) *U hat genügend viele schwache Komplemente in M.*

Beweis. Weil (ii) $\to$ (iii) $\to$ (i) klar ist, bleibt nur noch (i) $\to$ (ii) zu zeigen: Ist $V + U = M$ mit $V \cap U \subset \mathrm{Ra}(M)$, so muß $V \cap U \neq 0$ sein, so daß $U/V \cap U$ ein zyklischer Torsionsmodul ist, insbesondere $\mathfrak{p}$-teilbar für fast alle $\mathfrak{p}$, d.h.

$$U = U\mathfrak{p} + (V \cap U) \subset M\mathfrak{p}.$$

Zur Formulierung der nächsten Folgerung sagen wir, eine exakte Folge

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

sei *σ-exakt*, wenn $\mathrm{Bi}\,\alpha$ ein schwaches Komplement in B hat. Die entsprechenden Elemente in $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ nennen wir σ-Elemente.

Folgerung 3. *Ist R nicht semilokal und A isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, so gilt:*

(a) $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma \cap T(\mathrm{Ext}^1_R(C, A)) = 0 = \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma \cap \mathrm{Ra}(\mathrm{Ext}^1_R(C, A))$.

(b) *Besteht* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *nur aus σ-Elementen, so folgt* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A) = 0$.

Beweis. (a) Repräsentiert $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ ein Torsionselement oder ein Element aus dem Radikal, so ist es durch fast alle $\mathfrak{p}$ teilbar. Nach ([2] Theorem 5.1) bedeutet das $(\mathrm{Bi}\,\alpha)\mathfrak{p} = \mathrm{Bi}\,\alpha \cap B\mathfrak{p}$, d.h. hier $\mathrm{Bi}\,\alpha \not\subset B\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$. Falls also $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht schon direkter Summand ist, kann es nach der zweiten Folgerung kein schwaches Komplement in B haben. (b) Es ist $E = \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ ein Kotorsionsmodul (siehe [2] Theorem 2.1 oder [1] § 54) mit $\mathrm{Ra}(E) = 0$, also $E \cong \prod_{\mathfrak{p}} (E/E\mathfrak{p})$. Aus $T(E) = 0$ folgt daher $E = 0$.

Satz. *Sei $U \subset M$, U isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, U nicht direkter Summand in M. Dann sind äquivalent:*

(i) *U hat ein Komplement in M.*

(ii) *$U \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$, und falls $T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, muß $U \subset M\mathfrak{p}$ sein.*

(iii) *U hat genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. (i) $\to$ (ii) Sei V ein Komplement von U in M. Wie in der zweiten Folgerung erhält man, weil $V \cap U \neq 0$ ist, $U \subset M\mathfrak{p}$ für fast alle $\mathfrak{p}$. Ist aber $T_\mathfrak{p}(M)$ teilbar, so folgt $T_\mathfrak{p}(M) \subset V$ (weil M/V reduziert ist), also $T_\mathfrak{p}(M/V) = 0$, so daß wieder $U/V \cap U$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, also $U \subset M\mathfrak{p}$.

Bei (ii) $\to$ (iii) darf U auch direkter Summand sein (was ohnehin nicht möglich ist, wenn R unendlich viele maximale Ideale hat). Ist $X + U = M$ und $X \cap U \neq 0$, so behaupten wir, daß das Paar $X \cap U \subset X$ wieder die Bedingungen aus (ii) erfüllt: Für fast alle $\mathfrak{p}$ ist $U \subset M\mathfrak{p}$, insbesondere M/X endlich erzeugt und $\mathfrak{p}$-teilbar,

$$T_\mathfrak{p}(M/X) = 0, \quad X \cap U \subset X\mathfrak{p};$$

und falls $T(X)$ $\mathfrak{p}$-teilbar ist, kann $X \cap U$ nicht $\mathfrak{p}$-rein in X sein (sonst wäre $T_\mathfrak{p}(M) = T_\mathfrak{p}(X)$ teilbar und U $\mathfrak{p}$-rein in M, also U $\mathfrak{p}$-teilbar), so daß folgt

$$X \cap U \subset X\mathfrak{p} + T(X) = X\mathfrak{p}.$$

Hätten wir ein Komplement X' von $X \cap U$ in X, so wäre das auch ein Komplement von U in M, d.h. wir müssen nur noch (ii) $\to$ (i) zeigen: Falls U in allen $M\mathfrak{p}$ liegt, sind wir fertig; falls $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die Ausnahmen sind, ist $U\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$ klein in M und $T(M)$ durch keines der $\mathfrak{p}_\nu$ teilbar, und eine triviale Induktion liefert (i), wenn wir gezeigt haben:

Hat $U\mathfrak{p}$ ein Komplement in M und ist $T(M)$ nicht $\mathfrak{p}$-teilbar, so hat auch U ein Komplement in M. Zum Beweis sei V ein Komplement von $U\mathfrak{p}$ in M. Dann ist auch $V \cap U$ isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, und $(V \cap U)\mathfrak{p} = V \cap U\mathfrak{p}$ klein in V, außerdem $T(V)$ nicht $\mathfrak{p}$-teilbar (weil M/V endlich erzeugt und $\mathfrak{p}$-teilbar, insbesondere $T_\mathfrak{p}(M) = T_\mathfrak{p}(V)$ ist), so daß wir von vorneherein $V = M$, d.h. $U\mathfrak{p}$ klein in M annehmen können.

1. *Fall.* U ist nicht $\mathfrak{p}$-rein in M. Dann folgt $U \subset M\mathfrak{p} + T(M)$, und wegen der Kleinheit für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ sogar $U \subset M\mathfrak{q}$, so daß U nach dem Hilfssatz ein Komplement in M hat.

2. *Fall.* U ist $\mathfrak{p}$-rein in M. Dann gehen wir ähnlich dem Beweis zu ([4] Satz 3.1) vor: Weil $T_\mathfrak{p}(M/U) \cong T_\mathfrak{p}(M)$ nicht teilbar ist, gibt es eine Zerlegung

$$M/U = X/U \oplus M'/U \quad \text{mit} \quad X/U \cong R/\mathfrak{p}^n \quad (n \geqq 1),$$

und weil U direkter Summand in X ist, ist das auch M' in M, mit $M/M' \cong R/\mathfrak{p}^n$. Schreibt man $W/U\mathfrak{p}^n \oplus U/U\mathfrak{p}^n = M'/U\mathfrak{p}^n$, so zeigt die Kleinheit von $U\mathfrak{p}$, daß W ein schwaches Komplement von U in M' ist, außerdem $M'/W \cong M/M'$. Weil dann $U \times 0$ ein Komplement in $M' \times (M'/W)$ hat, hat auch $U \times 0$ eines in $M' \times (M/M')$, also auch U in M wie gewünscht.

Folgerung 4. *Ist R nicht lokal, so sind für einen Modul M äquivalent:*

(i) *Jeder zyklische Untermodul von M hat ein Komplement in M.*
(ii) *$M/\mathrm{Ra}(M)$ ist halbeinfach, und aus $T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar folgt M $\mathfrak{p}$-teilbar.*
(iii) *Jeder zyklische Untermodul von M hat genügend viele Komplemente in M.*

Beweis. (i) $\to$ (ii) Weil auch in $M/\mathrm{Ra}(M)$ jeder zyklische Untermodul ein Komplement hat, das notwendig direkt ist, kann R als Untermodul nicht vorkommen, so daß $M/\mathrm{Ra}(M)$ torsionsvoll ist wie behauptet. Sei nun $T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar und $x \in M$: Falls $x \in T(M)$, folgt sofort $x \in M\mathfrak{p}$; falls $x \notin T(M)$, gilt für $U = xR$, daß $U\mathfrak{p}$ nicht klein in U ist (weil R nicht lokal ist), so daß es einen nichttrivialen zyklischen Untermodul U' von U gibt mit $U' + U\mathfrak{p} = U$. Nach dem Satz folgt $U' \subset M\mathfrak{p}$, also $U \subset M\mathfrak{p}$, $x \in M\mathfrak{p}$. (ii) $\to$ (iii) Sei $U \subset M$ mit $U \cong R$. Zu Punkt (ii) des Satzes müssen wir noch zeigen, daß U in fast allen $M\mathfrak{p}$ liegt: Weil $(U + \mathrm{Ra}(M))/\mathrm{Ra}(M)$ torsionsvoll, also beschränkt ist, gibt es ein $r \neq 0$ mit $Ur \subset \mathrm{Ra}(M)$, und daraus folgt $U \subset M\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$ mit $r \notin \mathfrak{p}$.

