Hokkaido Mathematical Journal Vol. 9 (1980) p. 155–174

Die κ-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, R^n)$

von

Helmut Zöschinger

(Received January 12, 1979)

Einleitung. Ziel dieser Arbeit ist es, über einem diskreten Bewertungsring R die *κ-Elemente* von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ zu untersuchen, d. h. die Äquivalenzklassen von kurzen exakten Folgen $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$, bei denen die Menge $\{V \subset B \mid V + \mathrm{Bi}\, \alpha = B\}$ ein minimales Element hat, ein sogenanntes *Komplement* von Bi α in B. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn C teilbar ist, jedes Torsionselement in $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ ein κ-Element ist. Für beliebiges C ist das nicht mehr richtig, aber unter der Einschränkung, daß A *koatomar*, d. h. direkte Summe aus einem endlich erzeugten und einem beschränkten Modul ist, können wir die präzisen Bedingungen angeben:

Satz A. *Ist A koatomar, so sind für einen Modul C äquivalent:*

(i) *In* $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *ist jedes Torsionselement ein κ-Element.*

(ii) *Die induzierte Abbildung* $\pi^*: \mathrm{Ext}_R^1(C/Ra(C), A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *erhält κ-Elemente.*

(iii) *Falls p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A))$, ist C koseparabel.*

Die in (iii) auftretende Verallgemeinerung der Teilbarkeit wurde von Griffith in [3] eingeführt: Ein Modul C heißt *koseparabel*, wenn es zu jedem Untermodul U von C, mit C/U endlich erzeugt, ein $U' \subset U$ gibt, so daß U' direkter Summand in C ist und C/U' immer noch endlich erzeugt. — Den Extremfall, daß $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nur aus κ-Elementen besteht, können wir bei vollständigem R sogar für jedes Paar (A, C) lösen. Im unvollständigen, uns interessierenden Fall gilt:

Satz B. *Ist R unvollständig und A koatomar, so sind für einen Modul C äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *besteht nur aus κ-Elementen.*

(ii) *Falls p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A))$, ist* $\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A) = 0$; *falls sogar p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A)) - 1$, muß zusätzlich $T(C)$ endlich erzeugt sein.*

Schließlich hängt die Frage, wann es in $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nur κ-Elemente gibt, eng mit dem Problem zusammen, wann ein Untermodul U von M *genügend* *viele* Komplemente in M hat, d. h. zu jedem X mit $X+U=M$ gebe es ein Komplement von U in M, das in X enthalten ist. Mit Hilfe von Satz B erhalten wir im dritten Abschnitt das folgende Ergebnis:

SATZ C. *Ist M/U teilbar und ungleich Null, so sind äquivalent:*
(i) *U hat genügend viele Komplemente in M.*
(ii) *$U/D(U)$ und $M/D(M)$ sind koatomar, und $D(U)$ ist von der Form $K^b \times (K/R)^c$; falls R unvollständig ist, muß zusätzlich entweder $b=0$ sein, oder $b=1$ und $D(M)/D(U)$ torsionsvoll.*

0. Bezeichnungen und Grundtatsachen. Stets ist R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K \neq R$ und maximalem Ideal (p). Für die Grundlagen über R-Moduln beziehen wir uns auf [4], über den R-Modul $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ und Kotorsionsmoduln auf [2], Kapitel IX. Es ist $\mathrm{Ra}(M)=Mp$ und p-Rang$(M)=\dim(M/Ra(M))$, $H(M)=\bigcap_{n=1}^{\infty} Mp^n$, $D(M)$ der divisible Anteil und $T(M)$ der Torsionsuntermodul von M.

Grundtatsachen über Komplemente finden sich in [7], über κ-Elemente in $\mathrm{Ext}(C, A)$ bei abelschen Gruppen in [8]. Ist $V+U=M$, so heißt V *schwaches* (starkes) Komplement von U in M, wenn $V \cap U$ klein in M ist (wenn $V \cap U$ klein in V und direkter Summand in U ist). M heißt *radikal-komplementiert*, wenn $\mathrm{Ra}(M)$ ein Komplement in M hat, und das ist nach ([7] Abschnitt 3) äquivalent damit, daß "der" Basis-Untermodul von M koatomar ist. In diesem Fall hat M in jeder Erweiterung $M \subset N$ ein schwaches Komplement, und ist zusätzlich entweder R vollständig oder $M \subset \mathrm{Ra}(N)$, so hat M sogar ein Komplement in N. Weiter heißt M *schwach-komplementiert*, wenn jeder Untermodul von M ein schwaches Komplement in M hat, und es ist leicht zu sehen, daß das äquivalent damit ist, daß jeder Untermodul von M radikal-komplementiert ist, d. h. $M/T(M)$ von endlichem Rang, $D(T(M))$ artinsch und $T(M)/D(T(M))$ beschränkt ist.

Eine kurze exakte Folge $E=0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ heißt *σ-exakt*, wenn Bi α ein schwaches Komplement in B hat. $[E] \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ wird dann als σ-Element bezeichnet, und die Menge aller σ-Elemente mit $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\sigma$. Besteht $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nur aus σ-Elementen, so sagen wir auch, $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ sei *σ-voll*. Natürlich sollen die entsprechenden Vereinbarungen für κ-Elemente gelten.

1. Erhaltung und Reflexion von κ-Elementen. Die Bedingung $T(\mathrm{Ext}_R^1(C, A)) \subset \mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa$. Für das Studium der σ-und κ-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ ist es vor allem wichtig, ihr Verhalten bei den induzierten Abbildungen $f_*: \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A')$ und $g^*: \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C', A)$ zu kennen. Die folgenden drei Lemmata werden im weiteren ständig benützt:

LEMMA 1. 1.

I) *Seien* $f: A \longrightarrow A'$ *und* C *beliebig,* $f_*: \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A')$. *Dann gilt:*

(a) f_* *erhält sowohl σ- als auch κ-Elemente.*

(b) *Ist f ein zerfallender Epimorphismus, so ist f_* sowohl auf den σ-Elementen als auch auf den κ-Elementen surjektiv.*

II) *Seien* $g: C' \longrightarrow C$ *und* A *beliebig,* $g^*: \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C', A)$. *Dann gilt:*

(a) g^* *erhält σ-Elemente.*

(b) *Ist g ein Monomorphismus, so ist g^* sowohl auf den σ-Elementen als auch auf den κ-Elementen surjektiv.*

BEWEIS. I) Beide Punkte gelten sogar über beliebigen Ringen, denn in (a) hat man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit $V + \mathrm{Bi}\,\alpha = B$, so daß $f'(V) + \mathrm{Bi}\,\alpha' = B'$ und $f'(V) \cap \mathrm{Bi}\,\alpha' = f'(V \cap \mathrm{Bi}\,\alpha)$ ist; war nun V ein (schwaches) Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B, so ist $f'(V)$ ein (schwaches) Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha'$ in B'. — Damit ist auch (b) klar, denn aus $fs = 1_{A'}$ folgt $f_* s_* = 1$, und s_* erhält nach eben σ- und κ-Elemente.

II) Bei (a) hat man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

und aus $V + \mathrm{Ke}\,\beta = B$ folgt mit $W = g'^{-1}(V)$, daß $W + \mathrm{Ke}\,\beta' = B'$ und $W \cap \mathrm{Ke}\,\beta' \cong V \cap \mathrm{Ke}\,\beta$ ist. War nun $V \cap \mathrm{Ke}\,\beta$ klein in B, so braucht zwar $W \cap \mathrm{Ke}\,\beta'$ nicht klein in B' zu sein, aber es ist immerhin koatomar, so daß doch $\mathrm{Ke}\,\beta'$ ein schwaches Komplement in B' hat. — Bei (b) geht man wie in ([8] Lemma 3. 2) vor: Hat man $E' = 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$ mit $W + \mathrm{Ke}\,\beta' = B'$, so betrachte man $A_0 = W \cap \mathrm{Ke}\,\beta'$ und

$$\begin{tikzcd} E_0 = 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[d, dotted, "f"'] & \subset W \arrow[r, "\beta'|W"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ E' = 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_R(C, A_0) \arrow[r, "g^{\bullet}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Ext}^1_R(C', A_0) \arrow[d, "f_\circ"] \\ \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Ext}^1_R(C', A) \end{tikzcd} .$$

Weil $g^{\bullet}$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)$ mit $g^{\bullet}(x) = [E_0]$: War nun W ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta'$ in B', d. h. A_0 klein in W, so ist notwendig $x \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)^{\kappa}$; war aber W nur schwach, so ist immerhin A_0 koatomar, also $\mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)$ σ-voll, also x ein σ-Element. Nach (Ia) ist dann $f_*(x)$ ein κ-bzw. σ-Element von $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ mit $g^*(f_*(x)) = [E']$.

Bemerkungen. In (Ib) kann man auf das Zerfallen nicht verzichten. Zum Beispiel ist für beliebiges A und halbeinfaches C die induzierte Abbildung $\nu_* : \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A/\mathrm{Ra}(A))$ ein Isomorphismus, der nur dann auf den σ-Elementen surjektiv ist, wenn $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ σ-voll ist (hier ist außerdem $\sigma = \kappa$). — In (IIa) braucht g^* nicht κ-Elemente zu erhalten. Wir haben im Anhang zu [9] gezeigt, daß für einen Modul A äquivalent sind: (i) $\nu^* : \mathrm{Ext}^1_R(K/R, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(K, A)$ erhält κ-Elemente. (ii) Für jedes $g: C' \longrightarrow C$ erhält $g^* : \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C', A)$ κ-Elemente. (iii) A ist die Summe seiner Kotorsions-Untermoduln.

Lemma 1. 2. *Sei U ein Untermodul von M und ν: $M \longrightarrow M/U$ die kanonische Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist $U/T(U)$ neat in $M/T(U)$, so erhält* $\nu^* : \mathrm{Ext}^1_R(M/U, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, A)$ *κ-Elemente.*

(b) *Ist M/U endlich erzeugt und $n \geqq p$-Rang(M/U), so sind äquivalent:*

  (i) $\nu^* : \mathrm{Ext}^1_R(M/U, R^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, R^n)$ *erhält κ-Elemente.*

  (ii) *Es gibt ein $U' \subset U$, so daß U' neat in M ist und M/U' immer noch endlich erzeugt.*

Beweis. (a) Wegen der Zerlegung $\nu = M \longrightarrow M/T(U) \longrightarrow M/U$ können wir gleich annehmen, daß entweder U neat in M oder U torsionsvoll ist. Im 1. Fall ist ν in der Sprechweise von [8] ein "koneat-Epimorphismus", so daß der dortige Satz 2. 3 (der für Moduln über beliebigen Dedekindringen gilt) die Behauptung liefert. Im 2. Fall hat man

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\nu'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & M/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

sowie ein Komplement V von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B. Mit $W = \nu'^{-1}(V)$ folgt $W + \mathrm{Ke}\,\beta' =$

B' sowie $W\cap \mathrm{Ke}\,\beta' \subset \mathrm{Ra}\,(W)+\mathrm{Ke}\,\nu'$, worin $W\cap \mathrm{Ke}\,\beta' \cong V\cap \mathrm{Ke}\,\beta$ koatomar ist und $\mathrm{Ke}\,\nu' \cong U$ torsionsvoll. Nach ([9] Hilfssatz 1. 3) hat daher $W\cap \mathrm{Ke}\,\beta'$ ein Komplement in W, das dann auch ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta'$ in B' ist.

(b) (i$\to$ii) Aus der Voraussetzung über M/U folgt, daß es eine exakte Folge $0\longrightarrow R^n\longrightarrow R^m\xrightarrow{\beta} M/U\longrightarrow 0$ gibt, und weil ν^* κ-Elemente erhält, hat man im Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\nu'"] & M \arrow[d, "\nu"] \\ R^m \arrow[r, "\beta"] & M/U \end{tikzcd}$$

ein Komplement W von $\mathrm{Ke}\,\beta'$ in B'. Der wesentliche Epimorphismus $\beta'|W$: $W\longrightarrow M$ zeigt, daß nicht nur $W\cap \mathrm{Ke}\,\nu'$ direkter Summand in W ist, sondern auch $U'=\beta'(W\cap \mathrm{Ke}\,\nu')$ neat in M, und klar ist M/U' als Faktor von $W/W\cap \mathrm{Ke}\,\nu'$ endlich erzeugt. (ii$\to$i) Statt R^n kann man sogar jeden Modul A nehmen, denn in der Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_R(M/U, A) \arrow[rr, "\nu^*"] \arrow[dr] & & \mathrm{Ext}^1_R(M, A) \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M/U', A) \arrow[ur, "\mu^*"'] & \end{tikzcd}$$

besteht $\mathrm{Bi}\,\mu^*$ nach (a) nur aus κ-Elementen. (Zusatz: Hat man U' wie in (ii), so besitzt die Menge $\{U'\subset Y\subset U \mid Y \text{ neat in } M\}$ ein maximales Element U'', und dann ist nicht nur U'' neat in M, sondern auch $U/U''\subset \mathrm{Ra}\,(M/U'')$, d. h. U/U'' klein in M/U''.)

Lemma 1. 3. *Sei U ein Untermodul von M und ν: $M\longrightarrow M/U$ die kanonische Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist U radikal-komplementiert, so reflektiert* ν^*: $\mathrm{Ext}^1_R(M/U, A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, A)$ *σ-Elemente, d. h. aus* $\nu^*(x)\in \mathrm{Ext}^1_R(M, A)^\sigma$ *folgt* $x\in \mathrm{Ext}^1_R(M/U, A)^\sigma$.

(b) *Ist U radikal-komplementiert und zusätzlich $U\subset Ra\,(M)$, so reflektiert ν^* κ-Elemente.*

Beweis. In beiden Fällen hat man dasselbe Diagramm wie im Beweis von (1. 2, a), in dem jetzt W ein (schwaches) Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta'$ in B' sei. Mit $V=\nu'(W)$ folgt $V+\mathrm{Ke}\,\beta=B$, aber auch $V\cap \mathrm{Ke}\,\beta$ radikal-komplementiert, denn der Kokern der induzierten Abbildung $W\cap \mathrm{Ke}\,\beta'\longrightarrow V\cap \mathrm{Ke}\,\beta$ ist als Faktormodul von $\mathrm{Ke}\,\nu'\cong U$ radikal-komplementiert. Im Fall (a) sind wir schon fertig, denn jedes schwache Komplement von $V\cap \mathrm{Ke}\,\beta$ in V ist auch ein schwaches Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B; im Fall (b) liefert die Zusatzbedingung an U, daß auch $V\cap \mathrm{Ke}\,\beta\subset \mathrm{Ra}(V)$ ist, und wieder folgt die Behauptung.

FOLGERUNG 1. *In jedem* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *bilden die* σ*-Elemente einen reinen Untermodul.*

FOLGERUNG 2. *Ist* $T(C)$ *teilbar, so gilt* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa\cap D(\mathrm{Ext}^1_R(C, A))=0$.

FOLGERUNG 3. *Ist* C *teilbar und* xp *ein* κ*-Element in* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$, *so ist auch* x *ein* κ*-Element.*

BEWEIS. Die beiden letzten Folgerungen ergeben sich unmittelbar aus (b), so daß nur noch die erste zu zeigen bleibt. Daß $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma$ ein Untermodul ist, folgt aus (1. 1), denn für $[E_1]$ und $[E_2]$ aus $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ ist bekanntlich $[E_1]+[E_2]=[\nabla(E_1\times E_2)\Delta]$. Zur Reinheit sei nun $xr\in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma$, mit $r\neq 0$:

Die Zerlegung
$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & Cr \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$
liefert
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "\iota^*"'] & & \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \\ & \mathrm{Ext}^1_R(Cr, A) \arrow[ur, "g^*"'] & \end{tikzcd},$$

worin g^* nach (a) σ-Elemente reflektiert. Zu $\iota^*(x)\in \mathrm{Ext}^1_R(Cr, A)^\sigma$ gibt es nach (1. 1, II b) ein $y\in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma$ mit $\iota^*(y)=\iota^*(x)$, so daß insbesondere $yr=xr$ gilt wie gewünscht.

SATZ 1. 4. *Sei* $n\geqq 0$. *Dann sind für einen Modul* C *äquivalent*:

(i) $\pi^*: \mathrm{Ext}^1_R(C/\mathrm{Ra}(C), R^n)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ *erhält* κ*-Elemente.*

(ii) $T(\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n))\subset \mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)^\kappa$.

(iii) *Jeder endlich erzeugte Untermodul* C_0 *von* C, *mit* p*-Rang*$(C_0)\leqq n$, *hat genügend viele Komplemente in* C.