(Im lokalen Fall ist die Sache differenzierter. Wir haben in [4] gezeigt, daß über einem diskreten Bewertungsring (ii) echt stärker als (iii), und dieses echt stärker als (i) sein kann.)

Entsprechend der Definition vor Folgerung 3 heiße eine exakte Folge

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

$\varkappa$-exakt, wenn $\operatorname{Bi}\alpha$ ein Komplement in B hat, und $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)^\varkappa$ sei die Menge der $\varkappa$-Elemente von $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)$.

Folgerung 5. *Ist R nicht lokal und A isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, so sind äquivalent:*

(i) $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)$ *besteht nur aus $\varkappa$-Elementen.*

(ii) *Falls $T(C)$ durch mindestens ein maximales Ideal teilbar ist oder R unendlich viele maximale Ideale hat, ist* $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$.

Beweis. (i) $\to$ (ii) Der Fall unendlich vieler maximaler Ideale wurde in Folgerung 3 erledigt. Bleibt, daß ein $T_\mathfrak{q}(C)$ teilbar ist: Angenommen, alle Primärkomponenten von C sind ungleich Null, so gibt es mindestens ein $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}$ mit $T_{\mathfrak{q}'}(C) \neq 0$. Wählt man $f\colon T(C) \to K/R$ derart, daß $f_{\mathfrak{q}'} \neq 0$ und $f_\mathfrak{q} = 0$ ist (die anderen $f_\mathfrak{p}$ beliebig), so erhält man mit der injektiven Hülle $A \subset \hat{A}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} E = 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & T(C) & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & A & \subset & \hat{A} & \to & K/R & \to & 0, \end{array}$$

worin $f \neq 0$, also $0 \neq [E] \in \operatorname{Ext}_R^1(T(C), A)$ ist. $f_\mathfrak{q} = 0$ bedeutet

$$(T_\mathfrak{q}(B) \oplus \operatorname{Bi}\alpha)/\operatorname{Bi}\alpha = T_\mathfrak{q}(B/\operatorname{Bi}\alpha),$$

so daß $T_\mathfrak{q}(B)$ teilbar und $\operatorname{Bi}\alpha$ $\mathfrak{q}$-rein in B ist, insbesondere $\operatorname{Bi}\alpha \not\subset B\mathfrak{q}$. Nach dem Satz ist daher $[E]$ kein $\varkappa$-Element, so daß auch $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)$ nicht nur aus $\varkappa$-Elementen besteht (vgl. [3] Hilfssatz 5.1), entgegen der Voraussetzung. — Also ist in C mindestens eine Primärkomponente Null, so daß nach ([3] Hilfssatz 5.2) jede wesentliche Überdeckung von C einen torsionsvollen Kern hat, also $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)^\varkappa = 0$ ist wie behauptet. (ii) $\to$ (i) Es ist nur noch der Fall zu prüfen, daß R semilokal und $T(C)$ durch kein $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Zu $A \subset M$, mit $M/A \cong C$, zeigen wir Punkt (ii) des Satzes: Ist $T(M)$ $\mathfrak{p}$-teilbar, so kann A nicht $\mathfrak{p}$-rein in M sein, und es folgt

$$A \subset M\mathfrak{p} + T(M) = M\mathfrak{p}.$$

Folgerung 6. *Sei $U \subset M$, U isomorph zu einem von Null verschiedenen Ideal, U direkter Summand in M und $C \cong M/U$. Dann sind äquivalent:*

(i) *U hat genügend viele Komplemente in M.*

(ii) $T(\operatorname{Ext}_R^1(C, U)) \subset \operatorname{Ext}_R^1(C, U)^\varkappa$.

(iii) *Falls $T(C)$ durch mindestens ein maximales Ideal teilbar ist oder R unendlich viele maximale Ideale hat, ist* $T(\operatorname{Ext}_R^1(C, U)) = 0$.