(iv) *Falls* p*-Rang*$(T(C))<n$, *ist* C *koseparabel.*

BEWEIS. (iii→ii) Für beliebiges C zeigen wir zuerst: Ist $x\in T(\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n))$, so gibt es einen Untermodul U von C, so daß C/U endlich erzeugt vom p-Rang$\leq n$ ist und $x\in \mathrm{Bi}(\mathrm{Ext}^1_R(C/U, R^n)\xrightarrow{\nu^*}\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n))$. Zum Beweis sei x repräsentiert durch $0\longrightarrow A\longrightarrow B\xrightarrow{\beta} C\longrightarrow 0$ $(A\cong R^n)$, und Torsionselement bedeutet dann die Existenz eines Zwischenmoduls $A\subset X\subset B$, so daß A direkter Summand in X ist und B/X beschränkt. Zu $A\oplus X'=X$ wähle man in der Menge $\{X'\subset Y\subset B| A\cap Y=0\}$ ein maximales Element Y', und der wesentliche Monomorphismus $A\longrightarrow B/Y'$ zeigt, daß B/Y' torsionsfrei vom p-Rang$\leq n$ ist, also $B/A\oplus Y'$ endlich erzeugt vom p-Rang $\leq n$. Damit leistet $U=\beta(Y')$ das Gewünschte, denn $[0\longrightarrow A\longrightarrow B/Y'\xrightarrow{\tilde\beta} C/U\longrightarrow 0]$ wird durch ν^*

auf x abgebildet. — Bleibt zu zeigen, daß x ein κ-Element ist, wenn C die Bedingung (iii) erfüllt: Ist C_0 ein Komplement von U in C, so ist auch C_0 endlich erzeugt vom p-Rang $\leq n$, hat also nach Voraussetzung ein Komplement U' in C, mit $U' \subset U$. Damit besteht Bi ν^* nach (1. 2, b) nur aus κ-Elementen, und wir sind fertig.

Klar ist (ii→i), weil Bi π^* nur aus Torsionselementen besteht.

(i→iv) Weil $\mathrm{Ext}^1_R(C/D(C), R^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ nach (1. 3, b) κ-Elemente reflektiert, erhält auch $\mathrm{Ext}^1_R(C/\mathrm{Ra}(C), R^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C/D(C), R^n)$ κ-Elemente. Außerdem ist p-Rang$(T(C/D(C))) = p$-Rang$(T(C))$, und C genau dann koseparabel, wenn es $C/D(C)$ ist. Wir können also von vorneherein C reduziert annehmen, sowie p-Rang$(T(C)) < n$. Zur Koseparabilität von C genügt es nach ([9] Satz 2. 1) zu zeigen, daß in $C/T(C)$ jeder maximale Untermodul $X/T(C)$ ein starkes Komplement hat, und dazu sei jetzt $C_0/T(C)$ ein Komplement von $X/T(C)$ in $C/T(C)$: Klar ist $C_0/T(C) \cong R$, also C_0 endlich erzeugt vom p-Rang$\leq n$, außerdem $C_0 + X = C$ mit $X \supset \mathrm{Ra}(C)$. Wählt man eine Zerlegung $(C_0 + \mathrm{Ra}(C))/\mathrm{Ra}(C) \oplus U/\mathrm{Ra}(C) = C/\mathrm{Ra}(C)$, mit $\mathrm{Ra}(C) \subset U \subset X$, so ist U ein schwaches Komplement von C_0 in C, und C/U halbeinfach vom p-Rang$\leq n$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{Ext}^1_R(C/\mathrm{Ra}(C), R^n) \arrow[rr, "\pi^*"] & & \mathrm{Ext}^1_R(C, R^n) \\ & \mathrm{Ext}^1_R(C/U, R^n) \arrow[ul] \arrow[ur, "\nu^*"'] & \end{tikzcd}$$

zeigt nun, daß ν^* κ-Elemente erhält, es also nach dem Zusatz in (1. 2, b) ein $U'' \subset U$ gibt mit U'' neat in C, U/U'' klein in C/U''. Damit ist U'' sogar ein Komplement von C_0 in C, so daß mit $X' = U'' + T(C)$ folgt $C_0/T(C) \oplus X'/T(C) = C/T(C)$ wie verlangt.

(iv→iii) Das wurde in ([9] Folgerung 3. 2 bzw. Folgerung 2. 3) gezeigt.

Für jeden koatomaren Modul A gilt, daß $A/T(A) \cong R^n$ ist für ein $n \geq 0$, und daß die induzierte Abbildung $\mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A/T(A))$ κ-Elemente reflektiert. Damit läßt sich der Satz ein wenig verallgemeinern:

FOLGERUNG. *Ist A koatomar, so sind für einen Modul C äquivalent*: (*a*) $\pi^* : \mathrm{Ext}^1_R(C/\mathrm{Ra}(C), A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *erhält κ-Elemente.* (*b*) $T(\mathrm{Ext}^1_R(C, A)) \subset \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa$. (*c*) *Falls p-Rang$(T(C)) < p$-Rang$(A/T(A))$, ist C koseparabel.*

BEMERKUNG. Man kann auch einen direkten Beweis für (iv→ii) geben: In (2. 4) werden wir sehen, daß $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ im Fall p-Rang$(T(C)) \geq n$ sogar κ-voll ist, also gewiß (ii) erfüllt ist. Die andere Möglichkeit, daß C koseparabel ist, bedeutet aber $T(\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), R^n)) = 0$, und ohne viel Mühe läßt sich für ein beliebiges Paar (A, C) zeigen: Ist p-Rang$(T(C)) < \aleph_0$ und $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A)$

torsionsfrei, so ist jedes Torsionselement in $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ ein κ-Element.

2. Die Bedingung $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa = \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$. Für den Fall, daß p-Rang$(A) \leq 1$ ist, können wir nicht nur sagen, wann $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ κ-voll ist, sondern sogar eine vollständige Kennzeichnung der κ-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ angeben — und zwar ganz im Sinne von ([8] Theorem 5.2) mit Hilfe des Tiefenbegriffes: Zu $x \in M$ heiße $t^M(x) = \inf \{i \in N \mid$ es gibt ein $y \in M \setminus \mathrm{Ra}(M)$ mit $x = yp^i\}$ die *Tiefe* von x in M. Wie in ([8] Satz 4.3 bzw. Lemma 4.2) zeigt man, daß $t^M(x) = \min(h^M(x), t^M(0))$ ist, und daß $t^M(0) \leq n$ äquivalent damit ist, daß M einen direkten Summanden der Form $R/(p^e)$ enthält mit $1 \leq e \leq n$. Falls also $T(M)$ teilbar sein sollte, stimmt die Tiefe von x mit der Höhe von x in M überein.

Lemma 2.1. *Sei p-Rang$(A) \leq 1$ und C beliebig. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa = \{x \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A) \mid x = 0$ *oder* $t^{\mathrm{Ext}}(x) < \infty\}$.

(b) *Ist* $T(C) \neq 0$, *so ist jedes Element von* $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *Summe von zwei κ-Elementen.*

(c) $T(\mathrm{Ext}_R^1(C, A)) \subset \mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa \Leftrightarrow$ *Falls* $T(C)$ *teilbar, ist* $\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A)$ *torsionsfrei.*

(d) $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ *κ-voll* $\Leftrightarrow$ *Falls* $T(C)$ *teilbar, ist* $\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A) = 0$.

Beweis. (a) Sei $x = [0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow C \longrightarrow 0]$ ein von Null verschiedenes κ-Element. Wir zeigen sogar bei beliebigem A, daß $t(x) < \infty$ sein muß: Klar ist $T(C) \neq 0$ und A nicht teilbar, also nach ([8] Satz 4.8) $t^{\mathrm{Ext}}(0) = \min(t^A(0), t^C(0))$. Wäre nun $t(x) = \infty$, so folgte, daß $\mathrm{Bi}\,\alpha$ rein in B und $T(A)$, $T(C)$ beide teilbar wären, also $x \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa \cap D(\mathrm{Ext}_R^1(C, A)) = 0$ nach (1.3, Folgerung 2), also $x = 0$, und das war gerade ausgeschlossen. — Sei nun umgekehrt $x \neq 0$ und $t(x) < \infty$: Weil die Multiplikation mit p^i κ-Elemente erhält, können wir sogar $t(x) = 0$ annehmen, d.h. $\mathrm{Bi}\,\alpha$ nicht neat in B. Wegen des p-Ranges folgt $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset \mathrm{Ra}(B)$, also die Existenz eines Komplementes.

(b) Sei $T(C) \neq 0$ und $x \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ kein κ-Element. Weil dann $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nicht teilbar sein kann, gibt es ein $y \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ mit $t(y) = 0$, also auch $t(x - y) = 0$ (denn x ist durch p teilbar). Also sind y und $x - y$ κ-Elemente, deren Summe x ergibt.

(c) ($\Rightarrow$) Ist $T(C)$ teilbar, so reflektiert $\nu^*: \mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nach (1.3, b) κ-Elemente, so daß aus $\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A)^\kappa = 0$ die Behauptung folgt. ($\Leftarrow$) Ist $T(C)$ nicht teilbar, also $t(x) < \infty$ für alle $0 \neq x \in \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$, so ist $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nach (a) sogar κ-voll; ist aber $T(C)$ teilbar und $T(\mathrm{Ext}_R^1(C/T(C), A)) = 0$, so ist $D(\mathrm{Ext}_R^1(C, A)) = H(\mathrm{Ext}_R^1(C, A))$ torsionsfrei, also sogar $h(x) < \infty$ für alle $0 \neq x \in T(\mathrm{Ext}_R^1(C, A))$, so daß wieder mit (a) die Behauptung folgt.

(d) Ebenso.

Die erste Folgerung kann als Rechtfertigung der Einführung der σ-Elemente betrachtet werden, weil sie eine Erklärung für den von den κ-Elementen in $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ erzeugten Untermodul gibt:

FOLGERUNG 1. *Sei A beliebig und $T(C)\neq 0$. Dann ist jedes σ-Element aus $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ Summe von endlich vielen κ-Elementen.*

BEWEIS. Sei im *1. Schritt* speziell A koatomar. Dann ist $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ σ-voll, und wir müssen zeigen, daß es von seinen κ-Elementen erzeugt wird. Man hat $A\cong A_1\times\cdots\times A_n\times A_{n+1}$ mit A_i zyklisch $(1\leq i\leq n)$ und A_{n+1} beschränkt, sowie den kanonischen Isomorphismus ψ: $\mathrm{Ext}^1_R\left(C, \prod_{i=1}^{n+1} A_i\right)\longrightarrow\prod_{i=1}^{n+1}\mathrm{Ext}^1_R(C, A_i)$. Zu $x\in\mathrm{Ext}^1_R\left(C, \prod_{i=1}^{n+1} A_i\right)$ ist nun $\psi(x)=(\pi_{1*}(x), \cdots, \pi_{n+1*}(x))$, und nach (b) $\pi_{i*}(x)=y_i+z_i$ mit y_i, $z_i\in\mathrm{Ext}^1_R(C, A_i)^\kappa$ für alle $1\leq i\leq n+1$, also

$$x=\sum_{i=1}^{n+1}\iota_{i*}(y_i)+\sum_{i=1}^{n+1}\iota_{i*}(z_i),$$

worin nach (1. 1, Ia) alle Summanden κ-Elemente sind. Im *2. Schritt* sei jetzt A beliebig und $E=0\longrightarrow A\longrightarrow B\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0$ σ-exakt, $V+\mathrm{Ke}\,\beta=B$ und $A_0=V\cap\mathrm{Ke}\,\beta$ klein in B. Dann ist A_0 koatomar, und bildet man das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_0 = 0 & \longrightarrow & A_0 & \subset & V & \xrightarrow{\beta|V} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \cap & & \Vert & & \\
E = 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

so folgt nach eben $[E_0]=u_1+\cdots+u_m$ mit $u_i\in\mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)^\kappa$, also $[E]=f_*(u_1)+\cdots+f_*(u_m)$ mit $f_*(u_i)\in\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa$.

FOLGERUNG 2. *Bilden in $\mathrm{Ext}^1_R(K\times(K/R), A)$ die κ-Elemente einen Untermodul, so ist A die Summe seiner Kotorsions-Untermoduln. In diesem Fall gilt sogar $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\sigma=\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa$ für alle C.*

BEWEIS. Nach eben ist in $\mathrm{Ext}^1_R(K\times(K/R), A)$ jedes σ-Element Summe von endlich vielen κ-Elementen, also nach Voraussetzung bereits ein κ-Element. Das gilt dann wegen (1. 3, b) auch in $\mathrm{Ext}^1_R(K, A)$, d. h. es ist $\mathrm{Ext}^1_R(K, A)^\sigma=0$. Aus $\mathrm{Ext}^1_R(R^*/R, A)^\sigma=0$, wobei R^* die Vervollständigung von R sei, folgt die Surjektivität der "Auswertungsabbildung" γ : $\mathrm{Hom}_R(R^*, A)\longrightarrow A$, also unsere Behauptung über A. Der Zusatz für alle C wurde im Anhang zu [9] gezeigt.

Die dritte Folgerung liefert, unter sehr speziellen Umständen, eine Umkehrung von (1. 2, a):

Folgerung 3. *Erhalte* ν^*: $\mathrm{Ext}_R^1(M/U, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M, A)$ κ-*Elemente, und sei außerdem* p-*Rang*$(A) \leq 1$, $Hom_R(M, A) = 0$ *und* $\mathrm{Ext}_R^1(M, A)$ *nicht* κ-*voll. Dann ist* $U/T(U)$ *neat in* $M/T(U)$.

Beweis. Aus (d) wissen wir, daß $T(M)$ teilbar ist, so daß in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_R^1(M/U+T(M), A) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathrm{Ext}_R^1(M/T(M), A) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta^*} \\ \mathrm{Ext}_R^1(M/U, A) & \xrightarrow{\nu^*} & \mathrm{Ext}_R^1(M, A) \end{array}$$

auch μ^* κ-Elemente erhält (weil das für α^* gilt nach (1. 2, a), und weil β^* nach (1. 3, b) κ-Elemente reflektiert), und daß $\mathrm{Ext}_R^1(M/T(M), A) \neq 0$ ist. Könnten wir zeigen, daß $(U+T(M))/T(M)$ neat in $M/T(M)$ ist, so folgte sofort $U/T(U)$ neat in $M/T(U)$, d. h. wir können von vorneherein M torsionsfrei annehmen. Aus den Voraussetzungen folgt weiter, daß $A/D(A)$ keine Kotorsions-Untermoduln besitzt und vom p-Rang 1 ist, was wir also (mit einer ähnlichen Reduktion wie eben) gleich von A selbst annehmen wollen. — Angenommen, U ist nicht neat in M, also $T(M/U) \neq 0$, so folgte mit (b) sogar $\nu^* = 0$, also $\mathrm{Hom}_R(U, A) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M/U, A)$. Mit A besitzt nun auch $\mathrm{Hom}_R(U, A)$ keine Kotorsions-Untermoduln, es folgt $\mathrm{Ext}_R^1(M/U, A) = 0$, also A teilbar, und das ist nicht wahr.

Es ist uns nicht klar, wie sich die Aussage (a) des Lemmas auf p-Rang$(A) \geq 2$ erweitern läßt. Auf jeden Fall genügt zur Beschreibung der κ-Elemente von $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ nicht mehr die Tiefe, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2. 2. *Sei* $n \geq 2$. *Genau dann ist* $x \in \mathrm{Ext}_R^1(K/R, R^n)$ *ein* κ-*Element, wenn unter dem kanonischen Isomorphismus* ϕ: $\mathrm{Ext}_R^1(K/R, R^n) \ni x \longmapsto (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{Ext}_R^1(K/R, R)^n$ *die* x_i *einen gemeinsamen Teiler haben, d. h.* $x_i = yr_i$ *gilt für ein* $y \in \mathrm{Ext}_R^1(K/R, R)$ *und* $r_1, \cdots, r_n \in R$.

Beweis. Sei im *1. Schritt* etwas allgemeiner A torsionsfrei und radikalkomplementiert, C torsionsvoll und teilbar. Ist $A \subset \hat{A}$ eine injektive Hülle, so gehört zum kanonischen Isomorphismus ϑ: $\mathrm{Hom}_R(C, \hat{A}/A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} E = 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \subset & \hat{A} & \xrightarrow{\nu} & \hat{A}/A & \longrightarrow & 0\,, \end{array}$$

und wir behaupten, daß $x=[E]$ genau dann ein κ-Element ist, wenn f die folgende Bedingung erfüllt:

(k) Zu jedem $c\in C$ gibt es ein $u\in\hat{A}$ und eine Folge $c_1, c_2, \cdots \in C$ mit $f(c)=\nu(u)$, $f(c_e)=\nu(u/p^e)$ für alle $e\geq 1$.

Nach ([9] Hilfssatz 1.3) hat nämlich $\mathrm{Bi}\,\alpha$ genau dann ein Komplement in B, wenn $(\mathrm{Bi}\,\alpha\oplus T(B))/T(B)$ eines in $B/T(B)$ hat, und das ist wegen $T(B)=\mathrm{Ke}\,f'$ äquivalent damit, daß A ein Komplement in $\mathrm{Bi}\,f'$ hat, also $D(\mathrm{Bi}\,f')+A=\mathrm{Bi}\,f'$ ist. Das bedeutet aber, daß es zu jedem $c\in C$ ein $u\in D(\mathrm{Bi}\,f')$ gibt mit $f(c)=\nu(u)$, und $u\in D(\mathrm{Bi}\,f')=H(\mathrm{Bi}\,f')$ ist äquivalent mit $\nu(u/p^e)\in\mathrm{Bi}\,f$ für alle $e\geq 1$, so daß wir genau die Bedingung (k) haben.