Beweis. Wie in ([5] Lemma 3.1) zeigt man, daß (i) genau dann erfüllt ist, wenn für jeden Untermodul A von U der Kern der induzierten Abbildung $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) \xrightarrow{\iota_*} \operatorname{Ext}_R^1(C, U)$ nur aus $\varkappa$-Elementen besteht. Damit ist (i) $\to$ (ii) klar, denn zu jedem $x \in \operatorname{Ext}_R^1(C, U)$ mit $xr = 0$, $r \neq 0$ induziert $\varrho\colon U \to Ur$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}_R^1(C, Ur) \arrow[r, "\iota_*"] & \mathrm{Ext}_R^1(C, U) \\ \mathrm{Ext}_R^1(C, U) \arrow[u, "\varrho_*"] \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd},$$

in dem ϱ^* $\varkappa$-Elemente reflektiert, weil ϱ ein Epimorphismus mit beschränktem Kern ist. Nach Voraussetzung ist $\varrho_*(x) \in \mathrm{Ke}\,\iota_*$ ein $\varkappa$-Element, also auch $x \in \mathrm{Ext}_R^1(C, U)^\varkappa$ wie verlangt. (ii) $\to$ (i) Die Formel gilt auch für jeden Untermodul $A \neq 0$ von U, denn bei semilokalem R ist sogar $A \cong U \cong R$, und bei unendlich vielen maximalen Idealen ist nach Folgerung 3 $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) \cong \mathrm{Ext}_R^1(C, U)$ sogar torsionsfrei. Weil andererseits $\mathrm{Hom}_R(C, U/A)$ beschränkt ist, besteht der Kern von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{Ext}_R^1(C, U)$ nur aus Torsionselementen, und wir sind fertig. (ii) $\to$ (iii) Der Fall, daß R nicht semilokal ist, ist wieder durch Folgerung 3 erledigt. Sei also $T(C)$ durch mindestens ein maximales Ideal teilbar, etwa $\mathfrak{q}$. Dann muß es schon durch alle $\mathfrak{p}$ teilbar sein: Angenommen, es gibt ein $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}$, so daß $T_{\mathfrak{q}'}(C)$ nicht teilbar ist, so wähle man ein $f\colon T(C) \to K/R$ derart, daß $f_{\mathfrak{q}'}$ weder surjektiv noch Null ist, aber alle $f_{\mathfrak{p}}$, für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$, Null sind. Wie in der letzten Folgerung erhält man dann ein Torsionselement in $\mathrm{Ext}_R^1(T(C), U)$, das kein $\varkappa$-Element ist, dann ein entsprechendes Element in $\mathrm{Ext}_R^1(C, U)$, entgegen der Voraussetzung. — Aus der Teilbarkeit von $T(C)$ folgt

$$\mathrm{Ext}_R^1(C, U)^\varkappa \cap T(\mathrm{Ext}_R^1(C, U)) = 0$$

(und damit sind wir fertig), denn aus der Torsionsfreiheit von $\mathrm{Ext}_R^1(T(C), U)$ folgt $T(\mathrm{Ext}_R^1(C, U)) \subset D(\mathrm{Ext}_R^1(C, U))$, so daß für jedes Torsionselement

$$0 \to U \subset M \to C \to 0$$

gelten muß, daß U rein in M und daher auch $T(M) \cong T(C)$ teilbar ist. Falls also U ein Komplement in M hat, muß es nach dem Satz abspalten. (iii) $\to$ (ii) Sei R semilokal und $T(C)$ durch kein einziges $\mathfrak{p}$ teilbar. Dann besteht $\mathrm{Ext}_R^1(C, U)$ nur aus $\varkappa$-Elementen, denn im letzten Beweisschritt der Folgerung 5 durfte R auch lokal sein.

Literaturverzeichnis

[1] L. Fuchs, Infinite abelian groups I. New York, London 1970.

[2] R. J. Nunke, Modules of extensions over Dedekind rings. Illinois J. Math. 3, 222–241 (1959).

[3] H. Zöschinger, Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. Math. Scand. 35, 267–287 (1974).

[4] H. Zöschinger, Quasi-separable und koseparable Moduln über diskreten Bewertungsringen (preprint).

[5] H. Zöschinger, Die $\varkappa$-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, R^n)$ (preprint).

Eingegangen am 2. 8. 1978

Anschrift des Autors:

Helmut Zöschinger, Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, D-8000 München 2