Sei nun im *2. Schritt* $A\cong R^n$ und $C\cong K/R$. Dann bilde man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \subset & \hat{A} & \xrightarrow{\nu} & A/\hat{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\omega}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\chi}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \\
0 & \longrightarrow & R^n & \subset & K^n & \xrightarrow{\mu} & (K/R)^n & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

sowie $\chi f=\{f_1, \cdots, f_n\}$. Wir müssen zeigen, daß f genau dann die Bedingung (k) erfüllt, wenn die f_i einen gemeinsamen Teiler haben. Dazu sei gleich $f\neq 0$. Ist einerseits (k) erfüllt, und wählt man zu einem $c_0\notin\mathrm{Ke}\,f$ die Elemente $u\in\hat{A}$, $c_1, c_2, \cdots \in C$ wie verlangt, so folgt $f(c_e p^e)\neq 0$ für alle $e\geq 1$, so daß die c_e ein Erzeugendensystem von C bilden. Schreibt man $\varphi(u)=(u_1, \cdots, u_n)\in K^n$, so folgt $f_i(c_0)=\bar{u}_i$ und $f_i(c_e)=\overline{u_i/p^e}$ für alle $1\leq i\leq n$, $e\geq 1$. Offenbar gibt es ein u_m mit $u_i=u_m r_i$, woraus folgt $f_i=f_m r_i$ für alle i. — Ist andrerseits $f_i=gr_i$ für gewisse $r_1, \cdots, r_n\in R$ und ein $g\in\mathrm{Hom}_R(C, K/R)$, so gibt es wieder ein r_m mit $r_i=r_m s_i$, also $f_i=f_m s_i$ für alle i. Um (k) nachzuweisen, sei $c\in C$: Es gibt ein $\rho\in K$ mit $f_m(c)=\bar{\rho}$, und weil f_m ungleich Null, also surjektiv ist, auch noch $c_1, c_2, \cdots \in C$ mit $f_m(c_e)=\overline{\rho/p^e}$ für alle $e\geq 1$. Definiert man $u\in\hat{A}$ durch $\varphi(u)=(\rho s_1, \cdots, \rho s_n)$, so folgt $f(c)=\nu(u)$ und $f(c_e)=\nu(u/p^e)$ wie gewünscht.

Das nächste Lemma stellt Hilfsmittel für den Beweis des Hauptresultates (2.4) zusammen. Als Folgerung geben wir für den Spezialfall, daß R vollständig ist, sogar alle Paare (A, C) an, für die $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ κ-voll ist.

LEMMA 2.3. *Seien A und C beliebig.*

(a) *Ist* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa=0$, *so ist entweder C torsionsfrei oder A teilbar.*

(b) *Ist* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *κ-voll, so ist entweder $T(C)$ artinsch oder A radikalkomplementiert.*

(c) *Ist* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *κ-voll und gibt es zwei exakte Folgen*

$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow R^m \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow R^m \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$, *so ist auch* $\mathrm{Ext}_R^1(C_1, A_1)$ *κ-voll.*

Beweis. (a) Es genügt wie in ([8] Satz 3. 1), daß $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)^\kappa \subset \mathrm{Ra}\,(\mathrm{Ext}_R^1(C, A))$ ist: Falls $T(C) \neq 0$ ist, folgt nach (1. 1, IIb) auch $\mathrm{Ext}_R^1(R/(p), A)^\kappa \subset \mathrm{Ra}\,(\mathrm{Ext}_R^1(R/(p), A))$, also $\mathrm{Ext}_R^1(R/(p), A)^\kappa = 0$, also A teilbar wie behauptet.

(b) Ohne Bedingungen an C zeigen wir im *1. Schritt*: Ist A nicht radikal-komplementiert, so gibt es einen Faktormodul X, der auch nicht radikal-komplementiert ist, und für den p-Rang$(X) = \aleph_0$ ist. Zum Beweis wähle man einen Basis-Untermodul A' von A, außerdem einen algebraisch kompakten Modul M, dessen Basis-Untermodul M' isomorph zu $\coprod_{i=1}^{\infty} R/(p^i)$ ist. Weil A' nach Voraussetzung nicht koatomar ist, gibt es einen Homomorphismus $\varphi: A \longrightarrow M$ mit $\varphi(A') = M'$, und dann ist leicht zu sehen, daß $X = \mathrm{Bi}\,\varphi$ das Gewünschte leistet. Sei nun im *2. Schritt* $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ κ-voll sowie p-Rang $(A) \leq \dim\,(C\,[p])$. Dann muß A radikal-komplementiert sein, denn es gibt einen Monomorphismus $g: A/\mathrm{Ra}(A) \longrightarrow C$ und (natürlich) einen Epimorphismus $f: A \longrightarrow \mathrm{Ra}\,(A)$, und weil der induzierte Epimorphismus $\mathrm{Ext}_R^1(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(A/\mathrm{Ra}\,(A), \mathrm{Ra}\,(A))$ σ-Elemente erhält, hat $\mathrm{Ra}\,(A)$ ein (schwaches) Komplement in A wie behauptet. (Man könnte auch ([6] Theorem 1. 6) benützen, wonach wegen der angegebenen Ungleichung eine Folge $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ existiert mit $\mathrm{Bi}\,\alpha \subset \mathrm{Ra}\,(B)$). — Damit ist (b) bewiesen, denn ist $\mathrm{Ext}_R^1(C, A)$ κ-voll (es genügt offenbar σ-voll) und A nicht radikal-komplementiert, so kann man nach dem ersten Schritt p-Rang$(A) = \aleph_0$ annehmen, und dann zeigt der zweite Schritt, daß $\dim\,(C\,[p]) < \aleph_0$, d. h. $T(C)$ artinsch ist.

(c) Sei im *1. Schritt* zusätzlich π wesentlich, d. h. $\mathrm{Ke}\,\pi$ klein in C_1. Dann kann man zu jedem $[E] \in \mathrm{Ext}_R^1(C_1, A_1)$ das folgende Diagramm bilden

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \beta^{-1}(\mathrm{Ke}\,\pi) & \longrightarrow & \mathrm{Ke}\,\pi & \longrightarrow & 0 \\ & & & \| & & \cap & & \cap & & \\ E = & 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta} & C_1 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

in dem die obere Zeile zerfällt, also $\beta^{-1}(\mathrm{Ke}\,\pi) \cong A$ ist. Wegen $B_1/\beta^{-1}(\mathrm{Ke}\,\pi) \cong C$ hat man nach Voraussetzung ein Komplement V von $\beta^{-1}(\mathrm{Ke}\,\pi)$ in B_1, das wegen der Kleinheit auch ein Komplement von $\mathrm{Ke}\,\beta$ in B_1 ist. Im *2. Schritt*, wenn π beliebig ist, wähle man ein $U \subset \mathrm{Ke}\,\pi$, so daß U neat in C_1 und $\mathrm{Ke}\,\pi/U$ klein in C_1/U ist (etwa U als Komplement von $\mathrm{Ke}\,\pi \cap \mathrm{Ra}\,(C_1)$ in $\mathrm{Ke}\,\pi$). Dann induziert π einen wesentlichen Epimorphismus $\bar{\pi}: C_1/U \longrightarrow C$ mit $\mathrm{Ke}\,\bar{\pi} \cong R^n$ $(n \leq m)$, so daß nach dem ersten Schritt $\mathrm{Ext}_R^1(C_1/U, A_1 \times R^{m-n})$

κ-voll ist, also auch $\mathrm{Ext}^1_R(C_1/U, A_1)$. Nach (1. 2, a) erhält der Epimorphismus $\nu^*: \mathrm{Ext}^1_R(C_1/U, A_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C_1, A_1)$ κ-Elemente, und wir sind fertig.

FOLGERUNG. *Ist A die Summe seiner Kotorsions-Untermoduln, so sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *ist κ-voll.*

(ii) *Falls $T(C)$ nicht artinsch ist, hat A in jeder Erweiterung ein Komplement;*
falls $T(C)$ artinsch, aber nicht endlich erzeugt ist, ist A kotorsion;
falls $T(C)$ endlich erzeugt ist, gilt $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A)=0$.

BEWEIS. Nur für den Beweis sagen wir, ein Modul besitze die Eigenschaft (S), wenn er die Summe seiner Kotorsions-Untermoduln ist. (Über einem vollständigen Ring hat offenbar jeder Modul diese Eigenschaft.) *1. Fall* $T(C)$ ist nicht artinsch. Nur (i→ii) ist zu zeigen, und weil A nach (b) radikal-komplementiert ist, hat es in jeder Erweiterung ein schwaches Komplement, ja sogar, wie wir in der zweiten Folgerung zu (2. 1) bemerkt haben, wegen (S) ein Komplement. *2. Fall* $T(C)$ ist artinsch, aber nicht reduziert. Ist dann $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ κ-voll, so wegen (S) auch $\mathrm{Ext}^1_R(K/R, A)$, also auch $\mathrm{Ext}^1_R(K, A)$, d. h. $\mathrm{Ext}^1_R(K, A)=0$. — Falls umgekehrt A kotorsion ist, wähle man eine wesentliche Überdeckung $h: H \longrightarrow C$ mit H torsionsfrei (d. h. eine torsionsfreie Hülle im Sinne von [8] Abschnitt 2), und weil h^*: $\mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H, A)$ nach (1. 3, b) κ-Elemente reflektiert, außerdem das zweite Ext Null ist, folgt die Behauptung. *3. Fall* $T(C)$ ist endlich erzeugt. Wieder ist (i→ii) klar wegen (S). — Umgekehrt gilt für jeden Modul A, mit $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A)=0$ und $T(C)$ endlich erzeugt, daß $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ κ-voll ist, denn der Isomorphismus $\iota^*: \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T(C), A)$ reflektiert κ-Elemente, und das zweite Ext ist κ-voll.

SATZ 2. 4. *Sei $n \geq 0$. Dann sind für einen Modul C äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ *ist κ-voll.*

(ii) *Falls p-Rang$(T(C))<n$, ist* $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), R)=0$;
falls sogar p-Rang$(T(C))<n-1$ und R unvollständig ist, muß zusätzlich $T(C)$ endlich erzeugt sein.

BEWEIS. (i→ii) Sei p-Rang$(T(C))<n$. Wir müssen zeigen, daß $C/T(C)$ ein sogenannter W-Modul ist und können dazu nach (1. 3, b) gleich $T(C)$ reduziert, d. h. endlich erzeugt annehmen. Zu $m=p$-Rang$(T(C))$ und $C_1=R^m \times C/T(C)$ gibt es dann eine exakte Folge $0 \longrightarrow R^m \longrightarrow C_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$, und weil nach Voraussetzung $m<n$ ist, kann man $A_1=R^{n-m} \neq 0$ bilden, so daß nach (2. 3, c) auch $\mathrm{Ext}^1_R(C_1, A_1)$ κ-voll, d. h. Null ist, also erst recht $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), R)=0$. Sei nun zusätzlich p-Rang$(T(C))<n-1$ und R unvollständig.

Angenommen, $T(C)$ ist nicht endlich erzeugt, so gibt es eine Zerlegung $C=C'\oplus C''$ mit $C'\cong K/R$, und zu $C_1=K\times C''$ eine exakte Folge $0\longrightarrow R\longrightarrow C_1\longrightarrow C\longrightarrow 0$, so daß wieder nach (2. 3, c) auch $\mathrm{Ext}^1_R(C_1, R^{n-1})$ κ-voll ist. Weil p-Rang$(T(C_1))=p$-Rang$(T(C))<n-1$ ist, muß nach eben $C_1/T(C_1)$ ein W-Modul sein, insbesondere $\mathrm{Ext}^1_R(K, R)=0$, im Widerspruch zur Unvollständigkeit von R.

(ii→i) Aus dem Beweis der letzten Folgerung wissen wir: Ist $\mathrm{Ext}^1_R(T(C), A)$ κ-voll und $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A)=0$, so ist auch $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ κ-voll. Damit ist hier der Fall p-Rang$(T(C))<n-1$ erledigt, und bei p-Rang$(T(C))=n-1$ kann man gleich C torsionsvoll annehmen. Bleiben zwei Behauptungen zu zeigen:

(1) Ist C torsionsvoll und p-Rang$(C)=n-1$, so ist $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ κ-voll. Zum Beweis sei $0\longrightarrow A\subset B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ exakt, mit $A\cong R^n$. Dann genügt es zu zeigen, daß $(D(TB)\oplus A)/D(TB)$ ein Komplement in $B/D(TB)$ hat, und weil p-Rang$(B/D(TB)\oplus A)=n-1$ ist, können wir gleich $D(TB)=0$, d. h. $T(B)$ endlich erzeugt annehmen. Betrachten wir die exakte Folge

$$0\longrightarrow B[\mathrm{p}]\longrightarrow C[\mathrm{p}]\longrightarrow \frac{A\cap \mathrm{Ra}(B)}{\mathrm{Ra}(A)}\longrightarrow 0,$$

so sind $x=\dim(B[\mathrm{p}])$, $y=\dim(A\cap\mathrm{Ra}(B)/\mathrm{Ra}(A))$ und $z=\dim(C[\mathrm{p}])$ natürliche Zahlen, mit $y\leq n\leq z+1$. Falls nun $n=z+1$, d. h. C endlich erzeugt ist, hat trivialerweise A ein Komplement in B; falls aber $n<z+1$, d. h. p-Rang$(T(B))=x\geq n-y$ ist, wähle man ein Komplement A_1 von $A\cap\mathrm{Ra}(B)$ in A. Dann ist $A_1\cong R^{n-y}$, hat also nach ([9] Folgerung 3. 2) ein Komplement in B, sagen wir V, und weil A/A_1 klein in B/A_1 ist, ist V auch ein Komplement von A in B wie gewünscht.

(2) Ist p-Rang$(T(C))\geq n$, so ist $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^n)$ κ-voll. Dies beweisen wir durch Induktion über n. Für $n=0$ ist nichts zu zeigen, und bei $n\to n+1$ betrachte man $A\subset B$ mit $A=\bigoplus_{i=1}^{n+1}A_i$, $A_i\cong R$ für alle i, $B/A\cong C$: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Komplement W/A_1 in B/A_1, und wir wären nach (2. 1, d) fertig (denn jedes Komplement von A_1 in W ist auch ein Komplement von A in B), wenn wir wüßten, daß $T(W/A_1)$ nicht teilbar ist. Das gilt aber wegen der folgenden allgemeineren Bemerkung: Ist $X+U=M$ und $T(X)$ teilbar und U endlich erzeugt, so ist p-Rang$(T(M/U))\leq$ p-Rang(U) — bei uns ist aber p-Rang$(T(B/A))>p$-Rang(A/A_1).

Die Verallgemeinerung des Satzes von R^n auf einen koatomaren Modul A ist ebenso einfach wie am Schluß von (1. 4) und liefert somit den in der Einleitung angegebenen Satz B. Interessanter ist es, statt R^n auch freie Moduln von unendlichem Rang zuzulassen, denn dann verschwinden die komplizierten Fallunterscheidungen im Punkt (ii): Ist $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^{(I)})$ κ-voll und I nicht endlich, so ist $A_0 = \coprod_{i=1}^{\infty} R/(p^i)$ Faktormodul von $R^{(I)}$, also auch $\mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)$ κ-voll, und daher $T(C)$ endlich erzeugt nach der Folgerung zu (2. 3). Mit der "Austauschmethode" von (2. 3, c) sieht man nun, daß $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), R^{(I)}) = 0$ ist, und natürlich sind diese beiden Bedingungen auch hinreichend, d. h. man hat den

ZUSATZ. *Ist A ein freier Modul von unendlichem Rang, so ist* Ext^1_R (C, A) *genau dann κ-voll, wenn $T(C)$ endlich erzeugt ist und* $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A) = 0$.

3. Über die Existenz von genügend vielen Komplementen. Dieses Problem hängt eng mit der Frage des letzten Abschnittes zusammen, wann $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ κ-voll ist. Auch wenn ein Untermodul U von M direkter Summand ist, braucht er ja keineswegs genügend viele Komplemente in M zu haben — wie Punkt (b) des folgenden Lemmas zeigt:

LEMMA 3. 1. *Sei U direkter Summand in M und $C \cong M/U$. Dann gilt:*

(a) *Genau dann hat U genügend viele Komplemente in M, wenn für jedes $A \subset U$ gilt, daß das Bild des verbindenden Homomorphismus ϑ_A:* $\mathrm{Hom}_R(C, U/A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *nur aus κ-Elementen besteht.*

(b) *Ist U teilbar, so ist* (a) *weiter äquivalent damit, daß* $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ *κ-voll ist für alle $A \subset U$.*

(c) *Ist U koatomar, so ist* (a) *weiter äquivalent damit, daß* $T(\mathrm{Ext}^1_R(C, U)) \subset \mathrm{Ext}^1_R(C, U)^\kappa$ *gilt.*

BEWEIS. Bei (a), das sogar über beliebigen Ringen gilt, sei $\pi: M \longrightarrow C$ ein zerfallender Epimorphismus mit $\mathrm{Ke}\,\pi = U$. Erfüllt nun U die Komplementbedingung und ist $[E] \in \mathrm{Bi}\,\vartheta_A = \mathrm{Ke}\,(\mathrm{Ext}^1_R(C, A) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Ext}^1_R(C, U))$, so erhält man

$$\begin{tikzcd} E = 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, phantom, "\iota\cap"] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, phantom, "\subset"] & M \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

und zu $\mathrm{Bi}\,\varepsilon + U = M$ gibt es nach Voraussetzung ein Komplement V von $\mathrm{Bi}\,\varepsilon \cap U$ in $\mathrm{Bi}\,\varepsilon$, so daß $\varepsilon^{-1}(V)$ ein Komplement von $\mathrm{Bi}\,\alpha$ in B ist, d. h. E κ-exakt. — Erfüllen umgekehrt alle ϑ_A die angegebene Bedingung, so folgt aus $X + U = M$, daß $[0 \longrightarrow X \cap U \subset X \xrightarrow{\pi|X} C \longrightarrow 0]$ ein Element von $\mathrm{Bi}\,\vartheta_{X \cap U}$ ist, also $X \cap U$ ein Komplement in X hat wie verlangt.

(b) Ist U teilbar, so sind alle ϑ_A surjektiv.

(c) Erfüllt U die Bedingung aus (a), so gilt $T(\mathrm{Ext}^1_R(C, A)) \subset \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa$ für alle $A \subset U$ (dabei braucht U nicht koatomar zu sein): Ist nämlich $x \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ mit $xr=0$, $r \neq 0$, so hat man die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \cap \\ Ar & \overset{\iota}{\subset} & U \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_R(C, A) & \xrightarrow{r} & \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1_R(C, Ar) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathrm{Ext}^1_R(C, U), \end{array}$$

also $f_*(x) \in \mathrm{Ke}\, \iota_* \subset \mathrm{Ext}^1_R(C, Ar)^\kappa$, und weil f ein Epimorphismus mit beschränktem Kern ist, reflektiert f_* κ-Elemente, so daß $x \in \mathrm{Ext}^1_R(C, A)^\kappa$ folgt. — Sei nun umgekehrt $T(\mathrm{Ext}^1_R(C, U)) \subset \mathrm{Ext}^1_R(C, U)^\kappa$ und U koatomar (diese Situation wurde in Satz 1.4 samt Folgerung explizit beschrieben). Dann gilt diese Formel auch für alle $A \subset U$, so daß wir nach (a) fertig sind, wenn wir gezeigt haben, daß jedes $[E] \in \mathrm{Bi}\, \vartheta_A$ ein Torsionselement ist. Das ist aber klar: Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} E = 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \subset & U & \longrightarrow & U/A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

repräsentiert die untere Zeile ein Torsionselement (also auch E), denn es gibt einen Zwischenmodul $A \subset X \subset U$, so daß A direkter Summand in X ist und X groß in U, also U/X beschränkt ist.

Selbst wenn U nicht mehr direkter Summand in M ist, kann man aus der Existenz von genügend vielen Komplementen recht einschneidende Bedingungen für U bzw. M/U ableiten:

FOLGERUNG. *Besitzt $U \subset M$ genügend viele schwache Komplemente in M, so ist entweder U schwach-komplementiert, oder für $C = M/U$ gilt, daß $T(C)$ endlich erzeugt und $C/T(C)$ $\aleph_1$-frei ist.*

BEWEIS. Sei U nicht schwach-komplementiert. Dann gibt es einen Untermodul U' von U, der nicht radikal-komplementiert ist, und man kann sogar annehmen, daß U' direkte Summe von Zyklischen ist, aber nicht koatomar. Von U' gibt es einen Epimorphismus nach $A = \coprod_{i=1}^{\infty} R/(p^i)$, also auch nach $(K/R)^{(N)}$, der sich zu einem Epimorphismus $\pi: U \longrightarrow (K/R)^{(N)}$ hochheben läßt. Nun hat $U/\mathrm{Ke}\,\pi$ genügend viele Komplemente in $M/\mathrm{Ke}\,\pi$, so daß nach (b) insbesondere $\mathrm{Ext}^1_R(C, A_0)$ κ-voll sein muß, was nach der Folgerung zu (2.3) bedeutet, daß $T(C)$ endlich erzeugt ist und $\mathrm{Ext}^1_R(C/T(C), A_0) = 0$. Daß dann $C/T(C)$ $\aleph_1$-frei ist, wird z. B. in ([1] Lemma 3) oder ([5]

Theorem 8. 4) bewiesen, aber wir wollen einen davon unabhängigen Beweis geben: Ist $X \subset C/T(C)$ von endlichem Rang (es genügt endlicher p-Rang), so wähle man einen Basis-Untermodul S von X, und in der exakten Folge $\mathrm{Hom}_R(S, A_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(X/S, A_0) \longrightarrow 0$ ist das erste Glied torsionsvoll, das zweite torsionsfrei; weil aber A_0 nicht kotorsion ist, muß in $X/S \cong K^{(I)}$ die Menge I leer sein, d. h. $S=X$ frei wie verlangt.

Unser Problem —welche Untermoduln von M genügend viele Komplemente in M haben— ist also für den Fall, daß M torsionsvoll ist, vollständig gelöst: Genau dann hat U genügend viele Komplemente in M, wenn entweder $D(U)$ artinsch und $U/D(U)$ beschränkt ist, oder M/U endlich erzeugt.

Bei beliebigem M können wir für die dichten Untermoduln (d. h. M/U teilbar) die Lösung angeben, und das ist das Hauptergebnis dieses Abschnittes:

SATZ 3. 2. *Sei $U \subsetneqq M$ und M/U teilbar. Dann sind äquivalent:*

(i) *U hat genügend viele Komplemente in M.*

(ii) *$U/D(U)$ und $M/D(M)$ sind koatomar, und $D(U)$ ist von der Form $K^b \times (K/R)^c$; falls R unvollständig ist, gilt zusätzlich: entweder ist $b=0$, oder $b=1$ und $D(M)/D(U)$ torsionsvoll.*

BEWEIS. Wir führen ihn in drei Schritten, wobei der zweite —nämlich der Spezialfall, daß U reduziert ist— die meiste Mühe macht. *1. Schritt* U ist zusätzlich teilbar. (i$\rightarrow$ii) Nach der Folgerung ist U schwach-komplementiert, d. h. $U \cong K^b \times (K/R)^c$. Falls R vollständig oder $b=0$ ist, sind bereits alle Bedingungen in (ii) erfüllt; falls aber R unvollständig und $b \neq 0$ ist, folgt für $C=M/U$ nach (3. 1, b), daß $\mathrm{Ext}^1_R(C, R)$ κ-voll, nach (2. 1, d) also C torsionsvoll ist. Und weil $\mathrm{Ext}^1_R(C, R^2)$ nach (2. 4) nicht κ-voll ist, muß $b=1$ sein wie behauptet. (ii$\rightarrow$i) Nach Voraussetzung ist U von der Form $K^b \times (K/R)^c$. Falls R vollständig oder $b=0$ ist, hat U sogar in jeder Erweiterung genügend viele Komplemente, und wir sind fertig; falls aber R unvollständig und $b \neq 0$ ist, muß nach Voraussetzung $b=1$ und $C=M/U$ torsionsvoll sein, und damit gilt für jedes $A \subset U$, daß $p\text{-Rang}(A/T(A)) \leq 1$, also $\mathrm{Ext}^1_R(C, A/T(A))$ nach (2. 1, d) κ-voll ist, also auch $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ (denn der Kern von $\nu: A \longrightarrow A/T(A)$ ist artinsch, so daß ν_* κ-Elemente reflektiert). Wieder nach (3. 1, b) hat deshalb U genügend viele Komplemente in M.

2. Schritt U ist zusätzlich reduziert. (i$\rightarrow$ii) Es genügt zu zeigen, daß U koatomar ist, denn aus $D(M)+U=M$ folgt dann sofort, daß auch $M/D(M)$ koatomar ist. Nun hat auch $U/D(M) \cap U$ genügend viele Komplemente in $M/D(M) \cap U$, ebenso $D(M) \cap U$ in $D(M)$, und könnten wir zeigen, daß $U/D(M) \cap U$ und $D(M) \cap U$ koatomar sind, so wäre es auch U. Bleiben die folgenden Spezialfälle zu betrachten: *1. Fall* U ist zusätzlich direkter Summand in M. Dann ist jedes Komplement von U in M bereits ein direktes

Komplement (nämlich gleich $D(M)$), also nach Voraussetzung M/U projektiv bezüglich U, also K oder K/R projektiv bezüglich U, so daß es keinen Epimorphismus von U nach K/R geben kann, d. h. U koatomar ist. *2. Fall* M ist zusätzlich teilbar. Aus der Folgerung weiß man bereits, daß U schwachkomplementiert, also $T(U)$ beschränkt und $U/T(U)$ von endlichem Rang ist. Angenommen, $U/T(U)$ ist nicht endlich erzeugt, so gibt es ein $U_1 \subset U$ derart, daß U/U_1 torsionsfrei, direkt unzerlegbar und vom Rang ≥ 2 ist (insbesondere muß R unvollständig sein). Wählt man $U_1 \subset U_2 \subset U$ so, daß U/U_2 torsionsfrei vom Rang 2 ist, so kann $X = U/U_2$, das ja genügend viele Komplemente in M/U_2 hat, nach dem 1. Schritt nicht isomorph zu K^2 sein, ist also direkt unzerlegbar. Wir zeigen in den beiden nachfolgenden Hilfssätzen (3. 3) und (3. 4), daß X auch in seiner injektiven Hülle $\hat{X}$ genügend viele Komplemente hat, und daß es, wegen p-Rang$(X)=1$ und Rang$(X)=2$ einen Automorphismus $\beta: \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ gibt mit $\beta(X)+X=\hat{X}$. Wählt man nun ein Komplement W von X in $\hat{X}$ mit $W \subset \beta(X)$, so folgt $W=0$ (weil W teilbar und $\beta(X)$ reduziert ist), also $X=\hat{X}$, was nicht sein kann. (ii→i) Weil $M/D(M)$ koatomar ist, hat sogar jeder koatomare Untermodul A genügend viele Komplemente in M, denn aus $X+A=M$ folgt $D(M) \subset X$, so daß es ein Komplement $X'/D(M)$ von $(D(M)+A)/D(M)$ in $M/D(M)$ gibt, mit $D(M) \subset X' \subset X$, und dann ist X' ein Komplement von A in M. (Die Existenz eines X' folgt auch aus ([9] Folgerung 2. 3), weil M koseparabel ist.)

3. Schritt Sei nun U beliebig. (i→ii) Weil auch $U/D(U)$ genügend viele Komplemente in $M/D(U)$ hat, ist nach dem letzten Schritt $U/D(U)$ koatomar, ebenso $M/D(M)$. Weil nun $D(M) \cap U/D(U)$ klein in $D(M)/D(U)$ ist, hat auch $D(U)$ genügend viele Komplemente in $D(M)$, und klar ist $D(U) \subsetneqq D(M)$. Nach dem ersten Schritt ist daher $D(U)$ von der Form $K^b \times (K/R)^c$, und auch die Zusatzbedingungen sind erfüllt, falls R unvollständig ist. (ii→i) Sei $X+U=M$. Weil $M/X+D(U)$ als Faktor von $U/D(U)$ reduziert ist, folgt $[X \cap D(M)]+D(U)=D(M)$, und weil $D(U)$ nach dem 1. Schritt genügend viele Komplemente in $D(M)$ hat, gibt es ein $X' \subset X$, so daß X' ein Komplement von $D(U)$ in $D(M)$ ist. Wir behaupten, daß X' bereits ein Komplement von U in M ist, und dazu genügt die Bemerkung, daß $D(M)/D(U)$ ein Komplement von $U/D(U)$ in $M/D(U)$ ist.

Die beiden nachzutragenden Hilfssätze sind:

HILFSSATZ 3. 3. *Besitze U genügend viele Komplemente in M und sei M/U teilbar. Dann hat U auch in jedem direkten Zwischenmodul M' genügend viele Komplemente.*

BEWEIS. Sei $U \subset M' \subset M$ mit $M' \oplus M'' = M$, außerdem $M'' \neq 0$. Aus $X+U=M'$, also $(X \oplus M'')+U=M$, folgt wegen der genügend vielen Komplemente $D(X\oplus M'')+U=M$, also $D(X)+U=M'$. Nach der Folgerung zu (3. 1) ist U schwach-komplementiert, so daß $D(X)\cap U$ ein Komplement in $D(X)$ hat, das dann auch ein Komplement von U in M' ist. (Auf die Bediggung, daß M/U teilbar ist, kann man nicht verzichten: Ist R unvollständig, also $R\subsetneqq R^*$, und wählt man eine zerfallende Erweiterung $R^*\subset M$ mit $M/R^*\cong R/(p)$, so hat zwar R genügend viele Komplemente in M, aber kein Komplement in R^*.)

HILFSSATZ 3. 4. *Sei X torsionsfrei von endlichem Rang, sowie p-Rang $(X)\leq 1/2\cdot$Rang(X). Dann gibt es einen Automorphismus β: $\hat{X}\longrightarrow\hat{X}$ mit $\beta(X)+X=\hat{X}$.*

BEWEIS. Für p-Rang$(X)=0$, d. h. $X=\hat{X}$ ist nichts zu zeigen. Sei also p-Rang$(X)=k\geq 1$. Zu einem Basis-Untermodul S von X, mit $S=\bigoplus_{i=1}^{k} v_i R$, wähle man einen freien Zwischenmodul $S\subset F\subset X$ derart, daß S direkter Summand in F und F groß in X ist, $\left(\bigoplus_{i=1}^{l} u_i R\right)\oplus S=F$ mit $u_i\neq 0$. Nach Voraussetzung ist $l\geq k$, so daß man einen Homomorphismus α: $F\longrightarrow F$ definieren kann durch $\alpha(u_i)=u_i-v_i$ für alle $1\leq i\leq k$, während die restlichen u_i und alle v_i auf sich selbst abgebildet werden sollen. Dann ist α injektiv und läßt sich zu genau einem Automorphismus β: $\hat{X}\longrightarrow\hat{X}$ fortsetzen, und wir behaupten, daß β das Gewünschte leistet:

Ist $n\geq 1$, so gibt es zu jedem $1\leq j\leq l$ wegen $S+Xp^n=X$ eine Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{k} v_i r_{ij}\right)+x_j p^n = u_j \qquad (r_{ij}\in R,\ x_j\in X),$$

aus der durch Anwendung von β und Subtraktion $x_j p^n-\beta(x_j)\,p^n=u_j-\alpha(u_j)$ entsteht. Für alle $1\leq i\leq k$ ist also $v_i/p^n=x_i-\beta(x_i)\in\beta(X)+X$, und damit auch für alle $1\leq j\leq l$ nach der vorhergehenden Gleichung $u_j/p^n\in\beta(X)+X$. (Die Rangvoraussetzungen sind sogar notwendig, d. h. ist X torsionsfrei von endlichem Rang und $Y+X=\hat{X}$ mit $Y\cong X$, so folgt p-Rang$(X)\leq 1/2\cdot$Rang(X).)

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. — Der folgende Spezialfall zeigt, wie stark die Bedingungen in (ii) sein können:

FOLGERUNG. *Ist M/U_0 teilbar und direkt unzerlegbar, und hat U_0 genügend viele Komplemente in M, so hat jeder Untermodul von M genügend viele Komplemente in M (d. h. M ist supplementiert).*

Literatur

[1] J. ERDÖS: On the splitting problem of mixed abelian groups: Publ. Math. Debr. 5 (1957/58) 364–377.

[2] L. FUCHS: Infinite abelian groups I: Academic Press, New York, London (1970).

[3] Ph. GRIFFITH: Separability of torsion free groups and a problem of J. H. C. Whitehead: Illinois J. Math. 12 (1968) 654–659.

[4] I. KAPLANSKY: Infinite abelian groups: Univ. Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (1969).

[5] R. J. NUNKE: Modules of extensions over Dedekind rings: Illinois J. Math. 3 (1959) 222–241.

[6] R. J. NUNKE: Uniquely elongating modules: Symposia Math. 13 (1974) 315–330.

[7] H. ZÖSCHINGER: Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben: Math. Scand. 35 (1974) 267–287.

[8] H. ZÖSCHINGER: Über Torsions- und κ-Elemente von $\mathrm{Ext}(C, A)$: J. Algebra 50 (1978) 299–336.

[9] H. ZÖSCHINGER: Quasi-separable und koseparable Moduln über diskreten Bewertungsringen: Math. Scand. 44 (1979) 17–36.

Mathematisches Institut der
Universität München
8 München 2
Theresienstr. 39
Bundesrepublik Deutschland